

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

OPTIMIZACIÓN DEL CAPITAL ECONÓMICO MEDIANTE LA DIVERSIFICACIÓN DE UNA CARTERA DE CRÉDITO: CASO PRÁCTICO PARA UNA INSTITUCIÓN FINANCIERA

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MÁSTER (MSc)
EN RIESGO FINANCIERO**

MALDONADO GUERRERO DIEGO ROLANDO

drmaldonadog@yahoo.es

PAZMIÑO BARRENO RUTH MARIELA

rmarielitap@yahoo.ec

DIRECTOR: MSc. ENRIQUE NAVARRETE

enrique.navarrete.p@gmail.com

Quito, Julio del 2009

DECLARACIÓN

Nosotros, Diego Rolando Maldonado Guerrero y Ruth Mariela Pazmiño Barreno declaramos que el trabajo aquí descrito es de nuestra autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y, que he hemos consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Diego R. Maldonado Guerrero

Ruth M. Pazmiño Barreno

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado Diego Rolando Maldonado Guerrero y Ruth Mariela Pazmiño Barreno, bajo mi supervisión.

MSc. Enrique Navarrete
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

A cada una de las personas que nos brindaron su granito de arena para poder culminar con el presente trabajo, a nuestros seres queridos quienes nos supieron comprender y brindar su apoyo y en especial a nuestro Creador.

DEDICATORIA

Todo nuestro esfuerzo a nuestro ángel, Gabriel.

Diego y Mariela

RESUMEN

Los modelos de riesgo de crédito CreditMetrics™ y CreditRisk⁺, Credit Portfolio View han constituido ser excelentes herramientas para determinar la distribución de pérdida en mercados desarrollados; así también el modelo CyRCE se ha constituido en una de las pocas herramientas capaces de medir el nivel de concentración que se presenta en una cartera de crédito donde la información es escasa o poco confiable. Estos modelos, logran que una institución financiera pueda constituir de manera coherente las provisiones y el capital económico para cubrir un cierto nivel de riesgo asumido por la colocación de créditos. El desarrollo teórico de los modelos de riesgo de crédito permite generalizarlos a partir de los modelos de mixtura y de las funciones cópulas; y logra determinar que la concentración de una cartera incide directamente en el riesgo de crédito. Estos conceptos facilitan la comprensión de los modelos de créditos y transparenta la calibración e implementación de los mismos en cualquier cartera.

Para la implementación de estos modelos en una cartera crediticia de una institución financiera ecuatoriana, primero se tiene que segmentar a la cartera crediticia en grupos homogéneos donde los créditos tienen similares calidades crediticias. Posteriormente, para cada grupo homogéneo se construye información histórica de las tasas de incumplimiento y el nivel de exposición, siendo estos la información necesaria para calibrar los modelos de riesgo crédito por medio de los modelos de mixtura.

Una vez identificado los parámetros de cada modelo se determina la distribución de pérdida del portafolio a través de dos métodos, el primero por medio de la simulación de MonteCarlo para lo cual se tiene que determinar el modelo por umbrales que sea equivalente al modelo de mixtura previamente obtenido; el segundo método se lo obtiene por medio de una expresión cerrada la cual se fundamenta el modelo CyRCE. Para validar si los modelos de riesgo de crédito logran capturar la dinámica de las pérdidas del portafolio analizado, se tiene que realizar pruebas de consistencia (backtesting) donde se evidenciará cual es el modelo que mejor se ajusta a la realidad de la institución financiera.

Una vez calibrado los modelos de riesgo de crédito se construye la frontera eficiente y se analiza si los montos de los créditos están acorde con el nivel de riesgo asociado.

PRESENTACIÓN

En el negocio bancario, el principal activo productivo es la cartera de créditos, por consiguiente es necesario una adecuada administración de la misma que conlleve entre otros, a obtener una valoración acertada de la tasa de interés del crédito, en la cual debería estar implícito factores como: la rentabilidad, los riesgos, los costos y los gastos, etc. para la institución financiera; siendo el riesgo uno de los factores fundamentales por determinar.

En una cartera de créditos, el principal riesgo que se presenta es cuando el deudor no cancela el saldo del crédito ya que puede convertirse en pérdida y por tanto, la institución financiera debe tener un resguardo para cubrirla. Tal resguardo está constituido por las provisiones por incobrabilidad y por capital, mismos que se lograsen constituir adecuadamente si la institución financiera conociere a priori el comportamiento de las pérdidas de la cartera de créditos; pero, este objetivo es difícil conseguir en la realidad ecuatoriana, debido a que la mayoría de modelos de pérdida fueron elaborados en países desarrollados donde existe una buena cantidad de información, lo cual, no acontece en países como el nuestro en donde la cultura de almacenamiento de información es escasa. En este sentido la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador, preocupada por velar por la estabilidad del sistema financiero, ha diseñado una normativa encaminada a la administración del riesgo de crédito donde se exige a las instituciones financieras que dispongan de un proceso de crédito orientado a identificar, medir, mitigar y monitorear el riesgo de crédito tal como se menciona en Basilea II.

La piedra angular del proceso de crédito es el desarrollo de modelos de portafolio de crédito capaces de realizar una adecuada medición del riesgo, los cuales permitirán una acertada definición de políticas orientadas a obtener un nivel de rentabilidad en función del riesgo asumido por la institución.

Adicionalmente, la mayor preocupación que tienen los administradores de riesgo de crédito es la ocurrencia desproporcional de incumplimientos conjuntos que pueden darse en un portafolio de préstamos ya que tienen un impacto directo en el nivel de pérdidas y por ende en el capital económico de la institución financiera. Tal ocurrencia normalmente se le conoce como riesgo de crédito extremo, por lo que un adecuado modelo de portafolio de crédito debe ser capaz de cuantificar este riesgo para así medir la pérdida que puede tener el portafolio en un horizonte de tiempo dado.

Ante esta situación, es importante poner en conocimiento de las instituciones financieras del país que los modelos de portafolio de crédito, internacionalmente conocidos como

CreditMetricsTM, CreditRisk⁺, KMV, CreditPortfolioView y CyRCE son adaptables a sus instituciones, permitiendo determinar de manera consistente y confiable, el comportamiento de las pérdidas de su cartera de crédito con el propósito de disponer indicadores de riesgo para una acertada toma de decisiones.

1. Formulación y Sistematización del Problema

La formulación del problema se plantea mediante la siguiente pregunta de investigación, con la cual se espera responder el problema propuesto

- ¿Existe un modelo de referencia para portafolio de crédito en el Ecuador?

Para la sistematización se proponen varias subpreguntas sobre temas específicos como las siguientes:

- ¿Cuál es la información que debe disponer una institución financiera en el país para desarrollar un modelo de portafolio de crédito?
- ¿Cómo se pueden acoplar los modelos de portafolio de crédito internacionales en instituciones financieras del país?
- ¿Cuál es el impacto en las pérdidas por causa de la concentración de riesgo de crédito?
- ¿Qué efecto se produce en las pérdidas crediticias al suponer independencia entre incumplimientos?
- ¿Cómo se puede determinar límites en los créditos?
- ¿Cómo se puede conocer si el nivel de capital y provisiones permiten cubrir las pérdidas a un nivel de confianza determinado?
- ¿Cómo se puede construir la frontera eficiente para un portafolio de crédito?
- ¿Qué información brinda la frontera eficiente de un portafolio de crédito para tomar decisiones basadas en riesgo y rentabilidad?
- ¿Cómo se calibra los modelos internacionales de portafolio de crédito para medir adecuadamente el riesgo extremo?

2. Objetivos de la Investigación

El presente trabajo plantea como objetivo general el siguiente:

- Cuantificar adecuadamente las pérdidas de un portafolio crediticio de una institución financiera.

Como objetivos específicos tenemos:

- Proponer algunos modelos de portafolio de crédito.
- Mejorar la administración del riesgo de crédito de institución financiera.
- Optimizar el capital económico de una institución financiera.
- Medir el nivel de concentración crediticia aceptable en una cartera de crédito.
- Asignar límites adecuados a los créditos individuales.
- Diseñar políticas para diversificar una cartera de crédito.
- Construir una frontera eficiente para un portafolio de crédito.
- Calibrar los modelos de portafolio de crédito en una cartera de una institución financiera del país.
- Validar la consistencia de los modelos de portafolio de crédito en una cartera de una institución financiera del país.

3. Hipótesis de Trabajo

- Los modelos de riesgo de crédito internacionales a pesar de ser implementados en mercados desarrollados se los pueden acoplar en instituciones financieras donde la calidad de información crediticia es escasa.
- Se esquematiza de manera abstracta a los modelos de riesgo de crédito internacionales.
- La aplicación del modelo de riesgo de crédito en el Ecuador permite construir mejores indicadores de riesgo para monitorear el comportamiento del portafolio de crédito.
- La asignación adecuada de montos de créditos se la obtiene a partir de la medición del nivel de riesgo que la institución asume en cada crédito.
- La frontera eficiente de un portafolio de crédito le permite a la institución financiera medir de manera adecuada el nivel de riesgo asumido según una rentabilidad esperada objetivo.

4. Metodología

El presente trabajo está compuesto de 7 capítulos con sus respectivas referencias bibliográficas y anexos, como se presenta a continuación:

En el capítulo 1 se efectúa una introducción al riesgo de crédito en donde se comenta sobre las metodologías tradicionales y modernas para medir tal riesgo.

En el capítulo 2 se aborda toda la teoría que existe detrás de los modelos de riesgo de crédito que tienen un enfoque moderno, estos modelos son KMV, CreditMetricsTM y

CreditRisk⁺ cuyo objetivo es estimar la distribución de pérdidas de un portafolio de créditos.

En el capítulo 3 se aborda el modelo CyRCE por separado de los demás modelos, ya que es un modelo que a más de analizar las pérdidas por riesgo de crédito, enfoca el riesgo de concentración de créditos, los límites de créditos, la suficiencia de capita y la suficiencia de provisiones por riesgo de crédito.

En el capítulo 4 se abordan los modelos de dependencia para riesgo de crédito donde se trata de cuantificar la dependencia entre créditos incumplidos ya que una de las principales características de una cartera de crédito son las pérdidas extremas, también conocido como riesgo extremos donde se presenta con mayor frecuencia el incumplimiento conjunto de los créditos, situación que no permite capturar las distribuciones normales multivariadas por lo que es fundamental utilizar las funciones cópulas.

En el capítulo 5 se presenta la metodología para determinar la frontera eficiente de un portafolio de crédito donde se hallan portafolios con mínimo riesgo y máxima rentabilidad para lo cual se utiliza como medida de riesgo al Valor en Riesgo Condicional.

En el capítulo 6 se presenta la aplicación de los modelos para portafolios crediticios en una cartera automotriz de una institución financiera, donde es posible calibrar los modelos CreditMetricsTM, CreditRisk⁺, Credit Potfolio View, CyRCE y la cópula t student a partir de la información disponible de tasas de incumplimiento, dando lugar a que la institución pueda constituir de manera adecuada el capital económico y la provisión; además, se desarrolla indicadores adelantados con la calidad crediticia a partir de la medición de la concentración de la cartera crediticia, así también se logra disponer de una herramienta que relaciona el riesgo y la rentabilidad de la cartera de créditos dando lugar a que la institución pueda asignar los recursos consistentemente de tal forma que obtenga la mayor rentabilidad.

En el capítulo 7 se presentan las principales conclusiones y recomendaciones desde el punto de vista teórico práctico de tal manera que se puede evidenciar la fortalezas y debilidades de la teoría para portafolios crediticios, así como también el impacto de éstos en la aplicación en la cartera de créditos automotrices.

Índice general

1. Introducción al Riesgo de Crédito	14
1.1. Generalidades	14
1.2. Metodologías de medición del riesgo de crédito	19
1.2.1. Modelos tradicionales	21
1.2.2. Modelos con un enfoque moderno	23
I Fundamento Teórico de los modelos de crédito	32
2. Modelos con un enfoque moderno	33
2.1. Introducción	33
2.2. Modelo KMV ¹	35
2.2.1. Generalidades	35
2.2.2. Probabilidad de incumplimiento de una empresa	38
2.2.3. Distribución de incumplimiento conjunta	42
2.2.4. Distribución de pérdida para un portafolio	45
2.3. Modelo de CreditMetrics TM	46
2.3.1. Generalidades	46
2.3.2. Sistemas de calificación y probabilidades de transición	47
2.3.3. Estimación del valor futuro un bono simple	49
2.3.4. Estimación del valor futuro de un portafolio de bonos	51
2.4. Modelo de CreditRisk ⁺	55

¹KMV es la marca comercial de la corporación KMV. Stephen Keallhofer, John McQuown y Oldrich Vasicek fundaron la Corporación KMV en 1989

2.4.1.	Generalidades	55
2.4.2.	Distribución del número de incumplimientos con probabilidad fija	57
2.4.3.	Distribución de las pérdidas de la cartera con probabilidad fija	58
2.4.4.	Distribución de las pérdidas de la cartera con probabilidad variable	63
2.5.	Resumen de los modelos	65
3.	Modelo CyRCE	67
3.1.	Introducción	67
3.1.1.	Visión general del Modelo CyRCE	68
3.1.2.	La concentración en el riesgo de crédito	71
3.2.	Modelo CyRCE Básico	73
3.2.1.	Modelo CyRCE para una cartera con créditos de igual tamaño	75
3.2.2.	Modelo CyRCE para una cartera con créditos de diferente tamaño	77
3.3.	Modelo CyRCE Intermedio	80
3.3.1.	Índice de concentración de riesgo ajustado por correlación	81
3.4.	Modelo CyRCE Avanzado	83
3.4.1.	Análisis de segmentos individuales	85
3.4.2.	Suficiencia de Capital para una Cartera Segmentada	87
3.4.3.	Modelo CyRCE Gamma	89
3.4.4.	Factores principales del modelo	90
3.5.	Propiedades del índice de concentración en una cartera de crédito	91
3.6.	Estimación de parámetros	95
3.6.1.	Estimación de las probabilidades de incumplimiento	96
3.6.2.	Estimación de las correlaciones	98
4.	Modelos de dependencia en riesgo de crédito	99
4.1.	Introducción	99
4.2.	Cópulas	101
4.2.1.	Introducción	101
4.2.2.	Medidas y conceptos de dependencia	108
4.2.3.	Cópulas y sus propiedades	117

4.2.4. Familias de Cópulas	130
4.2.5. Ajuste de Cópulas	144
4.2.6. Selección y evaluación de una cópula	154
4.3. Modelos estáticos para riesgo de crédito	168
4.3.1. Introducción	168
4.3.2. Modelo por umbrales	172
4.3.3. Modelo de mixtura	182
4.3.4. Relación entre el Modelo por umbrales y Mixtura	201
4.3.5. Calibración de modelos de riesgo de crédito	207
5. Optimización de un portafolio de crédito	212
5.1. Introducción	212
5.2. Medidas de riesgo de un portafolio de crédito	213
5.3. Modelo de Optimización	216
5.4. Aplicación del modelo de Optimización	218
II Aplicación	223
6. Implementación de modelos crediticios en una Institución Financiera Ecuatoriana	224
6.1. Introducción	224
6.2. Descripción del portafolio de crédito	225
6.3. Ajuste de la cartera a modelos mixtura	231
6.4. Ajuste de la cartera al modelo CyRCE	235
6.5. Prueba de desempeño de los modelos de crédito	236
6.6. Análisis de concentración	240
6.6.1. Escenario base	241
6.6.2. Escenario óptimo	244
6.7. Optimización del portafolio de créditos	248

7. Conclusiones y Recomendaciones	254
7.1. Conclusiones	254
7.2. Recomendaciones	257
A. Modelo Factorial	263
B. Funciones Generadoras de Probabilidad	264
C. Distribuciones elípticas y esféricas	265
D. Cópulas más comunes	267
E. Medidas Coherentes de Riesgo	268
E.1. Valor en Riesgo	269
E.2. Valor en Riesgo Condicional	270
F. Índice de Herfindahl-Hirschman	271
G. Información del incumplimiento empírico de un portafolio homogéneo	273
H. Composición de un portafolio heterogéneo	275
I. Métodos utilizados para calibrar un modelo de crédito	278
I.1. Identificación de perfiles crediticios	278
I.2. Metodología de cosechas	279

Índice de cuadros

2.1. Probabilidad de la migración de una calificación de crédito a otra dentro de un año (Matriz de transición)	48
2.2. Curva cero cupón para cada categoría de crédito en un año	50
2.3. Precios futuros en un año para un bono con calificación BBB	50
2.4. Distribución del valor de un bono de calificación BBB en un año	51
2.5. Relación entre la probabilidad de transición y los umbrales de calidad crediticia para dos deudores con calificación BB y A	53
2.6. Monto de 25 créditos calificados de AAA hasta C	60
2.7. Número esperado de incumplimientos en cada banda del portafolio	63
2.8. Distribución de pérdida de un portafolio de 25 créditos	64
4.1. Coeficientes de correlaciones para varias transformaciones en 1000 realizaciones de dos variables aleatorias Weibull con distribución t multivariada .	113
4.2. Medidas de dependencia para las cópulas normal y t de student	134
4.3. Coeficiente de Kendall y coeficientes de dependencia en las colas para algunas cópulas Arquimidianas	141
4.4. Criterios de información para familias de cópulas aplicando métodos de estimación de máxima verosimilitud.	160
4.5. Probabilidad de que la función de distribución teórica sea igual a la empírica basándose en la prueba de Kolmogorov Smirnov.	162
4.6. Distancia de Anderson Darling y Romano para medir el buen ajuste de la cópula teórica con la empírica.	163
4.7. Estimación de la cópula aplicando métodos de máxima verosimilitud. . . .	163

4.8. Criterios de información para familias de cópulas aplicando métodos de estimación de máxima verosimilitud.	166
4.9. Probabilidad de que la función de distribución teórica sea igual a la empírica basandose en la prueba de Kolmogorov Smirnov.	166
4.10. Distancia de Anderson Darling y Romano para medir el buen ajuste de la cópula teórica con la empírica.	167
4.11. Distancia de Anderson Darling y Romano para medir el buen ajuste de la cópula teórica con la empírica.	168
4.12. Valores de la probabilidad de incumplimiento (π) y correlación (ρ) para grupos homogéneos.	178
4.13. Percentiles al 95 % y 99 % de la distribución de incumplimientos para diferentes portafolios de crédito.	180
4.14. Índices de la distribución de pérdida de con cópula t con una gaussiana para portafolios homogéneos de tamaño 1000.	181
4.15. Valor de parámetros de varios modelos mixtos de Bernoulli con valor de probabilidad de incumplimiento del 0.10 % y correlación entre créditos del 3.88 %.	189
4.16. Valor en Riesgo del número de incumplimientos de un portafolio de 2000 créditos con probabilidad de incumplimiento del 0.10 % y correlación entre créditos del 3.88 % generados con modelos de mixtura binomial Probit, Logit, Beta y un modelo binomial independiente.	189
4.17. Valor de los parámetros de varios modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli con valor de probabilidad de incumplimiento del grupo A del 0.10 % y del Grupo B del 4.42 %.	194
4.18. Estimación del porcentaje de la probabilidad y la correlación entre incumplimiento de cada calificación crediticia a través de modelos de mixtura Probit y Logit.	195
4.19. Valor en riesgo de varios modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A es del 0.10 % y del Grupo B del 4.42 %.	195

4.20. Valor en riesgo de varios modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A es del 0.10% y del Grupo B del 4.42%.	201
4.21. Valor en riesgo de varios modelos heterogéneos mixtos t de student donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A es del 0.10% y del Grupo B del 4.42%.	207
5.1. Valor de los parámetros de un modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli t de student, donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A y B es el 0.10% y 4.42% respectivamente.	219
5.2. Índices de riesgo para portafolios crediticos con máximos niveles de rentabilidad y mínimo riesgo.	221
6.1. Tabla resumen de los tres grupos crediticios homogéneos de una cartera crediticia comercial automotriz que son creados a partir del método CHAID.	228
6.2. Estimación de los parámetros de cuatro modelos crediticios para un portafolio formado por tres grupos homogéneos.	232
6.3. Estimación de la probabilidad de incumplimiento de cada grupo crediticio utilizando modelos de mixturas y el método de momentos.	233
6.4. Estimación de las matrices de correlación entre incumplimiento utilizando los modelos de mixtura.	234
6.5. Estimación de las matrices de covarianza entre incumplimiento utilizando los modelos de mixtura.	235
6.6. Índices de desempeño de los diferentes modelos crediticios en una cartera automotriz.	237
6.7. Probabilidad de que las proporción de fallas teóricas sea igual a las empíricas con información desde Junio de 2006 hasta Diciembre del 2008.	238
6.8. Indicadores de riesgo para un subportafolio automotriz con diferentes tasas de interés objetivo.	251
G.1. Evolución histórica de los créditos otorgados y fallidos por calificación crediticia de una institución financiera ABC.	274

H.1. Portafolio heterogéneo de 100 créditos con calificaciones crediticias de A y B.	277
I.1. Análisis de los nodos terminales de un árbol de clasificación para identificar grupos homogéneos crediticios.	278
I.2. Análisis acumulado de los nodos terminales de un árbol de clasificación para identificar grupos homogéneos crediticios.	279

Índice de figuras

1.1. Esquematización de las provisiones y del capital económico a través de la distribución de pérdida de un portafolio de crédito	16
1.2. Comparación de la distribución de pérdida de dos portafolios homogéneos de 1000 créditos con probabilidad de incumplimiento del 1% y diferente estructura de dependencia	25
1.3. Comparación de las distribuciones de pérdidas de dos portafolios crediticios, cuya distribución conjunta es normal con una correlación de 70%, pero las marginales del primer portafolio siguen una distribución normal estándar y para el segundo es una distribución weibull.	30
2.1. Comparación de la distribución de los activos de una empresa con las obligaciones en el período T	36
2.2. Cambio en la calidad crediticia de un bono en un periodo de tiempo	47
2.3. Distribución normal estándar del retorno del activo de una empresa con calificación BB	52
2.4. Histograma de las pérdidas de los créditos a partir de la estructura de CreditRisk ⁺	61
4.1. Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una distribución t biva-riada con correlación del 70% y marginales con distribuciones gamma.	102
4.2. Gráficos Q-Q de las variables aleatorias normales X,Y y de la variable S=X+Y, y gráfico de dispersión de las variables normales X,Y que tienen correlación cero.	104

4.3. Simulación de 5000 realizaciones de dos variables aleatorias Weibull con coeficiente de correlación 0.7 y dos estructuras de dependencias diferentes.	106
4.4. Dependencia perfecta positiva para dos estructuras de dependencia entre dos variables aleatorias	109
4.5. Dependencia perfecta negativa para dos estructuras de dependencia entre dos variables aleatorias	110
4.6. Dispersiones y medidas de dependencia de dos estructuras multivariadas .	115
4.7. Simulación de 1000 datos de una cópula bivariada independiente.	122
4.8. 10000 datos simulados de los límites de Fréchet	123
4.9. 1000 datos simulados de una cópula normal bivariada con correlación $\rho = 0,7$.	124
4.10. 1000 datos simulados a partir de una cópula de Gumbel con parámetro 1 y 500 respectivamente.	125
4.11. Gráfico de las cópulas W, II y M.	130
4.12. Gráfica de contorno de las cópulas W, II y M.	130
4.13. Superficies y funciones de densidades asociadas a dos distribuciones elípticas bivariadas	134
4.14. Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula bivariada de Clayton con parámetro 0.5.	138
4.15. Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula de Frank con parámetro 3.	139
4.16. Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula bivariada de Gumbel con parámetro 1.5.	140
4.17. Simulación de 5000 realizaciones de dos variables aleatorias normal estándar con cuatro diferentes estructuras de dependencia.	142
4.18. Procedimiento de selección y ajuste de una Cópula multivariada	158
4.19. Gráficos de cuantiles de las distribuciones empíricas del vector aleatorio. . .	160
4.20. Gráficos de cuantiles del vector aleatorio que es generado por distribuciones normales de media -0.1 y desviación estándar 1.02.	161
4.21. Gráficos de cuantiles de las distribuciones empíricas de un vector aleatorio generado por una Meta Distribución.	164

4.22. Gráficos de cuantiles del vector aleatorio generado por dos distribuciones gamma y una normal.	165
4.23. Distribuciones del incumplimiento y de las pérdidas de portafolios homogéneos tipo C con diferentes grados de libertad.	182
4.24. Distribución de incumplimientos de un portafolio de 2000 créditos con probabilidad de incumplimiento del 0.10% y correlación entre créditos del 3.88% generada con modelos de mixtura Bernoulli de un factor.	190
4.25. Evolución de la probabilidad de incumplimiento de los créditos con calificación A y B desde 1980 hasta 2005.	193
4.26. Distribución de incumplimientos de un portafolio de 100 créditos generada con modelos de mixtura Bernoulli heterogéneos de un factor para créditos con calificaciones A y B cuyas probabilidades de incumplimiento son 0.10% y 4.42% respectivamente.	196
4.27. Distribución de pérdida de un portafolio heterogéneos y la distribución mixta Bernoulli.	200
4.28. Distribución de pérdida de un portafolio heterogéneos de 100 créditos generada a partir de modelos de mixtura t de student	206
5.1. Distribución de pérdida del portafolio de crédito original y optimizado. . .	219
5.2. Frontera Eficiente promedio de un portafolio formado por 100 créditos con diferentes calificaciones crediticias para un nivel de confianza del 99.9%. .	220
5.3. Tendencia del riesgo diferentes niveles de rentabilidad del portafolio de crédito	222
5.4. Composición del vector de posiciones del portafolio de crédito para diferentes niveles de rentabilidad y mínimo riesgo.	222
6.1. Evolución de la proporción de los créditos vendidos, que mejoran, que empeoran y se mantienen en su calidad crediticia para cada grupo crediticio del portafolio.	227
6.2. Evolución del incumplimiento para tres grupos homogéneos crediticios desde Junio del 2006 hasta Diciembre 2008.	229

6.3. Evolución histórica del Valor en Riesgo semestral de un portafolio de créditos automotrices con un nivel de confianza del 90 %, 95 % y 99 %	236
6.4. Comportamiento del volumen y número de créditos de los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo en una cartera automotriz desde Junio del 2006 a Diciembre del 2008.	240
6.5. Comparación del Valor en Riesgo al 99 % de confianza con el Capital Económico y Provisiones del portafolio total y de los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.	242
6.6. Comparación de la concentración de los segmentos crediticio de Alto, Medio y Bajo riesgo con la máxima adminisible determinada por el modelo CyRCE desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.	243
6.7. Identificación de los créditos que pertenecen a los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo que superan el cupo máximo adminisible por concentración crediticia.	244
6.8. Asignación óptima del capital económico y provisiones en cada segmento crediticio capaz de cubrir el Valor en Riesgo al 99 % de confianza desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.	245
6.9. Comparación de la concentración real en cada segmento de crédito con la máxima adminisible obtenida a partir del capital y provisión óptimo desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.	246
6.10. Identificación de los créditos que pertenecen a los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo que superan el cupo máximo adminisible obtenido a partir del capital provisión óptimo.	247
6.11. Comportamiento de los cupos de los créditos en los segmentos de Alto, Medio y Bajo riesgo a partir de la nueva asignación del capital y provisión desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.	248
6.12. Frontera eficiente de un portafolio formado por 98 créditos, otorgados en Diciembre del 2008.	249

6.13. Comportamiento del déficit esperado al 99% de confianza y de la pérdida esperada a partir de una tasa de interés objetivo para un portafolio crediticio.	249
6.14. Comparación de la distribución de pérdida de un portafolio crediticio con diferentes tasas de interés objetivo.	250
6.15. Reestructuración de la participación de los segmentos crediticios y de los montos de cada crédito en un subportafolio automotriz a partir de la frontera eficiente.	252

Capítulo 1

Introducción al Riesgo de Crédito

1.1. Generalidades

La principal actividad de un Banco¹ es la *intermediación financiera* la que permite transferir los recursos entre individuos que poseen un sobrante a individuos que necesitan dinero extra para consumirlo e invertirlo. Esta actividad económica conlleva ciertos aspectos que pueden ocasionar pérdidas al banco, por ejemplo puede darse el evento de que todos los depositantes reclamen sus ahorros al mismo tiempo y el banquero no disponga del suficiente dinero en sus cajas para cubrir la demanda de los depositantes, por otro lado puede ocurrir que algunos de los acreedores de los créditos no paguen y provocar pérdidas.

La intermediación financiera puede ocasionar que el banco aumente la posibilidad de enfrentar pérdidas e incumplir las deudas contraídas, lo que forzaría al banco a salir del negocio. Para mitigar las pérdidas es necesario que se desarrolle metodologías y/o políticas para gestionar el riesgo², éstas permiten a los administradores planear adecuadamente la forma de anticiparse a posibles resultados adversos. Específicamente la gestión de riesgo permite establecer esquemas eficientes de administración y control del riesgo³ y de esta

¹A pesar que nos referimos a los Bancos éste se generaliza también para Cooperativas, Mutualistas y Sociedades Financieras.

²La palabra riesgo proviene del latín *riscare*, que significa atreverse a transitar por un sendero peligroso y tiene un significado negativo, relacionado con peligro, daño, siniestro o pérdida

³Existen diferentes riesgos a los que están expuestas las instituciones financieras, siendo los principales: Riesgo de Mercado, Riesgo de Crédito, Riesgo Operativo y Riesgo de Liquidez.

manera asegurar la calidad de sus portafolios. El principal objetivo de la administración del riesgo es el de garantizar que el riesgo asumido por el banco sea cubierto por un cierto capital capaz de absorber las máximas pérdidas que puede incurrir en la institución financiera.

Dentro de los principales riesgos que presenta una institución financiera, el riesgo de crédito es el que mayor importancia tiene en términos de las pérdidas potenciales. Existen una gran cantidad de definiciones para el riesgo de crédito; sin embargo, según la normativa de la Superintendencia de Bancos y Seguros del Ecuador (SBS), el riesgo de crédito se puede definir de la siguiente manera:

Es la posibilidad de pérdida debido al incumplimiento del prestatario o la contraparte en operaciones directas, indirectas o de derivados que conlleva el no pago, el pago parcial o la falta de oportunidad en el pago de las obligaciones pactadas.

Por otro lado, se ha determinado que existen dos tipos de riesgos de crédito, el primero es el *riesgo por incumplimiento* y se refiere a la pérdida potencial que se presenta cuando un deudor no puede cumplir sus obligaciones financieras, el segundo es el *riesgo de mercado* que es la pérdida potencial que se presenta cuando se deteriora la calidad crediticia de un deudor⁴, en este último caso, la calificadora considera que el deudor ha aumentado la probabilidad de que incumpla y por tanto el crédito vale menos ya que se descuenta a una tasa mayor.

Hay que tomar en cuenta que una institución financiera debe disponer de indicadores que permitan medir la pérdida potencial por riesgo de crédito que puede sufrir el portafolio de crédito y a partir de estos indicadores mitigar la pérdida utilizando el capital de la institución financiera. Estos indicadores se elaboran a partir de la distribución de probabilidades de las pérdidas y ganancias asociadas a los créditos de la cartera, estos son:

- **Valor en Riesgo (VaR):** Es el cuantil de la distribución de pérdidas y ganancias asociadas a la cartera de crédito, para un período de tiempo y un nivel de confianza dado.

⁴Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (1999) pp52

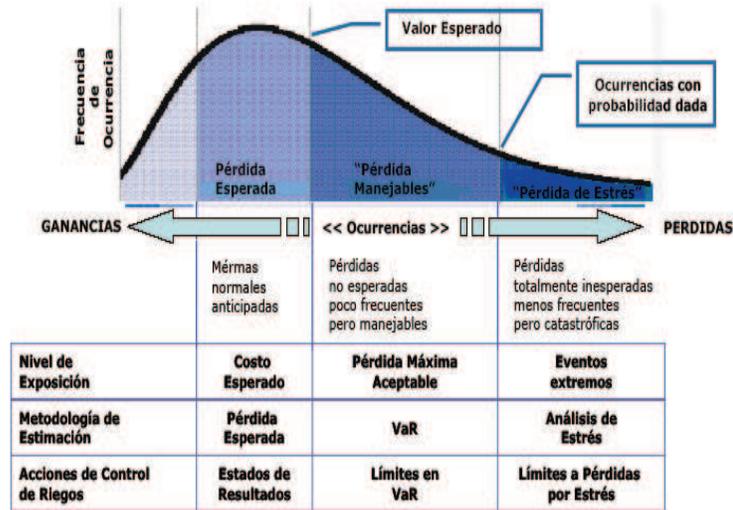


Figura 1.1: Esquematización de las provisiones y del capital económico a través de la distribución de pérdida de un portafolio de crédito

- **Déficit Esperado (ES):** Es la pérdida esperada durante N días, condicionado a que la pérdida sea mayor que un cierto percentil de la distribución de pérdida. Es una medida que produce mejores resultados que el VaR⁵, a veces es referido como un VaR condicional. El VaR hace la pregunta *Cuál puede ser mi mayor pérdida*, en cambio el ES hace la pregunta *Si las cosas van mal, cuál puede ser mi pérdida esperada*. El ES al igual que el VaR, es función de dos parámetros, el horizonte de tiempo en días y el nivel de confianza.
- **Pérdida Esperada (PE):** Es la media de la distribución de pérdidas y ganancias, indica cuánto se puede perder en promedio y está asociada a la política de reserva preventiva que la institución debe tener contra los riesgos crediticios.
- **Pérdida no Esperada (PNE)⁶:** Es la pérdida por encima de la esperada por el incumplimiento de sus deudores. Permiten determinar el Capital requerido por el acreedor para hacer frente las pérdidas no anticipadas

⁵John Hull, ha explicado recientemente las limitaciones que tiene el VaR y las relativas ventajas de una medida alternativa como es el caso del déficit esperado.

⁶Esta medida puede estimarse como la diferencia entre el VaR y la pérdida esperada.

Las pérdidas esperadas son calculadas con base a un análisis estático de la condición general de cada uno de los créditos que integran la cartera, estas pérdidas representan el porcentaje del crédito original que las autoridades financieras esperan que se pierda dado el deterioro actual de la cartera, a estas pérdidas se suelen hacer frente con las provisiones obligatorias que las instituciones tienen que acumular como fondo de contingencia para proteger la cartera de crédito. Hay que tomar en cuenta que la suma de las pérdidas esperadas a nivel individual es la pérdida esperada de la cartera y por lo tanto es el valor que se debe disponer como provisión.

Las pérdidas no esperadas están asociadas a cambios en la calidad de la cartera de crédito en el tiempo. Están compuestas por riesgos crediticios en la cartera que no se consideran como probables o estimables en la fecha de evaluación, pero pueden ocurrir en el futuro. A este tipo de pérdidas se suele hacer frente con el capital de la institución.

Se puede observar en la Figura 1.1 que a partir de la distribución de pérdida del portafolio de crédito se puede identificar la pérdida esperada y la inesperada del portafolio y a partir de ésta se puede estructurar la provisión y el capital económico.

Cabe mencionar que las provisiones y el capital económico no son las únicas políticas para mitigar el riesgo de crédito, más bien existen otras que las complementan como es el caso de los *límites de crédito*, siendo éstas las políticas más utilizadas por los bancos ya que permiten limitar las pérdidas en caso de incumplimiento. Los administradores de riesgo de crédito deben desarrollar procesos de autorización para los límites de crédito, con los cuales se establece el monto máximo en riesgo que se está dispuesto a asumir con un cliente actual o futuro.

Específicamente los *límites de crédito* permiten alcanzar los siguientes objetivos:

- Evitar que la pérdida en un solo crédito ponga en peligro al banco.
- Diversificar los compromisos de otorgamiento de crédito y por lo tanto reducir el nivel de concentración.
- Evitar otorgar crédito a cualquier persona o grupo por un monto tal que exceda su capacidad de endeudamiento.

El capital de un banco ayuda a establecer límites, sobre todo si se considera la necesidad de diversificación del crédito. Dos elementos básicos a considerar en el establecimiento de límites son la orientación del Banco y su plan anual de negocios, elementos que también servirán para establecer los criterios de diversificación de la cartera.

En términos generales la base sobre la que se debe desarrollar los *límites de crédito* es el plan anual de negocios, ya que en éste se plantea el monto total de crédito a otorgar durante un período dado. En el plan de negocio se debe determinar el monto máximo de crédito a otorgar por acreditado individual y por grupo económico; es decir, establecer el monto máximo que por acreditado puede soportar el banco en caso de incumplimiento

De lo mencionado anteriormente se puede hacer hincapié en que el conocimiento de la distribución de pérdida de un portafolio de crédito permiten definir políticas adecuadas tales como el nivel de provisión, capital económico, asignar límites de crédito según el nivel de riesgo que se quiera asumir, y diversificar la cartera, sin embargo, para conocer esta distribución se debe identificar primero ciertos elementos básicos del crédito, los mismos que se pueden agrupar de la siguiente manera:

Elementos del riesgo a nivel individual

- **Probabilidad de incumplimiento⁷ (PD):** Es la medida de que tan probable es que un acreditado deje de cumplir con sus obligaciones contractuales, su valor se encuentra comprendido entre cero (imposibilidad de incumplir) y uno (es seguro que incumple)
- **La exposición (E):** Es lo que debe el deudor en el momento del incumplimiento, toma en cuenta el capital y el interés de la operación crediticia
- **La severidad de la pérdida (LGD):** Es una proporción de la deuda que no se podrá recuperar una vez que la contraparte a caído en incumplimiento.

Elementos del riesgo a nivel de portafolio

⁷Se declara incumplimiento de pago cuando un pago programado no se ha realizado dentro de un período determinado, o se efectúa con posterioridad a la fecha en que estaba programado dicho pago.

- **Dependencia entre incumplimientos:** La correlación a pares mide la dependencia o grado de asociación entre el comportamiento crediticio de los deudores. Su valor está comprendido entre -1 y 1. Una correlación positiva indica que el incumplimiento de un deudor hace más probable el incumplimiento de otro, cuando es negativa ocurre lo contrario. Hay que tomar en cuenta que la correlación cero, indica que el incumplimiento de un deudor no influye en el comportamiento crediticio del otro deudor.
- **La concentración de la cartera:** La cartera concentrada significa que hay mucho crédito en pocas manos, lo cual puede producir grandes pérdidas y se agrava más cuando se presenta en segmentos de alto riesgo. Por ejemplo, la concentración se puede dar en un sector económico, o en alguna región geográfica, o por tipo de crédito. Normalmente se mide a través de algún indicador que resume en un solo número cómo están distribuidos los saldos de una cartera, el indicador más utilizado es el índice de Herfindahl Hishmann (IHH).

1.2. Metodologías de medición del riesgo de crédito

Durante los siglos XV y XVI, en Europa el oro fue regularmente utilizado como dinero en las grandes transacciones, donde dicho oro era utilizado como moneda o lingotes; sin embargo, éste no estaba seguro en ningún lado. A través del tiempo la gente se dio cuenta que no tenía que transportar el oro en persona cuando realizaba un pago, lo único que necesitaba era darle una carta en la que le pedía al orfebre⁸ que transfiera una cierta cantidad de dinero a dicho sujeto, con esto el portador de dicha carta podía llevarse el oro o dejarlo ahí a su nombre.

Por otro lado, los orfebres se dieron cuenta de que en sus cajas fuertes había grandes cantidades de oro ocioso; es decir, oro sin utilizar, fue así como surgió la oportunidad de otorgar créditos, pues el orfebre detectó que podía prestar parte del oro depositado cobrando un determinado precio, de esta manera los orfebres se convirtieron en banqueros

⁸Los orfebres trabajaban con el oro y poseían cajas fuertes y en algunas ocasiones hasta disponían de guardias para resguardar el oro.

logrando la transferencia de recursos entre individuos que poseían un sobrante a individuos que necesitan dinero extra para consumirlo e invertirlo, dando así la intermediación financiera.

El orfebre como banquero otorgaba el préstamo confiando en que no todos los depositantes reclamarían su oro al mismo tiempo, por lo que prestaba una parte de este y otra la reservaba para hacer frente a los reclamos de los solicitantes. Adicionalmente el banquero podía estudiar a sus acreedores y estimar que tan buenos pagadores eran, así al suponer quienes probablemente no le pagarían podía estimar las posibles pérdidas en las que incurrirían.

Sin embargo existen factores que no pueden conocerse con exactitud, por ejemplo el caso de un agricultor al que el banquero le otorga el crédito pensando que éste le pagaría con la venta de la cosecha; sin embargo, si se presenta una helada toda la siembra se pierde, por lo que el agricultor no podrá saldar su deuda. La pérdida en que incurre el banquero debido al mal tiempo, no pudo ser prevista al momento de analizar al acreedor; es decir, no se trata de una pérdida esperada sino de una pérdida no esperada.

Hasta principios del siglo XX, el negocio bancario se mantuvo con pocos cambios, existía una mística del *banquero exquisito* con un *ojo clínico infalible* que conocía perfectamente a sus potenciales deudores, clientes y competidores, de manera que sabía por oficio a quien le podía prestar y a quien no. Además tenía una audacia calculada que le permitía hacer cosas inauditas, la cuál implicaba mucho riesgo pero cuya recompensa era más generosa.

En la segunda mitad del siglo XX, y particularmente en las últimas dos décadas, ha existido un cambio radical en la forma de percibir y administrar el riesgo de crédito. Esto es debido al aumento en la complejidad del negocio del crédito, que se fundamenta principalmente por:

- La gran cantidad de créditos que se realizan día a día, siendo imposible la evaluación de los créditos con los métodos tradicionales⁹.

⁹El modelo más conocido en este ámbito es el de las cinco C del crédito (Carácter, Capital, Capacidad, Colateral y Ciclo), también llamado modelo experto.

- Las fuertes crisis financieras que se han presentado en las últimas décadas donde los métodos tradicionales, sistemas expertos y los sistemas de calificación fueron incapaces de predecir y prevenir tales crisis.
- La globalización que da lugar que una crisis en un lugar del mundo puede replicarse en alguna región vecina o alcanzar proporciones globales.
- Cambio en el valor de las garantías y en el colateral de los créditos debido a los cambios ocurridos en el entorno económico y en el negocio financiero.
- La proliferación de instrumentos y operaciones que se registran fuera de balance y conllevan al *riesgo de contraparte*¹⁰.
- Falta de regulaciones capaces de prevenir o amortiguar crisis financieras.

Los banqueros en respuesta a la complejidad del negocio crediticio presentada en los últimos años, vieron la necesidad de desarrollar políticas más acordes a la realidad, para lo cual han desarrollado una gama de modelos capaces de gestionar los riesgos de crédito. En la literatura existen dos grandes modelos para la estimación del riesgo de crédito, *los modelos tradicionales y los de enfoque moderno*, a continuación detallamos cada uno de ellos.

1.2.1. Modelos tradicionales

Hay que tomar en cuenta que estos modelos han sido la piedra angular para el desarrollo de los modelos con un enfoque moderno. Los modelos tradicionales se los pueden agrupar en dos modelos: *los sistemas expertos y los sistemas de calificación de créditos*.

Los sistemas expertos se fundamentan en criterios y en el juicio o la experiencia del analista de cartera. El más común de estos es de las cinco C del crédito (Carácter, Capital, Capacidad, Colateral y Ciclo), también es llamado modelo experto.

¹⁰Es el riesgo contingente implícito en un contrato en el que la contraparte del tenedor del título incumple con la obligación contraída.

En este tipo de modelos, es de suma importancia tomar en cuenta la experiencia, el juicio subjetivo y la evaluación de ciertos factores por parte del analista del crédito para otorgar o no el crédito. Los factores que se analizan en este sistema son los siguientes:

1. **Carácter:** Mide la reputación de la firma, su voluntad para pagar y su historial de pago, se ha establecido empíricamente que la antigüedad de creación de una empresa es un indicio adecuado de su reputación de pago.
2. **Capital:** Mide la contribución de los accionistas en el capital total de la empresa y la capacidad de endeudamiento, estos se ven como buenos indicios de la probabilidad de quiebra.
3. **Capacidad:** Mide la habilidad para pagar, la cual se refleja en la volatilidad de los ingresos del deudor, es decir en la viabilidad de las ganancias del acreditado.
4. **Colateral:** En el caso de incumplimiento, la entidad tendría derecho sobre el colateral pignorado (dejado en garantía) por el deudor.
5. **Ciclo Económico:** Es un elemento importante en la determinación de la exposición crediticia, sobre todo en aquellos sectores económicos que dependen de él.

Los sistemas expertos enfrentan dos problemas principales, *la Consistencia y Subjetividad*; debido a que el analista debe determinar cuáles son los factores importantes a medir para cada acreditado y adicionalmente debe tomar la decisión de cuáles factores son importantes para el otorgamiento o no del crédito.

Los sistemas de calificación de crédito se pueden encontrar en todos los tipos de análisis de crédito, desde los créditos de consumo hasta los préstamos comerciales. La idea es parecida a los sistemas expertos, es decir, se tiene que pre identificar ciertos factores clave que determinen la probabilidad de incumplimiento y combinarlos en una calificación cuantitativa. En algunos casos, la calificación puede ser interpretada como la probabilidad de incumplimiento y en otros casos se utiliza como un sistema de calificación, ya que permite colocar a un acreditado en un grupo malo o bueno. En este tipo de modelos se puede incorporar los modelos de Z de Altman, Z-score y el modelo Zeta, siendo modelos

econométricos que tratan de agrupar a las empresas en buenas o malas a partir de un combinación lineal de ciertos factores.

1.2.2. Modelos con un enfoque moderno

De los elementos básicos del crédito, la probabilidad de incumplimiento es una de las variables principales que se puede considerar que su comportamiento sea aleatorio o estocástico; es decir, se le considera desconocido y es justamente donde la mayoría de los modelos de riesgos tratan de modelarlo o estimarlo, de tal manera que se pueda determinar la distribución de pérdida de la cartera de crédito.

Existen algunas maneras para determinar la probabilidad de incumplimiento, siendo las más importantes las siguientes:

- **Esquemas de calificación:** Esta es la primera aproximación para cuantificar la probabilidad que un cliente no cumpla con sus pagos; mediante estos sistemas se pretende dar una calificación crediticia a los deudores, representando un indicativo de la posibilidad de que un deudor incumpla con sus compromisos. El principal uso que se les da en los bancos es en las decisiones de otorgamiento de crédito, los cuáles llevados a sus últimas consecuencias son piezas clave para medir adecuadamente el nivel de riesgo de crédito que tienen los bancos.
- **Tasas de morosidad:** También son conocidas como *tasas de incumplimiento* y es la razón entre los deudores que incumplieron con el pago de su obligación crediticia, respecto de los que estaban sirviendo puntualmente su deuda.
- **Matrices de transición:** Esta metodología permite aplicar la teoría de cadenas de Markov, finitas y discretas para modelar los procesos aleatorios que caracterizan los cambios en la calidad de los créditos en el tiempo mediante matrices de transición, éstas contienen la probabilidad de migración de un nivel de calidad a otra.

Otro de los factores de riesgo que se puede considerar como una variable aleatoria, es la *tasa de severidad de pérdida*, ésta se puede estimar a partir de modelos antes mencionados. A partir de la estimación de la probabilidad de incumplimiento es posible calcular

la pérdida esperada promedio del portafolio, misma que es importante tanto para las autoridades reguladoras como para los propios bancos, ya que es un estimador individual de las reservas que deben constituir cada banco para hacer frente a sus pérdidas esperadas.

Hasta el momento, el análisis se ha centrado en torno de la medición del riesgo de un crédito individual, a través de una estimación de la probabilidad de incumplimiento del deudor. Si un banco otorgase solamente un crédito, el análisis pudiera ser suficiente, pero evidentemente esto no es así. Aunque la probabilidad de incumplimiento de los deudores es la piedra angular de la medición del riesgo de crédito, falta definir cómo se comporta una cartera de crédito en su conjunto.

La medición de riesgo de crédito de una cartera es complicada por varias razones, siendo estas:

- *Falta de información pública y de datos.* La escasa información respecto a datos de crédito es el principal obstáculo para usar métodos estadísticos en el riesgo de crédito, esto se empeora debido a que el horizonte para la administración de riesgo de crédito es al menos un año. De lo anterior, se puede decir que el problema de la escasez de los datos de crédito es el principal obstáculo para la adecuada calibración de los modelos de crédito.
- *Sesgo en la distribución de pérdida.* Típicamente la distribución de pérdida de los créditos es fuertemente sesgado, con una relativa cola pesada a la derecha como se puede apreciar en la Figura 1.1, esto se debe a la misma actividad crediticia, ya que de todos los crédito otorgados en un período dado, la mayoría de ellos pagan según los términos establecidos al inicio del contrato, dando al banco una pequeña ganancia relacionada con la tasa de interés pactada, y existen unos pocos créditos que no pagan según lo establecido, permitiendo que se pierda el capital y el interés de los mismos, esto produce que los montos de pérdida del portafolio de crédito sean grandes respecto a la rentabilidad obtenida. Es por esta razón que es necesario que el banco disponga de grandes montos de capital para cubrir estas pérdidas.
- *Necesidad de incorporar dependencia en el modelo.* Otro de los grandes inconvenientes que tiene la administración del riesgo de crédito para un portafolio es la

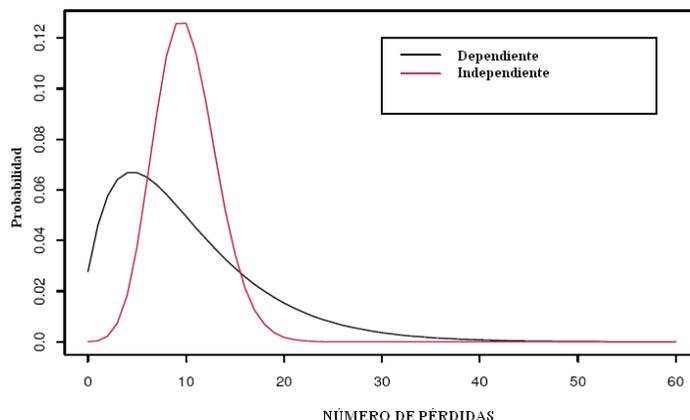


Figura 1.2: Comparación de la distribución de pérdida de dos portafolios homogéneos de 1000 créditos con probabilidad de incumplimiento del 1% y diferente estructura de dependencia

ocurrencia des-proporcional de una gran cantidad de incumplimientos de los créditos para un período particular. Este riesgo es directamente relacionado con la dependencia entre los eventos de incumplimiento, de hecho la dependencia tiene un gran impacto en la cola de la derecha de la distribución de pérdida para un portafolio que tiene muchos créditos. En la Figura 1.2 se compara la distribución de pérdida de un portafolio con 1000 créditos donde los incumplimientos son independientes (portafolio 1), con un portafolio más real donde los incumplimientos son ligeramente dependientes (portafolio 2), en este sentido la correlación es del 0.5%. Se observa que el portafolio 2 presenta un sesgo en la cola de la derecha siendo más pesada que la del portafolio 1, típicamente se puede observar que la dependencia tiene un impacto directo a lo largo de la cola de la derecha de la distribución de pérdida. Adicionalmente, la dependencia entre incumplimientos se justifica a partir de ciertas razones económicas, por ejemplo la salud financiera de algunas empresas varía con la fluctuación aleatoria de ciertos factores macroeconómicos, tales como el crecimiento económico. Dado que ciertas empresas son afectadas por factores comunes macroeconómicos, esto ocasiona la dependencia entre estas empresas.

- *Gran número de créditos en el portafolio.* Éste es uno de los mayores inconvenientes

para modelar la pérdida de un portafolio, y se hace mucho más complejo cuando se toma en cuenta que cada crédito presenta diferentes niveles de exposición, provocando que las pérdidas de cada deudor sean distintas de deudor a deudor; por ejemplo, si dos créditos diferentes presentan la misma probabilidad de incumplimiento, la pérdida es diferente dependiendo si incumple el crédito de monto mayor o el de menor. En resumen el riesgo de la cartera depende de la exposición, número de créditos y concentración de la cartera.

A nivel mundial se ha desarrollado una variedad de modelos econométricos para cuantificar el riesgo de crédito en un portafolio, los cuales tratan de incorporar los aspectos antes señalados para un portafolio¹¹. Dependiendo de la formulación que se haga a los modelos de riesgo de crédito, éstos pueden ser divididos en dos grupos, *los modelos estructurales y los modelos de forma reducida*.

Modelos estructurales

El progenitor de estos modelos es el modelo de Merton (1974), el cual presenta un mecanismo para cuantificar el incumplimiento de una empresa en términos de la relación entre los activos y sus obligaciones que deben ser cubiertas al final de un período. Más específicamente, en los *modelos estructurales* se presenta el incumplimiento en el momento en que una variable que es normalmente representada por los activos de la empresa cae por debajo de cierto umbral que es representado por las obligaciones de la empresa. Más comúnmente a los modelos estructurales se les conoce también como *modelos por umbrales*, en estos modelos para cuantificar la dependencia multivariada entre los créditos se utilizan las funciones cópulas¹².

Los modelos más conocidos a nivel mundial que se les puede catalogar dentro de este esquema son: CreditMetricsTM, KMV y Credit Portafolio View.

CreditMetricsTM

Este modelo fue desarrollado en 1997, por un grupo de instituciones financieras estando

¹¹Estos modelos tratan de cuantificar la dependencia entre incumplimientos, usar métodos estadísticos para la calibración de modelos con datos reducidos, estimar la probabilidad de incumplimiento de los créditos, medir la concentración de la cartera, etc

¹²En capítulos posteriores se detalla más a fondo este tipo de funciones que permiten cuantificar la dependencia entre créditos.

a la cabeza J.P Morgan. El propósito del modelo es estimar el VaR de crédito, donde se supone que el riesgo de crédito depende de los cambios de la calificación crediticia que es reflejado a través de una matriz de transición, que provee el mecanismo probabilístico que modela la migración de la calidad de los créditos. A través de un proceso de simulación de MonteCarlo, se determinan las pérdidas resultantes por el incumplimiento del deudor y de los cambios en la calidad crediticia debido a la migración. El proceso de simulación depende en gran medida de un supuesto de normalidad que permite establecer una relación entre la calidad del crédito y el valor de los activos de las empresas deudoras.

KMV

Esta metodología es la que trata de llevar a la práctica el modelo de Merton de la forma más directa. Difiere significativamente de CreditMetricsTM, ya que utiliza las *frecuencias esperadas de impago*¹³, como probabilidades de incumplimiento, en vez de depender de las probabilidades de transición asociadas a algún esquema de calificación, sean éstas las internas de cada banco o las producidas por alguna agencia calificadora.

Credit Portfolio View

En este modelo como paso inicial segmenta al portafolio de acuerdo a la localización geográfica y la actividad económica de los créditos, y por medio de funciones logit, trata de explicar las probabilidades de incumplimiento de cada segmento del portafolio, donde los índices de variables macroeconómicas son consideradas como variables explicativas, las mismas que representan el estado de la economía.

Al igual que el CreditMetricsTM, Credit Portfolio View también recurre a la simulación de MonteCarlo para la estimación de la distribución de las pérdidas del portafolio.

Modelos de forma reducida

Un enfoque alternativo a los modelos estructurales es el de los modelos de forma reducida, en estos modelos, la probabilidad de incumplimiento de los créditos es explicada a partir de ciertas variables exógenas, dando como resultado que la distribución del portafolio sea representada a partir de una forma analítica. El modelo más conocido que se puede catalogar dentro de este esquema es el CreditRisk⁺.

¹³En el capítulo 2, se explicará a detalle los principales modelos de riesgo de crédito

CreditRisk⁺

En este modelo se considera que cada deudor puede estar solamente en uno de los dos estados al final de un período, siendo estos, cumplimiento o impago. En el evento de impago de algún deudor, el acreedor pierde una cantidad fija que constituye la exposición del acreedor al deudor. Los modelos de impago se derivan a partir de conceptos de tipo actuarial y tiene una característica que las probabilidades de incumplimiento son explicadas por ciertos factores de riesgo, cada uno de ellos distribuido de acuerdo con una distribución gamma independiente. De esta manera, las probabilidades de impago pueden cambiar en el tiempo según el movimiento de los factores de riesgo que los explican. Al realizar supuestos distribucionales y funcionales, sobre los factores de riesgo, permite calcular la distribución de pérdida de manera analítica.

De los modelos antes mencionados, hay que hacer notar los supuestos que utilizan:

- Disponen de una amplia información crediticia
- La teoría desarrollada hace énfasis en portafolios de créditos corporativos
- El número de créditos que conforman el portafolio no es tan grande.
- La distribución multivariada de los créditos siguen una ley normal, lo que permite cuantificar la dependencia entre los créditos a partir de la matriz de correlación.

En el caso Ecuatoriano, donde los portafolios crediticios van direccionados al segmento de consumo, con la característica que están conformados por un amplio número de créditos y cuya información histórica es limitada, resulta complicada la implementación de éstos. En resumen, implementar este tipos de modelos en mercados emergentes es complicado ya que la falta de información no permite garantizar consistencia en los modelos.

De lo explicado anteriormente, es necesario buscar metodologías alternativas para cuantificar el riesgo de crédito, que sean capaces de ser implementados en mercados emergentes donde la cantidad de información es escasa, estos modelos son el *CyRCE* y *COP-ULA*.

CyRCE

La principal fortaleza del modelo es su aplicación para mercados emergentes, que se caracterizan por la carencia de información lo que no existe en los países con mercados desarrollados. Este es un modelo simple que no requiere de enormes recursos de cómputo, es lo suficiente general para ser aplicado por cualquier banco que le interese medir el riesgo de crédito.

Este modelo se puede catalogar dentro de los modelos de forma reducida ya que permite obtener una expresión analítica para la distribución de pérdida del portafolio, logrando determinar además el capital requerido y provisions para enfrentar el riesgo, los límites individuales de crédito que se deben imponer a los diferentes segmentos de la cartera para propósitos de diversificación, y logra medir el impacto que tiene la concentración de la cartera en la distribución de pérdida. Este modelo permite ser calibrado con información limitada de la cartera sin sacrificar precisión.

Otra virtud del modelo CyRCE a diferencia de los otros conocidos, es que no está limitado con algún criterio de segmentación de la cartera en particular, como sucede con los otros paradigmas, ya que por construcción están obligados a segmentar la cartera en función de las calificaciones y en el caso de CreditRisk⁺ por el nivel de pérdidas en el caso de incumplimiento.

COPULA

De manera general, podemos decir que el conocimiento a priori de la distribución conjunta de los incumplimientos de una cartera de crédito, permite obtener la distribución de pérdida del portafolio, y por lo tanto determinar de manera exacta el capital económico y las provisiones necesarias para cubrir el nivel de riesgo incurrido en la institución. Por lo anterior, es necesario disponer de metodologías para estimar la *distribución conjunta* de variables aleatorias, situación que en la actualidad es resuelta por la *función cópula*, la misma que permite determinar la distribución conjunta de variables aleatorias a partir de la relación de dependencia existente entre distribuciones marginales.

La función cópula no realiza supuestos sobre las distribuciones marginales de las variables aleatorias, ni tampoco sobre la relación de dependencia entre ellas, permitiendo que capture la dinámica real entre las variables aleatorias y por lo tanto obtener una distribución conjunta lo más aproximada a la real. Una de las características importantes de la

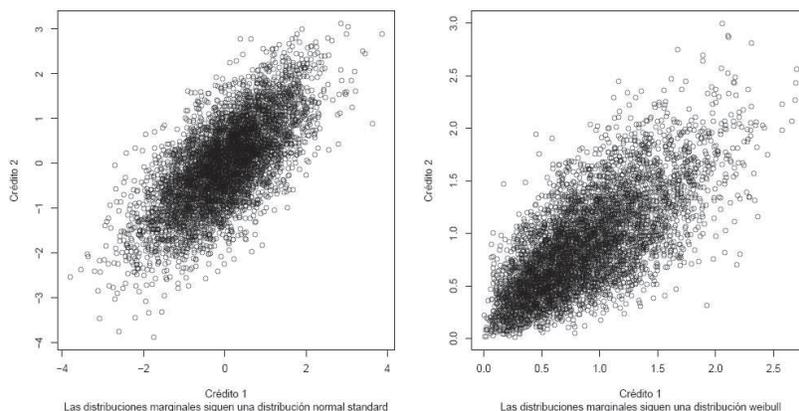


Figura 1.3: Comparación de las distribuciones de pérdidas de dos portafolios crediticios, cuya distribución conjunta es normal con una correlación de 70 %, pero las marginales del primer portafolio siguen una distribución normal estándar y para el segundo es una distribución weibull.

distribución de pérdida de un portafolio de crédito, es la presencia de una cola pesada a la derecha, indicando que existe alta dependencia entre las pérdidas de los créditos, debido a que los incumplimientos del portafolio se presentan de manera conjunta; sin embargo, todos los modelos de crédito suponen que la distribución multivariada de las pérdidas y las marginales siguen una ley normal, las que no permiten capturar la dependencia en las colas.

Por ejemplo en la Figura 1.3, se comparan dos portafolios de crédito formado por dos créditos que parten del supuesto que las pérdidas se distribuyen conjuntamente como una normal multivariada cuya correlación entre los créditos es del 70 %. En el primer portafolio se supone que las distribuciones marginales siguen una ley normal estándar y en el segundo portafolio siguen una weibull.

A pesar que ambos portafolios tienen una distribución conjunta normal y tienen la misma correlación, claramente se evidencia que la relación de dependencia en los portafolios son diferentes, además en el segundo portafolio se observa como existen más puntos concentrados cuando la calificación de los créditos son bajos, siendo este portafolio más real ya que captura la dependencia en el momento de la pérdida del portafolio.

Cabe mencionar que la función cópula de los incumplimientos de los créditos se complementan con la simulación de MonteCarlo para obtener la distribución de pérdida del

portafolio, por lo que esta metodología se la puede catalogar dentro de los modelos estructurales o por umbrales.

Parte I

Fundamento Teórico de los modelos de crédito

Capítulo 2

Modelos con un enfoque moderno

2.1. Introducción

Un banco debe estar preocupado con la estimación del riesgo por incumplimiento de un específico acreedor, ya que ésta es la base para valorar un préstamo y cargar al solicitante del préstamo con una apropiada tasa de interés. Pero al mismo tiempo, el banco debería observar la cualidad de su portafolio de crédito como un todo, ya que la estabilidad del banco depende de gran manera del funcionamiento de su portafolio y del tamaño de pérdida que puede incurrir en un período dado. El análisis del portafolio de crédito puede afectar a la manera de otorgar créditos individuales y al volumen de crédito a prestar que debe ir acorde con el nivel de riesgo que quiera incurrir el banco.

La buena administración de un portafolio de crédito permite conocer el valor del portafolio en un cierto tiempo futuro T , de tal manera que se puede conocer las pérdidas del portafolio y a partir de ellas, desarrollar políticas de crédito para anticiparse a los eventos adversos.

Supónganse que se dispone de un portafolio con N préstamos o bonos, y el administrador quiere conocer el valor del mismo al final de un año, el primer inconveniente para determinar dicho valor es conocer el comportamiento que puede tener cada préstamo. Un préstamo al final del año puede estar en uno de los siguientes estados: cumplir o incumplir el pago del préstamo según lo pactado, desde el punto de vista estadístico, este

comportamiento se puede considerar como un experimento de Bernoulli, y se lo define de la siguiente manera:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{con probabilidad } p_i \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p_i \end{cases}$$

donde, la variable X_i , toma el valor de 1 cuando el préstamo i a incumplido, con una probabilidad p_i , es decir, $p_i = P\{X_i = 1\}$ y esto ocurre para todos los préstamos $i = 1, \dots, N$.

Si el estado del préstamo es el incumplimiento en un período futuro T , entonces el prestamista solamente recibe un porcentaje del total de la deuda, cuyo porcentaje corresponde a la tasa de recuperación, esta tasa se considera aleatoria ya que dependen de la calidad crediticia del préstamo; es decir, si el préstamo tiene una mala calificación por ejemplo E , entonces la tasa de recuperación será baja, ya que para recuperar el monto prestado se tiene que incurrir en costos legales, operacionales y de cobranza, situación que sucede lo contrario cuando tienen una buena calificación crediticia.

Si denotamos por r_i a la tasa de recuperación, y L_i al valor del préstamo, entonces la pérdida del portfolio en un período de tiempo T será:

$$L = \sum_{i=1}^N X_i(1 - r_i)L_i$$

Así tan pronto conozcamos la distribución multivariada del vector aleatorio

$(X_1, \dots, X_N, r_1, \dots, r_N)$, la distribución de pérdida del portafolio al período T queda completamente especificado.

Dado que la dependencia entre la tasa de recuperación y el incumplimiento no es tan fácil de comprender, los modelos de riesgo crediticio que se han desarrollado a nivel internacional (KMV, CreditMetricsTM, RiskMetrics⁺) asumen que la tasa de recuperación se la puede considerar determinística, de tal manera que solamente es necesario conocer la distribución multivariada del vector aleatorio (X_1, \dots, X_N) , para determinar la distribución de pérdida del portafolio de crédito.

Desde el punto de vista estadístico existen tres problemas a tomar en cuenta cuando se modela la distribución de pérdida de un portafolio de crédito:

1. Dependencia entre incumplimientos
2. Número de créditos del portafolio
3. Falta de información histórica

Históricamente se ha dado a conocer que la suposición de independencia entre (X_i) es demasiado fuerte dando resultados inadecuados, es por esta razón que hay un reto por encontrar modelos que puedan manejar tales problemas.

A inicios de 1990, se incrementaron sustancialmente el interés en los modelos de riesgo de crédito debido fundamentalmente por el alto número de créditos incumplidos después de la depresión económica ocurrida a finales de 1980; es por esta razón, que es necesario desarrollar modelos para portafolios de crédito de tal forma que puedan anticiparse a tales eventos, dando alta probabilidad de pérdida en caso de recesiones económicas.

2.2. Modelo KMV¹

2.2.1. Generalidades

La corporación KMV, es una empresa que se especializa en el análisis de riesgo de crédito, y ha desarrollado una metodología de riesgo de crédito y una base de datos para evaluar la probabilidad de incumplimiento y la distribución de pérdida relacionada con el incumplimiento y la migración de la calidad crediticia.

La metodología KMV, utiliza la *frecuencia de incumplimiento esperado (EDF)* de cada empresa, en vez de utilizar la frecuencia de transición histórica promedio de cada categoría de crédito que es generada por las agencias de calificación para estimar la distribución de pérdida del portafolio de crédito a través de la simulación de MonteCarlo. La EDF es la estimación de la probabilidad de incumplimiento de cada empresa y se la obtiene a partir

¹KMV es la marca comercial de la corporación KMV. Stephen Keallhofer, John McQuown y Oldrich Vasicek fundaron la Corporación KMV en 1989

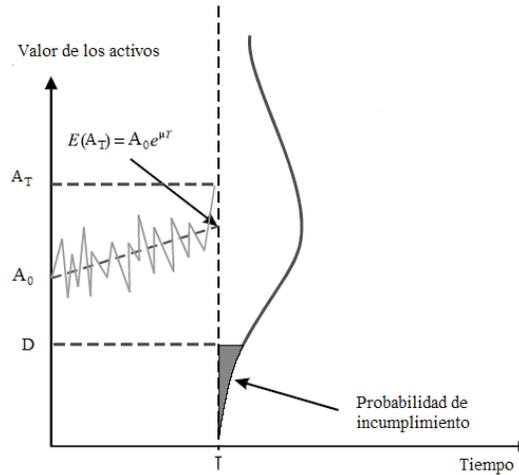


Figura 2.1: Comparación de la distribución de los activos de una empresa con las obligaciones en el período T

del modelo de Merton (1974). En el Modelo de Merton se determina que la probabilidad de incumplimiento es función de las siguientes variables:

- La estructura de capital de la empresa²
- La volatilidad de los activos de la empresa, y
- El valor actual de la empresa

La medición de riesgo de crédito por medio de la aproximación KMV es obtenida a través de la dinámica del valor de los activos de la empresa, es decir dada la estructura de capital de la empresa y un proceso estocástico que representa el activo de la empresa, se puede obtener la probabilidad real de incumplimiento, para un horizonte de tiempo que puede ser un año, dos años, etc. En la Figura 2.1 se describe como la probabilidad de incumplimiento de una empresa se asocia con la distribución del retorno de los activos y con la estructura de capital.

Para el desarrollo del modelo KMV se asume que la *empresa i* tiene una estructura de capital muy simple, donde la empresa es financiada por acciones E_t^i y un instrumento de

²Se refiere al financiamiento del activo a través de acciones, deudas de corto y mediano plazo, bonos convertibles, etc.

deuda cero cupón, cuyo vencimiento es en el tiempo T y los valores de ejercicio y mercado son D_i y B_t respectivamente³. La hoja de balance de la *empresa i* puede ser representada de la siguiente manera:

$$\underbrace{A_t^i}_{\text{Activo}} = \underbrace{B_t^i(D_i)}_{\text{Deuda con valor de ejercicio } D_i} + \underbrace{E_t^i}_{\text{Acciones}}$$

En esta estructura, se supone que existen procesos estocásticos que describen el comportamiento del valor de los activos y de las acciones de la *empresa i*, es decir:

- A_t^i , es el valor total de los activos de la *empresa i* en el tiempo t , $t \in [0, T]$
- E_t^i , es el valor total de mercado de las acciones de la *empresa i* en el tiempo t

El incumplimiento de la *empresa i* se presenta al vencimiento de las obligaciones de deuda cuando el valor de los activos es menor que la promesa a pagar D_i ; matemáticamente se puede expresar de la siguiente forma:

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{si } A_T^i < D_i \\ 0 & \text{si } A_T^i \geq D_i \end{cases} \quad (2.1)$$

La variable X_i sigue un experimento de Bernoulli y mide el incumplimiento de la *empresa i*, el valor de uno indica que la *empresa i* a incumplido y cero que no ha incumplido.

Las acciones de la empresa pueden ser vistas como una opción call sobre los activos, cuyo precio de ejercicio es igual al valor en libros de la deuda de la empresa D_i . De lo anterior se puede definir una variable $Call_t^i$ que representa el valor de una opción call para la *empresa i* en un tiempo t con un precio de ejercicio D_i y con vencimiento en T , es decir:

$$\begin{aligned} Call_T^i &= \text{máx}(A_T^i - D_i, 0) \\ Call_t^i &= E_t^i \end{aligned}$$

Se puede interpretar que las acciones pueden valer cero cuando los activos de la empresa no avancen a cubrir las deudas. Para obtener una forma analítica de $Call_t^i$, KMV utiliza la estructura de Merton y el método de valoración de opciones de Black & Scholes.

³El subíndice t representa el tiempo en el que se encuentra la *institución i* y que va desde 0 hasta T que es la fecha de vencimiento del bono cupón cero.

2.2.2. Probabilidad de incumplimiento de una empresa

El modelo de Merton (1974) es un modelo alternativo para la determinación de riesgo de incumplimiento y se fundamenta en el precio de las acciones de una empresa. Este modelo trata a las acciones como semejantes a una *opción*⁴ *call Europea* sobre los activos de la *empresa i*, con un precio de ejercicio⁵ determinado por el valor nominal de la deuda y cuyo vencimiento es equivalente al vencimiento de la deuda analizada.

Los supuestos sobre los que se basa, además de los implícitos en la teoría de valuación de opciones son:

1. Una *empresa i* tiene dos clases de obligaciones, una deuda simple, como es el caso del bono cupón cero y las acciones
2. Las especificaciones del bono emitido son las siguientes:
 - a) La *empresa i* promete pagar el total de la deuda D_i a los tenedores de los bonos en la fecha de vencimiento T ,
 - b) Si en dicho momento el pago no es realizado, los tenedores de los bonos pueden apropiarse inmediatamente de la empresa, y los tenedores de las acciones no reciben nada.
 - c) La empresa no podrá adquirir ninguna otra obligación que ofrezca mejores o similares condiciones a las anteriores, no podrá pagar dividendos ni recomprar acciones antes del vencimiento de la deuda adquirida

3. Precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico⁶

⁴Una opción es un contrato que le otorga a su tenedor (comprador), mediante el pago de una suma de dinero (prima), el derecho de comprar (vender) un determinado activo a un precio específico (precio de ejercicio) en o hasta la fecha determinada.

⁵Precio de ejercicio es el precio que se tiene derecho a comprar o vender un determinado activo si se hace uso del derecho implícito en un contrato de opción.

⁶El nombre *Movimiento Browniano Geométrico*, tiene su origen en la física y en el plano financiero describe la distribución del precio futuro de una acción. El supuesto básico del modelo es el siguiente: *el retorno sobre el precio de un activo entre el presente y un momento futuro muy corto (Δt) está distribuido normalmente*. La media de la distribución es μ veces la cantidad de tiempo y la desviación estándar σ veces la raíz cuadrada de la cantidad de tiempo.

El modelo de Merton es una extensión del modelo de Black-Scholes a diferencia que en Merton las acciones reparten una tasa continua de dividendos durante la vida de la opción, dado que el supuesto de dividendos continuos es irreal por tanto solamente puede utilizarse en opciones Europeas.

Si se supone que la *empresa i* puede negociar en el mercado de manera continua y con el supuesto que el precio del activo sigue un movimiento browniano geométrico, entonces lo anterior se puede definir mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$dA_t^i = A_t^i(\mu^{A,i}dt + \sigma^{A,i}dW_t^i) \quad (2.2)$$

dado que el bono cupón cero tiene una tasa de rentabilidad r entonces se la puede definir por medio de la siguiente ecuación

$$dB_t = rB_t dt \quad (2.3)$$

donde

- $(W_t^i)_{t \in [0, T]}$ = Movimiento Browniano estándar
- $\mu^{A,i}$ = Media para el activo de la *empresa i*
- $\sigma^{A,i}$ = Volatilidad para el activo de la *empresa i*
- r = Tasa de interés continua
- B_0 = Valor inicial de las deudas según libros contables

La ecuación diferencial (2.2) y (2.3) son válidas para cualquier $t \in [0, T]$. La ecuación (2.2) y (2.3) se la resuelve por medio de integración y por el cálculo de Ito respectivamente. Las soluciones a estas ecuaciones están dadas por:

$$B_t = e^{rt}$$

$$A_t^i = A_0^i e^{(\mu^{A,i}t - \frac{(\sigma^{A,i})^2}{2}t + \sigma^{A,i}W_t^i)}$$

Bajo el supuesto de no arbitraje se determina que el precio de la opción call para cualquier tiempo $t \in [0, T]$ está dada por la fórmula de Black-Scholes:

$$Call_t^i = A_t^i \phi(d_1^i) - D_t^i e^{(-r(T-t))} \phi(d_2^i) \quad (2.4)$$

con

$$\begin{aligned} d_1^i &= \frac{\log\left(\frac{A_t^i}{D_t^i}\right) + \left(r + \frac{(\sigma^{A,i})^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma^{A,i} \sqrt{2(T-t)}} \\ d_2^i &= d_1^i - \sigma^{A,i} \sqrt{2(T-t)} \\ \phi(d) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^d e^{\left(-\frac{x^2}{2}\right)} dx \end{aligned}$$

Debido a que las acciones pueden considerarse como una opción call sobre los activos de la *empresa i*, y con la fórmula (2.4) para valorar opciones entonces se puede definir las acciones de la siguiente manera:

$$E_t^i = A_t^i \phi(d_1^i) - D_t^i e^{(-r(T-t))} \phi(d_2^i) \quad (2.5)$$

Hay que tomar en cuenta que bajo el supuesto que la distribución normal de los retornos de los activos y si adicionalmente se considera que las deudas de una *empresa i* fueran comercializadas en el mercado todos los días, luego la ecuación (2.5) estaría completamente explicada. En la práctica solo el precio de las acciones y algunos tipos de deuda son comercializados por lo que es difícil encontrar una solución a la ecuación (2.5); sin embargo, una solución alternativa es asumir que la estructura de capital de una *empresa i* está formada solamente por las acciones y las deudas de corto y largo plazo.

Aplicando el lema de Ito a la ecuación (2.5) se obtiene la siguiente relación entre volatilidades de los activos y las acciones de la empresa:

$$\begin{aligned} \sigma^{E,i}(E_0^i) &= \frac{A_0^i}{E_0^i} \sigma^{A,i} \phi(d_1^i) \\ \sigma^{E,i}(E_0^i) &= \sigma^{E,i} \end{aligned} \quad (2.6)$$

la ecuación (2.6) indica que si disponemos de información de la volatilidad de las acciones, precios iniciales de los activos y de las acciones entonces podemos inferir en la

volatilidad de los activos, además si disponemos de información histórica de los activos de la *empresa i* entonces se podría resolver la ecuación (2.5), situación que en realidad es aceptable.

De lo anterior podemos inferir en la probabilidad de incumplimiento de una *empresa i* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 p_i &= P [A_T^i < D_i] \\
 &= P \left[A_0^i e^{(\mu^{A,i}T - \frac{(\sigma^{A,i})^2}{2}T + \sigma^{A,i}W_T^i)} < D_i \right] \\
 &= P \left[W_T^i < \frac{\log \left(\frac{D_i}{A_0^i} \right) + \left(\frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} - \mu^{A,i} \right) T}{\sigma^{A,i}} \right] \\
 &= P \left[Z_i < \underbrace{\frac{\log \left(\frac{D_i}{A_0^i} \right) + \left(\frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} - \mu^{A,i} \right) T}{\sigma^{A,i} \sqrt{T}}}_{-DD_i} \right] \tag{2.7}
 \end{aligned}$$

donde

$$Z_i \sim N(0, 1)$$

El cuantil $-DD_i$ es el límite de incumplimiento para la *empresa i*, KMV a este cuantil lo denomina "*distancia al incumplimiento*". Este es el número de desviaciones estándar entre la media de la distribución del valor de los activos y un umbral crítico llamado punto de incumplimiento (*DPT*) el mismo que es igual a las deudas de corto plazo más la mitad de las deuda de largo plazo. Matemáticamente se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
 DD_i &= \frac{\underbrace{E(A_i^t)}_{\text{Valor esperado del retorno de los activos}} - \underbrace{DPT}_{\text{obligaciones de corto y mediano plazo}}}{\underbrace{\sigma^{A,i}}_{\text{volatilidad del retorno de los activos}}} \\
 &= \frac{\ln \left(\frac{A_0^t}{DPT} \right) + \left(-\mu^{A,i} - \frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} \right) T}{\sigma^{A,i} \sqrt{T}}
 \end{aligned}$$

De lo anterior se aprecia que KMV solamente utiliza la fórmula de Black-Scholes para calcular el índice de incumplimiento DD_i de la *empresa i*. Adicionalmente se observa que los supuestos de Merton son violados debido a que en la realidad los activos de las

empresas no son comercializados por lo que la probabilidad de incumplimiento p_i dado por (2.7) es incorrecta. Sin embargo KMV utiliza DD_i para estimar la probabilidad real de incumplimiento de la siguiente manera:

1. Con la información histórica de cada empresa se calcula los DD_i
2. Se agrupan empresas que tengan valores aproximados de DD_i
3. De las empresas que tengan valores aproximados de DD_i se observan cuantas han incumplido, y esta se convierte en la probabilidad real de incumplimiento \hat{p}_i . KMV al \hat{p}_i lo denomina como la *frecuencia de incumplimiento esperado (EDF)*.
4. KMV corrige la DD_i de tal forma que la probabilidad de incumplimiento sea igual a la *EDF* es decir:

$$\begin{aligned} P \left[Z_i < \hat{DD}_i \right] &= \hat{p}_i \\ &= \phi^{-1} \left(-\hat{DD}_i \right) \end{aligned}$$

2.2.3. Distribución de incumplimiento conjunta

En el análisis de un portafolio de crédito es necesario medir la ocurrencia de incumplimientos conjuntos de créditos debido a que permite calcular índices de riesgo tales como la máxima pérdida del portafolio de crédito en un período dado. La distribución de incumplimiento conjunta cuantifica los incumplimientos que puede tener un portafolio y con esto determinar las máximas pérdidas; cuando se supone que la distribución de incumplimiento es normal, esta queda completamente especificada a partir de la correlación entre los incumplimientos de dos créditos i y j (ρ_{ij}), matemáticamente podemos escribir la correlación entre incumplimiento así:

$$\begin{aligned} \rho_{i,j} &= \frac{E(x_i = 1, x_j = 1) - E(x_i = 1)E(x_j = 1)}{\sqrt{Var(x_i)}\sqrt{Var(x_j)}} \\ &= \frac{E(x_i = 1, x_j = 1) - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)}\sqrt{p_j(1-p_j)}} \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para determinar completamente la correlación entre incumplimientos (ecuación 2.8) es necesario conocer la distribución conjunta de incumplimientos, que es igual a

$$E(x_i = 1, x_j = 1) = \int_{-\infty}^{D_i} \int_{-\infty}^{D_j} f_{\rho_{i,j}^A}(x, y) dx dy \quad (2.9)$$

donde $f_{\rho_{i,j}^A}(x, y)$ es la función de densidad normal bivariada estándar del retorno de los activos con coeficiente de correlación $\rho_{i,j}^A$. El modelo KMV utiliza la distribución conjunta entre los activos para cuantificar la dependencia entre incumplimientos, para detallar este proceso, primero revisemos algunos supuestos.

Si utilizamos el hecho que la suma ponderada de M variables aleatorias independientes $((W_t^j)_{t \in [0, T]})_{j=1, \dots, M}$ con Movimiento Browniano estándar sigue también un Movimiento Browniano estándar entonces al precio de un activo tal como se presenta en la ecuación (2.2) se la puede expresar de la siguiente manera

$$dA_t^i = A_t^i (\mu^{A,i} dt + \sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} dW_t^j), \quad i = 1, \dots, N \quad (2.10)$$

y de manera conjunta se puede expresar los precios de los activos a partir de notación vectorial⁷

$$d\bar{A}_t = \bar{A}_t (\bar{\mu}^A dt + \sigma^A d\bar{W}_t). \quad (2.11)$$

Al comparar (2.11) con (2.2) se determina que la solución de (2.10) debe ser:

$$A_t^i = A_0^i e^{(\mu^{A,i} t - \frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} t + \sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} dW_t^j)} \quad (2.12)$$

donde $(\sigma^{A,i})^2$ se define de la siguiente manera

$$(\sigma^{A,i})^2 = \sum_{j=1}^M (\sigma_j^{A,i})^2$$

A partir de la ecuación (2.12) el evento de incumplimiento puede ser descrito así

⁷Un vector se lo puede expresar de la siguiente manera:
 $\bar{x} = (x_1, \dots, x_N)^T$

$$\begin{aligned}
A_T^i &< D_i \Leftrightarrow \sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} dW_T^j < \log\left(\frac{D_i}{A_0^i}\right) + \left(\frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} - \mu^{A,i}\right) T \\
&\Leftrightarrow \sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} \varepsilon_j < \frac{\log\left(\frac{D_i}{A_0^i}\right) + \left(\frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} - \mu^{A,i}\right) T}{\sqrt{T}}, \quad \varepsilon_j \sim N(0, 1) \\
&\Leftrightarrow \frac{\sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} \varepsilon_j}{\sigma^{A,i}} < \frac{\log\left(\frac{D_i}{A_0^i}\right) + \left(\frac{(\sigma^{A,i})^2}{2} - \mu^{A,i}\right) T}{\sigma^{A,i} \sqrt{T}} \\
&\Leftrightarrow \frac{\sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} \varepsilon_j}{\sigma^{A,i}} < DD_i
\end{aligned}$$

Si definimos $Z_i = \frac{\sum_{j=1}^M \sigma_j^{A,i} \varepsilon_j}{\sigma^{A,i}}$, luego se concluye que la distribución conjunta $\bar{Z} \sim N(\bar{0}, \Sigma)$ ⁸, donde $\text{Var}(Z_i)=1$.

Cabe mencionar que las variables $(Z_k)_{k=1,\dots,N}$ son generadas por las mismas variables normales $(\varepsilon_l)_{l=1,\dots,M}$ entonces esto permite incorporar dependencia entre las $(Z_k)_{k=1,\dots,N}$ a partir de la matriz de correlación Σ cuyos elementos están dados por

$$[\Sigma]_{ij} = \frac{\sum_{s=1}^M \sigma_s^{A,i} \sigma_s^{A,j}}{\sigma^{A,i} \sigma^{A,j}} \quad (2.13)$$

Z_i representa retorno del precio del activo estandarizado de la *empresa i*. En la práctica se presentan algunos problemas para estimar las correlaciones entre los retornos de los activos:

1. Falta de información histórica de los valores de los activos
2. Alta carga computacional para un portafolio con N créditos, donde el número de correlaciones a estimar es $\frac{N}{2}(N-1)$, por ejemplo si el número de créditos es 1000 entonces en número de correlaciones es 499 500.

⁸A pesar que los precios de los activos son generados por variables estocásticas independientes que siguen un movimiento browniano estándar, existe correlación entre los precios de los activos siendo estos:

$$\begin{aligned}
[\Sigma]_{ij} &= E(Z_i Z_j) - E(Z_i)E(Z_j) \\
[\Sigma]_{ij} &= \frac{1}{\sigma^{A,i} \sigma^{A,i}} E\left(\sum_{k=1}^M \sigma_k^{A,i} \varepsilon_k \sum_{l=1}^M \sigma_l^{A,j} \varepsilon_l\right) \\
[\Sigma]_{ij} &= \frac{\sigma_i^{A,i} \sigma_j^{A,i}}{\sigma^{A,i} \sigma^{A,i}}
\end{aligned}$$

Una forma de estimar las correlaciones es utilizando un modelo factorial que tiene la siguiente estructura:

$$Z_i = \sum_{j=1}^K a_{ij} R_j + \varepsilon_i \quad (2.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \{(R_j)_j, (\varepsilon_i)_i\} & \text{ son independientes} & (2.15) \\ R_j & \sim N(0, 1), j = 1, \dots, K \\ \varepsilon_i & \sim N(0, d_{ii}), i = 1, \dots, N \end{aligned}$$

la idea principal de los modelos factoriales⁹ es que los retornos de los activos son explicados por un reducido número de factores R_j que son comunes para todas las *empresas* i y por un factor específico ε_i que es único para cada *empresa* i . El número de factores comunes que son explicativos es menor que el número de empresas o créditos del portafolio, se los representa a través de las variables macroeconómicas de un país o con variables de un sector económico en especial.

2.2.4. Distribución de pérdida para un portafolio

Una vez que KMV a estimado la probabilidad de incumplimiento utilizando la *estructura de Merton* y la distribución de incumplimiento conjunta a partir de los *modelos factoriales*, se puede determinar la distribución de pérdida del portafolio de crédito a partir de la simulación de MonteCarlo, y los pasos utilizados son:

1. Definir un portafolio con N créditos o empresas
2. Definir un horizonte de predicción
3. Simular M escenarios para los precios de las acciones del portafolio de crédito a través de la distribución normal conjunta.

⁹En el Apéndice A se detallan los modelos factoriales

4. Simular M escenarios para los incumplimiento X_i del portafolio de crédito aplicando (2.1), donde se compara los precios futuros de las acciones con el índice de incumplimiento DD_i
5. Calcular la pérdida del portafolio de crédito a través del incumplimiento, exposición y severidad, es decir:

$$\underbrace{L_k}_{\text{Pérdida k del portafolio}} = \sum_{i=1}^N \underbrace{X_i^k}_{\text{Incumplimiento}} \underbrace{(1 - r_i^k)}_{\text{Severidad}} \underbrace{E_i^k}_{\text{Exposición}}, \quad k = 1, \dots, M$$

6. Construir la distribución de pérdida del portafolio como una distribución empírica a partir de $\{L_1, \dots, L_M\}$ y a partir de estos calcular las medidas de riesgo como es el VaR y el déficit esperado.

2.3. Modelo de CreditMetricsTM

2.3.1. Generalidades

El modelo CreditMetricsTM fue desarrollado en 1997 por un grupo de instituciones financieras encabezadas por J.P Morgan. Este modelo tiene como propósito estimar el VaR de crédito en el contexto del paradigma de mercado, es decir, el modelo supone que el riesgo de crédito depende de los cambios en la calificación crediticia y de las tasas de incumplimiento de los deudores. De igual manera permite calcular directamente los beneficios de diversificación o identificar altas concentraciones potenciales en el portafolio.

CreditMetricsTM, se denomina un modelo de *marcar a mercado* en donde su componente principal es *la matriz de transición* que está relacionada con el sistema de calificación el cual modela la migración de la calidad de los créditos (Figura 2.2) y donde las matrices de transición son estimadas a partir de información histórica de calificaciones de créditos.

CreditMetricsTM fundamenta la estimación de una distribución de probabilidad de pérdidas y Ganancias crediticias discreta, en lo que se denomina *modelos de migración*.

Los *modelos de migración* es una metodología basada en la estimación futura de la distribución de los cambios del valor del portafolio de préstamos y de productos financieros

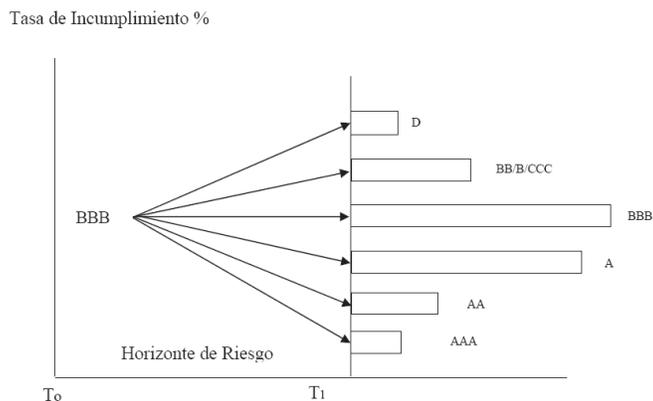


Figura 2.2: Cambio en la calidad crediticia de un bono en un periodo de tiempo

tipo bonos para un cierto horizonte de tiempo, usualmente un año. Los cambios en el valor están relacionados con la mejora o deterioro en la calidad crediticia del deudor así como también toma en cuenta el incumplimiento de los créditos. Esta aproximación se fundamenta en información histórica de la calificación de ciertos bonos que son proporcionados por agencias de calificación o en base a información interna de los bancos. En este modelo como en KMV se modela la dependencia entre los créditos a partir de la correlación entre el retorno de los activos de los créditos, donde la correlación es estimada utilizando los modelos factoriales.

2.3.2. Sistemas de calificación y probabilidades de transición

El ingrediente principal de este modelo es el mapeo de las empresas o créditos en un sistema de calificación¹⁰ donde cada deudor se le califica de acuerdo a la probabilidad que cumpla con sus obligaciones durante un determinado lapso de tiempo. A cada sistema de calificación le corresponde una matriz de transición que indica la probabilidad de migrar de un estado inicial a cualquiera de los estados dentro del sistema a lo largo de un período dado. Una suposición realizada por CreditMetricsTM es que todos créditos que pertenecen a una misma calificación presentan el mismo riesgo de crédito; es decir, estos créditos tiene

¹⁰Es una opinión actualizada sobre la capacidad financiera en general (calidad de crédito) de un emisor para cubrir con sus obligaciones financieras. Esta opinión se centra en la capacidad y voluntad del emisor para hacer frente a sus compromisos financieros o crediticios, en el momento que se presente la obligación de pagarlos sin que se refiera a una obligación específica

Calificación Inicial	Calificación Final (%)							
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C	Default
AAA	90.81	8.33	0.68	0.12	0	0	0	0
AA	0.7	90.65	7.79	0.64	0.06	0.14	0.02	0
A	0.09	2.27	91.05	5.52	0.74	0.26	0.01	0.06
BBB	0.02	0.33	5.95	86.93	5.3	1.17	1.12	0.18
BB	0.03	0.14	0.67	7.73	80.53	8.84	1	1.06
B	0	0.11	0.24	0.43	6.48	83.46	4.07	5.2
C	0.22	0	0.22	1.3	2.38	11.24	64.86	19.79

Cuadro 2.1: Probabilidad de la migración de una calificación de crédito a otra dentro de un año (Matriz de transición)

la misma probabilidad de transición y de incumplimiento.

La calificación crediticia consiste en definir D clases o grupos de créditos A_1, \dots, A_D , donde los primeros $D-1$ grupos describen el posible estado de no incumplimiento de la empresa y se declara que una empresa a incumplido si se encuentra en el estado A_D .

Dentro de los $D-1$ estados de no incumplimiento se identifican al estado A_1 como el que tiene alta calidad crediticia y A_{D-1} el que tiene baja calidad crediticia.

En otras palabras la matriz de transición sirve para estimar la probabilidad de pasar de un estado inicial en el que se encontraba un deudor en un cierto periodo t a otro estado en el período $t+1$.

Por ejemplo, del Cuadro (2.1) se puede apreciar que los créditos que se encuentran en la calificación AAA tienen una probabilidad del 90.81% de mantenerse en la misma calificación durante el próximo año.

Si se denota a X_i^n la calificación o estado que puede tener un *crédito* i en una unidad de tiempo $n\Delta t$, $n \in N$ y toma valores de $\{1, \dots, D\}$ y representan las calificaciones de los créditos, entonces los supuestos utilizados en el modelo de CreditMetricsTM para cuantificar la distribución de pérdida del portafolio se puede expresar de la siguiente manera:

- Los créditos que pertenecen a una misma calificación se consideran créditos homogéneos con la misma probabilidad de transición

$$X_i^n = X_j^n \implies P[X_i^{n+1} = A_k] = P[X_j^{n+1} = A_k]$$

- La probabilidad de transición de los créditos dependen solamente del estado inicial de calificación

$$P[X_i^{n+1} = A_{k_{n+1}} | X_i^n = A_{k_n}] = P[X_i^{n+1} = A_{k_{n+1}} | X_i^n = A_{k_n}, \dots, X_i^0 = A_{k_0}]$$

- Las matrices de transición son estacionarias; es decir no dependen del tiempo

$$P[X_i^{n+1} = A_{k_{n+1}} | X_i^n = A_{k_n}] = P[X_i^n = A_{k_n} | X_i^{n-1} = A_{k_{n-1}}]$$

2.3.3. Estimación del valor futuro un bono simple

Para conocer el valor futuro que puede tener un respectivo bono en un portafolio, se tiene que estimar la distribución del cambio del valor del bono para un horizonte de tiempo dado (por ejemplo un año), hay que tomar en cuenta que el horizonte de tiempo debe ser consistente con la matriz de transición. Para determinar la distribución del cambio del valor del bono se debe estimar el posible valor futuro para todos los posibles eventos de migración.

Del Cuadro (2.1) se observa que para un bono que se encuentra en BBB puede tener en el futuro diferentes estados que van de AAA hasta CCC, donde el evento más probable es que el bono se mantenga en el mismo estado al final del año (Un bono con calificación BBB tiene una probabilidad del 86.96 % de mantenerse en la misma calificación) y otro evento de migración menos probable es que el bono deteriore su calificación (La probabilidad que un bono vaya a BB en un año es del 5.3 %).

Para cada evento de migración de crédito se utiliza las curvas cero cupón para determinar el valor presente del bono. Las curvas cero cupón se utilizan como tasas de descuento de los flujos futuros del bono donde estas tasas son diferentes para cada posible estado futuro de calificación. Se observa del Cuadro (2.1) que la matriz de transición tiene siete estados de créditos que van de AAA (Alta calificación crediticia) hasta C (Baja calificación crediticia) y para conocer el valor presente del bono en un año se tiene que disponer de siete curvas cero cupón, cada una de ellas para cada posible calificación del bono, tal como se observa en el Cuadro (2.2).

Por ejemplo, un bono que tiene un valor principal de 100 usd, tasa cupón del 6 % por cinco años y que su calificación futura en un año será de BBB entonces el valor futuro

Calificación	Año 1	Año 2	Año 3	Año 4
AAA	3.6	4.17	4.73	5.12
AA	3.65	4.22	4.78	5.17
A	3.72	4.32	4.93	5.32
BBB	4.1	4.67	5.25	5.63
BB	5.55	6.02	6.78	7.27
B	6.05	7.02	8.03	8.52
C	15.05	15.02	14.03	13.52

Cuadro 2.2: Curva cero cupón para cada categoría de crédito en un año

Calificación al Final del Año	Valor (\$)
AAA	109.37
AA	109.19
A	108.66
BBB	107.55
BB	102.22
B	98.1
C	83.64
Default	51.13

Cuadro 2.3: Precios futuros en un año para un bono con calificación BBB

para el próximo año es:

$$V_{BBB} = 6 + \frac{6}{1,0410} + \frac{6}{1,0467^2} + \frac{6}{1,0525^3} + \frac{106}{1,0563^4} = 107,55$$

Si se replica este cálculo para los posibles estados del bono, entonces los posibles valores en un año se presentan en el Cuadro (2.3)

Cuando el bono está en el estado de incumplimiento no se supone que se pierde todo el principal, más bien se supone que recupera una parte y se la representa a partir de una *tasa de recuperación* el mismo que depende del tipo de bono. En este caso se supondrá que la tasa de recuperación es del 51.13%. De lo anterior se obtiene la distribución del valor del bono en un año con su respectiva pérdida (Cuadro 2.4), aproximadamente la pérdida que puede tener el bono en un año con un nivel de confianza del 99% será de -23.91 usd.

Calificación al Final del Año	Prob (%)	Precio Futuro (\$)	Cambio en el valor (\$)
AAA	0.02	109.37	1.82
AA	0.33	109.19	1.64
A	5.95	108.66	1.11
BBB	86.93	107.55	0
BB	5.3	102.22	-5.33
B	1.17	98.1	-9.45
C	0.12	83.64	-23.91
Default	0.18	51.13	-56.42

Cuadro 2.4: Distribución del valor de un bono de calificación BBB en un año

2.3.4. Estimación del valor futuro de un portafolio de bonos

Anteriormente se presentó la manera de determinar el valor futuro de un bono, a continuación se centra en la estimación de los cambios potenciales que puede tener un portafolio de crédito cuando estos cambios son generados únicamente por riesgo de crédito.

Un factor importante en la valoración de un portafolio es la correlación entre los cambios de las calificaciones crediticias y los incumplimientos de dos deudores. La correlación entre incumplimientos se espera que sea alta para empresas que pertenecen a la misma industria o se encuentran en la misma región geográfica, adicionalmente la correlación varía de acuerdo al estado de la economía específicamente del ciclo económico. Si la economía se encuentra en una fase de recesión, se esperaría que el valor y la calidad de los activos de una empresa disminuyan y la posibilidad de múltiples incumplimientos aumente sustancialmente. Lo opuesto sucede cuando la economía se comporta bien, en la cual la correlación entre incumplimientos decrece.

De esta manera no podemos esperar que el incumplimiento y la probabilidad de migración de la calidad crediticia de una empresa se mantenga estacionaria en el tiempo. Es claro que se necesita un modelo estructural que relacione los cambios en las probabilidades de incumplimiento con alguna variable en particular. En CreditMetricsTM se determina la dependencia entre la probabilidad de incumplimiento y migración de los créditos a partir de la correlación entre los activos de las empresas, donde el precio de las acciones de la empresas se utiliza como un aproxi del valor de la empresa debido a que no es directamente observable.

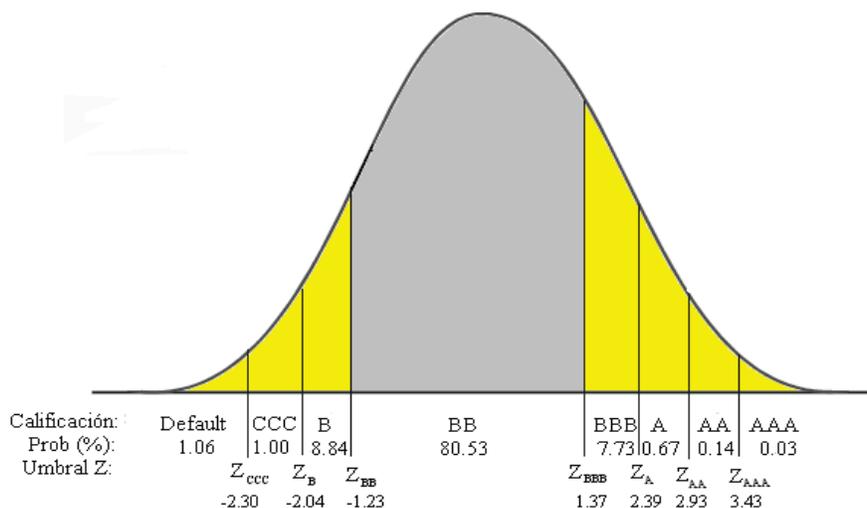


Figura 2.3: Distribución normal estándar del retorno del activo de una empresa con calificación BB

El modelo de Merton es utilizado por CreditMetricsTM para modelar los cambios que puede tener la calidad crediticia de un bono, para hacer, esto se tiene que seguir los siguientes pasos:

1. Dividir en bandas a la distribución normal del retorno de los activos que tiene una calificación inicial
2. El área de cada banda está relacionada con la probabilidad de transición de la calificación inicial a una determinada calificación final
3. Los límites del área de cada banda se relacionan con el fractil de una distribución normal de tal manera que se relaciona la probabilidad de transición con la distribución normal.

En la Figura 2.3 se presenta la distribución estándar del retorno del activo de una empresa, donde el umbral para cada calificación crediticia es calculado a partir de las probabilidades de transición del Cuadro (2.1) donde la empresa tiene una calificación BB. El área que va desde el lado derecho de la distribución hasta el umbral Z_{AAA} corresponde a la probabilidad de que el deudor que se encuentra en la calificación BB pase a AAA en un año y tiene un valor de 0.03%. Luego el área que se encuentra entre los umbrales

Calificación en un Año	Deudor con calificación A		Deudor con calificación BB	
	Probabilidad (%)	Umbral	Probabilidad (%)	Umbral
AAA	0.09	3.12	0.03	3.43
AA	2.27	1.98	0.14	2.93
A	91.05	-1.51	0.67	2.39
BBB	5.52	-2.3	7.73	1.37
BB	0.74	-2.72	80.53	-1.23
B	0.26	-3.19	8.84	-2.04
C	0.01	-3.24	1	-2.3
Default	0.06		1.06	

Cuadro 2.5: Relación entre la probabilidad de transición y los umbrales de calidad crediticia para dos deudores con calificación BB y A

Z_{AA} y Z_{AAA} , corresponde a la probabilidad de mejorar la calidad crediticia de BB a AA. Finalmente el área que va desde el lado izquierdo de la distribución hasta el umbral Z_{CCC} corresponde a la probabilidad que la empresa incumpla que es de 1.06 %.

En el cuadro (2.5) se presenta la relación que existe entre la probabilidad transición y los umbrales de crédito para dos deudores con calificación A y BB respectivamente, donde los umbrales son obtenidos como los fractiles de la distribución normal estándar; por ejemplo, la probabilidad que una empresa que tiene calificación BB pase a A en un año es:

$$\begin{aligned}
 P [X_i^1 = A | X_i^0 = BB] &= p_{A,BB} = \Phi(Z_A) - \Phi(Z_{BBB}) \\
 &= \Phi(2,39) - \Phi(1,37) \\
 &= 0,67 \%
 \end{aligned}$$

Para el caso que una empresa con calificación BB incumpla en un año se puede definir así:

$$\begin{aligned}
 P [X_i^1 = Default | X_i^0 = BB] &= p_{Default,BB} = \Phi(Z_{CCC}) \\
 &= \Phi(-2,30) \\
 &= p [Z < Z_{CCC}] \\
 &= 1,06 \%
 \end{aligned}$$

donde Z_{CCC} es el umbral de incumplimiento en el caso que el retorno del activo de una empresa se distribuya normalmente con media cero y varianza uno. De lo presentado anteriormente se observa como la implementación de Merton permite relacionar las probabilidades de transición con la distribución normal standar de los activos de una empresa, esto logra también cuantificar las correlaciones entre incumplimientos de dos empresas, por ejemplo, la probabilidad conjunta que dos empresas con calificación A y BB incumplan es:

$$\begin{aligned}
 P [X_i^1 = Default, X_j^1 = Default] &= p_{i,j} \\
 &= P [Z_A < Z_{CCC}, Z_{BB} < Z_{CCC}] \\
 &= P [Z_A < -3,24, Z_{BB} < -2,30] \\
 &= \int_{-\infty}^{-3,24} \int_{-\infty}^{-2,3} f_{\rho}(Z_A, Z_{BB}) dZ_A dZ_{BB}
 \end{aligned}$$

Se observa que la distribución conjunta de las calificaciones crediticias de dos empresas se puede expresar a través de la distribución multivariada de los retornos de los activos de las empresas que presentan una correlación ρ . De lo anterior se puede determinar la correlación entre incumplimientos de la siguiente manera:

$$corr(X_i^1 = Default, X_j^1 = Default) = \frac{p_{i,j} - p_i p_j}{\sqrt{p_i(1-p_i)p_j(1-p_j)}} \quad (2.16)$$

De la ecuación (2.16) se observa que el factor que permite determinar la dependencia entre el incumplimiento entre dos deudores es la correlación entre los retornos de los activos de la empresa. De lo anterior se puede decir que para cuantificar la dependencia entre los estados de los créditos de un portafolio, se utiliza la distribución multivariada de los retorno de los activos cuya matriz de correlación es Σ , la misma que es obtenida a partir de los modelos factoriales.

CreditMetricsTM utiliza la simulación de MonteCarlo para determinar la distribución del portafolio de crédito en un horizonte de un año, para lo cual es necesario los siguientes pasos:

1. Determinar los umbrales para los retornos de los activos en cada categoría de calificación.

2. Estimar la correlación entre el retornos de los activos de los deudores.
3. Generar escenarios aleatorios para cada crédito del portafolio a partir de la distribución normal multivariada de los retornos de los activos.
4. Para cada escenario y para cada deudor, mapear los retornos de los activos en los umbrales de cada calificación crediticia y determinar la variación del precio de los bonos del portafolio.
5. Repetir el proceso un número grande de veces es decir 100000 y graficar la distribución del valor del portafolio.
6. Finalmente determinar los índices de riesgo para el portafolio como es el VaR y el déficit esperado con un nivel de confianza específico.

2.4. Modelo de CreditRisk⁺

2.4.1. Generalidades

La incertidumbre es una de las características principales con las cuales debe vivir una institución financiera. Una amplia serie de fenómenos, cuyo comportamiento es impredecible, tiene un impacto directo en el desempeño de dichas instituciones. En el caso de instituciones de seguros, éstas tiene que hacer transferencias de dinero por concepto de accidentes u otros eventos asegurados, por lo que han desarrollado herramientas estadísticas como los *modelos actuaria-les* que son capaces de determinar la pérdida de los instrumentos financieros, lo que permite conocer el nivel de exposición que tiene en sus portafolios de inversión, logrando cuantificar adecuadamente la prima que deben cobrar a sus asegurados para cubrir el nivel de pérdida y tener una rentabilidad adecuada.

El comportamiento del riesgo que enfrenta las empresas aseguradoras es similar a las que tienen los bancos debido al riesgo de crédito, donde las principales similitudes son:

- El *siniestro del seguro* como el *incumplimiento* de un crédito son eventos inciertos.

- En el seguro existe un monto por exposición llamado *monto asegurado* y en el crédito es el *saldo otorgado*
- En un seguro se prevé *reservas por siniestralidad* esperado y en el crédito hace el mismo papel las *provisiones*
- Tanto en la siniestralidad como en el incumplimiento existen factores que les afectan de manera directa.

Debido a la similitud entre el comportamiento de los seguros y de los bancos, actualmente se han utilizando los modelos actuariales para cuantificar el riesgo de crédito de un portafolio, el modelo comercial que se fundamenta en una estructura actuarial es el CreditRisk⁺, y fue desarrollado a inicios de 1997 por Credit Suisse First Boston (CSFB), éste se fundamenta en un modelo de mortalidad de las empresas aseguradas, esto significa que la probabilidad de incumplimiento es estimada a partir de una gran cantidad de datos históricos de incumplimientos de las empresas.

El modelo CreditRisk⁺ es un modelo de impago donde se considera que cada deudor solo puede estar en uno de dos estados al final de un período pudiendo ser estos el incumplimiento o pago del crédito. En el evento de incumplimiento de algun deudor, el acreedor pierde una cantidad fija que constituye la exposición del acreedor al deudor. Los modelos de impago se derivan a partir de conceptos de tipo actuarial y tienen la característica que si se hace algunos supuestos distribucionales y funcionales, permite determinar la distribución de pérdida del portafolio de manera analítica.

El desarrollo de una teoría estadística que explique estos procesos, dentro del contexto de riesgo crediticio, empieza considerando el caso simple de una cartera de crédito que incluyen N deudores a cada uno de los cuáles se les asocia una probabilidad fija de incumplimientos, es decir:

$$p_i = \text{Probabilidad de incumplimiento del deudor } i, i = 1, 2, \dots, N$$

Donde la distribución de pérdida del portafolio se la obtiene de manera indirecta a

través de dos funciones generadoras de probabilidad¹¹ (FGP), la primera corresponde al número de incumplimientos y la segunda son las pérdidas que puede tener la cartera.

2.4.2. Distribución del número de incumplimientos con probabilidad fija

Si la cartera tuviera un solo deudor, lo único que puede suceder es que éste cumpla o incumpla. Por lo tanto, la FGP de incumplimientos¹² para un solo deudor es simplemente:

$$F_i(s) = (1 - p_i)s^0 + p_i s^1 = 1 + p_i(s - 1) \quad (2.17)$$

Debido a que los eventos de incumplimientos se consideran independientes, por lo que la FGP del número de incumplimientos de toda la cartera es el producto de las FGP individuales, es decir:

$$F(s) = \prod_{i=1}^N F_i(s) = \prod_{i=1}^N [1 + p_i(s - 1)] \quad (2.18)$$

Tomando logaritmos a ambos lados de la expresión (2.18) se obtiene:

$$\ln(F(s)) = \sum_{i=1}^N \ln [1 + p_i(s - 1)] \quad (2.19)$$

si se tiene que las probabilidad de incumplimientos son pequeñas, entonces se puede decir que:

$$\ln [1 + p_i(s - 1)] = p_i(s - 1)$$

este es el gran supuesto que utiliza CreditRisk⁺ para determinar la FGP del número de incumplimientos, y significa que *mientras la probabilidad de incumplimiento sea pequeña se puede ignorar el hecho de que un deudor incumpla más de una vez en un período de tiempo dado.*

¹¹En el apéndice B se detalla las propiedades de la función generadora de probabilidad y su relación con las funciones de distribución.

¹²La FGP del número de incumplimientos se define como: $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Prob}(n \text{ incumplimientos})s^n$

A partir del anterior supuesto se puede escribir la expresión (2.19) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\ln(F(s)) &= \sum_{i=1}^N p_i(s-1) \\ F(s) &= e^{\sum_{i=1}^N p_i(s-1)} \\ F(s) &= e^{\mu(s-1)}\end{aligned}\tag{2.20}$$

donde $\mu = \sum_{i=1}^N p_i$

La expresión (2.20) corresponde a la FGP de la distribución de Poisson con parámetro μ , por lo que el número de incumplimientos siguen una distribución de Poisson

$$\text{Prob}(n^\circ \text{ de incumplimientos}=n) = \frac{1}{n!} \mu^n e^{-\mu}$$

De la probabilidad anterior se observa que no aparece el número total de deudores ni las probabilidades de incumplimiento de cada deudor por lo que el único parámetro a utilizar es la tasa promedio de incumplimientos en una unidad de tiempo, que es la suma de las probabilidades de incumplimientos de los deudores.

2.4.3. Distribución de las pérdidas de la cartera con probabilidad fija

La distribución de pérdidas es necesariamente diferente a la del número de impagos, ya que ésta depende del supuesto de que la probabilidad de incumplimiento sea pequeña, sin embargo este supuesto no se puede utilizar para las pérdidas debido a que puede existir pérdidas relativamente pequeñas como pérdidas que representan un alto porcentaje de la cartera total. Por ejemplo, una pérdida de \$100,000 puede ser consecuencia del incumplimiento de un individuo que debe esta cantidad o del incumplimiento de 10 deudores que deben \$10,000 cada uno. De lo anterior se puede mencionar que el conocimiento de la forma en que están distribuidos los diferentes niveles de exposición entre los diferentes deudores que componen la cartera es indispensable para obtener la distribución de las pérdidas del portafolio.

En CreditRisk⁺, el artificio matemático que utiliza para obtener una expresión cerrada de la distribución de pérdidas, es agrupar a las pérdidas en bandas de exposición. Aunque esta agrupación introduce errores de redondeo en la estimación de la distribución, esto facilita el desarrollo del modelo y reduce significativamente el número de datos requeridos para realizar los cálculos. Además, si el número de niveles de exposición es grande y el ancho de las bandas es pequeño, en relación con el tamaño de la exposición promedio de la cartera, el error introducido es despreciable.

Para dividir las pérdidas en bandas de exposición, se supone que la pérdida al incumplimiento de un *deudor* i (LGD_i) es modelado como una fracción constante del tamaño del crédito, CreditRisk⁺ supone que este valor es expresado como un múltiplo de una unidad base de pérdida (por ejemplo, puede ser un millón de dólares). Lo anterior se puede expresar de la siguiente manera

$$LGD_i = \lambda_i L_i$$

$$LGD_i \approx v_i v_0$$

donde

L_i = Tamaño del préstamo del deudor i

λ_i = Porcentaje de pérdida esperado al incumplimiento (severidad)

v_0 = Unidad de pérdida

v_i = Redondeo $\left(\frac{\lambda_i L_i}{v_0} \right)$

luego v_i simboliza el valor entero más cercano a $\frac{\lambda_i L_i}{v_0}$ y el LGD puede ser expresado como múltiplo de la unidad de pérdida predefinida, los diferentes múltiplos de pérdidas constituyen las bandas de exposición de los créditos.

Para aclarar la forma como CreditRisk⁺ divide las pérdidas en bandas, se supone que se dispone de 25 créditos, los que están calificados dentro de siete estados los que les corresponde su respectiva severidad tal como se observa en el cuadro (2.6).

Si se considera arbitrariamente que la unidad de pérdida es \$500 ($v_0 = 500$), entonces para un crédito que tiene un monto de \$4728 (L_i) y una calificación de AAA, la pérdida

N° de créditos	CALIFICACIÓN						
	AAA	AA	A	BBB	BB	B	C
1	\$4,728	5528	\$3,138	\$5,320	\$1,800	\$1,933	\$358
2	\$7,728	5848	\$3,204	\$5,765	\$5,042	\$2,317	\$1,090
3			\$4,831	\$20,239	\$15,411	\$2,411	\$2,652
4			\$4,912			\$2,598	\$4,929
5			\$5,435				\$6,467
6							\$6,480
Total	\$12,456	\$11,376	\$21,520	\$31,324	\$22,253	\$9,259	\$21,976
Severidad	20 %	72 %	25 %	30 %	45 %	65 %	80 %

Cuadro 2.6: Monto de 25 créditos calificados de AAA hasta C

al incumplimiento es:

$$\begin{aligned}
 v_1^{AAA} &= \lambda_i L_i \\
 &= 20 \% \times 4728 = 945,16 \\
 &\approx v_i v_0 \\
 v_i &= \text{Redondeo} \left(\frac{20 \% \times 4728}{500} \right) \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

La pérdida al incumplimiento del crédito es de \$945.16 o de manera equivalente si se utiliza la notación de CreditRisk⁺ es dos unidades de pérdida, donde la unidad de pérdida vale \$500.

En la Figura 2.4 se observa la frecuencia de las pérdida al incumplimiento de los 25 créditos, donde las pérdidas de dos y tres unidades tienen mayor frecuencia, y la mayor pérdida es de 14 unidades, que corresponde a un crédito con calificación C. La notación de CreditRisk⁺ permite dividir las pérdidas de los créditos en bandas o grupos homogéneos, donde en cada grupo tienen créditos con diferente nivel de riesgo pero el mismo nivel de exposición logrando que sea más fácil el análisis de las pérdidas de los créditos de un portafolio.

Para determinar la distribución de pérdida del portafolio, se sigue los siguientes tres pasos que se detallan a continuación.

Paso 1: Función Generadora de Probabilidad de cada banda: La FGP de pérdida de cada banda j es definida como:

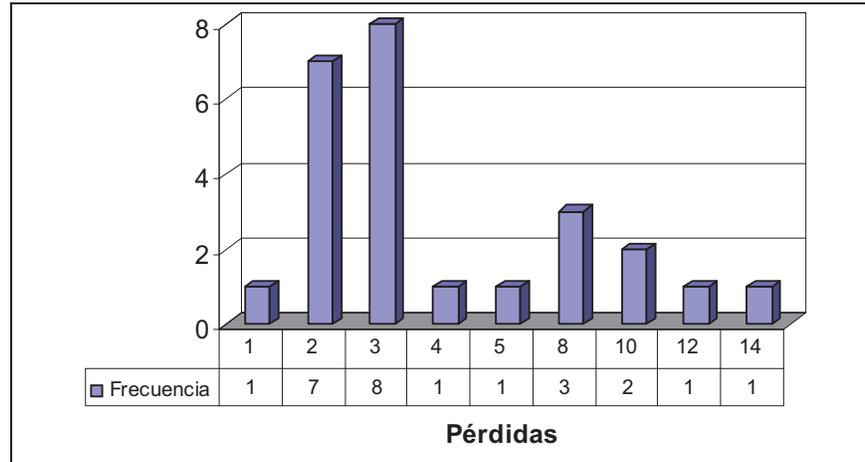


Figura 2.4: Histograma de las pérdidas de los créditos a partir de la estructura de CreditRisk⁺

$$G_j(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \Pr(\text{Pérdida} = m) z^m \quad (2.21)$$

dado que la pérdida m puede ser expresada como múltiplo de una unidad de pérdida v_i , luego la pérdida m es igual a

$$m = nv_j$$

de tal manera que la probabilidad de que se pierdan nv_j unidades en la banda j es igual a la probabilidad de que n deudores incumplan, de esta manera la FGP de pérdida de la *banda j* puede ser obtenida a partir de la probabilidad de n incumplimientos:

$$\begin{aligned} G_j(z) &= \sum_{m=0}^{\infty} \Pr(\text{Pérdida} = nv_j) z^{nv_j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr(N^o \text{ de incumplimientos} = n) z^{nv_j} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \mu_j^n e^{-\mu_j} z^{nv_j} \\ &= e^{-\mu_j + \mu_j z^{v_j}} = e^{\mu_j (z^{v_j} - 1)} \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde μ_j es la tasa promedio del número de incumplimientos en la *banda j*.

Paso 2: Función Generadora de Probabilidad del Portafolio

A partir del supuesto de que cada banda puede ser vista como un portafolio de exposiciones, y es independientes de otras bandas, la FGP del portafolio total es simplemente el producto de las FGP de cada banda:

$$\begin{aligned} G(z) &= \prod_{j=1}^M e^{-\mu_j + \mu_j s_j^{v_j}} \\ &= \exp\left(-\sum_{j=1}^M \mu_j + \sum_{j=1}^M \mu_j z^{v_j}\right) \end{aligned} \quad (2.23)$$

donde $\mu = \sum_{j=1}^M \mu_j$ representa el número esperado de incumplimientos de todo el portafolio.

Paso 3: Función de distribución del Portafolio

A diferencia de la distribución del número de incumplimientos que se conoce la distribución del número de incumplimientos, para el caso de las pérdidas no se sabe la forma de la distribución de probabilidad de que se pierda "*n unidades L*" en la cartera total de créditos, sin embargo se la puede obtener mediante la expansión de Taylor, tal como se aprecia a continuación:

$$Prob(Pérdida = nL) = \frac{1}{n!} \frac{d^n G(z)}{dz^n}, n = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

Las distribución de las pérdidas tienen dos componentes de incertidumbre, el comportamiento de Poisson del número de incumplimientos y la aleatoriedad de las pérdidas dado el incumplimiento; sin embargo, esta incertidumbre puede ser estimada a partir del *número esperado de incumplimientos* (μ_j) y la *pérdida esperada* (ε_j) de cada banda j , logrando deducir una fórmula recursiva para obtener las probabilidades de pérdida de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} Prob(Pérdida = nL) &= \frac{1}{n} \sum_{\{j|v_j \leq n\}} \varepsilon_j Prob(Pérdida = (n - v_j)L) \\ Prob(Pérdida = 0) &= e^{-\mu} \end{aligned} \quad (2.25)$$

Para clarificar como se estima la distribución de pérdida de un portafolio, se supone que se tiene un portafolio con 25 créditos con sus respectivas calificaciones crediticias, (Cuadro

Pérdida	Nº de deudores	ε_j	μ_j
1	1	0.198	0.198
2	7	0.211	0.422
3	8	0.212	0.637
4	1	0.198	0.792
5	1	0.011	0.053
8	3	0.198	1.583
10	2	0.396	3.958
12	1	0.002	0.022
14	1	0.011	0.148
TOTAL		1.436	7.812

ε_j :Pérdida esperada en la *banda j*

μ_j :Número esperado de incumplimientos en la banda j

Cuadro 2.7: Número esperado de incumplimientos en cada banda del portafolio

2.6), para determinar la distribución de pérdidas se estima para cada banda de pérdida el número esperado de impagos y la pérdida esperada por cada banda.

Del Cuadro (2.7), se puede resumir que el número esperado de incumplimientos de la cartera es de 1.4336, correspondientes a una pérdida esperada de 7.812 unidades de pérdidas. Multiplicando por la unidad de \$500, la pérdida esperada de la cartera es de \$3906.

Utilizando la ecuación recursiva (2.25), se determina la distribución de pérdida del portafolio, por ejemplo del Cuadro (2.8) se presenta las probabilidades para cada banda de pérdida, de tal manera que a partir de esta información se puede observar que la máxima pérdida del portafolio con un nivel de confianza del 83.61 % es de 14 unidades de pérdidas (\$7000).

2.4.4. Distribución de las pérdidas de la cartera con probabilidad variable

Anteriormente se estimó la distribución de pérdida de un portafolio a partir del supuesto que las probabilidades de incumplimientos son fijas; para obtener un modelo que tenga un comportamiento más real se supone que estas probabilidades dependen de

Unidad de Pérdida	Prob de pérdida	Prob Acumulada
0	23.80 %	23.80 %
1	4.71 %	28.51 %
2	5.48 %	33.99 %
3	6.07 %	40.07 %
4	6.34 %	46.40 %
5	2 %	48.86 %
6	2 %	50.80 %
7	2 %	52.31 %
8	5.71 %	58.02 %
9	1.42 %	59.43 %
10	10.82 %	70.25 %
11	3.27 %	73.52 %
12	3.93 %	77.45 %
13	2.96 %	80.41 %
14	3.20 %	83.61 %

Cuadro 2.8: Distribución de pérdida de un portafolio de 25 créditos

ciertos factores exógenos que representan la actividad de los sectores económicos, es decir que el comportamiento de un crédito se modelan a través de una variables aleatoria de Bernoulli X_i con probabilidad de incumplimiento p_i estocástico y que su comportamiento es explicado por K factores de riesgo R_1, \dots, R_K , donde estos factores son independientes y siguen una distribución Gamma, además para relacionar p_i con los factores de riesgo se utiliza un modelo factorial así:

$$p_i = \bar{p}_i \sum_{j=1}^K a_{ij} R_j, i = 1, \dots, N$$

y

$$(R_j)_j \sim \text{Gamma}(1, \sigma_j^2)$$

$$\sum_{j=1}^K a_{ij} = 1$$

Es claro que los pesos de los factores a_{ij} miden la sensibilidad del *crédito* i con el factor de riesgo R_j . Utilizando las propiedades de las funciones generadoras de probabilidad se determina la distribución de número de incumplimientos condicionado a los factores de

riesgo así:

$$\begin{aligned} F(s \mid R) &= \prod_{i=1}^N F_i(s) \\ &= e^{\mu(s-1)}, \quad \mu = \sum_{i=1}^N p_i \end{aligned}$$

Dado que los factores de riesgo siguen una distribución Gamma, la FGP incondicionada del número de incumplimientos es:

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_{R^+} \cdots \int_{R^+} F(s \mid R = (r_1, \dots, r_K)) f_1(r_1) \cdots f_K(r_K) dr_1 \cdots dr_K \\ &= \prod_{j=1}^K \left(\frac{1 - \delta_j}{1 - \delta_j s} \right)^{\frac{1}{\delta_j^2}}, \quad \delta_j = \frac{\sigma_j^2 \mu_j}{1 + \sigma_j^2 \mu_j} \text{ y } \mu_j = \sum_{i=1}^N \bar{p}_i a_{ij} \end{aligned}$$

la FGP de las pérdidas condicionadas se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} G(z \mid R) &= F(s^{v_i} \mid R) \\ &= \prod_{j=1}^M G_j(z \mid R) \\ &= \exp \left(\sum_{j=1}^K R_j \left(\sum_{i=1}^N \bar{p}_i a_{ij} (s^{v_i} - 1) \right) \right) \end{aligned}$$

Y dado que las distribuciones de los factores de riesgo siguen una ley Gamma entonces la FGP de las pérdidas no condicionada se obtiene integrando con respecto a los factores de riesgo de tal manera que resulta:

$$G(z) = \prod_{j=1}^K \left(\frac{1 - \delta_j}{1 - \delta_j P_j(s)} \right)^{\frac{1}{\delta_j^2}}, \quad P_j(s) = \frac{1}{\mu_j} \sum_{i=1}^N \bar{p}_i a_{ij} s^{v_j},$$

para determinar la distribución de pérdida se utiliza la aproximación de Taylor

2.5. Resumen de los modelos

Desde un punto de vista matemático, el KMV y el modelo CreditMetricsTM son lo mismo siempre y cuando restrinjamos al CreditMetricsTM a un portafolio de pérdidas

para un período. En ambas aproximaciones se considera que el retorno del logaritmo de los activos siguen una distribución normal multivariada, además una empresa cae en incumplimiento en el período T siempre y cuando el valor de los activos cae muy por debajo de un cierto umbral o equivalentemente cuando el logaritmo estandarizado del retorno de los activos cae por debajo de un punto de incumplimiento $-DD$.

En ambos modelos la estimación de las correlaciones del logaritmo de los retornos de los activos utilizan los modelos factoriales. Debido a esta equivalencia matemática entre estos modelos, se puede decir que los modelos descritos en este capítulo se pueden resumir en KMV/CreditMetricsTM y CreditRisk⁺ donde las principales características son:

- KMV/CreditMetricsTM

$$\begin{aligned}
 Z &= \text{Retorno de los activos estandarizado} \\
 &\sim N(0, \Sigma), \Sigma = \text{Matriz de correlaciones} \\
 Z_i &= \sum_{j=1}^K a_{ij} R_j + \varepsilon_i \text{ (Modelo Factorial)} \\
 X_i &= \text{Indicador de incumplimiento de la empresa } i \\
 &= I_{\{z_i < DD_i\}} = I_{\{z_i < \phi^{-1}(p_i)\}} \\
 p_i &= \text{Probabilidad de incumplimiento de una empresa } i
 \end{aligned}$$

- CreditRisk⁺

$$\begin{aligned}
 X_i &= \text{Indicador de incumplimiento de la empresa } i, X_i \sim \text{Bernoulli}(p_i) \\
 p_i &= \bar{p}_i \sum_{j=1}^K a_{ij} R_j, \text{ (Modelo Factorial), } \sum_{j=1}^K a_{ij} = 1 \\
 \bar{p}_i &= \text{Probabilidad de incumplimiento promedio de la empresa } i
 \end{aligned}$$

Capítulo 3

Modelo CyRCE

3.1. Introducción

En la actualidad existen dos grandes enfoques que permiten medir el riesgo de crédito siendo éstos los modelos de *impago o incumplimiento* y los de *marcar a mercado*; la diferencia entre éstos se presenta básicamente por la forma en que se consideran las pérdidas.

En los *modelos de impago*, un deudor sólo puede estar en uno de dos estados: pago o impago, y las pérdidas que resulten solo se deben a los incumplimientos del deudor, mientras que en los *modelos de marcar a mercado* adicionalmente se consideran las pérdidas resultantes del cambio en el valor de los créditos, debido a la migración de la calidad de los mismos. Sin embargo, las mayores diferencias entre ambos enfoques obedecen a la forma en que se conjugan los distintos elementos del riesgo de crédito para obtener la distribución de probabilidades de pérdidas; por ejemplo, *CreditMetricsTM*, es considerado como un modelo de marcar a mercado, en donde el componente principal es la matriz de transición relacionada con un sistema de calificación, misma que permite medir el cambio en la calidad crediticia de un crédito, dando como resultado un mecanismo de probabilidades que modela la migración de la calidad de los créditos.

Cabe señalar que en mercados emergentes donde la cultura de riesgos es incipiente, la utilización de los modelos de marcar a mercado (*CreditMetricsTM*) y los de incumplimiento (*CreditRisk⁺*) necesitan de un esfuerzo adicional en su elaboración debido a que fueron

desarrollados en países con sistemas financieros altamente desarrollados donde la información es de fácil acceso en sus mercados considerándose como paradigmas tradicionales para medición de riesgo de crédito; mientras que, en mercados emergentes la información requerida para estos modelos, es generalmente escasa, de mala calidad e incompatible con los requerimientos de estos modelos.

Adicionalmente, los paradigmas de riesgo de crédito mencionados se centran principalmente en obtener la distribución de pérdidas de un portafolio de crédito empleando metodologías estadísticas complejas; sin embargo, el administrador de riesgos, se interesa en un modelo que además de medir la distribución de pérdidas, le permita gestionar el riesgo a partir de reglas simples para establecer *suficiencia de capital, identificar segmentos que presenten las mayores concentraciones de riesgos y establecer límites individuales para los créditos relacionados con el perfil de riesgos del portafolio*. Bajo esta perspectiva existen escasos modelos que cumplen con estos requerimientos, como es el caso del modelo “*Capitalización y Riesgo de Crédito*” (CyRCE) motivo de desarrollo del presente capítulo.

3.1.1. Visión general del Modelo CyRCE

El modelo de impago denominado “*Capitalización y Riesgo de Crédito*” (CyRCE), desarrollado por el Phd. en Ciencias Matemáticas, Javier Márquez Diez Canedo, Gerente de Riesgos del Banco de México y que será objeto de aplicación en el presente capítulo, es una buena alternativa para mercados emergentes en donde la problemática está definida alrededor de la limitación en la información; además de que es una herramienta que brinda apoyo en la administración de riesgos y que permite solucionar el problema de cómo utilizar la distribución de probabilidad de pérdida para *identificar dimensiones de concentración de riesgo excesivo y fijar límites de crédito* a partir de una medida de riesgo que para este caso es el Valor en Riesgo (VaR) de una cartera de créditos.

En el negocio bancario, el principal activo productivo es la cartera de créditos, por consiguiente es necesario una adecuada administración de la misma que conlleve entre otros, a obtener una valoración acertada de la tasa de interés del crédito, en la cual debería estar implícito la rentabilidad para el banco, los riesgos, los costos y los gastos, etc.; siendo el riesgo uno de los factores fundamentales por determinar.

En una cartera de créditos, el principal riesgo que se presenta es cuando el deudor no cancela el saldo del crédito ya que puede convertirse en pérdida y por tanto, el banco debe tener un resguardo para cubrirla. Tal resguardo está constituido por las *provisiones por incobrabilidad y por capital*; mismas que el banco logra constituir adecuadamente si se conociese *a priori* el comportamiento de las pérdidas en la cartera de créditos, siendo este un objetivo esencial de los administradores de riesgos y académicos en los últimos tiempos. En este sentido, el modelo CyRCE es uno de los modelos de riesgo de crédito que se ha desarrollado en los últimos años y permite evaluar de manera precisa la suficiencia del capital y provisiones por incobrabilidad de una cartera crediticia de un banco, para lo cual compara el VaR de dicha cartera a un determinado nivel de confianza y horizonte de tiempo¹ con las *provisiones por incobrabilidad más el capital*, de tal manera que el banco puede medir el riesgo asumido a un nivel de confianza dado. Con esto, se logra encontrar una regla explícita que relacione el riesgo de crédito con la suficiencia de capital y provisiones que es uno de los temas más importantes tanto para los reguladores como para los administradores de riesgo.

Por otro lado, este modelo supone que la distribución de pérdida de la cartera presenta una forma funcional misma que puede ser caracterizada por dos parámetros siendo estos la media y la varianza; así, en este modelo el VaR puede establecerse como la suma de la *pérdida esperada* más un cierto múltiplo de la desviación estándar de las pérdidas (*pérdida inesperada*). Este valor de riesgo de crédito así definido, se adopta como cota inferior al importe de capital y provisiones por incobrabilidad de la cartera de créditos que debe mantener un banco para que exista suficiencia de capital y provisiones; es decir, lo que se requiere es que las pérdidas esperadas e inesperadas estén cubiertas como mínimo por capital y provisiones por incobrabilidad de la cartera de créditos.

Cabe hacer notar que cuando se refiere a suficiencia de capital, el modelo CyRCE puede considerar en su análisis al capital contable, el regulatorio o el económico; de tal manera que de acuerdo al tipo de capital, el banco puede medir el riesgo específico asumido. Además la comparación entre el VaR y la suficiencia de capital y provisiones permite establecer una relación explícita entre el requerimiento de capital, provisiones y el riesgo

¹Usualmente el horizonte de tiempo utilizado para medir la máxima pérdida de un portafolio a un cierto nivel de confianza es un año, ref [31].

de crédito.

En el modelo CyRCE, el VaR puede definirse como una expresión cerrada, la cual permite descomponer al riesgo en dos elementos esenciales siendo estos la *probabilidad de incumplimiento individual de los créditos* y la *concentración* en la cartera de créditos, donde la concentración por número de créditos es un factor que afecta al riesgo de crédito de la cartera debido a la existencia de correlación entre incumplimientos.

Por tanto, se puede concluir entonces que el modelo CyRCE logra que el banco puede atender los siguientes problemas:

1. Concentración de riesgos
2. Determinación adecuada de límites de los créditos a partir de una medida de concentración.
3. Medición del requerimiento de capital y provisiones en función del riesgo asumido
4. Planificación crediticia para cada segmento de crédito.

Este último punto se refiere a que este modelo permite: analizar los diferentes segmentos de créditos logrando establecer límites individuales diferenciados por segmento, obtener una medida de concentración del riesgo para cada segmento, establecer el requerimiento de capital y provisiones por segmento de crédito.

Entre las ventajas del modelo tenemos que se lo puede implementar con *información limitada* y por tratarse de expresiones cerradas es bastante *económico en el uso de recursos de cómputo* con relación a los demás paradigmas ya que los cálculos se reducen a multiplicaciones de matrices.

Para desarrollar un modelo de crédito CyRCE capaz de representar de manera adecuada el comportamiento de las pérdidas de la cartera, se empieza con el modelo *CyRCE básico* el que supone que todos los créditos tienen la misma probabilidad de incumplimiento y son independientes; luego se presenta el modelo *CyRCE intermedio* el cual mantiene el supuesto de que los créditos tienen la misma probabilidad de incumplimiento y se incorpora la dependencia entre los créditos a través del supuesto de que todos los créditos tiene la misma correlación; finalmente se presenta el modelo *CyRCE Avanzado* donde los

créditos tienen diferentes probabilidades de incumplimiento y correlación para lo cual se parte de una segmentación arbitraria de la cartera. Este modelo *CyRCE avanzado* se obtiene sin que sufran cambios significativos las expresiones de Valor en Riesgo, suficiencia de capital, concentración y límites de los créditos establecido en el modelo CyRCE básico. Antes de presentar estos modelos CyRCE, primeramente se abordará la concentración en carteras crediticias debido a la importancia que tiene ésta en la medición del riesgo de una cartera.

A pesar de que el modelo CyRCE es desarrollado para mercados emergentes donde existe ausencia de información, el autor Javier Márquez (2002) para validar los resultados que arroja este modelo, realiza una comparación con los modelos tradicionales de medición de riesgo de crédito ($\text{CreditMetrics}^{TM}$ y CreditRisk^+) y al respecto señala que bajo ciertas equivalencias paramétricas el modelo CyRCE arroja resultados similares que CreditRisk^+ y $\text{CreditMetrics}^{TM}$, donde la distribución de pérdidas producida por CyRCE es más centrada que la de los otros dos modelos. En general, tiene menos peso en el rango bajo de pérdidas que $\text{CreditMetrics}^{TM}$ y menos peso en el rango alto de pérdidas que Credit Risk^+ . De la comparación de los tres métodos, Javier Márquez concluye que pese a encontrar diferencias en las distribuciones, sobre todo en las colas, los montos no son diametralmente distintos y apuntan siempre en el mismo sentido.

3.1.2. La concentración en el riesgo de crédito

Una concentración de riesgo se refiere a una exposición que podría causar pérdidas que pudieran amenazar la solvencia o capacidad de mantener las operaciones centrales de una institución financiera. Las concentraciones de riesgo pueden surgir en los activos, pasivos o ítems fuera de la hoja de balance de un conglomerado, a través de la ejecución o el procesamiento de transacciones (productos o servicios), o a través de una combinación de exposiciones en estas categorías. El potencial de pérdidas refleja el tamaño de la condición y el alcance de la pérdida en caso de cierta circunstancia adversa. Las concentraciones de riesgo pueden adoptar diferentes formas, incluyendo exposiciones a:

- a) Contrapartes individuales;

- b) Grupos de contrapartes individuales o entidades relacionadas;
- c) Contrapartes en lugares geográficos específicos;
- d) Sectores específicos;
- e) Productos específicos;
- f) Proveedores de servicios; y
- g) Desastres naturales o catástrofes.

En este caso, la concentración se refiere a la que puede suceder en una cartera de créditos de una institución financiera en donde un factor de riesgo es la concentración, ya que es un problema que ha participado como componente de las crisis bancarias ocurridas desde la gran depresión de los años treinta hasta la actualidad.

La concentración en carteras de crédito es un problema difícil de atacar; es así que, el único modelo que hace explícito el componente de concentración en una cartera de crédito es el CyRCE.

A pesar de la importancia de la concentración en una cartera crediticia, en la literatura contemporánea, no se ha materializado paradigmas generalmente aceptados para *medir la concentración* en una cartera crediticia debido a que cuando se habla de concentración se puede referir a más de un concepto; es decir, personas, regiones geográficas, mercados, industrias, etc., con lo que si cada crédito es relativamente pequeño y si hay demasiados créditos otorgados en una sola región geográfica o en un solo mercado o industria, la excesiva asignación de crédito en alguna de estas dimensiones puede resultar riesgosa. En otras palabras lo que se intenta decir es que, *si las probabilidades de incumplimiento de los deudores de cierto segmento están altamente correlacionadas, aunque cada crédito sea realmente muy pequeño, el segmento presenta un potencial riesgo por alta concentración.*

Otra razón por la que no se han planteado medidas de concentración, se debe a que es difícil concebir una sola medida que englobe todas las dimensiones de riesgo de concentración en un solo número.

Así, el enfoque que se dará a la concentración no resuelve todos estos problemas sino permitirá medirla *ex-ante*. Esta medida se relaciona directamente con el riesgo de

crédito expresado en términos usados por los administradores de riesgo. Kealhofer (1998) señala que "*...ex-ante ningún método ha sido creado para cuantificar concentración, la concentración solo ha sido detectada ex-post*".

En lo que respecta a la concentración en general como un problema de riesgo, los conglomerados financieros (grupos de entidades financieras: bancos, seguros, valores, etc.) están promoviendo técnicas analíticas para identificar, medir, monitorear y controlar las concentraciones de riesgo. Algunas de las técnicas más importantes utilizadas en este momento en algunos conglomerados son los stress tests (tests de tensión económica) y el análisis de escenarios, muchas veces basadas en modelos. Estas técnicas evalúan el impacto de eventos negativos, como puede ser cambios grandes en los valores de mercado, bajas en la solvencia, o desastres naturales en entidades reguladas individuales o el conglomerado en su total. Los escenarios reflejan la experiencia histórica o se centran en los elementos vulnerables específicos identificados por los administradores de riesgos de la empresa. Los stress tests también implican tests sistemáticos del potencial de pérdida en una serie de cambios grandes en factores clave de riesgo. Todo esto debido a que podría ser que diferentes entidades dentro del conglomerado estén expuestas a los mismos factores de riesgo o factores de riesgo parecidos, o a factores de riesgo que no parecen estar relacionados, pero que podrían ser interactivos bajo algunas circunstancias de tensión inusual.²

3.2. Modelo CyRCE Básico

La concentración en los créditos de un banco ha sido identificada como una de las fuentes principales de riesgo de crédito; así, para controlar este riesgo, el administrador debe fijar límites a los montos de crédito en cada segmento del negocio. Normalmente este límite se especifica como una proporción δ del capital K ; sin embargo, esta política de mitigación de concentración no es la adecuada ya que pueden suceder los siguientes casos extremos donde se pueden tener carteras muy concentradas o altamente diversificadas:

1. El banco puede tener todo el crédito otorgado a un solo deudor sin que este crédito exceda la proporción del capital que exige el límite pero bajo cualquier criterio

²Para mayor detalle dirigirse al documento Principios sobre Concentraciones de Riesgo [18].

representaría una *cartera totalmente concentrada*³.

2. El banco puede tener un millón de créditos del mismo tamaño en cuyo caso su *cartera estaría totalmente diversificada*⁴, independientemente de que cada crédito respete o no el límite.

Así, cualesquiera que sean las virtudes de establecer límites como porcentaje del capital, no ayuda mucho para identificar la concentración del crédito de una cartera, por lo que se debe hacer a un lado la tradición y asignar los límites de los créditos como una proporción θ del valor de la cartera total V , ya que una cartera compuesta de créditos con montos iguales corresponde a una cartera diversificada.

Sin embargo, esta nueva asignación del límite para el k -ésimo crédito (f_k) a partir del volumen de la cartera, resulta exactamente igual que establecer el límite del crédito como una proporción δ del capital K , siempre y cuando se considere la razón de capitalización del banco ψ , como se aprecia a continuación:

$$\begin{aligned} f_k &\leq \delta K = \delta \frac{K}{V} V \\ &\leq \delta \psi V \\ &\leq \theta V \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $k = 1, \dots, N$, y N representa el número total de créditos de la cartera.

Por lo que en adelante se considera que *el límite sobre el tamaño de los créditos se fija en función del volumen de la cartera V del banco y no de su capital K .*

Para entender de mejor manera el impacto del riesgo de concentración sobre un portafolio de crédito y las pérdidas producidas por este riesgo, se empezará realizando los siguientes supuestos en el modelo de impago:

- La probabilidad de que incumpla cualquiera de los créditos es la misma, y
- existe independencia entre el incumplimiento de los créditos.

³Por ejemplo, si en un banco con 100 millones de dólares de capital, los créditos están limitados a no exceder el 12% del capital, esto puede hacerse con solo un crédito de 12 millones, en cuyo caso la concentración es máxima.

⁴Por ejemplo, si la cartera tiene 100 mil créditos y cada uno de estos no excede el 12% del capital, entonces la cartera es altamente diversificada.

A primera vista estos supuestos aparentan ser irreales; sin embargo, permiten obtener resultados que relacionan la concentración con la suficiencia de capital y provisiones, y pérdidas del portafolio; los cuales se mantiene en los posteriores modelos de impago a pesar de que se relajan estos supuestos⁵.

3.2.1. Modelo CyRCE para una cartera con créditos de igual tamaño

Este modelo de impago cuantifica la pérdida máxima que puede tener un portafolio de créditos en un horizonte de tiempo y nivel de confianza determinados (Valor en Riesgo), por lo que para su cálculo se debe emplear las siguientes condiciones:

- a) La máxima concentración que se puede tener en un portafolio de créditos, respetando el límite (θV) asignado, es cuando se concentra todo el crédito (V) en un mínimo número de créditos n , lo que se puede representar así:

$$f_k = \begin{cases} \theta V; & k = 0, 1, 2, 3, \dots, n \\ 0; & k = n + 1, n + 2, \dots, N \end{cases} \quad (3.2)$$

donde

$$n\theta V = V$$

En lo que sigue se supone que n es siempre un número entero.

- b) La probabilidad de impago p es igual para todos los créditos del portafolio, independientemente del monto y del número de créditos que incumplen; por lo que, la probabilidad de que m de los n créditos de tamaño θV dejen de pagar, se distribuye de acuerdo con una binomial, así:

$$\Pr \{n; m\} = \binom{n}{m} p^m (1 - p)^{n-m} \quad (3.3)$$

- c) La distribución binomial se aproxima a una distribución normal cuando el número de créditos de tamaño θV tiende al infinito; por lo que, tal distribución queda

⁵El detalle de estos supuestos se presenta en la sección 3.5.

completamente explicada a partir de su media (μ) y su varianza (σ^2), como sigue:

$$\begin{aligned}\mu &= np \\ \sigma &= \sqrt{np(1-p)}\end{aligned}$$

Con estas condiciones, se puede obtener el número de incumplimientos (n_α) con un nivel de confianza α adoptado, así:

$$n_\alpha = np + z_\alpha \sqrt{np(1-p)} \quad (3.4)$$

donde z_α es el fractil de la distribución normal estándar a un nivel de confianza α .

La igualdad (3.4) significa que la probabilidad de que más de n_α créditos caigan en impago es menor que α .

Una vez definido el número de incumplimientos n_α se procede a obtener el modelo de impago en el que se puede apreciar el indicador de concentración θ , para lo que se considera que cada crédito vale θV , el cual es introducido en la expresión (3.4) transformándose en un monto en riesgo o VaR (modelo de impago) para una cartera de crédito que posee el patrón de concentración θV con un nivel de confianza α . La expresión sería entonces:

$$VaR_\alpha = n_\alpha \theta V = \left[np + z_\alpha \sqrt{np(1-p)} \right] \theta V \quad (3.5)$$

Luego, para que exista *suficiencia de capital y provisiones* en la cartera de créditos, se requiere que la pérdida con nivel de confianza α (VaR_α) no exceda del capital K y de las provisiones; es decir:

$$VaR_\alpha = \left[np + z_\alpha \sqrt{np(1-p)} \right] \theta V \leq K + \text{provisiones} \quad (3.6)$$

Replanteando la desigualdad (3.6) en términos del valor de la cartera V se tiene:

$$\psi + \bar{p}rov \geq \frac{VaR_\alpha}{V} = p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)}\theta \quad (3.7)$$

La expresión $\psi = \frac{K}{V}$ se denomina *razón de capitalización*, cuyo inverso representa el número de veces de capital que el banco tiene prestado; y $\bar{p}rov = \frac{\text{provisiones}}{V}$ es el porcentaje de provisiones que el banco o la institución financiera tiene constituido.

Nótese que el nivel de capital y provisiones de una institución financiera es adecuada siempre y cuando éstas cubran el Valor en Riesgo del portafolio de crédito (expresión 3.6), situación que se mantiene cuando la razón de capitalización y provisiones en porcentaje es mayor o igual que el VaR_α con respecto al volumen de la cartera V (expresión 3.7).

Una de las utilidades que se tiene al trabajar con una expresión en términos del volumen de la cartera como en la expresión (3.7), es que se puede apreciar lo siguientes componentes:

- Probabilidad de incumplimiento de los deudores p ,
- Desviación estándar de la variable Bernoulli $\sqrt{p(1-p)}$, y
- Indicador de concentración θ .

Pero además, se observa que el VaR_α de la cartera de créditos se lo obtiene a partir del indicador de concentración θ , el cual se construiría en un factor determinante en las pérdidas potenciales que se pueden presentar en una cartera de créditos. Otro punto importante que brinda la expresión (3.7) a una institución financiera es que ayuda a mitigar la concentración de la cartera de créditos por medio de la fijación de límites, misma que se obtiene despejando la concentración θ de esta expresión; así:

$$\theta \leq \frac{(\psi + p\bar{r}ov - p)^2}{z_\alpha^2 p (1-p)^2} = \Theta(\psi, p\bar{r}ov, p, \alpha) \quad (3.8)$$

3.2.2. Modelo CyRCE para una cartera con créditos de diferente tamaño

En el modelo anterior se supuso que todos los n créditos de una cartera tienen el mismo tamaño θ ; es decir, alcanzan el límite máximo que se puede asignar a un crédito dentro de la cartera, lo que no es muy real, por lo que se relaja este supuesto y se considera que todos los créditos tienen diferente tamaño; de lo anterior surge la necesidad de disponer de otro tipo de indicador de concentración que se relacione con el valor en riesgo y que permita jugar un poco más con la cartera de créditos de un banco; para ello, se define lo siguiente:

Sea $F = (f_i)$ elemento de E^N el vector que representa la cartera de créditos⁶ de manera que f_i es la pérdida en caso de que incumpla el i -ésimo crédito de la cartera, con $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

Además, si se supone que la probabilidad de impago de cada crédito es p y que cada uno es independiente, se puede definir N variables aleatorias dicotómicas de pérdida en caso de incumplimiento x_i de tal forma que:

$$x_i = \begin{cases} f_i & \text{con probabilidad } p \\ 0 & \text{con probabilidad } 1 - p \end{cases} \quad (3.9)$$

Por lo que, a partir de esta definición de pérdida para cada crédito, se trata de cuantificar la pérdida que tiene la cartera de créditos, idea en la que coinciden todos los paradigmas; y, a su vez ésta es la razón por la que difieren cada uno de éstos debido a que el vector $F = (f_i)$ es arbitrario y se desconoce la distribución de $\sum_{i=1}^N x_i$; por tanto, lo que difiere de un paradigma a otro es la forma de efectuar las interrelaciones entre las pérdidas de cada crédito x_i donde se tiene que tomar en cuenta la distribución de cada uno de los elementos de F . Por ejemplo CreditRisk⁺ ataca el problema mediante funciones generadoras de probabilidades, mientras que CreditMetricsTM lo hace con Simulación de Montecarlo. En CyRCE se toma el camino más pragmático como se aprecia a continuación.

Se conoce que la esperanza⁷ y la varianza⁸ de la variable x_i son $E(x_i) = pf_i$ y $VAR(x_i) = p(1-p)f_i^2$ respectivamente, por lo que, la esperanza y la varianza de $\sum_{i=1}^N x_i$ serían:

$$\mu = E\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \sum_{i=1}^N pf_i = p \sum_{i=1}^N f_i = pV, \text{ donde } V = \sum_{i=1}^N f_i,$$

y

$$\sigma^2 = VAR\left(\sum_{i=1}^N x_i\right) = \sum_{i=1}^N VAR(x_i) = \sum_{i=1}^N p(1-p)f_i^2 = p(1-p) \sum_{i=1}^N f_i^2$$

⁶ E^N denota el espacio Euclidiano N dimensional

⁷ $E(x_i) = f_i p + 0(1-p) = f_i p$

⁸ $VAR(x_i) = (x_i - px_i)^2 p$

$VAR(x_i) = x_i^2 p - 2x_i^2 p^2 + p^2 x_i^2$

$VAR(x_i) = x_i^2 p - x_i^2 p^2$

$VAR(x_i) = x_i^2 p(1-p)$

$VAR(x_i) = f_i^2 p(1-p)$

Entonces, bajo el supuesto de independencia y de que la distribución de pérdidas se puede caracterizar por su media y su varianza, el valor en riesgo de la cartera para un cierto nivel de confianza sería:

$$VaR_\alpha = \mu + z_\alpha \sigma = pV + z_\alpha \sqrt{p(1-p) \sum_{i=1}^N f_i^2}, \quad (3.10)$$

De igual manera que en el modelo anterior, se desea que el VaR_α sea cubierto con el capital K y las provisiones para que exista suficiencia de capital y provisiones, por lo que replanteando la expresión (3.10) con respecto al valor de la cartera V , se tiene:

$$\frac{VaR_\alpha}{V} = p + z_\alpha \sqrt{\frac{p(1-p) \sum_{i=1}^N f_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N f_i\right)^2}} \leq \frac{K}{V} + \frac{\text{provisiones}}{V} = \Psi + p\bar{r}ov \quad (3.11)$$

Si se procede a obtener la cota para el tamaño de los créditos como en el modelo con créditos de igual tamaño (3.8), se tendría:

$$\frac{VaR_\alpha}{V} = p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)H(F)} \leq \Psi + p\bar{r}ov \quad (3.12)$$

donde

$$H(F) = \frac{\sum_{i=1}^N f_i^2}{\left(\sum_{i=1}^N f_i\right)^2} \leq \frac{(\Psi + p\bar{r}ov - p)^2}{z_\alpha^2 p(1-p)} = \Theta(p, \Psi, p\bar{r}ov, \alpha) \quad (3.13)$$

En la expresión (3.13) se observa que la cota obtenida es la misma que en la expresión (3.8) donde se supuso que la cartera de créditos consistía en n créditos del mismo tamaño θ ; la diferencia ahora, es que el límite de crédito θ usado como medida de concentración es reemplazado por otra medida de concentración de crédito conocido como índice de *Herfindahl-Hirschman*⁹ ($H(F)$).

Por tanto, la suficiencia de capital y provisiones quedarían definidas así:

$$\Psi + p\bar{r}ov \geq p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)H(F)} \quad (3.14)$$

⁹Para mejor comprensión de este índice referirse al Apéndice F

De la misma forma que en la expresión (3.7) se observa como en la expresión (3.14) se puede descomponer la varianza de forma que queda explícita la contribución de la concentración al riesgo de la cartera, medida a través del índice *Herfindahl-Hirschman*.

El índice de “Herfindahl-Hirschman” surge como una medida de concentración, que cuantifica de manera precisa la contribución de la concentración al riesgo de crédito total de una cartera.

La expresión (3.14) proporciona un medio para controlar concentración de la cartera de manera que permite medir la suficiencia de capital y provisiones que dispone la institución financiera para enfrentar el riesgo de crédito asumido.

Una de las virtudes del modelo CyRCE es que el índice de Herfindahl-Hirschman surge de manera natural como medida de concentración directamente relacionado con el riesgo de crédito. Además, dado que la concentración crediticia se administra y regula fijando límites a los créditos individuales, una característica deseable de un índice de concentración es que el valor del índice esté relacionado con el límite que se fije para el tamaño de los créditos.

3.3. Modelo CyRCE Intermedio

Para el desarrollo del modelo CyRCE básico se utilizó dos grandes supuestos como son igual probabilidad de incumplimiento e independencia entre cada par de créditos de una cartera, situación que no permite estimar de manera adecuada las pérdidas de una cartera crediticia; por lo que, en este nuevo modelo, se rompen estos dos supuestos, los cuales deben ser ajustados en razón de que existen factores como la región geográfica, el estrato socio-económico, la industria, que hacen que los créditos de una cartera presenten diferente fisonomía en cuanto a probabilidad de impago; así también, estas mismas razones pueden dar lugar a la existencia de correlación entre los incumplimientos de los deudores; por tanto, lo más adecuado sería considerar que *todos los créditos tienen diferentes probabilidades de incumplimiento y que además están correlacionadas entre sí*.

Bajo este razonamiento, supóngase que la distribución de pérdidas de una cartera de créditos se puede caracterizar por su media y su varianza, y que el vector de probabilidades

de incumplimiento es π con matriz de covarianza entre incumplimientos M , y que son exógenos al modelo; por lo que, procediendo como en el modelo CyRCE básico, se tendría que el VaR respecto al capital y a las provisiones es:

$$VaR_\alpha = \pi^T F + z_\alpha \sqrt{F^T M F} \leq K + \text{provisiones} \quad (3.15)$$

Continuando con la lógica del modelo CyRCE básico, la suficiencia de capital y suficiencia de provisiones se obtienen multiplicando y dividiendo por $F^T F$ a $F^T M F$ y dividiendo para $V = 1^T F$ a la expresión (3.15) así:

$$\Psi + p\bar{r}ov \geq \bar{p} + z_\alpha \sqrt{\frac{F^T M F}{F^T F} H(F)} = \bar{p} + z_\alpha \sigma \sqrt{H(F)} \quad (3.16)$$

donde:

$$\sigma^2 = \frac{F^T M F}{F^T F} = R(M, F) = \text{Cociente de Rayleigh} \quad (3.17)$$

es una medida de la varianza de las pérdidas y

$$\bar{p} = \frac{\pi^T F}{V} \quad (3.18)$$

es la pérdida esperada, relativa al valor total de la cartera.

Como en el modelo básico, al aplicar el teorema 3 que dice que si $f_k \leq \theta$ implica que $H(F) \leq \theta$, se obtiene la cota para créditos individuales, según:

$$H(F) \leq \theta \leq \left(\frac{\Psi + p\bar{r}ov - \bar{p}}{z_\alpha \sigma} \right)^2 \quad (3.19)$$

Las expresiones (3.16) y (3.19) poseen la misma estructura que el modelo básico, la única diferencia es que la varianza de las pérdidas está compuesta por el índice de concentración y el cociente de Rayleigh; estos resultados de Valor en Riesgo y límites individuales son idénticos a los presentados en el modelo básico.

3.3.1. Índice de concentración de riesgo ajustado por correlación

A continuación se evidencia la forma como la correlación entre incumplimientos afecta a la concentración y por tanto aumenta el riesgo; para ello considérese el caso en que todos

los créditos tienen la misma probabilidad de incumplimiento p y que están idénticamente correlacionados a pares mediante el coeficiente de correlación ρ , por lo que la covarianza de incumplimientos entre cualquier par de créditos (i,j) sería:

$$\sigma_{ij} = \sigma_i \sigma_j \rho_{ij} = \sqrt{p_i(1-p_i)} \sqrt{p_j(1-p_j)} \rho_{ij} = p(1-p)\rho, \quad \forall i, j. \quad (3.20)$$

Lo que significa que la matriz de covarianzas tiene la estructura siguiente:

$$M = p(1-p) \begin{pmatrix} 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \rho \\ \rho & \dots & \rho & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

Escrito en notación matricial se tiene:

$$M = p(1-p) \{ \rho \mathbf{1}\mathbf{1}^T + (1-\rho)\mathbf{I} \} \quad (3.22)$$

y, haciendo la multiplicación matricial siguiente se tiene la varianza de las pérdidas de la cartera:

$$F^T M F = p(1-p) \{ \rho (\mathbf{1}^T F)^2 + (1-\rho) F^T F \} \quad (3.23)$$

Con lo que la expresión de Valor en Riesgo resultaría al reemplazar (3.23) en (3.15), así:

$$VaR_\alpha = V \left\{ p + z_\alpha \sqrt{p(1-p)} \sqrt{\rho + (1-\rho)H(F)} \right\} \quad (3.24)$$

En la expresión (3.24) la varianza de las pérdidas tiene dos componentes, el primero es la varianza de Bernoulli $p(1-p)$, y el segundo refleja el efecto de la correlación, así:

$$H' = \rho + (1-\rho)H(F) \quad (3.25)$$

En la expresión (3.25) se aprecia al índice H' como una medida de concentración ajustada por correlación ρ ; pues, si la correlación es positiva, H' es una combinación convexa entre el índice de Herfindahl de una cartera totalmente concentrada ($H(F) = 1$) y el índice

de la cartera $H(F)$. Como es evidente H' aumenta con ρ . Además se aprecia que cuando $\rho = 0$ entonces $H' = H(F)$ y mientras que cuando $\rho = 1$ entonces $H' = 1$. Esto significa que, si todos los créditos de la cartera están perfecta y positivamente correlacionados, en términos de riesgo se comportan como si fueran un solo crédito. En general se puede concluir que un portafolio de créditos correlacionados entre sí y concentrados según $H(F)$, se comporta exactamente de la misma forma que uno de los créditos independientes pero con índice de concentración H' en lugar de $H(F)$.

Para determinar la correlación ρ entre pares de incumplimientos de la cartera de crédito se emplea la concentración de Herfindahl Hirshman ($H(F)$), la probabilidad de incumplimiento p de cada crédito donde se considera que es igual a la probabilidad promedio del portafolio crediticio $\bar{p} = \frac{\pi^T F}{V}$ y el coeficiente de Rayleight $R(M, F)$, de la siguiente manera¹⁰:

$$\rho = \frac{[R(M, F) - p(1 - p)] H(F)}{p(1 - p) [1 - H(F)]}$$

Esta expresión proporciona una medida de correlación equivalente que resume la forma en que están correlacionados a pares todos los créditos de la cartera.

3.4. Modelo CyRCE Avanzado

En este modelo se considera el estudio de la cartera de créditos segmentada por grupos que presentan características comunes, lo cual permite efectuar un análisis adecuado de la cartera debido a que cada segmento es considerado como un solo crédito ya que los créditos que conforman el segmento se comportan como si fuesen uno solo. Esta consolidación de créditos en segmentos homogéneos permite que tenga una ventaja el *modelo avanzado* sobre los anteriores, ya que permite reducir considerablemente los elementos de análisis, es así que, del número total de créditos que conforman la cartera se reduce a un número pequeño de segmentos, lo que es conveniente tanto para la comprensión del analista porque trabajará con un menor número de elementos, como para los cálculos porque se optimizará recursos computacionales.

¹⁰La demostración puede verse en el Libro *Una nueva visión de riesgo de crédito* por Javier Marquez Diez Canedo [30].

Todos los modelos que estiman pérdida de carteras de crédito aplican una segmentación a la cartera de tal forma que todos los créditos de un segmento o grupo, poseen características comunes y los parámetros que determinan las pérdidas potenciales ocasionadas por los créditos del grupo son iguales para todos los miembros del grupo. Por ejemplo, en CreditMetricsTM los créditos se agrupan por su calificación, por lo que todos los créditos con igual calificación tienen la misma probabilidad de migrar a las diferentes calificaciones crediticias y la misma probabilidad de incumplimiento.

Afortunadamente, el modelo CyRCE Avanzado permite una segmentación totalmente arbitraria del portafolio de manera que puede analizarse desde varios ángulos y *permite determinar los segmentos donde la concentración es potencialmente riesgosa*, lo que a su vez permite la distinción de límites para cada segmento, así como la evaluación en términos de la suficiencia de capital y suficiencia de provisiones. Por lo tanto, para segmentar una cartera de créditos se puede hacer referencia a cualquier criterio como por ejemplo a aquel que tenga que ver con el otorgamiento de los créditos, como por ejemplo, la región geográfica, la industria, el destino, el monto, el plazo, etc.; así también, otros criterios que tengan que ver con el comportamiento de pago de los créditos como la mora, facilitando entonces el estudio de la cartera de créditos, ya que se puede efectuar un análisis por segmentos en lugar de hacerlo por cada crédito.

Se puede concluir entonces que para el desarrollo del modelo CyRCE Avanzado se tiene que segmentar la cartera crediticia, y mantener los supuestos utilizados en el modelo CyRCE Intermedio pero con las siguientes especificaciones:

- a) La probabilidad de incumplimiento es la misma para los créditos que pertenecen a un segmento; y, diferente entre segmentos crediticios.
- b) La correlación de incumplimientos entre cada par de créditos de un segmento es la misma.
- c) La correlación de incumplimientos entre cada par de créditos de diferentes segmentos es la misma.

3.4.1. Análisis de segmentos individuales

Se supone que se ha especificado a priori h *segmentos arbitrarios* de una cartera de créditos, entonces el vector de créditos F , sería $F^T = (F_1, \dots, F_h)$ donde F_i es un vector que contiene los saldos de los créditos que pertenecen al i -ésimo segmento. Ahora se particionan el vector de probabilidades esperadas de incumplimiento y la matriz de varianza-covarianza, de esta manera:

- a) $\pi = (\pi_i)$, π_i es el vector de probabilidades de impago del *segmento* i , $i = 1, 2, 3, \dots, h$.
- b) La matriz de varianza-covarianza se particiona como:

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & C_{12} & \dots & C_{1h} \\ C_{21} & M_2 & \dots & C_{2h} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{h1} & C_{h2} & \dots & M_h \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

donde M_i corresponde a la matriz de varianza-covarianza de la probabilidad de impago del grupo i de dimensión $n_i \times n_i$, donde n_i es el número de créditos en el *segmento* i y las matrices $C_{i,j}$ contienen las covarianzas de las probabilidades de impago entre los créditos del grupo i y los del grupo j .

A partir de aquí, se define V_i al valor de la cartera asociada al segmento i tal que

$$V_i = \sum_{\substack{j \in F_i \\ y}} f_j$$

$$\sum_{i=1}^h V_i = V,$$

además, el capital asignado al segmento i se lo obtiene de la siguiente manera:

$$K_i = \gamma_i K$$

$$\gamma_i = \frac{V_i}{V}$$

donde γ_i es la proporción de capital que el administrador asigna al segmento i ; con $\gamma_i \in [0, 1] \forall i$ y $\sum_{i=1}^h \gamma_i = 1$.

Para el análisis de la concentración en segmentos individuales, se particiona a la matriz M en S_i matrices cuya representación es la siguiente:

$$S_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \dots & C_{1i} & \dots & 0 \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ C_{i1} & \dots & 2M_i & \dots & C_{ih} \\ \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & C_{hi} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

donde cada matriz S_i considera las correlaciones entre incumplimientos de los créditos del segmento i con los de los demás segmentos pero elimina las correlaciones entre los demás grupos que no inciden directamente sobre el grupo en cuestión. De esta forma, las matrices S_i cumplen con la propiedad siguiente:

$$\sum_{i=1}^h S_i = M \quad (3.28)$$

Procediendo de manera usual, la desigualdad de Valor en Riesgo para el *segmento* i sería:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \sqrt{F_i^T S_i F_i} \\ &\leq K_i + provisiones_i = \gamma_i K + \gamma_i provisiones_i \\ &\text{con} \\ i &= 1, 2, \dots, h. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Otra forma de escribir la expresión anterior pero que permita visualizar el impacto de la dependencia del *grupo* i con los demás grupos es:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \sqrt{F_i^T M_i F_i + 2 \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j} \\ &\leq K_i + provisiones_i = \gamma_i K + \gamma_i provisiones_i \\ &\text{con} \\ i &= 1, 2, \dots, h \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde

$$\sigma_i = \sqrt{\frac{F_i^T M_i F_i}{F_i^T F_i}} = \sqrt{R_i(F_i, M_i)}$$

De tal manera, para obtener la cota máxima de concentración que puede soportar el *segmento i* se tiene que dividir la desigualdad (3.30) para V_i así:

$$H(F_i) \leq \left(\frac{\Psi_i + \bar{p} \text{rov}_i - \bar{p}}{Z_\alpha \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (3.31)$$

Se nota que la cota de concentración ahora incluye una *corrección por la correlación* entre la probabilidad de impago de los créditos del *segmento i* con las probabilidades de impago de los créditos de otros segmentos (la parte final de la expresión). Esto concuerda con la intuición, dado que una correlación alta de impago con los créditos de otros segmentos, indica que se puede tolerar menos concentración en el grupo “i”.

3.4.2. Suficiencia de Capital para una Cartera Segmentada

Para integrar el análisis de los segmentos individuales en toda la cartera, es importante tomar en cuenta dos cosas; primero, que los pesos relativos de cada segmento en la cartera no alteren los resultados obtenidos para la cartera no segmentada; y segundo, que se mantenga una propiedad de aditividad que permita sumar los requerimientos de capital de los segmentos individuales para obtener el requerimiento para la cartera en su conjunto, para lo cual se tiene que realizar un ajuste a la expresión de Valor en Riesgo por segmento mediante la introducción del factor ϕ , así:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \phi \sqrt{F^T S_i F} \\ &\leq K_i + \text{provisiones}_i \\ &\leq \gamma_i (K_i + \text{provisiones}_i) \end{aligned} \quad (3.32)$$

con $i = 1, 2, \dots, h$

donde

$$\phi = \frac{\sqrt{F^T M F}}{\sum_{i=1}^h \sqrt{F^T S_i F}}. \quad (3.33)$$

Reordenando la expresión (3.32) es posible visualizar el impacto que tiene la dependencia de los grupos en el Valor en Riesgo del *grupo* i de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} VaR_\alpha^i &= \pi_i^T F_i + z_\alpha \phi \sqrt{F_i^T M_i F_i + 2 \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j} \\ &\leq K_i + provisiones_i = \gamma_i (K + provisiones_i) \\ \text{con } i &= 1, 2, \dots, h \end{aligned} \quad (3.34)$$

Mediante este ajuste se determina que el Valor en Riesgo de la cartera total es:

$$VaR_\alpha = \sum_{i=1}^h VaR_\alpha^i \quad (3.35)$$

Y para obtener la suficiencia de capital y provisiones que necesita el *segmento* i para cubrir su nivel de riesgo, se tiene que dividir la expresión (3.34) para V_i , dando como resultado:

$$\Psi_i + p\bar{rov}_i \geq \frac{VaR_\alpha^i}{V_i} = \bar{p}_i + z_\alpha \phi \sigma_i \sqrt{H(F_i) + \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j} \quad (3.36)$$

Reordenado la expresión anterior es posible identificar el máximo límite de concentración que puede soportar el *segmento* i así:

$$H(F_i) \leq \left(\frac{\Psi_i + p\bar{rov}_i - \bar{p}}{Z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (3.37)$$

y por tanto, la expresión para determinar los límites individuales para los créditos del *segmento* i sería:

$$\theta_i \leq \left(\frac{\Psi_i + p\bar{rov}_i - \bar{p}}{Z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 - \frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (3.38)$$

De lo anterior es evidente como se obtiene límites individuales diferenciados por *segmento* y que dependen de dos factores a saber:

1. La razón de suficiencia de capital y provisión idiosincrásica del *segmento* i

$$\left(\frac{\Psi_i + p\bar{rov}_i - \bar{p}}{Z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 \quad (3.39)$$

2. La corrección por correlación con otros segmentos

$$\frac{2}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{j/j \neq i} F_i^T C_{ij} F_j \quad (3.40)$$

Si la expresión (3.36) se cumple para todos los segmentos de la cartera y considerando que $\gamma_i = \frac{V_i}{V}$ entonces se tendría que la suficiencia de capital del portafolio total puede ser obtenido a partir de la suficiencia de capital de cada segmento tal como se observa a continuación:

$$\Psi + \bar{p}rov = \sum_{i=1}^h \gamma_i (\Psi_i + \bar{p}rov_i)$$

Este análisis permite obtener relaciones simples a partir de las cuáles se puede establecer la suficiencia de capital. Las expresiones obtenidas puede usarse como instrumentos normativos para determinar límites individuales, cambios en la composición de la cartera y/o ajustes al capital requeridos para mantener suficiencia si cambia el comportamiento de impago de los créditos en alguno o todos los segmentos.

3.4.3. Modelo CyRCE Gamma

Dentro de este capítulo se ha considerado que la distribución de pérdidas se aproxima con una Normal, por lo que ésta distribución queda completamente caracterizada por su media y su varianza. Sin embargo, la distribución normal tiene dos características que son irreales para la distribución de pérdidas de un portafolio crediticio, siendo estos, la simétrica y colas no pesadas, situación que indica que no puede cuantificar las pérdidas extremas de la distribución de pérdida, siendo ésta la principal característica de un portafolio crediticio; en este sentido, es necesario identificar una distribución que pueda cuantificar las pérdidas extremas del portafolio y que pueda ser caracterizada por la media y la varianza; esta distribución corresponde a la Gamma, misma que es expresada de la siguiente manera:

$$f(x | \alpha, \beta) = \frac{x^{\alpha-1}}{\beta \Gamma(\alpha)} e^{-\frac{x}{\beta}} \quad (3.41)$$

donde su media y varianza respectivamente son:

$$E(x) = \alpha\beta \quad (3.42)$$

$$\text{Var}(x) = \alpha\beta^2 \quad (3.43)$$

Así, a través del modelo *CyRCE Avanzado* es posible determinar la media y la varianza de la distribución del portafolio, y por medio de éstas se puede calibrar la distribución Gamma a través de la resolución del sistema de ecuaciones formado por las expresiones (3.42) y (3.43) respectivamente, dando como resultado la estimación de los parámetros α y β y así poder estimar de manera adecuada la distribución de pérdidas del portafolio crediticio.

3.4.4. Factores principales del modelo

En el siguiente teorema se consolida las principales implicaciones de las relaciones entre la concentración de la cartera y la cota máxima, la probabilidad de incumplimiento y la suficiencia de capital y provisiones, y verifica la consistencia del modelo. Estos resultados son importantes porque se mantienen a pesar de los cambios efectuados en los supuestos de cada modelo CyRCE analizado, donde se relajan los supuestos de igualdad de probabilidades de incumplimiento e independencia, y además también porque muestran el poder del modelo para administración de riesgos, la regulación y la supervisión bancaria.

- i) Si $H(F) > \Theta(p, \Psi, \bar{p}rov, \alpha)$, *el capital y las provisiones del banco están en riesgo para el nivel de confianza escogido.*
- ii) Si $p > \Psi + \bar{p}rov$, *el capital y las provisiones del banco son insuficientes para enfrentar el riesgo asumido para cualquier nivel de confianza y valor de la medida de concentración $H(F)$.*
- iii) *Hay una relación directa entre la concentración admisible Θ y la razón de capitalización Ψ más provisiones y, una relación inversa entre la concentración admisible Θ y la probabilidad de incumplimiento p .*
- iv) Si $\Theta(p, \Psi, \bar{p}rov, \alpha) > 1$, *cualquier nivel de concentración $H(F)$ es aceptable.*

La demostración de este teorema se encuentra en Javier Márquez Diez Canedo (2006), Una nueva visión del riesgo de crédito, Limusa, página 172.

Los resultados del teorema anterior son congruentes con la intuición, así, un incremento de la probabilidad de incumplimiento como de la concentración implica que se requiere más capital y provisiones para hacer frente al riesgo asumido por el banco.

3.5. Propiedades del índice de concentración en una cartera de crédito

El modelo CyRCE proporciona algunos indicadores que permiten establecer rápidamente la suficiencia de capital y provisiones; así por ejemplo, si la razón entre cartera vencida y cartera total de un banco excede la razón de capitalización y provisiones respecto a la cartera ($\Psi + \bar{p}rov$), es una señal de alerta muy importante respecto de la situación del banco en cuestión; además, si el nivel de concentración que tiene la cartera es mayor que la admisible ($H(F) > \Theta(p, \Psi, \bar{p}rov, \alpha)$) es muy probable que la institución requiera definir políticas crediticias para restablecer la suficiencia de capital y provisiones, como por ejemplo *aumentar la razón de capitalización mediante un aumento de capital y/o aumento de provisiones, vender la parte de la cartera que posee concentración excesiva, invertir en una cobranza para disminuir la cartera vencida o alguna combinación entre estas medidas.*

Es así que es importante realizar un análisis adecuado de la concentración en una cartera de créditos, para lo cual en esta sección se presenta un conjunto de proposiciones, teoremas y corolarios, donde se relaciona el índice de concentración de Herfindahl Hirschman con ciertos aspectos esenciales de la cartera de créditos, lo que permite disponer de una herramienta capaz de monitorear de manera adecuada la concentración de la cartera.

Para facilitar los siguientes resultados, a continuación se supone que F representa el vector de montos $f_k \geq 0$ para $k = 1, 2, \dots, N$ y además que los montos están ordenados en forma decreciente:

$$f_1 \geq f_2 \geq \dots \geq f_N$$

y que $V = \sum_{k=1}^N f_k = 1$.

Proposición 1 *Supóngase que $F = (f_k)$ tal que $f_i \geq f_{i+1} \geq 0$ para $i = 1, 2, \dots, N - 1$*

donde

$$\sum_{k=1}^N f_k = 1 \quad (3.44)$$

luego se tiene lo siguiente

a) Para f_i, f_j tales que $1 \leq i \leq j$; $f_j > 0$ y $\varepsilon > 0$ tal que $f_j - \varepsilon > 0$ sea el vector $F' = (f'_k)$

donde

$$F'_k = \begin{cases} f_k; & k = 1, 2, \dots, N; \quad k \neq i, j \\ f_i + \varepsilon; & k = i \\ f_j - \varepsilon; & k = j \end{cases}$$

entonces $H(F') > H(F)$.

b) Si $f_i > f_j$ y $0 < \varepsilon < f_i - f_j$, y el vector $F'' = (f''_k)$ tal que:

$$F''_k = \begin{cases} f_k; & k = 1, 2, \dots, N; \quad k \neq i, j \\ f_i - \varepsilon; & k = i \\ f_j + \varepsilon; & k = j \end{cases}$$

entonces $H(F') > H(F'')$.

La demostración de esta proposición se encuentra en Javier Márquez Díez Canedo (2006). *Una nueva visión del riesgo de crédito*, pag. 175.

Esta proposición significa que si se incrementa el monto de algún elemento f_k , a costa de disminuir el monto de otro elemento más pequeño f_i , el índice de concentración aumenta. Análogamente, si se disminuye el monto de un crédito mayor para aumentar uno menor, haciendo la operación contraria, el índice disminuye. En resumen, *la transferencia de montos de créditos pequeños a créditos más grandes, incrementa el índice de Herfindahl-Hirschman, y lo contrario ocurre cuando se transfieren montos de los créditos grandes a los pequeños.*

Proposición 2 Sea $\theta \in (0, 1)$ y $n = \lfloor \frac{1}{\theta} \rfloor$ el entero inmediato inferior de $\frac{1}{\theta}$. Sea $\varepsilon \in [0, 1)$ tal que $\theta = \frac{1-\varepsilon}{n}$. Entonces, para la distribución $f_k = \theta$; $k = 1, 2, \dots, N$ con

$$f_k = \begin{cases} \theta; & k = 1, 2, \dots, N \\ \varepsilon; & k = n + i \\ 0 & \text{de lo contrario} \end{cases}$$

se tiene que $H(F) \leq \theta$.

La demostración de esta proposición se encuentra en Javier Márquez Diez Canedo (2006). "Una nueva visión del riesgo de crédito", Limusa, pag. 176.

La anterior proposición demuestra que si todo el crédito está concentrado en el mínimo número de deudores, respetando la restricción del límite individual ($f_k \leq \theta V$), entonces siempre es adecuado el nivel de concentración del portafolio ($H(F) \leq \theta$).

A continuación se presenta una propiedad sumamente importante donde indica que si los créditos respetan el límite individual ($f_k \leq \theta V$), entonces es adecuado el nivel de concentración del portafolio ($H(F) \leq \theta$) donde la distribución anterior permite maximizar el valor del índice de concentración.

Teorema 3 Sea $F = (f_k)$ tal que

$$f_k = \begin{cases} \theta; & k = 1, 2, \dots, n \\ \varepsilon; & k = n + 1 \\ 0; & k = n + 2, \dots, N \end{cases}$$

con

$$\varepsilon \geq 0; \varepsilon < \theta$$

y

$$\sum f_k = 1.$$

entonces F maximiza $H(F)$ para todo F tal que $f_k \leq \theta \forall k$ y $H(F) \leq \theta$.

La demostración de esta proposición se encuentra en Javier Márquez Diez Canedo (2006). "Una nueva visión del riesgo de crédito", Limusa, pag. 177.

El resultado que se acaba de mostrar es interesante ya que demuestra que bajo la restricción $f_k \leq \theta$, el equivalente numérico de Adelman proporciona la distribución de créditos que maximiza la concentración. Pero además dice que si se adopta la medida de fijar un límite a los créditos como una proporción θ del valor de la cartera, entonces se tiene que la concentración medida por el índice de Herfindahl-Hirschman queda acotada

en la misma proporción, es decir, $H(F) \leq \theta$. Por tanto, esta medida si es eficaz para controlar la concentración de cartera.

Del teorema anterior se puede decir que la política crediticia para controlar la concentración de una cartera a partir de la restricción de los montos de los créditos $f_k \leq \theta$, es una condición **suficiente más no necesaria**, lo que sugiere que la concentración de cartera sea regulada por la medida de concentración en lugar de hacerlo por el tamaño de los créditos, con el objeto de permitir mayor flexibilidad en el otorgamiento crediticio.

Por ejemplo, si una institución financiera ha decidido controlar la concentración de la cartera por medio de la condición $H(F) \leq \theta$, así para que la institución otorgue un crédito cuyo monto supera el límite asignado $f_k \geq \theta$ tiene que calcular el índice $H(F)$ de la cartera de créditos que incluye este crédito y observar si este índice cumple con la condición de ser menor o igual a θ , y en caso de ser así, se puede otorgar el crédito caso contrario se tiene negar este nuevo crédito; todo esto enmarcado dentro de los lineamientos institucionales y la regulación vigente.

Teorema 4 : Si $H(F) \leq \theta$, entonces: $f_i \leq \frac{1}{N}(1 + \sqrt{(N\theta - 1)(N - 1)})V < \sqrt{\theta}V$ para $i = 1, 2, 3, \dots, N$.

La demostración de esta proposición se encuentra en Javier Márquez Diez Canedo (2006). "Una nueva visión del riesgo de crédito", Limusa, pag. 179.

Este teorema da la idea de que siempre que se respete la restricción sobre el índice de concentración, la cartera de créditos puede tener un crédito muy grande, a expensas de los demás créditos. Entonces, el objetivo de la institución sería identificar el monto máximo que puede dar a un crédito f_1 dado que la concentración del portafolio no supera la cota determinada por el modelo CyRCE ($H(F) \leq \theta$), mismo que es determinado a partir del siguiente corolario.

Corolario 5 Bajo la restricción $H(F) \leq \theta$ sucede que:

i) El valor del crédito más grande que se puede tener en la cartera es:

$$f_i^* = \alpha^*V,$$

$$\text{donde } \alpha^* = \frac{1}{N} \left(1 + \sqrt{(N\theta - 1)(N - 1)} \right).$$

ii) α^* *satisface* $\theta < \alpha^* < \sqrt{\theta}$.

Corolario 6

iii) $H(F) \leq \theta \Rightarrow f_i^* < \sqrt{\theta}V \ \forall i$.

Lo importante que hay que resaltar del corolario anterior son los incisos *ii)* y *iii)* ya que bajo este criterio, el crédito máximo está acotado superiormente por $\sqrt{\theta}$ e inferiormente por θ y, además se sabe que ningún crédito de la cartera puede exceder la cota superior que en este caso es $\sqrt{\theta}V$.

Cabe mencionar que la disponibilidad de un buen índice de concentración permite monito-rear el riesgo desde el punto de vista del supervisor como del administrador; así, *al supervisor le facilitaría la comparación del riesgo por concentración entre las diferentes instituciones financieras y conduciría a una evaluación del riesgo por concentración en el sistema financiero; mientras que el administrador de riesgo le permitiría medir su propio riesgo de concentración, tener una referencia para establecer estrategias de negocio y metas, hacer comparaciones con la competencia, y tener un medio oportuno para comprobar suficiencia de capital y provisiones.*

3.6. Estimación de parámetros

En la sección anterior se señaló que *las probabilidades de incumplimiento y la matriz de co-rrelación entre créditos incumplidos* son los parámetros que necesita el modelo CyRCE para ser calibrado; donde, el método más utilizado para estimar estos parámetros se fundamenta en los esquemas de calificación, de hecho, paradigmas como CreditRisk⁺ o CreditMetricsTM dependen, por diseño, de que los créditos de la cartera bajo análisis estén calificados. Evidentemente, si una institución financiera cuenta con un buen sistema para calificar deudores y se ha rea-lizado el trabajo básico de obtener estadísticas sobre tasas de incumplimiento asociadas a cada calificación, esto le será útil para obtener probabilidades de incumplimiento y sus respectivas correlaciones.

Sin embargo, en el caso de mercados emergentes y de intermediarios pequeños, la información disponible presenta serias deficiencias en lo que se refiere a la calificación

de créditos por parte de las instituciones financieras, puede resultar muy complicado y costoso adaptar metodologías de medición de riesgo crediticio, que dependen de manera significativa de la existencia de un sistema de calificaciones. Por esta razón, en esta sección sólo se presenta técnicas de estimación estadísticas tomando como datos las tasas de incumplimiento observadas históricamente, para lo cual se tiene que segmentar de alguna manera a la cartera de créditos¹¹ y que para cada segmento de la cartera se puede conocer el número de créditos que, estando vigentes en un periodo, incumplen en el siguiente. Cabe mencionar que la *relación entre el número de créditos que incumplen respecto del número total de créditos al corriente en el periodo anterior, es lo que se conoce como tasas de incumplimiento de deudores* dentro de los segmentos en que se divide la cartera de créditos.

3.6.1. Estimación de las probabilidades de incumplimiento

Como se mencionó anteriormente, el punto de partida para estimar estadísticamente las probabilidades y correlaciones de incumplimiento de créditos es la *tasas de incumplimiento* observada históricamente. Aunque desde el punto de vista estructural se reconoce que las probabilidades de incumplimiento cambian en el tiempo, sin embargo en las técnicas estadísticas se supone que son constantes en un cierto periodo de tiempo. Así, se empieza analizando un caso simple en el que se supone que la probabilidad de incumplimiento de un grupo de créditos es la misma en un cierto horizonte de tiempo de T períodos. Una estimación de dicha probabilidad, que intuitivamente se antoja razonable, es tomar un promedio móvil ponderado de las tasas de impago observadas en los n períodos del horizonte considerado. Esto conlleva implícitamente, además, el supuesto de independencia entre las tasas de incumplimiento de un período a otro.

En los métodos estadísticos de estimación basado en tasas de incumplimiento observadas, se supone que se conoce los siguientes datos para cada período dentro del horizonte de tiempo escogido T :

$N_t =$ Número de créditos vigentes en la cartera, en el período t ; $t = 1, 2, 3, \dots, T$.

¹¹Esto de ninguna manera excluye a la calificación como criterio de segmentación.

k_t = Número de créditos vigentes en $t - 1$ que incumplen en el período t ; $t = 1, 2, 3, \dots, T$.

Por definición, la tasa de incumplimiento π_t para cada período t ; $t = 1, 2, 3, \dots, T$ es:

$$\pi_t = \frac{k_t}{N_{t-1}} \quad (3.45)$$

Para determinar el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de incumplimiento, se supone que todos los créditos de la cartera, o un segmento particular, tienen la misma probabilidad de incumplimiento p en cada período dentro del horizonte de tiempo T . Dado que los incumplimientos de los deudores son típicamente eventos Bernoulli, la variables aleatoria que denota el número de incumplimientos en cada período de tiempo se distribuye según una binomial, es decir:

$$P\{N^\circ \text{ de impagos} = k_t; p\} = \binom{N_{t-1}}{k_t} p^{k_t} (1-p)^{(N_{t-1}-k_t)} \quad (3.46)$$

donde

$$t = 1, 2, \dots, T$$

donde su respectiva función de máxima verosimilitud es:

$$l(p, \pi_1, \dots, \pi_n) = \prod_{t=1}^T \binom{N_{t-1}}{k_t} p^{k_t} (1-p)^{(N_{t-1}-k_t)} \quad (3.47)$$

y, para obtener el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de incumplimiento se tiene que maximizar la expresión (3.47) dando como resultado que el estimador es igual a

$$p = \frac{\sum_{t=1}^T k_t}{\sum_{t=1}^T N_{t-1}} \quad (3.48)$$

finalmente, reemplazando la ecuación (3.45) en (3.48) se tiene el estimador de la probabilidad de incumplimiento en función de la tasa de incumplimiento

$$p = \sum_{t=1}^T \frac{N_{t-1}}{N} \pi_t \quad (3.49)$$

donde

$$N = \sum_{t=1}^T N_{t-1}$$

en la ecuación (3.49) se puede observar que el estimador de máxima verosimilitud de la probabilidad de incumplimiento es el promedio ponderado de las tasas de impago, donde el ponderador en cada período es la proporción que representa en número de créditos vigentes en cada período, respecto de la suma total de créditos vigentes en el horizonte considerado.

3.6.2. Estimación de las correlaciones

La correlación entre créditos incumplidos es de suma importancia para el administrador, ya que logra responder algunas preguntas como por ejemplo, si el *deudor 1* deja de pagar que tan probable es que deje de pagar el *deudor 2*. Sin embargo, en la práctica la correlación entre incumplimientos es difícil de obtener; por ejemplo, la correlación entre el incumplimiento del crédito 1 con el crédito 2 esta dado por:

$$\rho_{12} = \frac{E(xy) - E(x)E(y)}{\sigma_x \sigma_y} \quad (3.50)$$

$$= \frac{E(xy) - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)} * \sqrt{p_2(1-p_2)}} \quad (3.51)$$

$$= \frac{E(xy) - p_1 p_2}{\sqrt{p_1(1-p_1)} * \sqrt{p_1(1-p_1)}} \quad (3.52)$$

nótese que para estimar la correlación es necesario conocer la distribución conjunta $E(xy)$ de las variables aleatorias x , y . En los paradigmas más usuales como CreditRisk⁺ y CreditMetricsTM para atacar el problema de la correlación, suponen a priori que la distribución conjunta de las variables aleatorias siguen una normal multivariada y partir de esto utilizan diferentes métodos para estimar las correlaciones entre créditos incumplidos; sin embargo, la distribución conjunta puede escribirse de la siguiente manera:

$$E(xy) = P(X \leq x, Y \leq y) \quad (3.53)$$

$$= C(F_X(x), F_Y(y)) \quad (3.54)$$

donde $C(\cdot)$ corresponde a la función cópula, de tal manera que a partir de la información histórica de las tasas de incumplimiento se puede estimar la matriz de varianza covarianza de los créditos incumplidos a través de los parámetros obtenidos por un modelo cópula normal, situación que se explica a detalle en la sección ([8]).

Capítulo 4

Modelos de dependencia en riesgo de crédito

4.1. Introducción

La mayor preocupación que tienen los administradores de riesgo de crédito es la ocurrencia desproporcional de incumplimientos conjuntos que pueden darse en un portafolio de préstamos ya que tienen un impacto directo en el nivel de pérdidas y por ende en el capital económico de la institución financiera. De hecho, la ocurrencia desproporcionada de incumplimientos de créditos conjuntos, normalmente se le conoce como *riesgo de crédito extremo*, por lo que un adecuado modelo de portafolio de crédito debe ser capaz de cuantificar este riesgo, y así medir la pérdida que puede tener el porfolio en un horizonte de tiempo dado.

El desarrollo de estos modelos es fundamental para una eficaz administración de portafolios de crédito ya que permite relacionar la rentabilidad esperada con el riesgo asumido por la institución financiera. En los últimos tiempos, los modelos cuantitativos de pérdida por riesgo de crédito se han convertido en el centro de atención para practicantes, reguladores y académicos, estos modelos proponen capturar la pérdida potencial debido al incumplimiento de las contrapartes en portafolios que tienen un alto número de créditos.

En el Capítulo 2, se realizó una descripción detallada de los modelos de riesgo de crédito más populares, y pueden ser divididos en dos clases, los *modelos de variables*

latentes y los *modelos de tipo mixto*.

Los modelos propuestos por la corporación KMV o por el grupo RiskMetricsTM son extensiones del modelo de valoración de empresas de Merton (1974), de manera general estos modelos son los denominados *modelos de variables latentes*, donde el incumplimiento ocurre si una cierta variable latente (valor de los activos de la empresa) cae por debajo de un cierto umbral (valor de las obligaciones de la empresa por deuda) y la dependencia entre incumplimientos es causado por la dependencia entre las variables latentes.

Por otro lado, CreditRisk⁺, que fue desarrollado por Credit Suisse First Boston (CSFB), es un modelo de tipo actuarial, en este modelo la probabilidad de incumplimiento de una empresa se supone que depende de un conjunto de variables macro-económicas; donde, el incumplimiento de los deudores son independientemente condicionados a estos factores, a partir de la literatura estadística, estos modelos son referidos como *modelos tipo mixto*.

En este capítulo se detallarán los modelos de dependencia de incumplimiento (*modelos de variables latentes y de tipo mixto*) que son expuestos de una forma abstracta de tal manera que se pueda generalizar los resultados para cualquier modelo de riesgo de crédito.¹ En particular, en estos modelos juega un papel fundamental el concepto de Cópula y la noción de dependencia entre los factores de riesgo, además se presenta el impacto que tienen las cópulas en los *modelos de variables latentes* donde se observa que la distribución de incumplimientos conjuntos queda completamente explicada a través de las probabilidades de incumplimiento individuales y de la cópula de la variable latente; por ejemplo, los modelos de KMV y CreditMetricsTM se fundamentan en una cópula Gaussiana. Debido al impacto que tiene las cópulas en la distribución entre incumplimientos, se probarán las cópulas mixtas en media y varianza (por ejemplo, *cópula multivariante t* o la *hiperbólica multivariada*) para la cuantificación del *riesgo de crédito extremo*, de tal manera que la estimación del capital económico sea más exacto.

Finalmente, se presentan las relaciones existentes entre los *modelos de tipo mixto* y el *modelo de variables latentes*, lo que permite clarificar la similitud y las diferencias entre ambos modelos, además logra identificar bajo que condiciones se puede afirmar que ambos

¹El desarrollo teórico presentado en este capítulo se fundamenta en los estudios realizados por Embrechts, McNeil, Frey en los portafolios de riesgo de crédito [16]

modelos sean equivalentes.

4.2. Cópulas

4.2.1. Introducción

En la teoría financiera, el concepto de correlación es de suma importancia ya que juega un papel central en los modelos financieros, por ejemplo en el modelo de valuación de activos de capital (CAPM), o en la teoría de arbitraje (APT), se utiliza la correlación como una medida de dependencia entre diferentes instrumentos financieros ya que la teoría se fundamenta en la suposición que los retornos siguen una distribución normal multivariada.

A menudo, cada vez más se ha utilizado a la correlación como una medida de dependencia en la administración de riesgo, donde se supone que el retorno de los activos se distribuye normalmente; sin embargo, este supuesto es completamente inaceptable, como es el caso del riesgo de crédito donde la distribución de las pérdidas no es simétrica y se caracteriza que la cola de la derecha es pesada; es decir, que tiene mayor frecuencia la ocurrencia de créditos incumplidos.

A pesar que la correlación es un concepto que se utiliza en las finanzas modernas, es mal entendido, debido a que este se generaliza como una medida de dependencia, donde solamente es adecuado para el caso de las distribuciones normales multivariadas y más generalmente en las distribuciones esféricas y elípticas. Las distribuciones elípticas² son distribuciones cuya densidad son elipsoides constantes; por ejemplo, para el caso de una distribución t bivariada, las líneas de contorno de la superficie de la densidad son elipses tal como se aprecia en la Figura 4.1.

En las distribución elípticas, es natural utilizar la matriz de correlación como un resumen de la estructura de dependencia, además en el mundo de las distribuciones elípticas tiene sentido la optimización de portafolios (Markowitz, CAPM). Cabe mencionar que en esta distribución si los componentes no están correlacionados no significa que sean independientes, solamente en la distribución normal multivariada la correlación nula se

²La distribución normal multivariada es un caso especial.

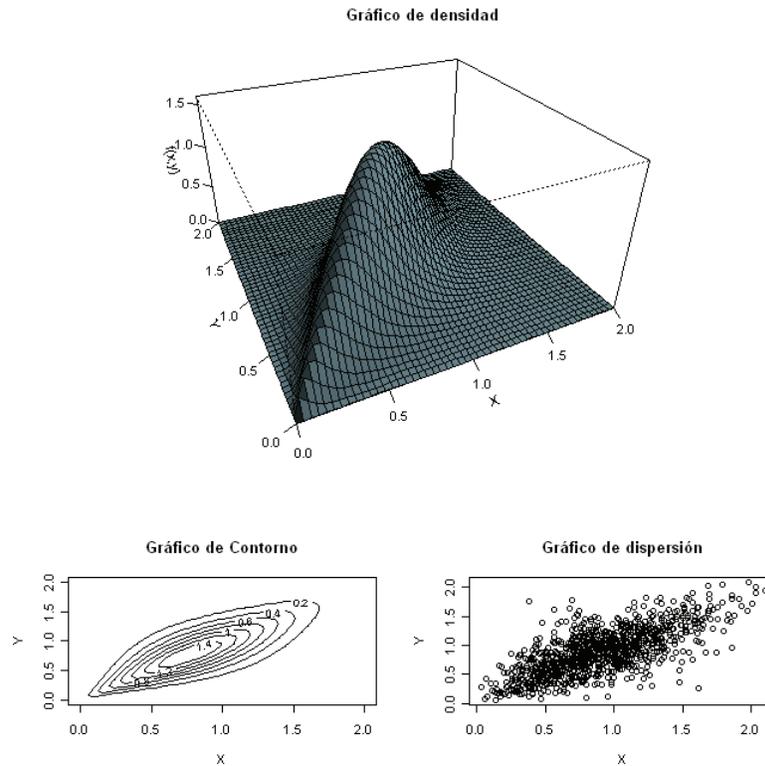


Figura 4.1: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una distribución t biva-riada con correlación del 70 % y marginales con distribuciones gamma.

interpreta como independencia.

Fuera del mundo de las distribuciones elípticas, la correlación debe utilizarse con cuidado. Desafortunadamente, la mayor parte de la dependencia entre los riesgos financieros no presentan una distribución elíptica, tan solo en el riesgo de mercado la distribución normal o elíptica aparentemente tiene sentido utilizarlo.

De lo mencionado anteriormente, es necesario tener claro el concepto de correlación para lo cual se la puede describir de la siguiente manera:

- Es una medida de relación lineal entre variables aleatorias
- Correlación cero no implica independencia, esto sólo es verdad con las variables aleatorias gaussianas;

- La correlación es la covarianza de dos variables aleatorias divididas por sus desviaciones típicas.

A partir de esto, surgen algunas preguntas importantes respecto a la correlación, tales como *¿Cuándo existe la correlación?*, *¿Qué significa correlación en el contexto de variables gaussianas?*, *¿Qué sucede con la correlación si no tratamos con variables gaussianas?*.

Normalmente, una de las primeras cosas que se hace para analizar un conjunto de series financieras es estimar la correlación, pero *¿Qué significa este número?*, recordemos que la co-rrrelación lineal o de Pearson se define como:

$$\rho(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X)}\sqrt{\text{Var}(Y)}}, \quad (4.1)$$

pero en el caso de una distribución t de student, la varianza es:

$$\text{Var}(X) = \frac{C}{C - 2},$$

donde C es el número de grados de libertad. Por lo que para valores de $C \leq 2$, la expresión anterior no es un número real positivo, es decir para 2 o menos grados de libertad la varianza no existe, por lo que la varianza no converge a pesar que se aumente el tamaño de muestra. *De lo anterior se puede afirmar que cualquier distribución con colas pesadas (que no dispone varianza) no tiene correlación, sin embargo esto no significa que no están relacionadas entre sí (linealmente o no).*

Muchos de los problemas, restricciones y cuidados que se han de tener con el concepto de correlación parece que se acaban cuando se trabaja con variables aleatorias gaussianas ya que este tipo de distribuciones no tienen colas pesadas; sin embargo, esto no es verdad, para aclarar esto se supone que se generan dos variables aleatorias a partir de distribuciones normales estándar, cuya correlación es cero, tal como se presenta en la Figura 4.2, donde claramente se observa que en el Gráfico de dispersión las variables aleatorias X, Y no son independientes.

Para ser más específico, la correlación es una buena medida de dependencia cuando las variables aleatorias X,Y siguen una *distribución normal multivariada*, con la característica

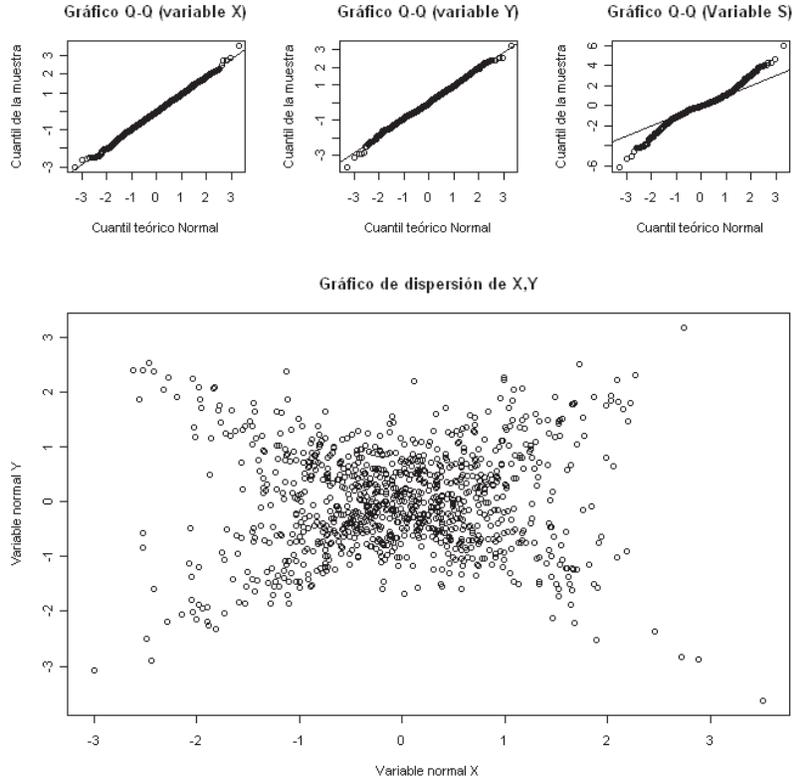


Figura 4.2: Gráficos Q-Q de las variables aleatorias normales X, Y y de la variable $S=X+Y$, y gráfico de dispersión de las variables normales X, Y que tienen correlación cero.

que los marginales siguen una distribución normal y la suma de sus componentes es normal.

Por lo tanto, se puede tener la siguiente conclusión, *dos variables aleatorias normales no correlacionadas no tiene por qué ser independientes; solo lo será si la distribución conjunta de las variables es también gaussiana.*

De lo presentado hasta este momento, se observa que la correlación tienen algunos problemas cuando se generaliza como una medida de dependencia, a continuación detallamos una lista de problemas que tiene la correlación cuando se utiliza como una medida de dependencia en el riesgo financiero³:

1. La correlación es simplemente una medida de dependencia, y no dice todo lo que

³Esta lista de problemas que tiene la correlación como una medida de dependencia fue tomada del documento de Embrechts, McNeil y Daniel Straumann [13].

se quisiera conocer sobre la estructura de dependencia de los riesgos financieros (como por ejemplo la dependencia entre los valores extremos); al ser una medida escalar este resume toda la relación de dependencia entre los factores de riesgo en un solo número, aunque facilita la interpretación, puede tener inconvenientes en la toma de decisiones; en la Figura 4.3, se muestra como es posible tener dos variables aleatorias que tiene una correlación del 70 %, pero sin embargo llegar a conclusiones completamente diferentes.

2. Los valores que puede tener la correlación depende de la distribución de los marginales de los índices de riesgos.
3. Dependencia perfecta positiva o negativa entre los índices de riesgos, no necesariamente tiene correlación de 1 o -1 respectivamente.
4. Una correlación de cero no indica independencia entre los riesgos
5. La correlación solamente es invariante ante transformaciones lineales; por ejemplo, $\log(X)$ y $\log(Y)$ generalmente no tiene la misma correlación de X y Y .
6. La correlación solamente es definida cuando la varianza de los índices de riesgos es finita, ésta no es una apropiada medida de dependencia cuando las distribuciones presentan colas pesadas donde la varianza es infinita.

Se puede observar que la *correlación lineal* tiene algunos limitantes para medir la dependencia, por lo que es necesario identificar otras medidas de dependencia, donde una clase importante de estas estadísticas son las *medidas de correlación de rango* y los *coeficientes de dependencia en las colas*.

Las medidas de dependencia de rango, miden el grado de dependencia entre dos variables aleatorias sin suponer que la relación de dependencia sea lineal; además, estas correlaciones requieren solamente que las variables sean medidas en nivel ordinal, es decir la estimación empírica de las medidas de correlación de rango pueden ser calculadas de forma no paramétrica a partir de los rangos de los datos, además estas medidas de correlación de rango son invariantes bajo transformaciones monótonas crecientes.

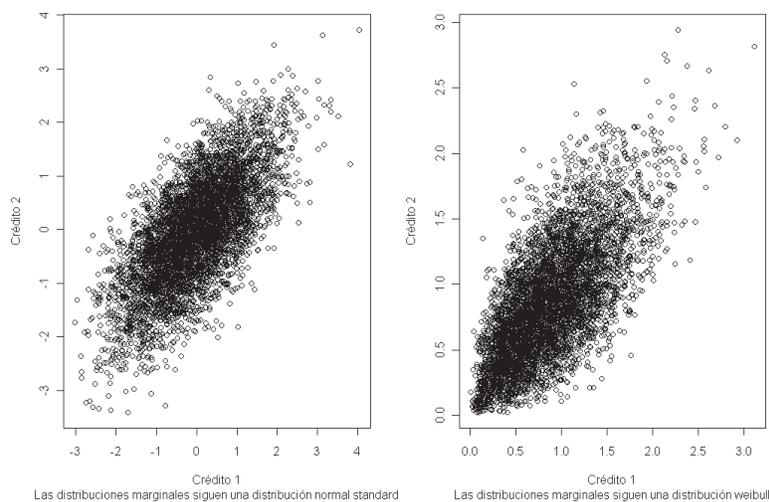


Figura 4.3: Simulación de 5000 realizaciones de dos variables aleatorias Weibull con coeficiente de correlación 0.7 y dos estructuras de dependencias diferentes.

Las principales ventajas de las medidas de correlación de rango con respecto a la correlación de Pearson es la invarianza bajo transformaciones monótonas crecientes y su capacidad para identificar casos con dependencia perfecta.

El coeficiente de dependencia en las colas, permite medir la dependencia existente entre los valores extremos de las variables aleatorias, esta característica es importante en la medición de riesgo financiero y en la administración de portafolio.

A pesar que éstas medidas de dependencia no presentan los limitantes de la correlación lineal, hay que mencionar que con estas medidas no es posible modelar la dependencia entre d factores de riesgo, sin embargo existe una medida de dependencia que no tiene este limitante y es la llamada función *Cópula*.

La cópula permite modelar la dependencia entre d factores de riesgo a través de una función que satisface algunas propiedades particulares que la hacen ideal para modelar dependencia, esta aproximación tiene la ventaja de presentar el concepto de dependencia como una estructura que describe completamente la relación entre los factores de riesgo, en lugar de tratar de resumirla en un solo número. No obstante, pensar en una estructura de este tipo implica una mayor complejidad en su interpretación.

Las principales ventajas que tiene la cópula como una adecuada medida de dependencia son las siguientes:

- Extrae la estructura de dependencia de la función de distribución multivariada, por lo que tiene mucha más información acerca de la dependencia entre d variables aleatorias que la puede contener en un sólo número.
- Toma en cuenta todos los posibles casos de dependencia.
- Es invariante ante transformaciones monótonas crecientes incluyendo las transformaciones afines positivas.
- Permite representar una estructura de dependencia de variables aleatorias donde sus respectivas funciones marginales no incide en esta estructura.
- Se puede obtener las *medidas de correlación de rango* y los *coeficientes de dependencia en las colas*, lo que permite medir la dependencia de manera general.

Según Schweizer (1991), el teorema fundamental de cópulas fue introducido en un artículo de 1959 por Sklar el cual fue escrito en francés, y posteriormente en 1973 en inglés, de manera resumida se puede decir que *las cópulas son funciones que conectan las distribuciones multivariadas con sus respectivas distribuciones marginales*; es decir, si F es una función de distribución m dimensional, con distribuciones marginales F_1, \dots, F_m , luego existe una función C m dimensional llamada cópula, tal que se cumple la siguiente igualdad:

$$F(y_1, \dots, y_m) = C(F_1(y_1), \dots, F_m(y_m))$$

El método *cópula* tiene una corta historia en la literatura estadística, donde la mayoría de aplicaciones se han incrementado en los últimos quince años, a pesar que las cópulas han sido estudiadas en la literatura de probabilidad alrededor de la década de los cincuenta. El término de *cópula* fue introducido por Sklar (1959), sin embargo la idea de *cópula* aparece anteriormente en numerosos documentos, siendo los más notables el de Hoeffding (1940, 1941), el cual estudia medidas de dependencia que son invariantes ante transformaciones estrictamente crecientes.

Las cópulas han probado ser útiles en una variedad de situaciones prácticas por ejemplo en las *instituciones financieras* y en el *sector de asegurador*; a continuación se detallan estos casos:

- *Instituciones Financieras*; en un banco es de gran importancia definir adecuados indicadores de riesgo⁴, ya que se puede identificar la relación entre rentabilidad y riesgo que debe incurrir el banco, éstos indicadores son construidos a partir del supuesto de que los factores de riesgo siguen una distribución normal multivariada, sin embargo Ané y Kharoundi (2003) y Embrechts (2002) argumentan que esta suposición es frecuentemente insatisfactoria ya que los bancos presentan en sus portafolios mayor frecuencia de pérdidas extremas, donde el VaR tiende a subestimar la pérdida real del portafolio⁵, y para corregir este problema se ha utilizado cópulas paramétricas cuyos marginales no son normales.
- *Sector Asegurador*; las aseguradoras están interesadas en modelar las rentas vitalicias para individuos cuyas enfermedades o muertes están relacionadas; por ejemplo, los actuarios han determinado el síndrome de *corazón roto*, en el cual la muerte de un individuo incrementa sustancialmente la probabilidad de que el esposo(a) muera en un período de tiempo. La supervivencia conjunta de los esposos presentan un comportamiento no lineal y una fuerte dependencia en la cola de la distribución conjunta por lo que el uso de modelos de las rentas vitalicias que están basados en distribuciones normales es inadecuado.

4.2.2. Medidas y conceptos de dependencia

En la práctica, el coeficiente de correlación lineal de Pearson es la medida de dependencia más utilizada; sin embargo, como se presentó anteriormente, esta medida presenta ciertos inconvenientes, por lo que es necesario conocer medidas alternativas de dependencia que sean consistentes y confiables para el administrador de riesgo. A continuación se describen **medidas de dependencia** como las *Medidas de correlación de rango*, *coeficiente*

⁴Por ejemplo, el Valor en Riesgo (VaR).

⁵En el Apéndice E se detalla este aspecto a profundidad.

de dependencia en las colas, *cópula*, y para el mejor entendimiento de estas medidas se presentan **conceptos de dependencia** como la *comonotonicidad*, *contramonotonicidad*, *concordancia* y *discordancia*.

Conceptos de dependencia

Para dar a conocer la importancia de definir algunos conceptos de dependencia, se empieza graficando la dispersión de un par de variables aleatorias (X_1, X_2) y (Y_1, Y_2) que presentan dos diferentes estructuras de dependencia tal como se observa en la Figura 4.4, en este ejemplo, la correlación de Pearson entre las variables (Y_1, Y_2) es de 0.73, el cual no refleja su visible grado de asociación; por otro lado, se observa que el coeficiente de correlación de τ de Kendall es 1, y permite representar adecuadamente el grado de asociación de las variables aleatorias. De estas gráficas se puede observar que existe una alta probabilidad de que el par de variables (X_1, X_2) y (Y_1, Y_2) tomen valores altos o bajos al mismo tiempo, por lo que la dependencia entre las variables aleatorias es perfecta.

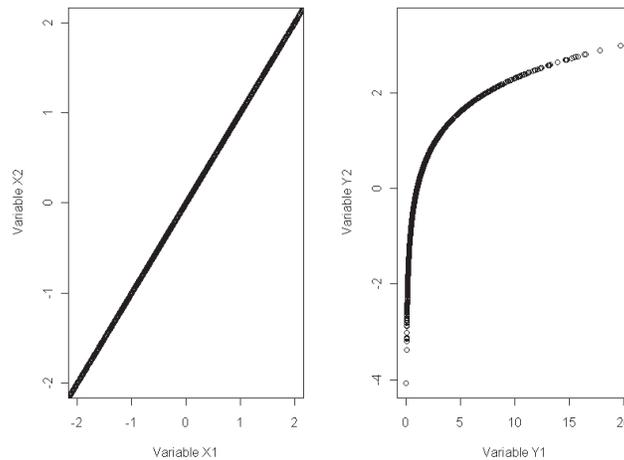


Figura 4.4: Dependencia perfecta positiva para dos estructuras de dependencia entre dos variables aleatorias

La anterior dependencia es conocida como *dependencia perfecta positiva*. Cabe mencionar que un par de variables aleatorias pueden tener la dependencia perfecta negativa y el orden de dependencia.

La dependencia perfecta positiva entre variables aleatorias es conocida como la *comonotonicidad*, análogo a ésta se encuentra la *contramonotonicidad*, que se refiere al caso en el que existe dependencia perfecta negativa entre variables aleatorias. En la Figura 4.5 se presen-

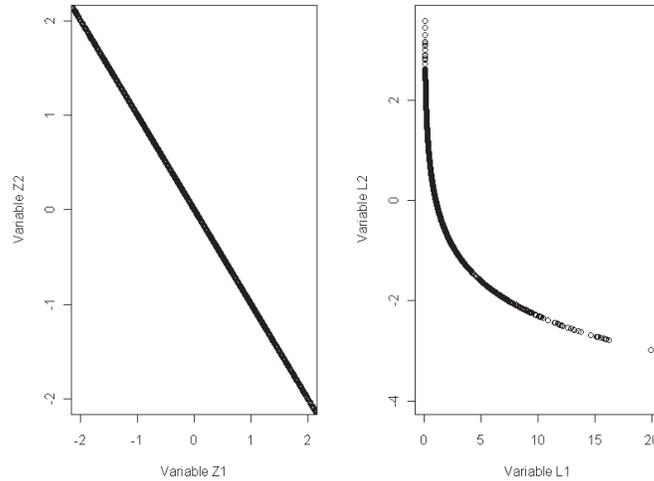


Figura 4.5: Dependencia perfecta negativa para dos estructuras de dependencia entre dos variables aleatorias

ta un ejemplo de la contramonotonicidad, donde se presenta 5000 replicas de una par de variables aleatorias (Z_1, Z_2) y (L_1, L_2) , cuyo coeficiente de correlación de Pearson (panel de la derecha) presenta un valor de -0.79 , mientras que el coeficiente de correlación de Spearman es igual a -1 , donde esta medida de dependencia cuantifica adecuadamente la asociación entre las variables aleatorias.

Adicional a los conceptos de comonotonicidad y contramonotonicidad se encuentra los conceptos de *concordancia* y *discordancia*, los cuales ofrecen información acerca del signo de la dependencia entre dos variables aleatorias. A partir de este concepto es posible establecer un *ordenamiento* de las funciones de distribución.

De manera informal se puede decir que un par de variables son *concordantes* si "*grandes*" valores de una variables esta asociado con "*grandes*" valores de la otra, y "*pequeños*" valores de la una con "*pequeños*" valores de la otra variable. La siguiente definición formaliza los conceptos de concordante y discordante de dos variables aleato-

rias.

Definición 7 (concordancia y discordancia) Sean dos observaciones (x_i, y_i) y (x_j, y_j) del vector aleatorio continuo (X, Y) , se dicen que son concordantes, si $x_i < x_j$ y $y_i < y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i > y_j$. Análogamente, (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son discordantes si $x_i < x_j$ y $y_i > y_j$ o si $x_i > x_j$ y $y_i < y_j$. Una formulación alternativa es que (x_i, y_i) y (x_j, y_j) son concordantes, si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) > 0,$$

y es discordante si

$$(x_i - x_j)(y_i - y_j) < 0.$$

En este contexto, dos variables aleatorias son concordantes si el sentido de los cambios de una variable tiende a estar asociado con el sentido de los cambios de la otra, es decir que cambios positivos (negativos) de una variables se encuentran asociados con cambios positivos (negativos) de la otra. De forma análoga, dos variables aleatorias son discordantes si cambios positivos (negativos) de una de ellas tiende a estar asociados con cambios negativos (positivos) de la otra.

A partir de la definición 7 se puede decir que la *comonotonidad* y la *contramonotonidad* son los valores extremos de la concordancia y discordancia de dos variables aleatorias respectivamente.

Medidas de dependencia

Teniendo en cuenta los problemas de la correlación de Pearson, es útil definir otras medidas de dependencia que no tengan limitaciones, como es el caso de las *Medidas de correlación de rango, coeficiente de dependencia en las colas y cópula*. Sin embargo, para garantizar que estas medidas sean adecuadas es necesario especificar de manera general las propiedades que debe cumplir una medida de dependencia.

Proposición 8 (Propiedades de una medida de dependencia) Sea una medida de dependencia $\delta(\cdot, \cdot)$ el cual asigna un número real a cualquier par de valores reales de variables aleatorias X, Y , las propiedades que debe tener una medida de dependencia son (Embrechts 2002):

1. $\delta(X, Y) = \delta(Y, X)$ (Simétrica)
2. $-1 \leq \delta(X, Y) \leq 1$ (Normalizada)
3. $\delta(X, Y) = 1 \iff X, Y$ son *comonotónicos*
 $\delta(X, Y) = -1 \iff X, Y$ son *contramonotónicos*
4. Sea una transformación estrictamente monótona $T : R \rightarrow R$ sobre el rango de X luego

$$\delta(T(X), Y) = \begin{cases} \delta(X, Y) & \text{si } T \text{ es creciente} \\ -\delta(X, Y) & \text{si } T \text{ es decreciente} \end{cases}$$
5. $\delta(X, Y) = 0 \iff X, Y$ son *independientes*

Para un caso particular, la correlación de Pearson cumple las propiedades 1 y 2, por lo que se confirma que esta no es una adecuada medida de dependencia.

Medidas de correlación de rango Existen dos importantes medidas de dependencia conocidos como τ de Kendall y Spearman. Estos son mejores medidas de dependencia que la co-rrelación de Pearson para el caso de distribuciones no lineales, además pueden ser estimados de forma no paramétrica y solamente se utiliza los rangos de los datos.

Definición 9 (Correlación de Spearman) Sean X y Y dos variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 y función de distribución conjunta F entonces el coeficiente de correlación de Spearman esta dado por:

$$\rho_s(X, Y) = \rho(F_1(X), F_2(Y)),$$

donde ρ es el coeficiente de correlación de Pearson.

Por lo tanto, ρ_s es simplemente la correlación lineal entre las variables aleatorias X_1 y X_2 transformadas a través de sus funciones de distribución.

Definición 10 (Correlación de Kendall) *Sea una muestra de n observaciones $\{(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)\}$ de dos variables aleatorias continuas X, Y . Existen C_2^n distintos pares de (X_i, Y_i) y (X_j, Y_j) de las observaciones de la muestra, donde cada par de variables aleatorias es concordante o discordante; sea c y d el número de pares concordantes y discordantes respectivamente. La estimación de la correlación de τ de Kendall de la muestra es dada por:*

$$t = \frac{c - d}{c + d} = \frac{(c - d)}{C_2^n}$$

$$\rho_\tau = \frac{\sum_{i < j} \text{sign} [(X_i - X_j)(Y_i - Y_j)]}{C_2^n}$$

Para el caso en que las observaciones sean obtenidas de una población y no de una muestra, la $\rho_\tau(X, Y)$ para un vector de variables aleatorias idénticamente distribuidas (X_1, Y_1) y (X_2, Y_2) , es definida por

$$\rho_\tau(X, Y) = \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

De acuerdo a la definición 10, la correlación de τ de Kendall puede entenderse como la diferencia entre la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia.

Las medidas de correlación de rango tienen varias propiedades deseables para una medida de dependencia, tales como la simetría, normalización e independencia ya que toma el valor de cero bajo el caso de independencia. Las principales ventajas de las medidas de correlación de rango con respecto a la correlación de Pearson es la invarianza bajo transformaciones monótonas crecientes y su capacidad para identificar casos en que existen dependencia perfecta; este último, se encuentra asociado el concepto de comonotonicidad.

Transformación	$\hat{\rho}(Pearson)$	$\hat{\rho}_\tau(Kendall)$	$\hat{\rho}_S(Spearman)$
$\text{corr}(X, Y)$	0.68	0.49	0.66
$\text{corr}(e^X, e^Y)$	0.66	0.49	0.66
$\text{corr}(X^3, Y^3)$	0.63	0.49	0.66
$\text{corr}(X, Y^5)$	0.52	0.49	0.66
$\text{corr}(3X, Y)$	0.68	0.49	0.66

Cuadro 4.1: Coeficientes de correlaciones para varias transformaciones en 1000 realizaciones de dos variables aleatorias Weibull con distribución t multivariada

En la Cuadro (4.1) se presenta las correlaciones de un par de variables aleatorias con sus respectivas transformaciones lineales y no lineales, se observa que la correlación de Pearson es sensible a estas transformaciones, por lo que no mide de forma consistente las relaciones que existen entre las variables aleatorias.

Coefficiente de dependencia en las colas En algunos casos es de interés analizar la concordancia entre valores extremos de variables aleatorias el cual depende principalmente del análisis de las colas de la distribuciones. Un ejemplo de la importancia de este tema se encuentra en las relaciones de dependencia de los retornos extremos de diferentes factores de riesgo, lo cual tiene implicaciones en la medición de riesgo financiero y en la administración de un portafolio. Una medida asintótica de la dependencia de las colas para un par de variables aleatorias X y Y puede ser definida de la siguiente manera.

Definición 11 (Dependencia en la cola superior e inferior) Sea X y Y variables aleatorias con funciones de distribución F_1 y F_2 . El coeficiente de dependencia en la cola superior de X y Y es

$$\lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P} [Y > F_Y^{-1}(\alpha) \mid X > F_X^{-1}(\alpha)] = \lambda_u \quad (4.2)$$

donde

$$F^{-1}(\alpha) = \inf \{x \mid F(x) \geq \alpha\}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Si $\lambda \in (0, 1]$ entonces X y Y se dice que tienen dependencia asintótica en la cola superior; por otro lado si $\lambda = 0$ se dice que tienen independencia asintótica en la cola superior. Análogamente, el coeficiente de dependencia para la cola inferior es

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P} [Y \leq F_Y^{-1}(\alpha) \mid X \leq F_X^{-1}(\alpha)] = \lambda_l$$

La medida de dependencia en la cola superior λ_u se puede interpretar como la probabilidad de que Y tome valores altos cuando X también toma valores altos a un mismo nivel de significancia α . Por ejemplo, si X y Y representan las volatilidades de dos diferentes instrumentos financieros, el coeficiente de dependencia λ_u se interpreta como la probabilidad de que ambos instrumentos presenten altas volatilidades de manera simultánea.

Hay que tomar en cuenta que la expresión de la ecuación (4.2) esta en términos del *Valor en Riesgo* de las variables aleatorias X y Y, ya que los cuantiles $F_Y^{-1}(\alpha)$ y $F_X^{-1}(\alpha)$ representan el *Valor en Riesgo* de cada variable aleatoria para un cierto nivel de confianza α . De tal manera que se puede interpretar al coeficiente λ_u como la probabilidad de X exceda el VaR a un nivel de confianza α , asumiendo que Y excede el VaR con la misma probabilidad α cuando este tiende a uno.

En el caso de distribuciones continuas, esta medida de dependencia puede ser expresada en términos de la Cópula⁶ asociada a la distribución bivariada de estas variables:

$$\lambda_l = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[Y \leq F_2^{-1}(\alpha), X \leq F_1^{-1}(\alpha)]}{\mathbb{P}[X \leq F_1^{-1}(\alpha)]} = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(u, u)}{u}; y$$

$$\lambda_u = \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}$$

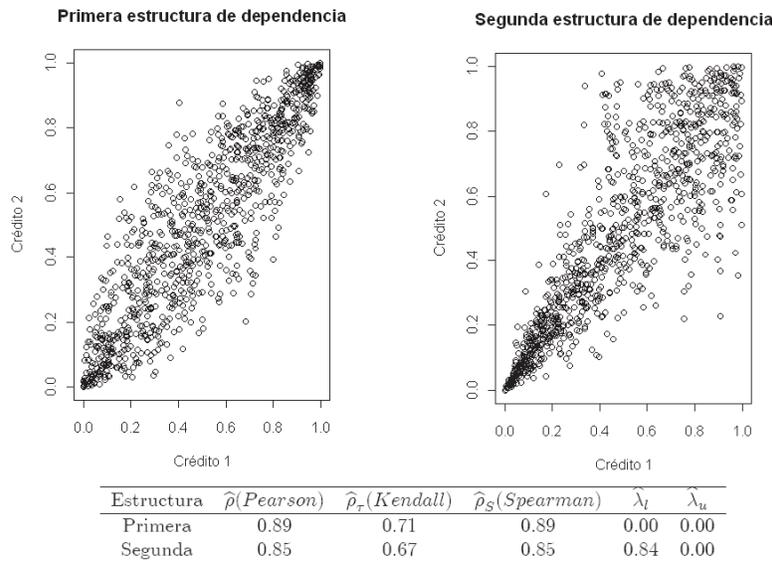


Figura 4.6: Dispersiones y medidas de dependencia de dos estructuras multivariadas

Esta medida de dependencia es de suma importancia en la medición de riesgo crediticio, ya que permite medir el incumplimiento conjunto de los créditos de un portafolio; por

⁶En la sección 4.2.3 se detalla este concepto más a profundidad.

ejemplo, en la Figura 4.6 se presenta la dispersión de dos créditos con diferentes estructuras de dependencia, en la segunda estructura se observa que el incumplimiento del primer crédito va acompañado con el del segundo crédito, esto puede ser debido a que los créditos pertenecen al mismo segmento económico.

La correlación y los coeficientes de dependencia en las colas permiten comprender de manera general la estructura de dependencia entre las variables aleatorias sin la necesidad de disponer de una gráfica de dispersión.

Cópula El capital regulatorio de una institución financiera está determinado por los riesgos que enfrentan sus portafolios, donde la herramienta ampliamente utilizada para medir el riesgo es el VaR, siendo ésta muy importante para la determinación de los requerimientos mínimos de capital de las instituciones financieras.

En términos estadísticos el VaR corresponde el α -ésimo cuantil de la función de distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, es decir, el VaR es el menos malo de los $(1 - \alpha)\%$ peores casos de la distribución. Al observar la distribución de pérdidas y ganancias del portafolio, se puede verificar que son influenciadas por caídas simultáneas de sus activos riesgosos, por tanto, esta distribución depende de la distribución conjunta de los activos, la cual es fundamental para calcular índices de riesgo tal como el Valor en Riesgo.

Para la medición del VaR es necesario conocer la distribución conjunta de los retornos de los activos financieros, para lo cual se supone que siguen una distribución normal multivariada, lo que implica que la estructura de dependencia del portafolio es predeterminada y tiene la característica de ser simétrica, tener colas livianas y la dependencia del retorno de los activos puede medirse a través de la correlación, sin embargo esta distribución es muy irreal para el caso de riesgo de crédito.

Una medida alternativa de dependencia muy útil para modelar la distribución multivariada es la función *cópula*, que une en una distribución de probabilidad multivariada a una colección de funciones de probabilidad marginales univariadas y así determinar la estructura de dependencia, tanto de la función de distribución conjunta del portafolio, como de las marginales de cada activo riesgoso. Además, a través de cópulas se libera

la distribución de los retornos de un portafolio del supuesto de normalidad, por lo que distribuciones marginales con diferentes estructuras de dependencia pueden unirse y darle una estructura de dependencia particular a la distribución conjunta del portafolio, lo cual arroja una descripción más realista de las características empíricas de la distribución de los retornos de un portafolio.

Dado que las cópulas es el punto referencial de los modelos de riesgo de crédito, en las siguientes secciones se detalla los supuestos matemáticos de esta herramienta, las familias de cópulas más utilizadas y se explica el método de ajuste de datos empíricos a éstas familias de cópulas.

4.2.3. Cópulas y sus propiedades

En la sección anterior se presentó algunas medidas de dependencia alternativas a la co-rrelación lineal; sin embargo, éstas solo se centran en la medición de la dependencia de un par de variables aleatorias, donde son inaplicables para el análisis de portafolios de activos ya que no permiten medir las relaciones de dependencia de los activos de manera simultánea. Sin embargo existe una función que permiten cumplir este objetivo que es la llamada *cópula*.

La función cópula tienen la ventaja de presentar el concepto de dependencia como una estructura que describe completamente la relación entre las variables aleatorias⁷, en lugar de tratar de resumirla en un solo número.

Para definir una cópula se empieza considerando d variables aleatorias con distribuciones uniformes estándar U_1, \dots, U_d , y que pueden estar relacionadas. La dependencia entre estas variables aleatorias queda completamente descrita a través de su función de distribución conjunta

$$F(u_1, \dots, u_d) = \mathbb{P}[U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d] \quad (4.3)$$

En ausencia de un modelo que permita cuantificar la dependencia entre las d variables aleatorias, se utiliza la correlación como una medida de dependencia, sin embargo como

⁷Pueden ser los activos de un portafolio, los factores de riesgo de una institución financiera, etc.

ya se observó anteriormente, este presenta ciertos limitantes. Si se podría disponer de un modelo parecido a la función de distribución conjunta F , entonces se conocería todo lo que se debería conocer de la dependencia entre las d variables aleatorias. La idea de separar de F una parte que describe la estructura de dependencia y otra que describe el comportamiento de los marginales es el que se centra el concepto de cópula.

La cópula es una función de distribución multivariada $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ donde sus distribuciones marginales son uniformes estándar $U_i \sim U(0, 1)$ $i = 1, 2, \dots, d$. La cópula posee las siguientes propiedades:

- i) $C(u_1, \dots, u_d)$ es creciente en cada componente u_i
- ii) $C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) = u_i$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, d\}$, $u_i \in [0, 1]$.
- iii) Para todo $(a_1, \dots, a_d), (b_1, \dots, b_d) \in [0, 1]^d$ con $a_i \leq b_i$ se tiene que:

$$\sum_{i_1=1}^2 \dots \sum_{i_d=1}^2 (-1)^{i_1+\dots+i_d} C(u_{1i_1}, \dots, u_{di_d}) \geq 0$$

donde $u_{j1} = a_j$ y $u_{j2} = b_j$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, d\}$.

- iv) Para cada cópula $C(u_1, \dots, u_d)$ se tiene los siguientes límites:

$$\max \left\{ \sum_{i=1}^d u_i + 1 - d, 0 \right\} \leq C(\mathbf{u}) \leq \min(u_1, \dots, u_d).$$

Las propiedades i), iii) y iv) son propiedades de cualquier función de distribución multivariada, mientras que la propiedad ii) esta asociada al hecho de que las funciones de distribución marginales son uniformes estándar. Adicionalmente los límites establecidos en la propiedad número iv) son conocidos como los límites de Fréchet, los cuales se tratarán más adelante.

Sklar [1959] mostró que es posible comprender la estructura de dependencia de un vector aleatorio a través de la cópula a partir de dos observaciones: la primera, que toda función de distribución multivariada de variables aleatorias continuas tiene una cópula asociada y la segunda, que la función de distribución multivariada puede ser construida a partir de una cópula y las funciones de distribución marginales.

Teorema 12 (Teorema de Sklar) Sea $F(r_1, \dots, r_d)$ la función de distribución conjunta de las variables aleatorias R_1, \dots, R_d , con funciones de distribución marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$. Existen una función $C[0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$F(r_1, \dots, r_d) = C(F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)) \quad (4.4)$$

para todo r_1, \dots, r_d . La función C es conocida como la cópula de variables aleatorias. Si $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$ son continuas entonces C es única. De otra forma C está definida únicamente en el $\text{Ran}(F_1) \times \dots \times \text{Ran}(F_d)$ donde $\text{Ran}(F_i)$ denota el rango de la función F_i . Análogamente si C es una cópula y $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$ son funciones de distribución univariadas, entonces $F(r_1, \dots, r_d)$ definida en (4.4) es una función de distribución conjunta de marginales $F_1(r_1), \dots, F_d(r_d)$.

Para la demostración del Teorema 12 es necesario tener presentes varias características de las funciones de distribución⁸. La primera de ellas se relaciona con el hecho que si la variable aleatoria R_i tiene una función de distribución F_i continua, entonces se tiene que:

$$F_i(R_i) \sim U(0, 1) \quad (4.5)$$

análogamente, si $U \sim U(0, 1)$ entonces $F_i^{-1}(U) \sim F_i$, donde F_i^{-1} es la función de distribución inversa de F_i , la cual está definida como:

$$F_i^{-1}(\alpha) = \inf \{r \in R : F_i(r) \geq \alpha\} \quad (4.6)$$

El resultado presentado en el párrafo anterior se encuentra en la mayoría de los libros de probabilidad básica y es el fundamento para la generación de números aleatorios.

A partir de (4.5) es posible demostrar la existencia y unicidad de la cópula para el caso de variables aleatorias continuas. Expresando (4.4) en términos de $r_i = F_i^{-1}(u_i)$ para $i = 1, \dots, d$ se obtiene:

$$C(u_1, \dots, u_d) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_d^{-1}(u_d)) \quad (4.7)$$

La expresión (4.7) implica que una cópula C puede ser representada en términos de la función de distribución multivariada F y sus marginales F_1, \dots, F_d . Por otro lado, partiendo

⁸La demostración completa del Teorema de Sklar se encuentra en Nelsen [2006]

de F, F_1, \dots, F_d y $u_i = F_i(u_i)$ para $i = 1, \dots, d$, se tiene que:

$$\begin{aligned}
 F(r_1, \dots, r_d) &= P(R_1 \leq r_1, \dots, R_d \leq r_d) \\
 &= P(F_1^{-1}(R_1) \leq F_1^{-1}(r_1), \dots, F_d^{-1}(R_d) \leq F_d^{-1}(r_d)) \\
 &= P(U_1 \leq u_1, \dots, U_d \leq u_d) \\
 &= C(u_1, \dots, u_d)
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Por lo tanto la definición (4.7) implica que la cópula C asociada a la distribución multivariada F si existe, mientras el resultado (4.8) implica que esta cópula es única [McNeil, 2005].

Las ecuaciones (4.4) y (4.8) muestran la relación entre la cópula y la función de distribución conjunta. El teorema de Sklar indica, por un lado, que la función de distribución conjunta puede ser entendida como la combinación de distribuciones marginales a través de la cópula; mientras que (4.8) muestra como se puede expresar la cópula de la función de distribución multivariada [McNeil, 2005].

Tal como lo indica Embrechts [1999], el teorema 12 también se puede interpretar como la descomposición de la función de distribución multivariada en dos componentes: la estructura de dependencia y el comportamiento univariado. El primer componente corresponde a la cópula, mientras que el segundo está asociado a las funciones de distribución marginales.

Estructuras de dependencia

Anteriormente se observó que utilizar a la correlación como una medida de dependencia no es suficiente ya que tiene varias deficiencias. Para entender mejor la idea de dependencia es necesario dar algunos ejemplos de cópulas, sin embargo primero es necesario definir el concepto de *independencia* y de *los límites de Fréchet*.

Definición 13 (Independencia) *Se supone que un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_d)^t$ tiene una distribución conjunta F y marginales F_1, \dots, F_d , se dice que los componentes de X son mutuamente independientes si y solamente si*

$$F(x) = \prod_{i=1}^d F_i(x), \text{ para todo } x. \tag{4.9}$$

El siguiente teorema da los límites de una función de distribución multivariada.

Teorema 14 (Límites de Fréchet) *Para toda función de distribución multivariada $F(x_1, \dots, x_d)$ con marginales $F(x_1), \dots, F(x_d)$ se tiene que*

$$\max \left(\sum_{i=1}^d F_i(x_i) + 1 - d, 0 \right) \leq F(x_1, \dots, x_d) \leq \min (F(x_1), \dots, F(x_d)). \quad (4.10)$$

Los límites del teorema 14 se conoce como los *límites de Fréchet*. Las definiciones presentadas anteriormente son necesarias para presentar algunas cópulas fundamentales con sus respectivas estructuras de dependencias tal como se presenta a continuación:

- *Cópula producto*, dado que se ha definido la independencia entre variables aleatorias, y combinando con el teorema de Sklar se puede especificar a la cópula producto o independiente de la siguiente manera:

$$C^{ind}(x_1, \dots, x_d) = \prod_{i=1}^d x_i$$

Una manera sencilla de presentar la estructura de dependencia de una cópula es a través de la simulación, en la Figura 4.7 se presenta la dispersión de dos variables aleatorias uniformes estándar con una distribución multivariada igual a la cópula producto.

- *Límites inferiores y superiores de Fréchet*, para el caso donde la función de distribución conjunta es bivariada, los límites de la función de distribución (teorema 14) son cópulas, los que se denota por $M(x_1, x_2) = \min(x_1, x_2)$ y $W(x_1, x_2) = \max(x_1 + x_2 - 1, 0)$ siendo los límites superior e inferior respectivamente. De tal manera que los límites de Fréchet de una cópula C bivariada son:

$$W(x_1, x_2) \leq C \leq M(x_1, x_2)$$

En la Figura 4.8 se presenta las dispersiones de las distribuciones de los límites de Fréchet.

- *Cópula Gaussiana*, a diferencia de las cópulas anteriores, la cópula gaussiana o normal para el caso bivariado corresponde a una familia de cópulas uniparamétrica

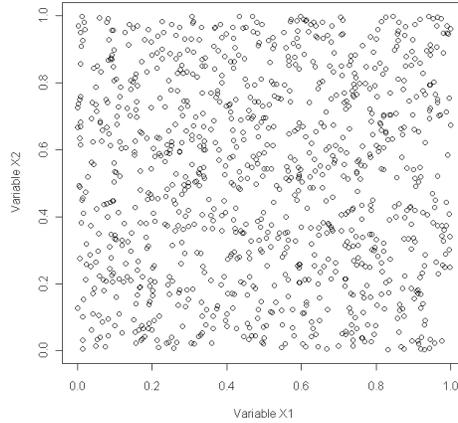


Figura 4.7: Simulación de 1000 datos de una cópula bivariada independiente.

para el par de variables aleatorias (X_1, X_2) , y se lo representa de la siguiente forma:

$$C_{\rho}^{Ga}(x_1, x_2) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(x_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(x_2)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{1/2}} \exp\left\{-\frac{(s^2 - 2\rho st + t^2)}{2(1-\rho^2)}\right\} ds dt$$

donde ρ es el coeficiente de correlación⁹ y ϕ es la función de distribución normal estándar univariada, en la Figura 4.9 se presenta la dispersión de la Cópula Gaussiana.

- *Cópula de Gumbel*, otra cópula uniparamétrica es la cópula de Gumbel o logística, su estructura tiene la siguiente forma:

$$C_{\beta}^{Gu}(x_1, x_2) = \exp\left[-\left\{(-\log x_1)^{\beta} + (-\log x_2)^{\beta}\right\}^{1/\beta}\right],$$

donde $\beta \in [1, \infty]$ y controla el grado de dependencia entre X_1 y X_2 , cuando $\beta = 1$ significa que las variables son independientes y si $\beta \rightarrow \infty$ significa que existe dependencia perfecta, tal como se presenta en la Figura 4.10 en la parte izquierda la estructura de dependencia representa la independencia de un par de variables aleatorias, mientras en el lado de la derecha corresponde a una estructura de dependencia perfecta positiva.

⁹Esta correlación es la presentada por las variables aleatorias X_1 y X_2 .

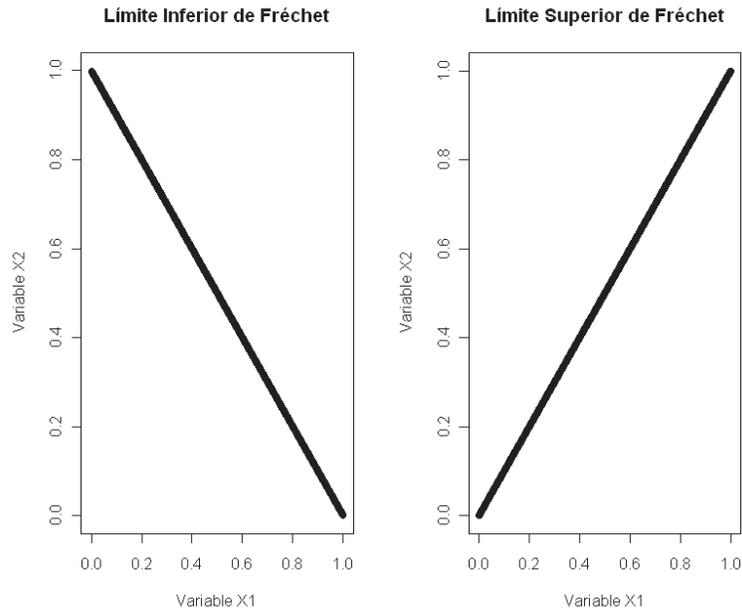


Figura 4.8: 10000 datos simulados de los límites de Fréchet

Propiedades de Cópulas

Una vez que se ha definido una cópula, se analiza las propiedades que puede tener una función cópula.

Invariante La principal utilidad de las cópulas se fundamenta en el hecho de que esta función es invariante ante transformaciones estrictamente monótonas en las variables aleatorias. Esta propiedad es de gran importancia ya que no permite manipular la estructura de dependencia entre un conjunto de variables aleatorias; por ejemplo, si conocemos a priori la cópula de d variables aleatorias y por alguna razón a estas variables se les realiza una transformación logarítmica entonces la cópula de estas variables aleatorias transformadas es la misma de las variables originales, esta idea se formaliza a partir de la siguiente proposición.

Proposición 15 Sea (X_1, \dots, X_d) un vector de variables aleatorias continuas con cópula C y sea T_1, \dots, T_d funciones estrictamente crecientes. Luego $(T_1(X_1), \dots, T_d(X_d))$ también tiene la misma cópula C .

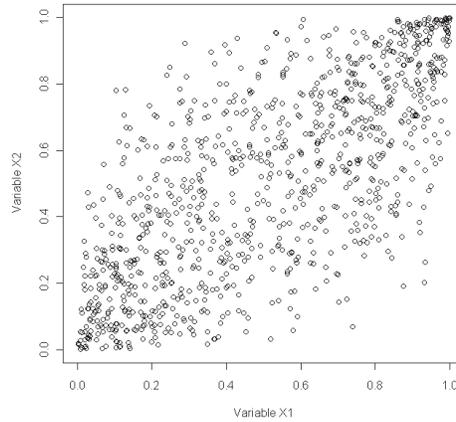


Figura 4.9: 1000 datos simulados de una cópula normal bivariada con correlación $\rho = 0,7$.

Demostración. Si F_i tiene una función de distribución de X_i y sea T_i^{-1} es la inversa de T_i , luego se tiene que la variable transformada $T_i(X_i)$ tienen una función de distribución continua $\tilde{F} = F_i \circ T_i^{-1}$. Dado que $F_i^{-1}(U) \sim F_i$ y $F_i^{-1}(u_i) = x_i$ y a partir de la definición de cópula se tiene:

$$\begin{aligned} C(u_1, \dots, u_d) &= \mathbb{P} [X_1 \leq F_1^{-1}(u_1), \dots, X_d \leq F_d^{-1}(u_d)] \\ &= \mathbb{P} [T_1(X_1) \leq T_1 \circ F_1^{-1}(u_1), \dots, T_d(X_d) \leq T_d \circ F_d^{-1}(u_d)] \\ &= \mathbb{P} [T_1(X_1) \leq \tilde{F}_1^{-1}(u_1), \dots, T_d(X_d) \leq \tilde{F}_d^{-1}(u_d)] \end{aligned}$$

■

Comonotonicidad A partir del teorema 14 y de la definición de cópulas se puede mencionar que los límites de Fréchet son universales para las cópulas; es decir, que para alguna cópula C y para cualquier x_1, x_2 en $[0,1]$ se tiene que

$$\max \{x_1, x_2 - 1, 0\} = W(x_1, x_2) \leq C \leq \min \{x_1, x_2\} = M(x_1, x_2)$$

Para entender la estructura de dependencia de la cópula M , se la reconstruye a partir de dos supuestos, el primero es que las dos variables aleatorias X_1 y X_2 son continuas cuyas funciones de distribución son $X_1 \sim F_1$ y $X_2 \sim F_2$ y el segundo supuesto es que

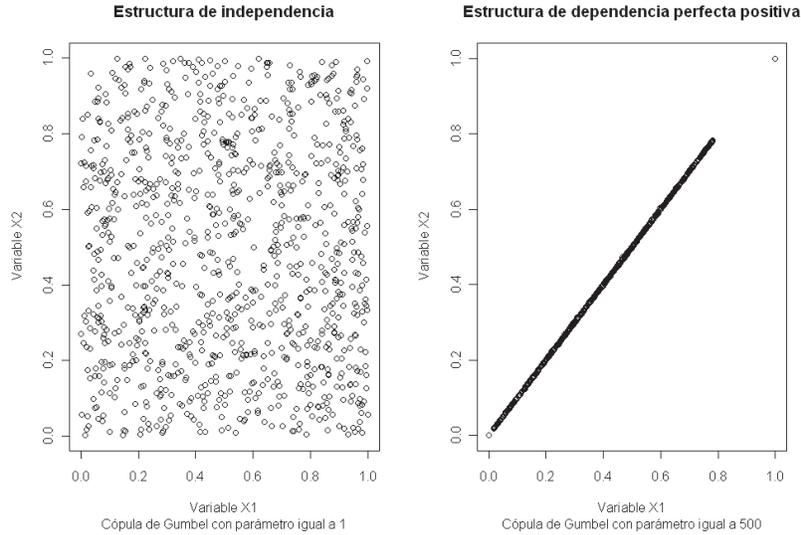


Figura 4.10: 1000 datos simulados a partir de una cópula de Gumbel con parámetro 1 y 500 respectivamente.

$X_2 = T(X_1)$ con T estrictamente creciente, este supuesto representa una dependencia fuerte entre las variables aleatorias.

Dado que $F_2 = T^{-1}(F_1)$ y $F_1(X_1) \sim U(0, 1)$, luego reemplazando estos supuestos en la definición 12 se tiene:

$$\begin{aligned}
 C(x_1, x_2) &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq x_1, F_2(X_2) \leq x_2] \\
 &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq x_1, F_1 \circ T^{-1}(X_2) \leq x_2] \\
 &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq x_1, F_1(X_1) \leq x_2] \\
 &= \mathbb{P}[F_1(X_1) \leq \min(x_1, x_2)] \\
 &= \min(x_1, x_2) \\
 &= M(x_1, x_2)
 \end{aligned}$$

Este resultado muestra que la cópula M se la obtiene a partir de un concepto de dependencia perfecta positiva, por lo que esta cópula representa la comonotonicidad entre dos variables aleatorias.

Definición 16 (Comonotonicidad) *Las variables aleatorias X_1 y X_2 son comonotóni-*

cos si son representados a través de la cópula superior de Fréchet.

$$M(x_1, x_2) = \min\{x_1, x_2\}$$

La siguiente proposición presenta resultados muy fuertes para el caso de dependencia perfecta positiva (comonotonicidad)

Proposición 17 *Dos variables aleatorias X_1 y X_2 son comonotónicas si y solamente si*

$$(X_1, X_2) \stackrel{D}{=} (v_1(Z), v_2(Z)),$$

para alguna variable aleatoria Z y para funciones crecientes v_1 y v_2 . Para el caso donde X_1 y X_2 sean continuas, se tiene un simple resultado que la comonotonicidad es equivalente a $X_2 = T(X_1)$ para cualquier función creciente T .

Para el límite inferior Fréchet, análogamente se puede definir de la siguiente manera:

Definición 18 (Contracomonotonicidad) *Las variables aleatorias X_1 y X_2 son contracomonotónicas si son representadas a través de la cópula inferior de Fréchet*

$$W(x_1, x_2) = \max\{x_1 + x_2 - 1, 0\}$$

La siguiente proposición presenta resultados muy fuertes para el caso de dependencia perfecta negativa (contracomonotonicidad).

Proposición 19 *Dos variables aleatorias X_1 y X_2 son contracomonotónicas si y solamente si*

$$(X_1, X_2) \stackrel{D}{=} (v_1(Z), v_2(Z)),$$

para alguna variable aleatoria Z y con funciones v_1 y v_2 creciente y decrecientes respectivamente o viceversa. Para el caso donde X_1 y X_2 sean continuas, se tiene un simple resultado que la comonotonicidad es equivalente a $X_2 = T(X_1)$ para cualquier función decreciente T .

Dependencia en las colas Al inicio de este capítulo se presentó los limitantes que tiene la correlación lineal para medir la dependencia cuando se trabaja con variables aleatorias cuya distribución presenta colas pesadas; es por esta razón, que una medida de dependencia que no tenga esta limitante es de suma importancia en el análisis de riesgo financiero. Para saber si la cópula es una adecuada función para modelizar la dependencia en las colas, se considera el coeficiente de dependencia en las colas (ver definición 11), de dos variables aleatorias X y Y cuyas funciones continuas de distribución son F_1 y F_2 respectivamente. De tal manera que el coeficiente de dependencia en la cola superior se puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lambda_u &= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \mathbb{P}[Y > F_2^{-1}(\alpha) \mid X > F_1^{-1}(\alpha)] \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\mathbb{P}[Y > F_2^{-1}(\alpha), X > F_1^{-1}(\alpha)]}{\mathbb{P}[X > F_1^{-1}(\alpha)]} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{1 - 2\alpha + C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 1^-} \frac{\overline{C}(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}
\end{aligned} \tag{4.11}$$

En la expresión (4.11) se observa que el *coeficiente de dependencia en la cola superior* puede expresarse a partir de la cópula, con lo que garantiza que esta medida de dependencia es adecuada en distribuciones con colas pesadas. De manera similar se puede expresar el *coeficiente de dependencia en la cola inferior* de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\lambda_l &= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \mathbb{P}[Y \leq F_2^{-1}(\alpha) \mid X \leq F_1^{-1}(\alpha)] \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{\mathbb{P}[Y \leq F_2^{-1}(\alpha) \mid X \leq F_1^{-1}(\alpha)]}{\mathbb{P}[X \leq F_1^{-1}(\alpha)]} \\
&= \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{C(\alpha, \alpha)}{1 - \alpha}
\end{aligned} \tag{4.12}$$

Tal como se observa de (4.12) y (4.11), la dependencia en la cola es medida adecuadamente a partir de una propiedad asintótica que dispone la función cópula.

Expresando la correlación de rango con cópulas En la sección 4.2.2 se presentó medidas alternativas de correlación como la correlación de Spearman y Kendall, las mis-

mas que según Schweizer y Wolff pueden expresarse únicamente en términos de la función cópula.

Proposición 20 *Se supone que X y Y tiene distribuciones marginales continuas y una cópula C , luego la correlación de rango está dada por*

$$\begin{aligned}\rho_\tau(X, Y) &= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u_1, u_2) dC(u_1, u_2) - 1 \\ \rho_S(X, Y) &= 12 \int_0^1 \int_0^1 (C(u_1, u_2) - u_1 u_2) du_1 du_2\end{aligned}$$

Demostración. Sea la covarianza definida de la siguiente manera:

$$Cov[X, Y] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x, y) - F_1(x)F_2(y)\} dx dy,$$

dado que $(F_1(X), F_2(Y))^t$ tienen una distribución conjunta C y $F_1(X)$ y $F_2(Y)$ están distribuidos como una uniforme estándar, luego se tiene que la correlación de rango de Spearman puede expresarse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\rho_S(X, Y) &= \rho(F_1(X), F_2(Y)) \\ &= \frac{Cov[F_1(X), F_2(y)]}{\sqrt{\sigma^2[F_1(X)]\sigma^2[F_2(Y)]}} \\ &= \frac{Cov[F_1(X), F_2(y)]}{\sqrt{\frac{1}{12} \cdot \frac{1}{12}}} \\ &= 12Cov[F_1(X), F_2(y)] \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 \{C(x, y) - xy\} dx dy, \tag{4.13}\end{aligned}$$

Para determinar a la correlación de Kendall a partir de la cópula es necesario recordar que:

$$\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] + \mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0] = 1$$

y la correlación de Kendall puede definirse de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\rho_\tau &= 2\mathbb{P}[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - 1 \\
&= 2\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0\}}] - 1 \\
&= 2\mathbb{E}[\mathbf{1}_{\{(X_1 - X_2) > 0\}}\mathbf{1}_{\{(Y_1 - Y_2) > 0\}} + \mathbf{1}_{\{(X_1 - X_2) < 0\}}\mathbf{1}_{\{(Y_1 - Y_2) < 0\}}] - 1 \\
&= 2 \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{(X_1 - X_2) > 0\}} \mathbf{1}_{\{(Y_1 - Y_2) > 0\}} \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{1}_{\{(X_1 - X_2) < 0\}} \mathbf{1}_{\{(Y_1 - Y_2) < 0\}} dF(x_2, y_2) dF(x_1, y_1) \right) - 1 \\
&= 2,2 \left(\int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\{(X_1 - X_2) > 0\}} \mathbf{1}_{\{(Y_1 - Y_2) > 0\}} dF(x_2, y_2) dF(x_1, y_1) \right) - 1 \\
&= 4 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} F(x_1, y_1) dF(x_1, y_1) - 1 \\
&= 4 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dC(u, v) - 1 \tag{4.14}
\end{aligned}$$

■

En la proposición (20) se puede apreciar que la correlación de Kendall es el valor esperado de la función $C(U, V)$ de variables aleatorias uniformes estándar con distribución conjunta C ; es decir, $\rho_\tau = 4E[C(u, v)] - 1$ de tal manera que es fácil utilizar las cópulas para calcular la correlación de rango.

Gráficos y diagramas de contorno de una cópula La gráfica de una cópula se puede entender como una superficie continua (es decir, $z = C(u, v)$) dentro del cubo unidad \mathbb{I}^3 que se encuentra limitado por los vértices $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ y $(0,1,0)$. De manera general, las gráficas correspondientes al límite inferior de Fréchet, a la cópula independiente y al límite superior de Fréchet, se las pueden entender como las superficies de $z = M(u, v)$, $z = \Pi(u, v)$ y $z = W(u, v)$ respectivamente, las mismas se observan en la Figura 4.11.

Una manera sencilla pero útil de presentar las gráficas de las cópulas es a través de los diagramas de contorno, que son gráficas bidimensionales donde se considera que la cópula puede tomar ciertos valores fijos es decir $C(u, v) = a$, donde a toma valores entre $[0,1]$. En la Figura 4.12 se presenta los diagramas de contorno de las cópulas W , Π y M .

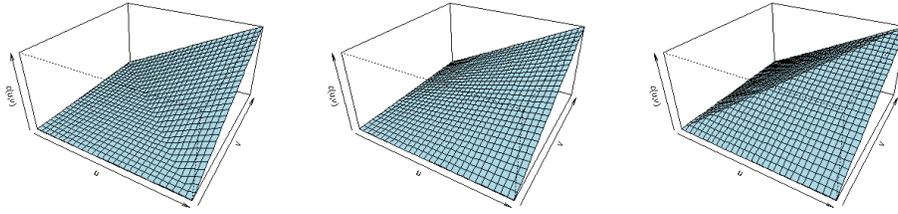


Figura 4.11: Gráfico de las cópulas W, II y M.

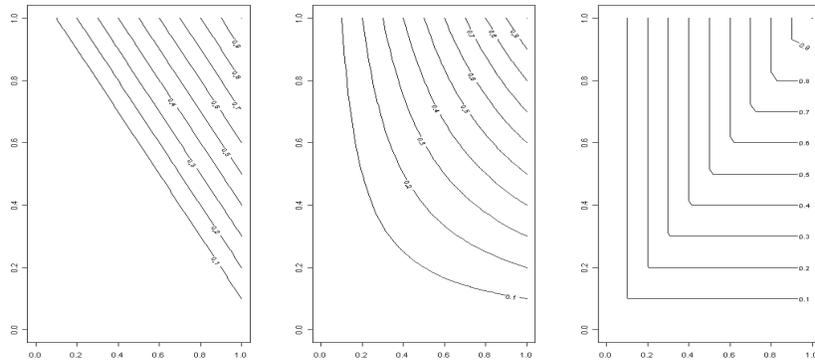


Figura 4.12: Gráfica de contorno de las cópulas W, II y M.

Se puede apreciar de mejor manera la relación de dependencia extremas (contra-comonotónica, independencia y comonotónica) entre las variables aleatorias u y v a través de las gráficas de contorno de los límites de Fréchet (*Sea* $\{u, v\} \in I^2 \mid C(u, v) = t, tq$ $t \in I$).

4.2.4. Familias de Cópulas

Anteriormente se definió el concepto de cópula y las propiedades que ésta tiene; sin embargo, existe una gran cantidad de funciones que satisfacen las condiciones necesarias para ser consideradas como cópulas¹⁰, de acuerdo con sus características, las cópulas pueden ser agrupadas en diferentes categorías¹¹, siendo estas:

¹⁰Una lista de cópulas se encuentra en el Anexo D.

¹¹Las cópulas pueden pertenecer a más de una categoría.

1. *Fundamentales*, se encuentra asociadas con los casos extremos de dependencia como la *comonotonidad*, *contracomonotonidad* e *independencia*.
2. *Formas funcionales*, en esta agrupación se identifica las cópulas *explícitas e implícitas*, la primera corresponde aquellas cópulas que pueden ser expresadas a través de una forma funcional cerrada, por ejemplo las cópulas fundamentales; la segunda agrupación corresponde a cópulas que son derivadas de las funciones de distribución multivariadas conocidas, aunque sus formas funcionales no son simples o cerradas, como por ejemplo las cópulas derivadas de las funciones de distribución normal y t multivariada.
3. *Características particulares*, en esta agrupación depende directamente de las características particulares de las cópulas, es posible identificar tres grandes grupos o familias de cópulas siendo las cópulas *Elípticas*, *Arquimidianas* y *Valor Extremo*, las cuales se presentan a continuación.

Cópulas Elípticas

Las distribuciones elípticas juegan un papel importante en finanzas, debido a que constituye una fuente de distribuciones multivariantes que poseen muchas de las buenas propiedades de la distribución normal multivariante y facilitan la obtención de modelos multivariantes para casos extremos y otras formas de dependencia no normales. Las cópulas elípticas no son más que las cópulas de distribuciones elípticas por lo que las curvas de nivel de las variables aleatorias que tengan este tipo de cópulas forman elipses. Las dos cópulas más importantes de esta familia de cópulas son la cópula normal (o Gaussiana) y la cópula t de student, las cuáles se derivan de las funciones de distribución multivariada que poseen estos mismos nombres. La simulación a partir de este tipo de distribuciones es sencilla y, como consecuencia del teorema de Sklar, también lo es a partir de cópulas elípticas. Además permiten calcular fácilmente los coeficientes de correlación de rangos y dependencia en colas.

Definición 21 Sea X un vector aleatorio n -dimensional, $\mu \in \mathbb{R}$ y Σ una matriz simétrica de dimensión $n \times n$ y definida no negativa. Se dice que X tiene una distribución elíptica

de parámetros μ , Σ y ϕ si la función característica de $X - \mu$ es de la forma

$$\varphi_{X-\mu}(t) = \phi(t^T \Sigma t)$$

Un vector que sigue una distribución elíptica se lo denota por $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$ y ϕ recibe el nombre de *generador característico*. Si $X \sim E_n(\mu, \Sigma, \phi)$, donde Σ es una matriz diagonal, entonces X tiene componentes incorreladas (si $0 \leq V(X_i) \leq +\infty$). La distribución normal multivariada es la única entre las distribuciones elípticas en la que componentes no correlacionadas implica componentes independientes.

Definición 22 Sea R una matriz simétrica, definida positiva y Φ_R^n la función de distribución normal n -variante estandarizada. La cópula gaussiana se define como:

$$\begin{aligned} C_R(u_1, \dots, u_n) &= \Phi_R^n(\phi^{-1}(u_1), \dots, \phi^{-1}(u_n)) \\ &= \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_n)} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} |R|^{\frac{1}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^T P^{-1}x\right) dx_1 \dots dx_n \quad (4.15) \end{aligned}$$

donde ϕ^{-1} es la función de distribución inversa de la distribución normal estándar.

Las cópulas gaussianas no tienen dependencia en las colas y ha sido la única utilizable durante mucho tiempo; de hecho la metodología RiskMetricsTM la usa hace varios años en gestión de riesgos de carteras mediante simulaciones Monte Carlo.

Existen otra cópula dentro de la familia elíptica que reviste interés, es la llamada cópula t de student, donde se supone que X tiene una representación estocástica de la siguiente manera:

$$X =_d \mu + \frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}} Z$$

donde $\mu \in \mathbb{R}$, $S \sim \chi_v^2$ y $Z \sim N_n(0, \Sigma)$ son independientes, entonces X tiene una distribución t de Student n -variante de media μ y v grados de libertad. Su matriz de covarianza es $\frac{v}{v-2}\Sigma$ (para $v > 2$). Si $v \leq 2$ entonces $Cov(X)$ no está definida. En este caso se interpreta Σ como el parámetro de forma de la distribución de X .

Definición 23 Sea R una matriz simétrica, definida positiva y X el vector aleatorio definido anteriormente. La cópula t de Student Multivariada se define como:

$$\begin{aligned}
C_{v,R}^t(u_1, \dots, u_n) &= t_{v,R}^n(t_v^{-1}(u_1), \dots, t_v^{-1}(u_n)) \\
&= \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \dots \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_n)} \frac{\Gamma(\frac{v+d}{2}) |R|}{\Gamma(\frac{v}{2}) (v\pi)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(1 + \frac{1}{v} x^T P^{-1} x\right)^{-\frac{v+d}{2}} dx_1 \dots dx_n \quad (4.16)
\end{aligned}$$

donde

$$R_{ij} = \frac{\Sigma_{ij}}{\sqrt{\Sigma_{ii}\Sigma_{jj}}} \text{ para todo } i, j \in \{1, \dots, n\}$$

y $t_{v,R}^n$ denota la función de distribución t de student multivariada de $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{S}}Y$ con $S \sim \chi^2$ e $Y \sim N_n(0, R)$ independientes, con matriz de correlación R y v grados de libertad y t_v^{-1} es la función de distribución inversa asociada a la distribución t univariada con v grados de libertad.

Las cópulas elípticas resultan atractivas en el mundo financiero, ya que en portafolios conformados por factores de riesgo que sigan una distribución elíptica se satisface las condiciones que garantizan la subaditividad del valor en riesgo (VaR) y el principio de diversificación, de tal forma que la optimización del portafolio resulta apropiado.

Una ventaja que poseen las cópulas Gaussianas y t de student con respecto a las funciones de distribución de las cuales se derivan, es que a partir de las cópulas es posible utilizar variables aleatorias que sigan distribuciones marginales que no sean Gaussianas o t de student.

Se puede apreciar que las ecuaciones (4.15) y (4.16) se encuentran definidas en términos de las funciones de distribución inversas de ϕ^{-1} y t_v^{-1} , estas se evalúan en las variables $u_i = F_i(r_i)$ con $i = 1, \dots, n$, donde F_i corresponde a una función de distribución arbitraria, de aquí las variables aleatorias cuya estructura de dependencia este descrita por una cópula Gaussiana o una t de student puede describir comportamientos marginales diferentes. Las distribuciones derivadas de esta manera son conocidas como *meta-distribuciones* y pueden ser pensadas como una generalización de las distribuciones multivariadas tradicionales. Por ejemplo, una distribución meta-Gaussiana sería aquella cuyo comportamiento multivariado es descrita por una cópula Gaussiana pero al menos una de las distribuciones marginales sea diferente de la distribución normal.

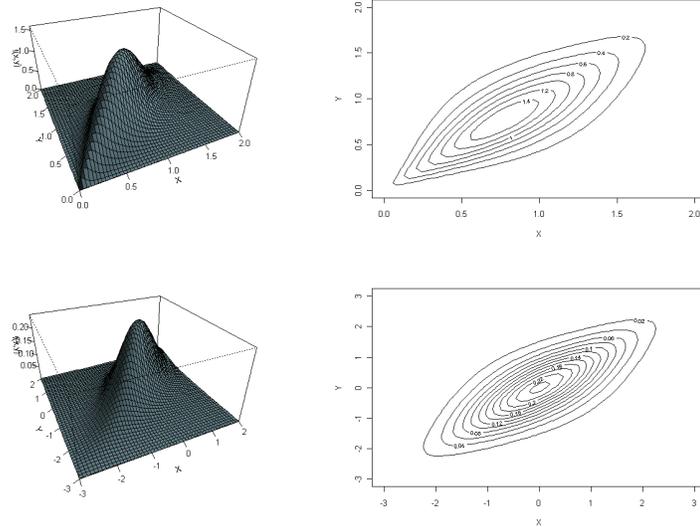


Figura 4.13: Superficies y funciones de densidades asociadas a dos distribuciones elípticas bivariadas

En la parte superior de la Figura 4.13 se presenta la densidad de la distribución *meta-t de student* con 5 grados de libertad y marginales Weibull y en la parte inferior corresponde la distribución multivariada de dos variables aleatorias que tienen una cópula gaussiana y funciones de distribución marginales normal estándar, en ambos casos la correlación es del 70%. Claramente se observa que las gráficas de contorno tiene formas elípticas con la característica que la primera distribución presenta dependencia en la cola inferior por lo que las *meta-distribuciones* permiten incorporar ciertas estructuras específicas de dependencias que permite describir el comportamiento multivariado de las variables aleatorias.

	Cópula Gaussiana	Cópula t de student
$\rho_{\tau}(Kendall)$	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\rho_{ij})$	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\rho_{ij})$
$\rho_S(Spearman)$	$\frac{2}{\pi} \arcsen(\frac{1}{2}\rho_{ij})$	-
$\lambda_l = \lambda_u$	0	$2t_{v+1} \left(-\sqrt{\frac{(v+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$

Cuadro 4.2: Medidas de dependencia para las cópulas normal y t de student

En el Cuadro(4.2) se muestra como los coeficientes de dependencia de la cópula t de student bivariada toma valores diferentes de cero, lo que indica que existe una dependencia significativa entre los valores extremos de las series descritas por esta cópula.

Cópulas Arquimidianas

Un particular grupo de cópulas que han probado ser útiles en una gran cantidad de modelos empíricos es la llamada clase Arquimidiana. Las cópulas Arquimidianas permiten capturar una gran variedad de estructuras de dependencia. Como se verá más adelante, la representación arquimidiana de cópulas permite reducir al estudio de una cópula multivariante a una única función univariante.

Se considera una clase Φ de funciones $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, \infty]$ cuyas derivadas son continuas sobre $(0, 1)$ con las propiedades que $\varphi(1) = 0$, $\varphi'(t) < 0$ (decreciente) y $\varphi''(t) > 0$ (convexo) para todo $0 < t < 1$, es decir $\varphi(t)$ es una función convexa decreciente. Además si $\varphi(0) = \infty$ entonces se garantiza que la inversa (φ^{-1}) existe.

Alguna función que tenga estas propiedades es capaz de generar una función de distribución bivariada, de tal forma que φ recibe el nombre de *función generadora*.

Si $\varphi(0) < \infty$, la función generadora no es estricta por lo que existe su pseudo inverso, en este caso la cópula toma la forma de $C(u_1, u_2) = \max[(,), 0]$; por ejemplo, se considera la función generadora $\varphi(t) = (1 - t)^\theta$, $\theta \in [1, \infty)$, esto genera la cópula $C(u_1, u_2) = \max[1 - [(1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta]^{1/\theta}, 0]$.

La inversa del generador se escribe como φ^{-1} y su pseudo inversa se escribe como $\varphi^{[-1]}$, donde la definición formal de pseudo inversa es la siguiente:

$$\varphi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t) & 0 \leq t \leq \varphi(0) \\ 0 & \varphi(t) \leq t \leq +\infty \end{cases}$$

y

$$\varphi^{[-1]}(\varphi(t)) = t$$

Definición 24 Se dice que una cópula C es arquimidiana si es de la forma:

$$C(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_n)) & \text{si } \sum_{i=1}^n \varphi(u_i) \leq \varphi(0) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.17)$$

$\varphi(u)$ se denomina *generador de la cópula*. Si $\varphi(0) = \infty$, decimos que φ es un *generador estricto* por lo que su inverso siempre existe (dado que un gran número de resultados requiere que φ tenga inversa en $(0, \infty)$, solamente consideramos generadores estrictos).

Estas cópulas poseen algunas propiedades algebraicas elementales, como son las siguientes:

- i) C es simétrica, es decir, $C(u, v) = C(v, u)$ para todo $u, v \in [0, 1]$.
- ii) C es asociativa, es decir, $C(C(u, v), w) = C(u, C(v, w))$ para todo $u, v \in [0, 1]$.
- iii) $k\varphi$ es también un generador de C , con k cualquier constante positiva.
- iv) Las distribuciones marginales de U, V son $U(0,1)$

$$C(u, 1) = u, \text{ para todo } u \in [0, 1]$$

$$C(1, v) = v, \text{ para todo } v \in [0, 1]$$

- v) Sus curvas de nivel son convexas.

(La demostración puede verse en Nelsen 1999).

Algunos ejemplos de cópulas bivariadas que satisfacen la condición (4.17) se encuentran en las cópulas de contracomonotonicidad e independencia. Adicionalmente, se tiene que el uso de cópulas arquimidianas simplifica mucho los cálculos, por ejemplo, la tau de Kendall viene dada por:

$$\rho_\tau = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\varphi(u)}{\varphi'(u)} du$$

y la dependencia en las colas se puede expresar en términos de los generadores. Marshall y Olkin [1988] muestran que una forma sencilla de construir generadores estrictos

para cópulas arquimidianas, es a través de la transformación de Laplace de la función de distribución asociada a una variable aleatoria $\gamma > 0$, la cual se define como:

$$\psi(t) = E(e^{-t\gamma}) = \int_0^{\infty} e^{-tx} dG(x) \quad (4.18)$$

donde $G(x)$ corresponde a la función de distribución de γ , la cual debe satisfacer $G(0) = 0$. A partir de (4.18), es posible demostrar que $\phi(t) \equiv \psi^{-1}(t)$ ¹².

Anteriormente se mencionó que las cópulas arquimidianas son una familia de funciones muy numerosa, la mayoría de cópulas que pertenece a esta familia son funciones de uno o dos parámetros, lo que si bien permite representar fácilmente diferentes tipos de dependencias, también implica una de sus mayores limitaciones, ya que resulta complicado describir relaciones de dependencia complejas con un número reducido de parámetros, en especial en dimensiones altas [Nelsen, 2006]. A continuación, se mencionan tres de las cópulas Arquimidianas más relevantes.

Cópula Clayton. También conocida como la cópula de Cook y Johnson, originalmente estudiada por Kimeldorf y Sampson (1975), toma la siguiente forma:

$$C^{Cl}(u_1, \dots, u_d) = (u_1^{-\theta} + \dots + u_d^{-\theta} - d + 1)^{\frac{1}{\theta}}$$

donde el generador de esta familia es $\phi(t) = \frac{1}{\theta}(t^{-\theta} - 1)$ con $\theta > 0$, cuando θ se aproxima a cero los marginales son independientes y cuando se aproxima al infinito la cópula se aproxima al límite superior de Fréchet.

La cópula de Clayton no permite cuantificar la dependencia negativa, por lo que le convierte adecuada para medir la dependencia entre índices de riesgos (mercado, crédito, liquidez y operacional) ya que presentan una alta dependencia en la cola inferior y una baja dependencia en la cola superior de la distribución multivariada.

Por ejemplo, en la Figura 4.14 se presenta los gráficos de una cópula bivariada Arquimidiana de Clayton cuyos *valores extremos* de la cola inferior y superior son 0.25 y 0 respectivamente y cuya correlación de Kendall es del 20%, en estas gráficas se identifica la alta dependencia que tiene la cópula de Clayton en la cola inferior.

¹²Para una mejor explicación revisar en libro *Copula methods in finance* [8].

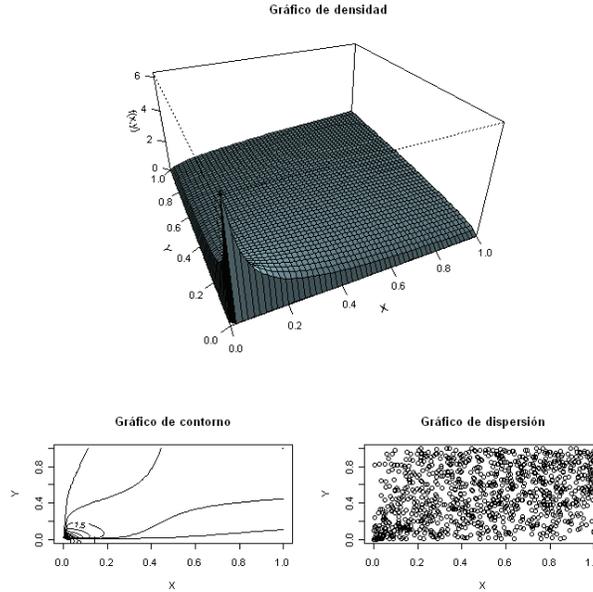


Figura 4.14: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula bivariada de Clayton con parámetro 0.5.

Cópula Frank El generador de la cópula de Frank (1979) está definido por $\phi(t) = -\log\left(\frac{\exp(-\theta t)-1}{\exp(-\theta)-1}\right)$, donde el valor del parámetro puede encontrarse entre $(-\infty, \infty)$, y la cópula asociada a este generador toma la siguiente forma:

$$C^{Fr}(u_1, \dots, u_d) = -\frac{1}{\theta} \log \left[1 + \frac{\prod_{i=1}^d (e^{-\theta u_i} - 1)}{(e^{-\theta} - 1)^{d-1}} \right]$$

Hay que tomar en cuenta que valores de $-\infty, 0$ y ∞ corresponde al límite inferior de Fréchet, independencia y al límite superior de Fréchet respectivamente. La cópula de Frank es muy popular por varias razones, siendo estas:

1. Permite cuantificar dependencia negativa entre marginales
2. La dependencia en las colas de la distribución es simétrica como la cópula Gaussiana y la de t de student
3. Es completa en el sentido en que ésta cópula toma en cuenta los límites de Fréchet,

lo que significa que puede cuantificar una amplia gama de dependencias que pueden ir desde la dependencia perfecta negativa hasta la dependencia perfecta positiva

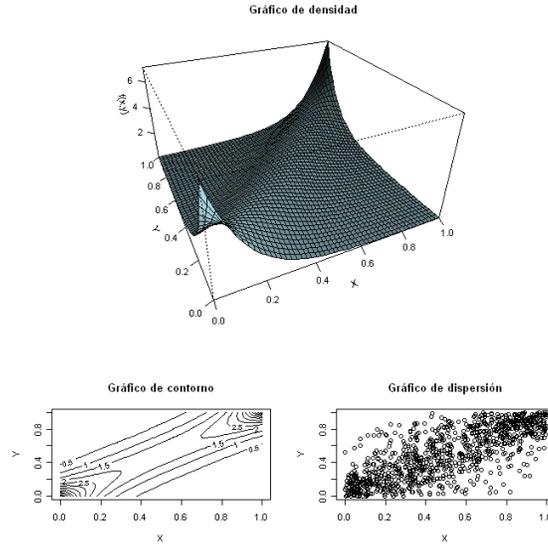


Figura 4.15: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula de Frank con parámetro 3.

De tal manera que la cópula de Frank puede ser usada para modelar distribuciones que presenten fuerte dependencia positiva o negativa, sin embargo a partir de estudios realizados por Mester y Mackay (1994), se determinó que la dependencia en las colas de cópula de Frank tienden a ser más débiles que de la cópula Gaussiana, por lo que se llegó a la conclusión que la cópula de Frank es adecuado en casos donde la distribución multivariada tiene débil dependencia en las colas.

En la Figura 4.15 se presenta los gráficos de una cópula bivariada arquimidiana de Frank donde los valores en la cola superior e inferior son 0 y la correlación de Kendall y Spearman son 0.56 y 0.76 respectivamente. En este tipo de cópula se observa que la dependencia en las colas es débil pero se tiene una alta dependencia en la parte central de la distribución.

Cópula de Gumbel También conocida como cópula de Gumbel-Hougaard, su generador está definido por $\phi(t) = (-\log(t))^\theta$ con $\theta > 1$. En este caso la cópula de Gumbel

toma la forma:

$$C^{Gu}(u_1, \dots, u_d) = \exp\left(-(\tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_d)^{1/\theta}\right)$$

donde $\tilde{u}_j = \log(u_j)$. Cuando el parámetro de dependencia toma valores de 1 y ∞ , la cópula de Gumbel corresponde a la cópula independiente y al límite superior de Fréchet respectivamente. Al igual que la cópula de Clayton, la cópula de Gumbel no permite cuantificar dependencia negativa pero contrariamente a Clayton esta presenta alta dependencia en la cola superior de la distribución y débil dependencia en la cola inferior.

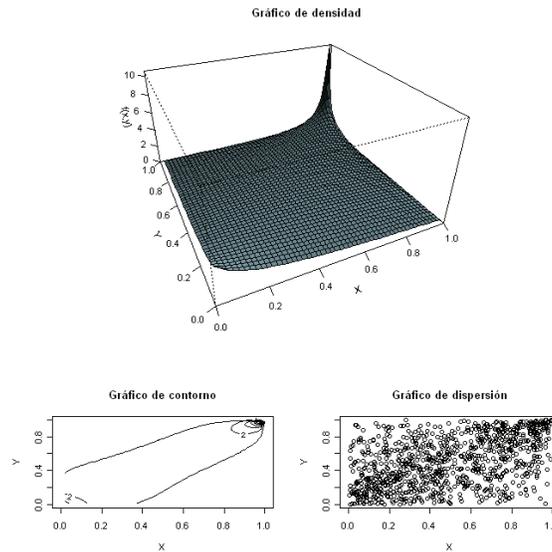


Figura 4.16: Gráfico de densidad, contorno y dispersión de una cópula bivariada de Gumbel con parámetro 1.5.

En la Figura 4.16 se presenta los gráficos de una cópula bivariada arquimidiana de Gumbel donde los valores en la cola superior e inferior son 0.41 y 0 y la correlación de Kendall y Spearman es 0.33 y 0.47 respectivamente, en este tipo de cópula se observa que la dependencia en la cola superior es alta.

De manera general se puede decir que todas estas cópulas arquimidianas, describen tipos de dependencia completamente diferentes, por ejemplo, la cópula de Clayton exhibe

dependencia en la cola inferior mientras que la de Gumbel exhibe dependencia en la cola contraria y finalmente la cópula de Frank no presenta dependencia en las colas sin embargo su alta dependencia se mantiene en el centro de la distribución multivariada.

Cópula	τ de Kendall	λ_u	λ_l
Clayton	$\frac{\theta}{\theta+2}$	0	$2^{-1/\theta}$
Frank	$1 - \frac{4}{\theta} \left[1 - \frac{1}{\theta} \int_0^{\theta} \frac{t}{\exp(t)-1} dt \right]$	0	0
Gumbel	$\frac{(2+\theta)\delta-2}{(2+\theta)\delta}$	$2-2^{1/\theta}$	0

Cuadro 4.3: Coeficiente de Kendall y coeficientes de dependencia en las colas para algunas cópulas Arquimidianas

En el Cuadro (4.3) se observa como la correlación de τ de Kendall se encuentra en función del parámetro de la cópula, esta propiedad permite estimar los parámetros de la cópula a partir del método de momentos.

Cópulas Valor Extremo

En un portafolio de activos, donde la distribución conjunta presenta mayor dependencia en la cola izquierda esta resulta ser un portafolio de mayor riesgo, ya que a medida que se observen pérdidas muy grandes en un activo, es probable que también suceda lo mismo en el otro, tal como se observa en la Figura 4.17 donde se exhiben cuatro diferentes estructuras de dependencia entre los retornos de dos activos financieros. De lo anterior, se aprecia que en finanzas es de interés medir ciertas características de una distribución multivariada como los eventos extremos de las series, donde estas pueden ser aproximadas a partir de medidas específicas que se desprenden de la cópula tales como el coeficiente de dependencia en las colas; sin embargo, esta es una medida asintótica, y no ofrece mayor información acerca del comportamiento probabilístico de las observaciones extremas.

Al igual que en el caso univariado, existen distribuciones multivariadas límites que describen el comportamiento de la distribución conjunta de los extremos de las series de estudio, que a su vez están asociadas a cópulas que pertenece a la familia de valores extremos.

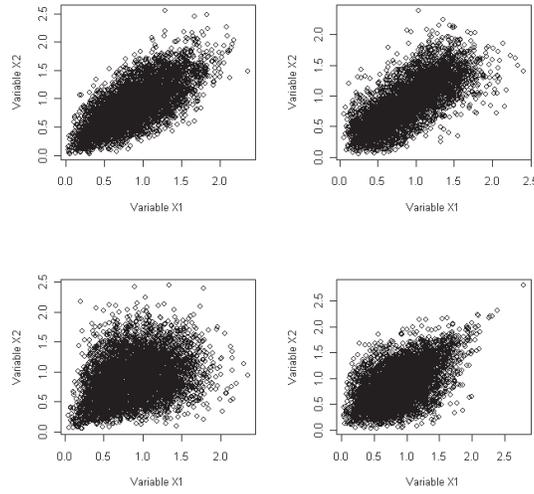


Figura 4.17: Simulación de 5000 realizaciones de dos variables aleatorias normal estándar con cuatro diferentes estructuras de dependencia.

La teoría del valor extremo en el caso univariado se concentra en resultados asintóticos acerca de cual es la distribución límite hacia la cual converge la distribución del valor máximo de una variable aleatoria. El teorema de Fisher y Tippett [1928] y Gnedenko [1943], indica que el máximo de una variables aleatoria puede ser estabilizado a través de secuencias de parámetros de localización y escala, de tal manera que converja en distribución a una *distribución generalizada de valor extremo* (GEV) $H_\varepsilon(x)$, la cual viene de la forma:

$$H_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp(-(1 + \varepsilon x)^{-1/\varepsilon}) & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ \exp(-e^{-x}) & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Una metodología fácil de implementar es la de *máximos por bloques*, en la cual se identifican los valores extremos como los eventos que tengan el valor más alto durante un período de tiempo específico.

Otra forma de analizar el comportamiento de los valores extremos es a partir de la cola de distribución de la variable aleatoria. En esta aproximación el teorema de Balkema y de Haan [1974] y Pickands [1975], indica que para aquellas distribuciones en las que sus máximos muestrales convergen en distribución a la distribución GEV, la distribución de

excesos sobre umbral converge a una *distribución generalizadas de pareto (GPD)* $G_{\varepsilon,\beta}(x)$, la cual es de la forma:

$$G_{\varepsilon,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - (1 + \varepsilon x/\beta)^{-1/\varepsilon} & \text{si } \varepsilon \neq 0 \\ 1 - \exp(-x/\beta) & \text{si } \varepsilon = 0 \end{cases}$$

Dado que en este se desea aproximar el comportamiento de la cola de la distribución a través de una GDP, la forma de seleccionar los valores extremos es a través del método de *picos sobre umbral (POT)*.

Al igual que en el caso univariado, la teoría de valores extremos multivariada (*MEVT*) muestra el comportamiento asintótico de la distribución del Máximo M_n de una familia de vectores aleatorios $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$ donde $X_i \in \mathbb{R}^d$. En este caso M_n corresponderá al vector de máximos de los d componentes de $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$. En el *MEVT* se busca la distribución límite de los máximos normalizados a través de vectores de parámetros de localización ($b_n \in \mathbb{R}^d$) y escala ($c_n \in \mathbb{R}^d$, $c_n > 0$), tal que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P \left(\frac{M_n - b_n}{c_n} \leq x \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(c_n x + b_n) = H(x) \quad (4.19)$$

si la relación (4.19) se mantiene, entonces se dice que la función de distribución F pertenece al dominio de atracción en los máximos de H , donde H corresponderá a una función de distribución multivariada de valor extremo. En la *MEVT* la distribución límite es una familia de distribuciones multivariadas, la cual puede ser aproximado por una familia de cópulas.

A partir de la relación (4.19) y con la definición (12) de Sklar se tiene que:

$$H(x) = C_0(\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)) \quad (4.20)$$

donde $\tilde{F}_1(x_1), \dots, \tilde{F}_d(x_d)$ son las funciones de distribución de los máximos de cada uno de los componentes de la familia de vectores aleatorios $\{X_i\}_{i \in [1,n]}$, por lo que de acuerdo con el teorema de Fisher y Tippet [1928] y Hnedenko [1943] cada una de estas converge en distribución a una distribución GEV. A partir de estos resultados, es posible definir el dominio de atracción de los máximos en términos de la cópula, tal como se muestra en el siguiente teorema [McNeil, 2005].

Teorema 25 Sea $F(r) = C(F_1(r_1), \dots, F_n(r_d))$, para funciones marginales continuas F_1, \dots, F_d y alguna cópula C . Adicionalmente, sea $H(r)$ una distribución MEV tal que satisface (4.20) para alguna cópula C_0 . Se dice que F pertenece al dominio de atracción en los máximos de H , si y solo si F_i pertenece al dominio de atracción en los máximos de la distribución GEV, con $i=1, \dots, d$ y si además se satisface la siguiente condición:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} C^t(u^{1/t}) = C_0(u), \quad u \in [0, 1]^d \quad (4.21)$$

El teorema anterior implica que la cópula límite C_0 se encuentra únicamente determinada por la cópula C . En los casos donde la condición (4.21) se mantiene, se dice que la cópula C pertenece al dominio de atracción de los máximos de la cópula C_0 . La familia de cópulas límite que cumple esta condición se denomina valor extremo, la cual satisface la siguiente propiedad:

$$C(\mathbf{u}^t) = C^t(\mathbf{u}), \quad \text{para todo } t > 0$$

donde $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_d]'$ con $u_i = \tilde{F}_i(x_i)$. Una forma de representar esta familia de cópulas para el caso bivariado es mediante la siguiente expresión:

$$C(u_1, u_2) = \exp \left[\log(u_1 u_2) A\left(\frac{\log(u_1)}{\log(u_1 u_2)}\right) \right]$$

donde $A(\cdot) : [0, 1] \rightarrow [\frac{1}{2}, 1]$, conocida como la función de dependencia, es una función convexa tal que $\max(w, 1 - w) \leq A(w) \leq 1$ para todo $w \in [0, 1]$. Algunas de las cópulas más importantes, tales como la de independencia y la de comonotonicidad, hacen parte de esta familia, junto con otras cópulas versátiles como la Gumbel y Galambos.

4.2.5. Ajuste de Cópulas

Existen tres métodos generales para estimar empíricamente una cópula C asociada a una distribución multivariada F de un conjunto de variables aleatorias i.i.d o más específicamente de un portafolio de activos financieros: el paramétrico, el semi paramétrico y el no paramétrico. El último método es el más general ya que no necesita una especificación *a priori* del modelo y de esta forma no tiene problemas de mala especificación.

Por otro lado, la aproximación paramétrica tiene la ventaja de que si el modelo es correctamente especificado, logra representar de manera precisa la estructura de dependencia de las variables aleatorias a partir de ciertos parámetros; por ejemplo, en el caso de una distribución elíptica multivariada (Ver sección 4.2.4), la estructura de dependencia queda completamente especificada a partir de los coeficientes de correlación lineal, donde a estos coeficientes se les puede interpretar como macrovariables que resumen toda las interrelaciones microestructurales entre los agentes económicos que conducen la dependencia observada. Finalmente, el método semi paramétrico, presenta las mismas propiedades de los modelos paramétricos con la característica que se utiliza cuando no existe gran cantidad de información y no se conoce con certeza las distribuciones de los marginales.

Al inicio de esta sección se detallan los métodos más populares para estimar una cópula donde se hará énfasis en la estimación paramétrica a través de la *aproximación de máxima verosimilitud*, ya que al igual que en la mayoría de modelos estadísticos multivariantes la única teoría utilizada para realizar inferencia estadística es la aproximación de máxima verosimilitud (*MLE*), y para la inferencia de los parámetros de una cópula se utilizarán dos aproximaciones del método de *MLE* siendo estas la aproximación de *máxima verosimilitud completa (FML)* donde los parámetros de las distribuciones marginales y de la función cópula son estimados de manera simultánea, y la *máxima verosimilitud a dos etapas (TSML)*, donde en una primera etapa los parámetros de las distribuciones marginales son estimadas y en una segunda etapa se estiman los parámetros de dependencia de una cópula seleccionada a priori.

Posteriormente, se introduce algunos criterios de selección que facilitan la identificación de la cópula C entre las diferentes familias de cópulas y se especifican algunos índices para medir el buen ajuste de la cópula paramétrica a los datos empíricos de las variables aleatorias.

Métodos de estimación

Aproximación no paramétrica Esta aproximación consiste en obtener la información de las relaciones de dependencias entre las funciones marginales la cual es proporcionada por la cópula empírica, la que permite estimar de manera consistente la cópula real.

La estimación de la cópula empírica es muy empleada como herramienta en el análisis exploratorio de los datos, ya que se puede utilizar para los siguientes objetivos:

1. *Identificar el signo de la dependencia multivariante*
2. *Cuantificar la dependencia conjunta*
3. *Evaluar las posibles familias paramétricas candidatas para el ajuste*

Cópula Empírica La primera estimación de una cópula proviene del trabajo de Deheuvels [1979, 1984] llamada *función de dependencia empírica*, la cual se puede considerar como parte de los métodos de estimación no paramétrica de una cópula. Para definir una cópula empírica primero es necesario definir una distribución multivariada empírica para lo cual se considera un vector $R = (R_1, \dots, R_n)$ de tamaño T $\{(r_1(1), \dots, r_n(1)), \dots, (r_1(T), \dots, r_n(T))\}$ que son i.i.d, el estimador de la distribución empírica multivariada y marginal son respectivamente:

$$\begin{aligned}\widehat{F}(r) &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T 1_{\{r_1(k) \leq r_1, \dots, r_n(k) \leq r_n\}} \\ & \text{y} \\ \widehat{F}_i(r_i) &= \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T 1_{\{r_i(k) \leq r_i\}}\end{aligned}\tag{4.22}$$

Por lo que el estimador no paramétrico de una cópula se lo puede definir de la siguiente manera:

Definición 26 (Cópula de Deheuvel) *La cópula empírica definida en el punto discreto $(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_n}{T})$ con $i_k \in \{1, 2, \dots, T\}$ es:*

$$\widehat{C}_{emp}\left(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_d}{T}\right) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T 1_{\{r_{1,k} \leq r_1(i_1), \dots, r_{d,k} \leq r_d(i_d)\}}\tag{4.23}$$

donde $x_m(i_k)$ son las estadísticas de orden asociadas a la muestra $\{r_m(1), \dots, r_m(T)\}$, el cual se denomina como la cópula empírica.

De manera similar, el estimador de la densidad de la cópula empírica es:

$$\widehat{c}\left(\frac{i_1}{T}, \dots, \frac{i_d}{T}\right) = \sum_{k_1=1}^2 \dots \sum_{k_n=1}^2 [(-1)^{k_1+\dots+k_n} \times \\ \times \widehat{C}\left(\frac{i_1-k_1+1}{T}, \dots, \frac{i_n-k_n+1}{T}\right)]$$

Deheuvels prueba que la *cópula empírica* converge uniformemente a la *cópula verdadera* de la cual fue seleccionada la muestra. Este resultado implica que cuando la *cópula verdadera* es desconocida, un criterio de selección puede ser el comparar una de las *cópulas candidatas* con la empírica.

Estimación semi paramétrica Cuando el número de observaciones no es lo suficientemente grande, es en general más provechoso aplicar un método de estimación paramétrico o semi paramétrico. Como método paramétrico se entiende como un modelo que estima la *cópula real* a partir de ciertos parámetros, donde se conoce de alguna forma que el modelo pertenece a alguna familia de distribuciones multivariadas; es decir, a una familia de *cópulas específica* más una familia de distribuciones univariadas para las distribuciones marginales. Hay que mencionar que para la estimación paramétrica o semi paramétrica es necesario conocer con exactitud la distribución real multivariada, pero su estimación es incorrecta si se especifica mal las distribuciones marginales, por lo que si no conoce con exactitud las distribuciones reales de los marginales es útil estimar la *cópula* por medio del método semi paramétrico. En contraste al método paramétrico, la técnica semi paramétrica utiliza una representación paramétrica solamente para la *cópula* y no se realiza ningún supuesto sobre las distribuciones marginales ya que se estiman de manera no paramétrica, dentro de este método se encuentra *la estimación basada en medidas de concordancia y la estimación pseudo verosimilitud*.

Estimación basada en medidas de concordancia Este tipo de metodología se fundamenta en las relaciones existentes entre las medidas de concordancia¹³ y los parámetros de las *cópulas*. Esta metodología tiene la ventaja que no necesita información acerca de las distribuciones marginales de los datos.

¹³Como el coeficiente de correlación de Spearman (ρ_s) y la correlación de τ de Kendall (ρ_τ).

Para implementar este método es necesario disponer de una muestra R de n realizaciones de un vector *i.i.d* d -dimensional, $R = \{(R_{11}, \dots, R_{d1}), \dots, (R_{1n}, \dots, R_{dn})\}$, donde los pasos de este método son:

- i) *Estimar la matriz de correlación*, para lo cual cada elemento de la matriz $n \times n$ se estima de manera no paramétrica donde se utilizan las medidas de correlación de rango (puede ser la correlación de Kendall o Spearman); por ejemplo, el elemento (i,j) de la matriz de correlaciones corresponde al coeficiente de correlación de rango de Spearman (o τ de Kendall) para las series R_{it} y R_{jt} , $t = 1, \dots, n$, donde los estimadores de los coeficientes de correlación de Spearman ($\hat{\rho}_S$) y Kendall ($\hat{\rho}_\tau$) son respectivamente:

$$\hat{\rho}_S(R_i, R_j) = 1 - \frac{6}{n(n-1)} \sum_{t=1}^n d_t^2 \quad (4.24)$$

$$\hat{\rho}_\tau(R_i, R_j) = \binom{n}{2}^{-1} \sum_{k < s} \text{sign}[(R_{ik} - R_{is})(R_{ik} - R_{js})] \quad (4.25)$$

donde d_t es la diferencia entre los rangos¹⁴ R_{it} y R_{jt}

- ii) *Construir un sistema de ecuaciones*, en secciones anteriores se presentó como las correlaciones de rangos pueden obtenerse de forma teórica a partir de ciertas integrales que está implícito una cópula (las integrales están definidas en la ecuación (4.13) y (4.14)), por lo que es posible formar un sistema de ecuaciones donde se compara la correlación de rango teórica con las estimadas en (4.24) o (4.25), dando como resultados la estimación de los parámetros de la cópula. Un ejemplo, es el caso de una cópula de Gumbel Bivariada que tiene un único parámetro θ , y el estimador que se basa en este método es $\hat{\theta} = \frac{1}{(1-\hat{\rho}_\tau)}$.

Este método es particularmente atractivo debido a su simplicidad sin embargo proporciona estimaciones inexactas de los parámetros.

Estimación pseudo-verosimilitud Es un planteamiento de naturaleza paramétrica donde se supone que la *cópula verdadera* pertenece a una familia paramétrica $\{C_\theta, \theta \in \Theta\}$,

¹⁴El rango de R_{it} corresponde a la posición que tiene R_{it} dentro del conjunto de observaciones ordenadas de la muestra R_{i1}, \dots, R_{in}

con Θ en el espacio de posibles valores del parámetro. Mediante el método de máxima verosimilitud se obtendrán estimadores de $\theta \in \Theta$ consistentes y asintóticamente normales.

Entre las técnicas estadísticas clásicas, la estimación de máxima verosimilitud es una alternativa al método basado en medidas de concordancia, que es usualmente más eficiente, particularmente cuando el parámetro θ es multidimensional. Oakes (1994) realiza una adaptación del método basado en medidas de concordancia a partir de la función de máxima verosimilitud; este método se conoce como *máxima pseudoverosimilitud* o de *máxima verosimilitud canónica (CML)*, para lo cual se requiere que C_θ sea absolutamente continua con densidad c_θ para un vector aleatorio $\mathbf{R}=[R_1, \dots, R_d]'$ *i.i.d* de dimensión d con distribuciones marginales F_1, \dots, F_d y distribución conjunta F , donde la función *CML* es:

$$l(\theta \mid r_1, \dots, r_n) = \sum_{t=1}^n \log c(F_1(r_{1t}), \dots, F_d(r_{dt})) \quad (4.26)$$

$$l(\theta \mid \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n) = \sum_{t=1}^n \log c(u_{1t}, \dots, u_{dt}) \quad (4.27)$$

con $u_{it} = F_i(r_{it})$ *i.i.d* y $\mathbf{u}_t = [u_{1t}, \dots, u_{dt}]'$.

Además, c corresponde a la función de densidad de la cópula C , la cual se define como:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}, \quad (4.28)$$

expresando (4.28) en términos de la función de densidad queda:

$$c(u_1, \dots, u_d) = \frac{f(F^{-1}(u_1), \dots, F^{-1}(u_d))}{f_1(F^{-1}(u_1)) \dots f_d(F^{-1}(u_1))}$$

donde f corresponde a la función de densidad conjunta de \mathbf{R} y f_1, \dots, f_d son las funciones de densidad de los marginales.

Hay que tomar que para estimar el parámetro θ de la cópula es necesario maximizar el logaritmo de la verosimilitud donde se obtiene a partir de la sustitución de las marginales desconocidas F_i , $i = 1, \dots, n$ en la expresión (4.26) por sus contrapartidas empíricas \widehat{F}_i de tal manera que se obtiene a la función de *seudo verosimilitud*, la misma que se expresa de la siguiente manera:

$$l(\theta \mid r_1, \dots, r_n) = \sum_{t=1}^n \log c(\widehat{F}_1(r_{1t}), \dots, \widehat{F}_d(r_{dt})) \quad (4.29)$$

donde θ corresponde al parámetro de la cópula y es estimado a partir de la maximización de la función seudo verosimilitud de la siguiente manera:

$$\hat{\theta} = \arg \max_{\theta \in \Theta} \sum_{t=1}^n \log c(\hat{F}_1(r_{1t}), \dots, \hat{F}_d(r_{dt})) \quad (4.30)$$

este método puede parecer menos atractivo que el basado en las medidas de concordancia ya que implica una mayor cantidad de cálculos y requiere la expresión explícita de la densidad c_θ , sin embargo se puede aplicar de forma más general, concretamente si θ es multidimensional. Genest, Ghoudi y Rivest (1995) demuestran que, bajo condiciones de regularidad, el estimador $\hat{\theta}$ obtenido a partir de la expresión (4.30) es consistente y asintóticamente tiene distribución normal

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_T - \theta^0) \xrightarrow{ley} N(0, \Sigma^2)$$

donde Σ^2 denota a la matriz inversa de información de Fisher. Este resultado se fundamenta en que las condiciones de regularidad son similares a las impuestas en el método de máxima verosimilitud. Cabe mencionar que para la maximización de $\hat{\theta}$ se requiere un punto de inicialización, y para el caso de la estimación de los parámetros de una cópula elíptica se lo puede inicializar a partir de la estimación de los parámetros de la matriz de correlación a través del uso de la correlación de Kendall.

Estimación paramétrica En este método, para la estimación de los parámetros de la cópula y de las funciones marginales se fundamenta en la maximización del logaritmo de la función de máxima verosimilitud (*MLE*), ya que las cópulas se les puede considerar como modelos multivariados y en la mayoría de modelos estadísticos multivariados se los estima a partir de este método.

A partir de la función *MLE* se desprende dos métodos para estimar una cópula, el método de máxima verosimilitud total (*FML*)¹⁵ y el método de máxima verosimilitud a dos etapas (*TSML*)¹⁶. El primer método estima de manera conjunta los parámetros de la cópula y de las distribuciones marginales, en el segundo método como primer paso estima los parámetros de las distribuciones marginales y posteriormente con esta información

¹⁵Sus siglas en inglés de *full maximum likelihood*.

¹⁶Sus siglas en inglés de *two step maximum likelihood*.

se estima los parámetros de dependencia de la cópula, cabe mencionar que el método *TSML* saca provecho la característica de las cópulas donde la estructura de dependencia es independientes de las distribución de los marginales.

Método de máxima verosimilitud total (FML) Antes de explicar este importante método es necesario presentar la siguiente *representación canónica*¹⁷:

$$f(x_1, \dots, x_n) = c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) \times \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$$

donde

$$c(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n)) = \frac{\partial^d C(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_d}$$

representa la *n-ésima* derivada parcial de la cópula C , c es la densidad de la cópula y f es la función de densidad de probabilidad multivariada estándar. A partir de la representación canónica de la función de distribución multivariante se puede decir que el problema de modelar una cópula se descompone en dos partes:

1. Identificación de la distribución de los marginales
2. Descripción de la correcta función cópula

Por lo que a partir de una muestra $R = \{(R_{11}, \dots, R_{d1}), \dots, (R_{1n}, \dots, R_{dn})\}$ d dimensional de tamaño n , el logaritmo de la función de máxima verosimilitud es:

$$l(\theta) = \sum_{t=1}^n \log c(F_1(r_{1t}), \dots, F_d(r_{dt})) + \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^n \log(f_j(r_{jt})) \quad (4.31)$$

donde θ corresponde al conjunto de los parámetros relacionado con la cópula y los marginales donde el *estimador de máxima verosimilitud total* es:

$$\hat{\theta}_{ML} = \max_{\theta \in \Theta} l(\theta)$$

si se supone que la teoría de máxima verosimilitud se encuentra bajo condiciones de regularidad este estimador existe, es consistente y eficiente asintóticamente; adicionalmente se verifica la propiedad de normal asintótica; es decir, $\sqrt{T}(\hat{\theta}_{ML} - \theta_0) \rightarrow N(0, \Sigma^2)$, donde Σ^2 corresponde a la matriz inversa de información de Fisher.

¹⁷Para mayor explicación de la representación canónica se puede observar en el capítulo 4 del libro *Copula methods in finance* página 144 [8].

Método de máxima verosimilitud a dos etapas (TSML) Se considera la situación donde se puede dividir el vector de parámetros θ de la siguiente manera:

$$\theta = (\alpha, \beta_1, \dots, \beta_d)$$

donde α representa los parámetros de la cópula y $\{\beta_i\}_{i \in [1,d]}$ los parámetros de las d funciones de distribución marginales, de tal manera que se tiene la función de distribución multivariada, la misma que se puede escribir de la siguiente manera:

$$F(x, \theta) = C(F_1(r_1; \beta_1), \dots, F_n(r_n; \beta_n); \alpha, \beta_1, \dots, \beta_n),$$

es decir que los parámetros de las funciones de distribución marginal son independientes entre si, de tal manera que el logaritmo de la función de máxima verosimilitud es:

$$\begin{aligned} l(\{r_{it}\}_{i \in [1,d], t \in [1,d]}; \alpha, \beta_1, \dots, \beta_n) &= \sum_{t=1}^n \log c(F_1(r_{1t}; \beta_1), \dots, F_d(r_{dt}; \beta_d); \theta) + \\ &+ \sum_{t=1}^n \sum_{j=1}^d \log(f_j(r_{jt}; \beta_j)) \end{aligned}$$

de tal manera que en vez de determinar de manera conjunta los estimadores de la cópula y los marginales, se puede ejecutar la estimación en dos pasos, en el primer paso se estima los parámetros de los marginales y en el segundo el parámetro de dependencia, así:

$$\begin{aligned} \hat{\beta}_{1,n} &= \arg \max_{\beta_1} \sum_{i=1}^n \ln f_1(x_1(i); \beta_1) \\ &\vdots \\ \hat{\beta}_{d,n} &= \arg \max_{\beta_d} \sum_{i=1}^n \ln f_d(x_d(i); \beta_d) \\ \hat{\alpha}_n &= \arg \max_{\alpha} \sum_{t=1}^n \log c(F_1(r_{1t}; \hat{\beta}_{1,T}), \dots, F_d(r_{dt}; \hat{\beta}_{d,T}); \alpha, \hat{\beta}_{1,T}, \dots, \hat{\beta}_{n,T}) \end{aligned}$$

donde el estimador $TSML$ $\hat{\theta}_n = (\alpha_n, \hat{\beta}_{1,n}, \dots, \hat{\beta}_{d,n})$ es consistente y asintóticamente Gaussiano $(\hat{\theta}_n - \theta_0) \rightarrow N(0, A^{-1}BA^{-1t})$, donde $A^{-1}BA^{-1t}$ es la inversa de la matriz de información de Godambe.

Mientras asintóticamente es menos eficiente que el estimador FML , ésta aproximación tiene ventajas obvias para reducir el problema de dimensionalidad y es útil cuando se quiere recurrir a un problema de maximización.

Observaciones de los métodos paramétricos

1. En la práctica se puede tratar con muestras de diferente longitud, esto ocurre cuando se considera simultáneamente información sobre mercados maduros y emergentes, en estos casos es mejor utilizar el método *TSML*.
2. La estimación *FML* utiliza un conjunto de datos que es la intersección de todas las muestras de los marginales otorgando un pérdida significativa en eficiencia en la estimación de los parámetros de los marginales.
3. La estimación *TSML* utiliza el todo de la información para estimar los parámetros de los marginales y utiliza solamente la intersección de la información para estimar los parámetros de la cópula.
4. El estimador *TSML* es consistente y asintóticamente Gaussiano.
5. El estimador *FML* es más eficiente que *TSML*.
6. La estimación por medio de *TSML* es mejor que la estimación con *FML*.

Verificación de supuestos Es importante destacar que la estimación de una cópula C por el método de máxima verosimilitud supone que:

- i) La cópula C es conocida.
- ii) La variable aleatoria r_t y la función de distribución $F_i(r_{it}) = u_{it}$ son *i.i.d.*
- iii) $\hat{F}_i(r_{it}) = u_{it}$ sigue una distribución uniforme entre 0 y 1.

El *supuesto i)* resulta complicado de satisfacer, ya que en la mayoría de los casos no se conoce a priori cuál es la cópula más apropiada para los datos; en estos casos es común estimar varias cópulas y buscar un criterio de selección para escoger la más apropiada. Por otro lado, el *supuesto ii)* tiene grandes implicaciones en la estimación, ya que si los datos no son *i.i.d.*, la función de verosimilitud presentada en (4.31) no es adecuada y por consiguiente la estimación pierde validez por lo que es necesario implementar modelos dinámicos que cuantifican la dependencia temporal en r_t .

El supuesto *iii)* implica que las funciones de distribución marginales se especificaron correctamente. En el caso en que las funciones de distribución estén mal especificadas, no es posible garantizar que la transformación $\widehat{F}_i(r_{it})$ siga una distribución uniforme por lo cual el teorema (12) no está correctamente representado.

Para verificar que \mathbf{u}_t es i.i.d, Patton [2001] sugiere el uso de la prueba propuesta por Diebold [1998] en la que se prueba independencia para los primeros cuatro momentos de u_{1t}, \dots, u_{dt} , adicionalmente Patton [2001] utiliza la prueba de Kolmogorov-Smirnov para probar si la serie u_{it} sigue una distribución uniforme entre 0 y 1. Sin embargo Patton [2001] menciona dos desventajas acerca del uso de este procedimiento: primero, estas pruebas contrastan separadamente los supuestos *ii)* y *iii)*, cuando sería deseable utilizar una prueba conjunta; segundo la prueba de Kolmogorov-Smirnov tiene baja potencia en las colas de distribución, las cuales tiene gran importancia en el cálculo de medidas de riesgo tales como el Valor en Riesgo (VaR).

4.2.6. Selección y evaluación de una cópula

En la sección anterior se presentaron diferentes procedimientos para la estimación de una cópula donde en la estimación paramétrica y semiparamétrica es necesario especificar a priori el tipo de cópula que describe correctamente la estructura de dependencia que existen entre las variables aleatorias analizadas, para lo cual es necesario obtener algún tipo de criterio que permita escoger una cópula específica entre el conjunto de todas las cópulas posibles, entre estos criterios se encuentra el *criterio teórico*, *los criterios de información* y *los criterios de bondad de ajuste*.

Criterio teórico

Básicamente, este criterio se fundamenta en la propiedad de que bajo la hipótesis nula de que $C(u_1, \dots, u_d)$ es la correcta cópula, luego se tiene que el conjunto de variables aleatorias

$$C_n(U_n | U_1, \dots, U_{n-1}), \dots, C_2(U_2 | U_1), U_1$$

con

$$C_k(u_k | u_1, \dots, u_{k-1}) = \frac{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1} C_k(u_1, \dots, u_d)}{\partial u_1 \dots \partial u_{k-1} C_{k-1}(u_1, \dots, u_d)}$$

son idénticas, uniformes e independientemente distribuidas. De tal manera que, probar la hipótesis nula es equivalente a probar que la muestra de T vectores

$$\{C_n(\hat{u}_n(t) | \hat{u}_1(t), \dots, \hat{u}_{n-1}(t)), \dots, C_2(\hat{u}_2(t) | \hat{u}_1(t), \hat{u}_1(t))\}_{t=1}^T$$

es obtenido de una población de vectores aleatorios uniformes con componentes independientes.

Criterios de información

Si se utiliza la aproximación paramétrica de máxima verosimilitud, un criterio suplementario para examinar la bondad de ajuste de los modelos es el que se basa en la comparación de los valores negativos de las funciones de verosimilitud. Akaike (1973, 1977) desarrolló una estrategia de decisión basada en la medida de información de Leibler (1951), dado que esta medida proporciona un criterio de ordenación de modelos estadísticos alternativos.

El criterio de información de Akaike (AIC) se define como

$$AIC = 2(-\log(l(\hat{\theta})) + n_p)$$

donde n_p es en número de parámetros estimados en el modelo, $\log(l(\hat{\theta}))$ corresponde al logaritmo de la función de máxima verosimilitud evaluada en $\hat{\theta}$ que corresponde al estimador de máxima verosimilitud. Adicional al criterio de selección de AIC , Zivot y Wang [2006] utilizan otros dos criterios de información para la selección de una cópula, estos son el criterio de selección Bayesiano (BIC) y el criterio de información de Hannan y Quinn (HQ), los que son definidos de la siguiente forma:

$$BIC = -2\log(l(\hat{\theta})) + n_p \log(n)$$

$$HQ = -2\log(l(\hat{\theta})) + 2n_p \log(\log(n))$$

donde n_p es en número de parámetros estimados en el modelo y n es el tamaño de la muestra. El valor de AIC , BIC o HQ informa sobre qué modelo proporciona un mejor ajuste: cuanto menor sea este valor mejor será el modelo considerado.

Comparación entre cópulas paramétricas y empíricas

El criterio de selección va relacionado con la nivel de bondad de ajuste (**GOF**) que tiene la cópula teórica con la empírica, para lo cual se propone el uso del índice de Kolmogorov-Smirnov ya que permite detectar discrepancias entre la distribución teórica y la empírica, donde el estadístico utilizado para el contraste es la máxima diferencia entre la distribución empírica y la teórica

$$T = \max \left\{ \left| \widehat{F}(x) - F(x) \right| \right\}.$$

Romano [2002] propone una estadística que pretende generalizar las estadísticas usadas en las prueba GOF univariadas para el caso de cópulas, para lo cual calcula la distancia entre la cópula estimada y la cópula empírica, de la forma:

$$d(C_k, C_{emp}) = \sqrt{\sum_{t_1=1}^n \dots \sum_{t_d=1}^n \left(\widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) - \widehat{C}_{emp} \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) \right)^2} \quad (4.32)$$

donde \widehat{C}_{emp} corresponde a la cópula empírica y \widehat{C}_k es la cópula teórica estimada. Así la cópula apropiada será aquella que minimice (4.32), sin embargo Romano no analiza las propiedades de este tipo de estadístico.

A partir de este mismo punto de vista, otras medidas que se utiliza para comparar la cópula teórica estimada con la cópula empírica, es la distancia de Anderson y Darling [1952]. Al respecto, Junker y May [2005] y Ané y Kharoubi [2003] utilizan los siguientes estadísticos:

$$AD = \max_{1 \leq t_1 \leq n, \dots, 1 \leq t_d \leq n} \frac{\sqrt{n} \left| \widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) - \widehat{C}_{emp} \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) \right|}{\sqrt{\widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) (1 - \widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right))}}$$

$$IAD = \frac{1}{n} \sum_{t_1=1}^n \dots \sum_{t_d=1}^n \frac{\left[\widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) - \widehat{C}_{emp} \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) \right]^2}{\widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right) (1 - \widehat{C}_k \left(\frac{t_1}{n}, \dots, \frac{t_d}{n} \right))}$$

Junker y May mencionan que estos estadísticos deber ser interpretados con cautela por lo tanto solo deben servir como un indicador adicional para seleccionar a la cópula teórica.

Proceso para determinar la mejor cópula de ajuste

Para determinar la cópula teórica que mejor se ajusta a una muestra de datos, se tiene que seguir los siguientes pasos:

1. Estimar los parámetros de una cópula a partir del método de *seudomáxima verosimilitud*, *máxima verosimilitud total* y *máxima verosimilitud a dos etapas*, esto se repite para todas las familias de cópulas por analizar.
2. Determinar los criterios de información de AIC, BIC y HQ para cada familia de cópula, con la característica que los modelos que presenten valores bajos se consideren los mejores modelos que permiten cuantificar la dependencia en la muestra.
3. Para las familias de cópulas que presenten valores adecuados de los criterios de información, se tiene que verificar que se cumplan los supuestos necesarios para utilizar el método de máxima verosimilitud.
4. Las familias de cópulas que presentan buenos indicadores de los criterios de información, se validan a partir de los criterios de buen ajuste (*GOF*) para identificar la mejor cópula paramétrica que cuantifica la dependencia en los datos.
5. Contrastar los parámetros estimados de la cópula seleccionada que son obtenidos a partir de los métodos de *seudomáxima verosimilitud*, *máxima verosimilitud total* y *máxima verosimilitud a dos etapas*.

En la Figura 4.18 se esquematizan los pasos a seguir para determinar la cópula teórica que mejor cuantifica la dependencia en la muestra de datos.

Cuando se trata de determinar la mejor cópula que representa la dependencia en la muestra, se tiene que tomar en cuenta los siguientes limitantes:

1. La correlación de rango no permite modelar todas las familias de cópulas existentes.
2. El método de máxima verosimilitud existe siempre y cuando se trate con cópulas continuas.
3. Un modelo de cópulas uniparamétrico no captura adecuadamente la dependencia.

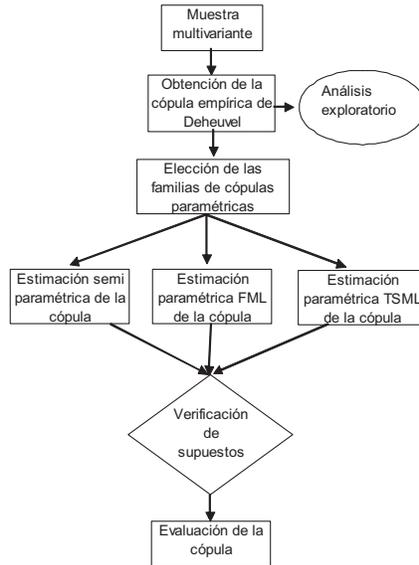


Figura 4.18: Procedimiento de selección y ajuste de una Cópula multivariada

4. Se debe seleccionar una familia de cópula siempre y cuando el parámetro de dependencia se encuentre entre los límites establecidos por la misma familia.

Cabe mencionar que para validar el proceso propuesto para identificar la cópula teórica, se tiene que generar datos a partir de una cópula y distribuciones marginales conocidas y con esta información se tiene que ejecutar el anterior proceso de tal manera que si logra identificar la cópula verdadera y posteriormente las estimaciones de los parámetros de la cópula y de las distribuciones marginales son similares a las teóricas entonces garantiza que el proceso es adecuado para medir la dependencia entre las variables. Para validar este proceso de identificación de la cópula teórica primero se considera una pequeña muestra de datos que son generados por una distribución esférica multivariada y luego se utiliza una muestra grande que es generada por una Meta distribución, con estos dos ejercicios se medirá la potencia del proceso para identificar dependencia entre las variables de manera adecuada.

Datos generados por una distribución esférica multivariada Esta muestra está formada por 200 observaciones de un vector tres dimensional, la misma que es generada por una distribución normal multivariada cuyos elementos de la matriz de correlación

son 0.9 y las distribuciones marginales son normal estándar. Para la estimación de los parámetros de la cópula teórica se utiliza el método de máxima verosimilitud, por lo que es necesario que los datos cumplan los supuestos establecidos en la sección 4.2.5.

Cabe mencionar que *el primer supuesto* parte del hecho de que se conoce a priori la cópula teórica que siguen los datos analizados, sin embargo una forma práctica de cumplir este supuesto es utilizar todas las familias de cópulas, en este caso se probarán seis tipos de cópulas siendo estas las cópulas esféricas normales, t de student, las cópulas arquimídiana de Clayton, Frank y Gumbel y la cópula independiente.

En el segundo supuesto, se debe cumplir que las series de datos sean generados aleatoriamente y que no presenten ninguna estructura de dependencia temporal, para cumplir este supuesto se aplican filtros a las series originales de tal manera que se puedan obtener series independientes, en este caso se puede aplicar los modelos de series de tiempo¹⁸ que dan como resultado una serie ruido blanco, la misma que presenta independencia y aleatoriedad por lo que esta serie es adecuada para aplicar modelos de cópulas y cuantificar la dependencia entre las series.

En el tercer supuesto, parte del hecho de que las distribuciones marginales son conocidas, dando como resultado que la estimación de los parámetros de las cópulas teóricas sean consistentes, es decir que los valores relacionados con la pseudo muestra aleatoria $\mathbf{u}_t = [u_{1t}, \dots, u_{dt}]'$ sigan una distribución uniforme estándar, permitiendo que la estimación de los parámetros de la cópula sea adecuada. Inicialmente se utilizará como pseudo muestra aleatoria a la información empírica de los datos para estimar los parámetros de la cópula a partir del método de pseudo máxima verosimilitud (*CML*), esto da como resultado una primera aproximación de la estimación de los parámetros de la cópula. Sin embargo para mejorar la estimación de los parámetros se utilizan los métodos de máxima verosimilitud a una y dos etapas, donde es necesario inicializar estos parámetros a partir de los obtenidos por el método *CML*.

Para verificar que las distribuciones marginales empíricas siguen una distribución uniforme estándar, se efectuó la prueba de Kolmogorov Smirnov (KS), la cual no se encuentra

¹⁸En este caso se puede utilizar los modelos autorregresivos y/o medias móviles y los modelos de volatilidad estocástica.

Cuadro 4.4: Criterios de información para familias de cópulas aplicando métodos de estimación de máxima verosimilitud.

Cópula	Akaike (AIC)			Bayesiano (BIC)			Hannan y Quinn (HQ)		
	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML
Normal	-722	-879	979	-719	-876	982	-721	-878	980
t de student	-723	-881	978	-720	-878	981	-722	-880	979
Clayton	-499	-696	1166	-496	-693	1170	-498	-695	1168
Frank	-656	-833	1042	-652	-830	1046	-654	-832	1044
Gumbel	-717	-862	1020	-714	-858	1024	-716	-860	1022

CML = Seudo Máxima Verosimilitud

FML = Máxima Verosimilitud total

TSML = Máxima Verosimilitud a dos pasos

evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de que la distribución marginal empírica ($u_i = \widehat{F}(r_{it})$) siga una distribución uniforme estándar, este resultado se confirma a partir de los gráficos de cuantiles tal como se observa en la Figura 4.19.

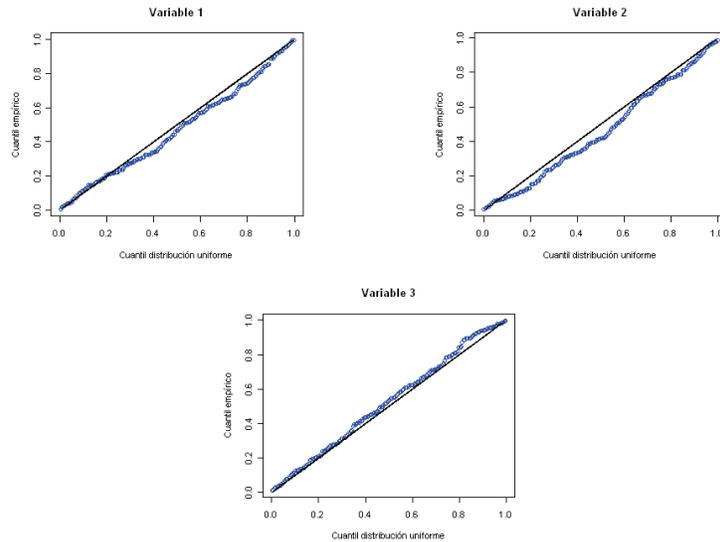


Figura 4.19: Gráficos de cuantiles de las distribuciones empíricas del vector aleatorio.

Para estimar los parámetros de la cópula con el método de máxima verosimilitud a una y dos etapas, es necesario disponer de las distribuciones paramétricas de los marginales, para lo cual se utilizó las pruebas de KS y así determinar la mejor distribución teórica que se ajusta a los datos empíricos, dando como resultado que las distribuciones marginales siguen una distribución normal de media -0.1 y desviación estándar de 1.02 . Para

garantizar el buen ajuste de los datos, se efectuó la prueba de KS, la cual no se encuentra evidencia estadística para rechazar la hipótesis nula de que la distribución marginal teórica siga una distribución uniforme estándar, para validar este resultado se realiza un gráfico de cuantiles de la distribución teórica tal como se observa en la Figura 4.20.

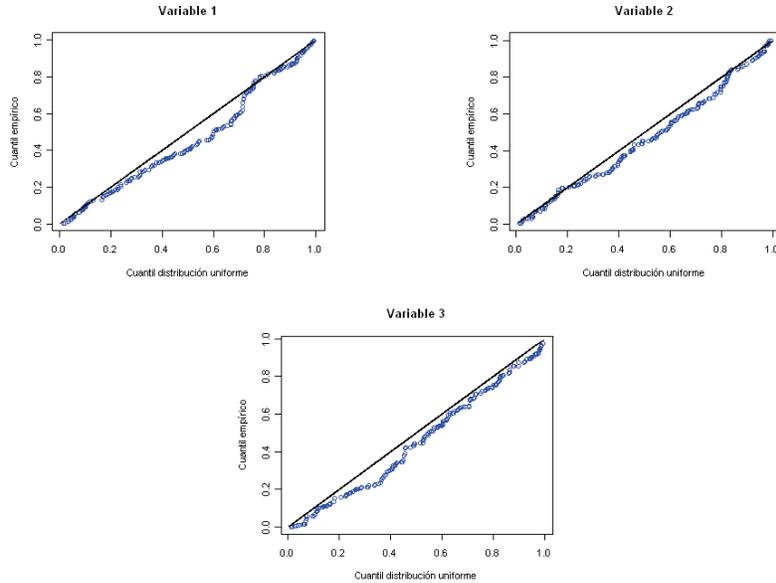


Figura 4.20: Gráficos de cuantiles del vector aleatorio que es generado por distribuciones normales de media -0.1 y desviación estándar 1.02 .

De lo anterior se observa que la pseudo muestra generada de manera paramétrica así como la basada en los datos empíricos es aleatoria, independiente y las distribuciones marginales son las correctas por lo que estas pseudo muestras son adecuadas para estimar la cópula teórica C ; sin embargo, cabe mencionar que no existe un criterio único ni definitivo para seleccionar una cópula a priori sobre los datos, por lo que se estiman varias cópulas para describir el comportamiento conjunto de los datos.

A todas las familias de cópulas se calculan los criterios de información de Akaike (AIC), Hannan y Quinn (HQ) y el Bayesiano (BIC) de tal manera que se tiene un primer criterio para seleccionar la cópula, tal como se observa en el Cuadro (4.4), donde se puede apreciar que los índices asociados con la cópula elíptica normal, t de student y la arquimidiana de Gumbel presentan los valores más pequeños por lo que sugiere que estas

Cópula	Kolmogorv Smirnov		
	CML	FML	TSML
Normal	0.79	0.54	0.54
t de student	0.79	0.54	0.54
Clayton	0.11	0.47	0.47
Frank	0.86	0.63	0.63
Gumbel	0.92	0.86	0.86
Independencia	0.00	0.00	0.00

Cuadro 4.5: Probabilidad de que la función de distribución teórica sea igual a la empírica basándose en la prueba de Kolmogorov Smirnov.

familias representan de mejor manera la dependencia entre las variables aleatorias.

Un segundo criterio de selección se fundamenta en la comparación de la cópula teórica con la cópula empírica, lo que permite medir el nivel de ajuste que tiene la cópula teórica, esto se lo puede hacer a partir de la prueba de KS, donde se contrasta la distribución de la cópula teórica con la empírica, sin embargo con este método solamente la cópula de independencia y la cópula arquimidiana de Clayton resultan no ser adecuadas, tal como se aprecia en el Cuadro (4.5), esto es debido a que este contraste es bastante conservador, por lo que en esta situación no aporta información que pueda ayudar en el proceso de selección del modelo.

Para identificar la cópula teórica que mejor se ajuste a los datos, es necesario disponer de otros criterios de selección que midan el buen ajuste de los modelos, para lo cual se calcula dos estadísticos de la distancia de Anderson Darling (AD , IAD) y la distancia Romano, cuyos resultados se observan en el Cuadro (4.6), donde se puede apreciar que para el caso de una *cópula elíptica normal* está presenta medidas de distancias más pequeñas que las otras familias de cópulas, por lo que se puede decir que *esta cópula es la que mejor cuantifica la dependencia de los datos*.

Se puede apreciar que las distribuciones esféricas normal y t de student presentan indicadores muy parecidos por lo que se puede afirmar que cualquiera de estas dos distribuciones captura la dependencia entre los datos, cabe mencionar que para estimar los parámetros de estas familias, inicialmente se partió con la estimación de los parámetros por medio de las medidas de concordancia, y con estos valores se inicializó la estimación de los parámetros a partir del método pseudo verosimilitud, finalmente para garantizar

Cópula	AD			IAD			Distancia Romano		
	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML
Normal	1.734	1.986	1.986	0.003	0.004	0.004	0.270	0.324	0.324
t de student	1.733	1.997	1.997	0.003	0.004	0.004	0.271	0.326	0.326
Clayton	3.339	2.378	2.378	0.015	0.008	0.008	0.787	0.510	0.510
Frank	10.290	7.443	7.443	0.007	0.006	0.006	0.231	0.319	0.319
Gumbel	1.856	2.202	1.948	0.002	0.004	0.003	0.253	0.398	0.259
Independencia	163.3	163.3	163.3	1.687	1.687	1.687	2.555	2.555	2.555

Cuadro 4.6: Distancia de Anderson Darling y Romano para medir el buen ajuste de la cópula teórica con la empírica.

Método	Normal		t	
	$\hat{\alpha}_1$	gl	$\hat{\alpha}_2$	gl
REAL	0.900	∞	0.900	∞
CML	0.903	∞	0.903	200
FML	0.936	∞	0.937	192
TSML	0.907	∞	0.907	199

CML = Seudo Máxima Verosimilitud
 FML = Máxima Verosimilitud total
 TSML = Máxima Verosimilitud a dos pasos

Cuadro 4.7: Estimación de la cópula aplicando métodos de máxima verosimilitud.

consistencia de los mismos se complementó con la estimación de máxima verosimilitud a dos y una etapa, tal como se observa en el cuadro (4.7), donde las estimaciones son muy parecidas al parámetro real de la cópula.

Finalmente, se puede concluir que este proceso identificó adecuadamente tanto a la cópula real como a sus respectivos parámetros, garantizando que este proceso es adecuado para identificar y estimar la cópula teórica.

Datos generados por una Meta distribución Para verificar la consistencia del proceso para identificar cópulas, se va a utilizar 2000 datos generados por una Meta-distribución de dimensión tres, cuya cópula asociada es una Clayton de parámetro $\theta = 20$ y dos de sus marginales siguen una distribución gamma de parámetros $\alpha = 10, \beta = 5$ y distribución normal de media 5 y desviación estándar de 3. Para la estimación de los parámetros de la cópula teórica se utiliza el método de máxima verosimilitud, por lo que se tiene que cumplir los siguiente supuestos: *conocer a priori la cópula teórica, tanto las variables aleatorias como sus marginales deben ser independientes e idénticamene*

distribuidas y finalmente, se debe conocer a priori la distribución de las marginales.

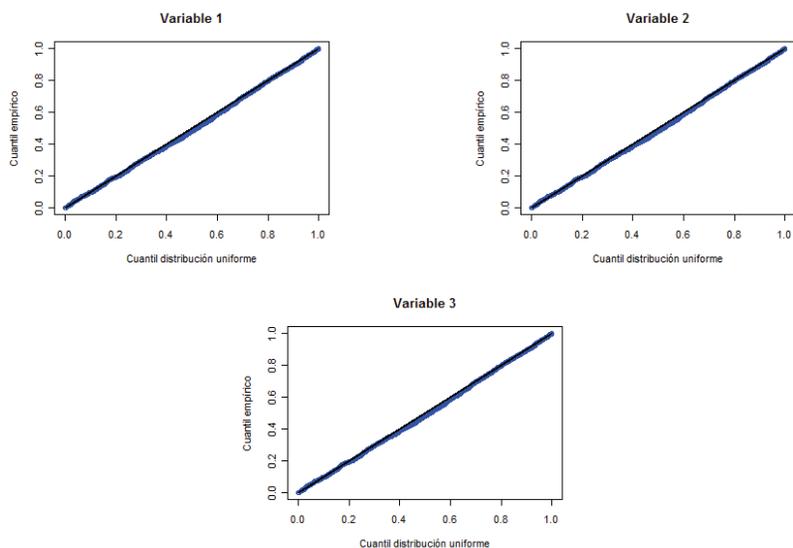


Figura 4.21: Gráficos de cuantiles de las distribuciones empíricas de un vector aleatorio generado por una Meta Distribución.

Al igual que en el anterior ejemplo, para identificar la cópula teórica se prueban con todas las familias de cópulas conocidas y se complementa con criterios de selección para identificar la mejor cópula que represente la dependencia entre las variables. Dado que las 2000 observaciones son generadas a partir de una Meta distribución, estas son independientes por lo que no es necesario probar el segundo supuesto. Finalmente, el tercer supuesto implica que la *seudo muestra aleatoria* sigue una distribución uniforme estándar, garantizando que la estimación de los parámetros de la cópula sea consistente. Cabe mencionar que la *seudo muestra aleatoria* es generada de dos maneras, la primera a partir de las distribuciones empíricas y la segunda a partir de ciertas distribuciones marginales paramétricas¹⁹.

La *primera pseudo muestra* es adecuada si las distribuciones marginales empíricas siguen una distribución uniforme, para lo cual se efectuó la prueba de KS, dando como resultado que no existe evidencia empírica para rechazar la hipótesis nula de que las distribuciones

¹⁹Las distribuciones marginales paramétricas se identifican y se estiman a partir del paquete computacional Crystal Ball 7.0.

empíricas siguen una distribución uniforme estándar, esto se valida con las gráficas de cuantiles de la distribución empírica con la de una uniforme estándar ya que si estas están bien especificadas deberían formar una línea recta de pendiente de 45 grados, tal como se observa en la Figura 4.21.

La segunda pseudo muestra es generada por distribuciones marginales paramétricas, donde las dos primeras distribuciones corresponden a distribuciones gamma cuyos valores de los parámetros de *forma* (α) y *escala* (β) son 9.8 y 5.26 respectivamente, y la última distribución corresponde a una normal de *media* 5 y *desviación estándar* 3.

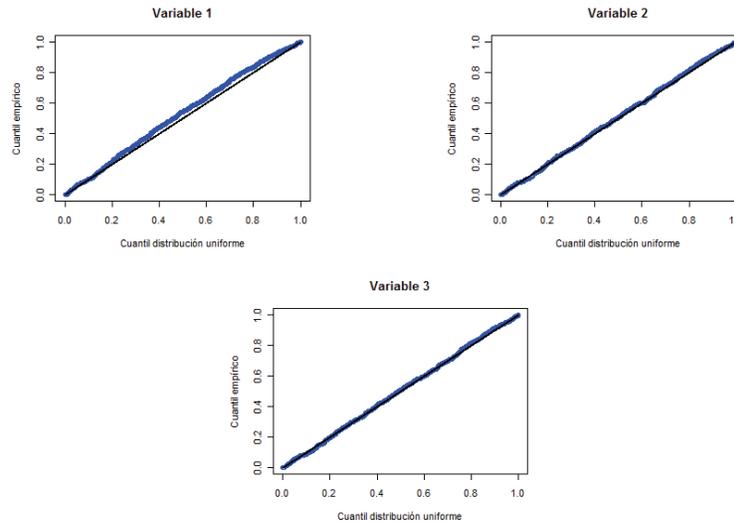


Figura 4.22: Gráficos de cuantiles del vector aleatorio generado por dos distribuciones gamma y una normal.

Para garantizar el buen ajuste de los datos a estas distribuciones, se efectuó la prueba KS, dando como resultado que solamente la primera distribución no se comporta como una gamma, sin embargo es la que mejor se ajusta a los datos empíricos. La anterior prueba se complementa con la gráfica de cuantiles donde se observa que las distribuciones paramétricas se comportan como las empíricas (Figura 4.22).

De lo anterior se observa que las dos pseudo muestras son adecuadas para estimar los parámetros de la cópula teórica C , donde la *primera pseudo muestra* se utiliza para estimar los parámetros de la cópula a partir del método de pseudo máxima verosimilitud

Cópula	Akaike (AIC)			Bayesiano (BIC)			Hannan y Quinn (HQ)		
	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML
Normal	-11645	-11645	31398	-11641	-11639	31404	-11643	-11643	31400
t de student	-13701	-13701	28452	-13698	-13695	28458	-13700	-13699	28454
Clayton	-15725	-15725	26115	-15722	-15720	26121	-15724	-15723	26117
Frank	-13553	-13553	27622	-13550	-13548	27627	-13552	-13551	27624
Gumbel	-10348	-10348	32146	-10345	-10343	32151	-10347	-10346	32148

CML = Seudo Máxima Verosimilitud

FML = Máxima Verosimilitud total

TSML = Máxima Verosimilitud a dos pasos

Cuadro 4.8: Criterios de información para familias de cópulas aplicando métodos de estimación de máxima verosimilitud.

Cópula	Kolmogorov Smirnov		
	CML	FML	TSML
Normal	0.01	0.01	0.01
t de student	0.00	0.00	0.00
Clayton	0.31	0.31	0.31
Frank	0.06	0.06	0.06
Gumbel	0.00	0.00	0.00
Independencia	0.00	0.00	0.00

Cuadro 4.9: Probabilidad de que la función de distribución teórica sea igual a la empírica basandose en la prueba de Kolmogorov Smirnov.

y la segunda seudo muestra para estimar los parámetros de la cópula a partir del método de máxima verosimilitud a una y dos etapas. Cabe mencionar que dado que la cópula teórica no es conocida se tiene que probar todas las familias de cópulas disponibles y por medio de criterios de selección²⁰ donde se determina cual cópula teórica se ajusta mejor a los datos.

En el Cuadro (4.8) se presenta los índices de los criterios de información para cada familia de cópula, donde se aprecia que la *cópula de Frank*, *t de student* y *Clayton* presentan los índice más pequeños, lo que sugiere que uno de estas cópulas es la que cuantifica adecuadamente la dependencia entre las variables aleatorias.

Un segundo criterio se fundamenta en la comparación de la cópula teórica con la empírica a partir de la prueba KS, dando como resultado que la cópula de Clayton y Frank se comportan estadísticamente como la cópula empírica, con la característica que

²⁰En los criterios de selección se encuentra los criterios de información y los de mejor ajuste a la cópula empírica.

Cópula	AD			IAD			Distancia Romano		
	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML	CML	FML	TSML
Normal	6.1	6.1	6.1	0.0	0.0	0.0	1.3	1.3	1.3
t de student	8.1	8.1	8.1	0.0	0.0	0.0	1.3	1.3	1.3
Clayton	3.5	3.5	3.5	0.0	0.0	0.0	0.7	0.7	0.7
Frank	271.8	271.8	271.8	0.0	0.0	0.0	0.8	0.8	0.8
Gumbel	9.6	9.6	9.6	0.0	0.0	0.0	1.7	1.7	1.7
Independencia	9120.3	9120.3	9120.3	26.4	26.4	26.4	11.1	11.1	11.1

Cuadro 4.10: Distancia de Anderson Darling y Romano para medir el buen ajuste de la cópula teórica con la empírica.

el nivel de significancia de la prueba KS relacionado con la cópula de Clayton presenta el mayor valor, por lo que sugiere que ésta posiblemente sea la cópula teórica que mejor se ajuste a los datos tal como se observa en el Cuadro (4.9).

Finalmente, para contrastar el resultado de la prueba anterior, se calculan estadísticos más adecuados para una cópula como son los estadísticos de Anderson Darling (AD , IAD) y la distancia Romano cuyos resultados se observan en el cuadro (4.10), donde se puede apreciar que la cópula de Clayton presenta la menor distancia, seguido Frank y t de student, por lo que a partir de los criterios de selección la cópula de Clayton es la que mejor se ajusta a los datos.

Cabe mencionar que este proceso permite identificar tanto la cópula teórica como las distribuciones de los marginales que mejor ajustan a los datos, por lo que este proceso es adecuado para identificar y estimar la dependencia existente entre variables aleatorias, tal como se aprecia en el Cuadro (4.11), donde los parámetros de la cópula y de los marginales se aproximan a los valores reales.

	Parámetros	DISTRIBUCION		VALOR	
		Real	Estimado	Real	Estimado
Variable 1	forma	Gama	Gama	10	12.2
	escala			5	4.1
Variable 2	forma	Gama	Gama	10	12.2
	escala			5	4.1
Variable 3	media	Normal	Normal	5	5.1
	Desviación			3	2.7
	Standard				
Cópula	θ	Clayton	Clayton	20	17.3

Cuadro 4.11: Distancia de Anderson Darling y Romano para medir el buen ajuste de la cópula teórica con la empírica.

4.3. Modelos estáticos para riesgo de crédito

4.3.1. Introducción

El desarrollo y análisis de modelos cuantitativos para medir la pérdida crediticia que tienen las instituciones financieras en un portafolio de préstamos es de interés para los practicantes, reguladores y académicos²¹, ya que estos modelos permiten capturar la pérdida potencial debido al incumplimiento conjunto de una gran cantidad de préstamos de un portafolio de crédito en un horizonte de tiempo fijo. Por lo que estos modelos son idóneos para determinar el capital económico que necesita una institución financiera para cubrir su nivel de riesgo.

Los modelos actualmente utilizados para medir el riesgo de crédito pueden ser divididos en dos categorías, *los modelos por umbrales* o variables latentes y *los modelos de mixtura*. En la *primera categoría*, los modelos de crédito²² son extensiones del Modelo de Merton (1974), donde el incumplimiento se presenta cuando una variable latente (por ejemplo el valor del activo de una empresa) cae por debajo de un cierto umbral (el valor de la deuda de una empresa). En este tipo de modelos, la dependencia entre créditos incumplidos es producida por la dependencia entre las variables latentes, por ejemplo en el modelo de Merton la dependencia de los activos de las empresas permite estimar la dependencia de

²¹Una descripción detallada de los modelos de crédito más populares está dada por Crouhy, Galai y Mark [10] y Gordy Michel [23].

²²En esta categoría se encuentran los modelos propuestos por la corporación KMV y el grupo RiskMetricsTM.

las empresas que incumplen sus deudas.

La *segunda categoría*, corresponde a modelos de tipo actuarial, donde la probabilidad de incumplimiento de una empresa depende de un grupo de factores económicos, dando como resultado que el incumplimiento entre las empresas sea condicionalmente independiente entre ellas; es decir, los incumplimientos entre las empresas son independientes pero están condicionados a los valores que puedan tomar los factores económicos. En la literatura estadística, este tipo de modelos son conocidos como *modelos de mixtura*.

Cabe mencionar que el principal objetivo de la mayoría de herramientas crediticias es el análisis del incumplimiento individual de los individuos, dejando de lado el análisis global del portafolio de crédito; sin embargo, la pérdida de una institución financiera está relacionada con la ocurrencia desproporcional de una gran cantidad de incumplimientos de créditos del portafolio en un horizonte de tiempo, a este tipo de evento que puede presentar un portafolio se conoce como *riesgo de crédito extremo*. En este contexto, un modelo adecuado de crédito debe ser capaz de identificar el riesgo de crédito extremo que puede presentar un portafolio, siendo este modelo un prerequisite para una administración eficaz del portafolio de crédito bajo el punto de vista de *riesgo-rentabilidad*, el cual con información consistente de las pérdidas crediticias, se puede utilizar para la determinación del capital económico por riesgo de crédito.

Los modelos para portafolios crediticios se fundamentan en nuevos conceptos desarrollados para la administración de riesgo lo que permiten modelar la dependencia entre activos financieros ²³, donde el concepto de cópula y la noción de dependencia extrema de los factores de riesgo juegan un rol principal, dando como resultado que la distribución conjunta de los incumplimientos de los préstamos o activos de un portafolio quede completamente determinado por las probabilidades individuales de incumplimiento y por la cópula de las variables latentes, lo que determina la estrecha relación entre las cópulas y el modelo por umbrales.

En este contexto se observa que los modelos KMV y CreditMetricsTM se basan en una cópula gaussiana la misma que es simétrica con colas débiles dando como resultado que

²³El desarrollo teórico de los modelos de crédito se fundamenta en el libro de Alexander McNeill, Rudiger Frey y Paul Embrechts [16].

la probabilidad de pérdidas extremas sea baja, por lo que este modelo no representa el real comportamiento de pérdidas de un portafolio crediticio que se caracteriza por tener colas asimétricas donde la probabilidad de pérdidas extremas es alta. Este problema se corrige al reemplazar la cópula gaussiana por una cópula multivariada mixta en media y varianza como la cópula t de student o una distribución hiperbólica. A partir de los conceptos desarrollados para la administración de riesgo es posible analizar relaciones entre el *modelo de mixtura* y el de *variables latentes* lo que permite entender bajo que condiciones es posible mapear ambos modelos de tal manera que es posible clarificar las similitudes y diferencias entre las estructuras de ambos modelos.

Para desarrollar los nuevos conceptos para la administración de riesgo de crédito es necesario considerar un portafolio de m deudores y un horizonte de tiempo fijo T , donde la variable aleatoria S_i representa el estado del deudor $i \in [1, m]$ en el horizonte de tiempo T . Los estados de la variable aleatoria pueden tomar valores enteros del conjunto $\{0, 1, \dots, n\}$ y representan las clasificaciones que pueden otorgar las calificadoras de riesgo; por ejemplo, Moodys, Standar & Poors entre otros. Cabe mencionar que un valor de 0 se interpreta como el estado de incumplimiento del crédito y los demás valores representan estados del credito con mejor calidad crediticia de tal manera si un crédito presenta un valor de n , ésta representa la mejor calidad crediticia que le puede asignar una calificadora de riesgo. En algunos casos, es de interés identificar un crédito si se encuentra en incumplimiento o no, para lo cual es útil generar una variable aleatoria Y_i a partir de la variable aleatoria de estados S_i , en este sentido la variable Y_i puede tomar los siguiente valores:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \iff S_i = 0 \\ 0 & \iff S_i > 0 \end{cases}$$

donde el vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)'$ representa un vector de indicadores de incumplimientos del portafolio de tamaño m ,

$$p(\mathbf{y}) = P(Y_1 = y_1, \dots, Y_m = y_m), \quad \mathbf{y} \in \{0, 1\}^m,$$

corresponde a la función de probabilidad conjunta del portafolio, donde las probabilidades

de incumplimiento marginales se denotan por

$$p_i = P(Y_i = 1), \quad i = 1, \dots, m.$$

La variable aleatoria Y_i tiene varias ventajas para construir indicadores del portafolio de crédito, así se puede determinar una variable aleatoria que cuente el número de créditos incumplidos del portafolio en un horizonte de tiempo T , la misma que se estructura de la siguiente manera:

$$M = \sum_{i=1}^m Y_i,$$

de igual forma es posible determinar una variable aleatoria que cuantifique la pérdida total del portafolio, para lo cual es necesario disponer del saldo que puede presentar cada *crédito* i al momento de incumplimiento, la que es representado por E_i , y es conocido como la *exposición*, y $\Delta_i \in [0, 1]$ que representa la proporción aleatoria de la exposición la cual se pierde al momento del incumplimiento; misma que es conocida como la *severidad de la pérdida*, así la pérdida del portafolio se puede estructurar de la siguiente manera:

$$L = \sum_{i=1}^m E_i \Delta_i Y_i.$$

De lo expuesto hasta el momento se observa que la pérdida total del portafolio esta condicionado a la distribución multivariada de \mathbf{S} o \mathbf{Y}^{24} , de tal manera que se puede decir que *dos modelos de crédito son equivalentes* si los vectores de estados de ambos modelos presentan la relación $\mathbf{S} \stackrel{d}{=} \tilde{\mathbf{S}}$, donde $\stackrel{d}{=}$ representa la igualdad en distribución.

De lo anterior se observa que el vector de estados \mathbf{S} permite imponer una estructura al modelo de riesgo de crédito, por lo que éste vector es de interés cuando se analizar un portafolio crediticio. Para simplificar el análisis de un portafolio de crédito se tiene que formalizar de manera matemática la noción de *portafolio homogéneo* para lo cual se supone que el indicador de estados \mathbf{S} y por ende el indicador de incumplimientos \mathbf{Y} debe ser permutable, es decir que se tiene que cumplir la siguiente condición

$$(S_1, \dots, S_m) \stackrel{d}{=} (S_{\Pi(1)}, \dots, S_{\Pi(m)})$$

²⁴Esta notación representa el vector formado por los índices de estados o el incumplimiento de los créditos del portafolio de análisis.

para alguna permutación $(\Pi(1), \dots, \Pi(m))$ de $(1, \dots, m)$. La homogeneidad antes señalada solamente se aplica a uno de los factores de riesgo de crédito que es el incumplimiento de los créditos con la característica que los demás factores de riesgo de crédito²⁵ pueden ser heterogeneo o no. Cabe mencionar que la permutabilidad implica que para algun $k \in \{1, \dots, m-1\}$ las combinaciones de las k distribuciones marginales de \mathbf{S} son idénticas y bajo esta situación se introduce la notación que relaciona las probabilidades de incumplimiento individuales y conjuntas de un portafolio:

$$\begin{aligned}\pi_k &= P(Y_{i_1} = 1, \dots, Y_{i_k} = 1), \quad \{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}, \quad 1 \leq k \leq m \\ \pi &= \pi_1 = P(Y_i = 1), \quad i \in \{1, \dots, m\}.\end{aligned}$$

Así, π_k es la función de distribución conjunta de orden k y representa el incumplimiento de un subgrupo arbitrario de k créditos del portafolio de dimensión m en un horizonte de tiempo T. Si se complementa la anterior notación con el supuesto de que el indicador de incumplimientos \mathbf{Y} es permutable, entonces fácilmente se puede obtener los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}E(Y_i) &= E(Y_i^2) = P(Y_i = 1) = \pi, \quad i = 1, \dots, m, \\ E(Y_i Y_j) &= P(Y_i = 1, Y_j = 1) = \pi_2, \quad i \neq j, \\ cov(Y_i, Y_j) &= \pi_2 - \pi \\ \rho(Y_i, Y_j) &= \rho_Y = \frac{\pi_2 - \pi}{\pi - \pi^2}, \quad i \neq j,\end{aligned}\tag{4.33}$$

de lo anterior se puede decir que la correlación entre indicadores de incumplimiento es simplemente una función del primer y segundo orden de la probabilidad de incumplimiento conjunta del portafolio crediticio.

4.3.2. Modelo por umbrales

Esta metodología se utilizan para modelar la pérdida de un portafolio de crédito donde se generaliza los modelos que descienden del modelo de valoración de activos de Merton (1974) también conocidos como los modelos estructurales, donde el incumplimiento de

²⁵Exposición y pérdida al incumplimiento.

una *empresa i* se presenta cuando una *variable latente* cae por debajo de algún umbral para un intervalo de tiempo $[0, T]$. Dentro de esta metodología se puede considerar a los principales modelos industriales de crédito que son desarrollados por la corporación KMV y CreditMetricsTM. La dependencia entre los eventos de incumplimiento es causado por la dependencia entre las variables latentes, donde la matriz de correlación de las variables latentes se la calibra a partir del desarrollo de modelos factoriales²⁶ que relaciona cambios del valor de los activos con cambios en un pequeño número de factores económicos.

La principal suposición de los modelos KMV y CreditMetricsTM es que las variables latentes siguen una distribución normal multivariada; sin embargo, no existe una razón convincente para considerar que los activos de una empresa sigan ésta distribución.

Para la explicación de esta metodología es necesario empezar definiendo de manera general el modelo por umbrales lo que permitirá comprender la relación directa que tiene este modelo con la función cópula.

Definición 27 Sea $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)'$ un vector aleatorio m dimensional y sea $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ una matriz determinística con elementos d_{ij} tal que para todo i , los elementos de la i -ésima fila forman un conjunto de umbrales crecientes que satisface la condición $d_{i1} < \dots < d_{in}$, y que son complementados con dos umbrales extremos $d_{i0} = -\infty$ y $d_{i(n+1)} = \infty$ para todos los m deudores, de tal manera que es posible generar un conjunto de variables $S_{i \in \{0, \dots, m\}}$ de la siguiente forma:

$$S_i = j \iff d_{ij} \leq X_i \leq d_{i(j+1)}, \quad j \in \{0, \dots, n\}, \quad i \in \{0, \dots, m\}.$$

Luego al par (\mathbf{X}, \mathbf{D}) se dice que define un modelo de umbrales para el vector de estados $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_m)$.

Es necesario recalcar que el vector \mathbf{X} contiene las variables críticas de las m empresas que conforman el portafolio, las distribuciones marginales se denotan por $F_i(x) = P(X_i < x)$, y la fila i de la matriz \mathbf{D} corresponde a los umbrales críticos de la *empresa i*. Por definición, el incumplimiento ocurre cuando $X_i \leq d_{i1}$ de tal manera que la probabilidad de incumplimiento de la empresa i se encuentra dada por $\bar{p}_i = F_i(d_{i1})$.

²⁶En el Anexo A se explica de manera general este tipo de modelos, para un mejor entendimiento se puede revisar los documentos de Gordy [10] y Galai [23].

En el modelo KMV la variable latente X_i se supone que sigue una distribución Gaussiana Multivariada y se interpreta como el cambio relativo del valor de los activos de una empresa, para determinar el valor de los umbrales D_i se utiliza la técnica de valoración de opciones sobre los valores históricos de la empresa y las correlaciones entre los retornos de los activos se las calibra a partir del supuesto de que el retorno de los activos siguen un modelo factorial, donde los factores corresponden a variables macroeconómicas.

Al modelo de CreditMetricsTM se le conoce como un modelo de variables latentes multiestado, al igual que en el anterior modelo la variable latente X_i se supone que sigue una distribución Gaussiana multivariada; los umbrales son definidos a partir de una relación entre los intervalos del rango de variables latentes con las calificaciones crediticias que puede tomar los créditos. Cabe mencionar que los puntos de corte de los intervalos o clases se escogen de tal manera que se asocian con la probabilidad de incumplimiento y con la transición entre categorías crediticias. Las correlaciones de las variables latentes se las obtiene a partir de la aplicación de modelos factoriales.

A partir de la definición 27 se observa que los modelos CreditMetricsTM y KMV son parte de los *modelos por umbrales* ya que son estructurados a partir de ciertas variables latentes que siguen una distribución normal multivariada y de ciertos umbrales que son obtenidos a partir de la probabilidad de transición e incumplimiento. Dado que las variables latentes siguen una distribuciones gaussiana multivariada, entonces la dependencia entre estas variables queda completamente explicada a partir de las correlaciones existentes entre ellas²⁷, en este contexto es de interés medir la correlación entre incumplimientos $\rho(Y_i, Y_j)$, la que se obtiene de la siguiente manera:

²⁷Si la distribución de las variables latentes no es gaussiana entonces la correlación de las variables críticas no determinan la correlación entre incumplimientos.

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{E(Y_i Y_j) - E(Y_i)E(Y_j)}{\sqrt{\text{Var}(Y_i) \times \text{Var}(Y_j)}}$$

$$\rho(Y_i, Y_j) = \frac{E(Y_i Y_j) - \bar{p}_i \bar{p}_j}{\sqrt{(\bar{p}_i - \bar{p}_i^2)(\bar{p}_j - \bar{p}_j^2)}} \quad (4.34)$$

donde

$$E(Y_k) = \bar{p}_k$$

$$\text{Var}(Y_k) = E(Y_k)^2 - \bar{p}_k$$

A partir de la ecuación (4.34) se observa que la correlación entre incumplimientos queda completamente determinada por $E(Y_i Y_j) = P(X_i < d_{i1}, X_j < d_{j1})$ donde se aprecia que la dependencia queda explicada a partir de la distribución conjunta de X_i y X_j y por lo tanto de la cópula de la función de distribución conjunta de las variables latentes.

Lema 28 Sea (\mathbf{X}, \mathbf{D}) y $(\tilde{\mathbf{X}}, \tilde{\mathbf{D}})$ se un par de modelos de umbrales con vectores de estados $\mathbf{S} = (S_1, \dots, S_m)'$ y $\tilde{\mathbf{S}} = (\tilde{S}_1, \dots, \tilde{S}_m)'$ respectivamente. Los modelos son equivalentes si las siguientes condiciones se mantienen.

i) Las distribuciones marginales del vector aleatorio S y \tilde{S} coinciden

ii) \mathbf{X} y $\tilde{\mathbf{X}}$ admiten la misma cópula

(La demostración de este lema se encuentra en el libro McNeil, Frey y Embrechts [16], pag 346.)

El lema 28 permite disponer de un criterio simple para medir la equivalencia entre dos modelos por umbrales los que se encuentra en términos de las distribuciones marginales del vector de estados \mathbf{S} y de la cópula de \mathbf{X} , así los modelos KMV y CreditMetricsTM pueden ser pensados como aproximaciones equivalentes, de tal manera si son calibrados de forma consistente entonces darían como resultado parecidos indicadores de riesgos de crédito. La cópula en este tipo de modelos es de suma importancia ya que la probabilidad de incumplimiento conjunto pueden ser expresado en terminos de cópula y de las probabilidades de incumplimiento individuales, por ejemplo para un subconjunto arbitrario

de créditos de tamaño k $\{i_1, \dots, i_k\} \subset \{1, \dots, m\}$, con probabilidad individual p_{i_1}, \dots, p_{i_k} la probabilidad conjunta de k incumplimientos es

$$\begin{aligned} P(Y_{i_1} = 1, \dots, Y_{i_k} = 1) &= P(X_{i_1} \leq d_{i_1}, \dots, X_{i_k} \leq d_{i_k}) \\ &= C_{i_1, \dots, i_k}(p_{i_1}, \dots, p_{i_k}), \end{aligned}$$

donde C_{i_1, \dots, i_k} es una distribución marginal k dimensional de la cópula C de \mathbf{X} . Notese que la distribución conjunta de k incumplimientos de un portafolio crediticio es igual que la cópula de las k probabilidades de incumplimiento.

A más de las cópulas gaussianas existen una gran cantidad de familias alternativas de cópulas, donde la *familia normal multivariada mixta* juega un papel fundamental en el modelamiento de mercados financieros y es considerada una extensión de las distribuciones gaussianas, donde distribuciones multivariadas t y las hiperbólicas son parte de esta familia. Un miembro X de la familia normal multivariada mixta se supone que presenta la siguiente estructura

$$X = m(W) + \sqrt{W}Z, \quad (4.35)$$

donde $m : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$ es una función medible, $Z \sim N_m(0, \Sigma)$ un vector normal multivariado de dimensión m y W es una variable aleatoria escalar positiva cuyo comportamiento es igual a un proceso ruido blanco y es independiente de Z . Un ejemplo general de la distribución normal multivariada mixta es la distribución hiperbólica generalizada. Como caso particular de esta distribución, se puede considerar cuando la función $m(W)$ toma un valor constante μ dando como resultado la *distribución normal multivariada mixta en varianza*. Esta distribución hereda la matriz de correlación de la distribución normal multivariada Z

$$\text{Corr}(X_i, X_j) = \text{Corr}(Z_i, Z_j),$$

el cual significa esencialmente que la matriz de correlación de estos modelos pueden ser calibrados de la misma manera que la distribución gaussiana multivariada. Como un ejemplo concreto de ésta distribución se encuentra la distribución multivariada t , donde se dice que X sigue una distribución t m dimensional con v grados de libertad ($X \sim t_m(v, 0, \Sigma)$) si

$$S = \sqrt{\frac{v}{W}}.$$

En los modelos de KMV y CreditMetricsTM la covarianza del vector latente \mathbf{X} m dimensional es calibrado a partir de un modelo factorial el que se puede escribir de la siguiente manera:

$$X = BF + \varepsilon \quad (4.36)$$

donde F es un vector aleatorio p dimensional de factores comunes $F \sim N_p(0, \Omega)$ con $p < m$, $B \in \mathbb{R}^{m \times p}$ es una matriz de pesos y ε representa un vector independiente m dimensional de errores aleatorios con distribución normal estándar, los cuáles son independientes de F . A partir del modelo factorial se puede obtener que la covarianza P de X es de la forma

$$P = B\Omega B' + \gamma, \quad (4.37)$$

donde γ representa la matriz diagonal de covarianzas de ε . Si se considera que las distribuciones marginales del vector latente siguen una normal estándar luego se tiene que la varianza del i -ésimo componente del vector latente es igual a 1 y por la ecuación (4.37) se puede observar que $\beta_i = b_i' \Omega b_i$ representa la proporción de la varianza de la variable latente i que es explicada por los factores macroeconómicos y es visto como el *riesgo sistémico* de la variable X_i ; y, $1 - \beta_i$ es la varianza de los errores aleatorios y son interpretados como la parte de la varianza de X_i que no es explicado por los factores macroeconómicos y se puede considerar como el *riesgo idiosincrático* de la variable latente X_i .

Dado que la cópula t se la puede calibrar de igual forma que la distribución gaussiana entonces se puede utiliza un modelo factorial para calibrarlo.

Para medir el impacto de la cópula en los modelos de riesgo de crédito se van a comparar diferentes estructuras de modelos crediticios homogéneos donde las probabilidades de incumplimiento de lo créditos son iguales ($P(Y_i) = \pi, 1 \leq i \leq m$), la correlación entre dos activos es igual a $\rho > 0$ y las posibles distribuciones multivariadas son:

1. Cópula gaussiana multivariada $\mathbf{X} \sim N_m(0, R)$ y
2. Cópula t de student $\mathbf{X} \sim t_m(v, 0, R)$,

donde R es la matriz de correlación cuyos valores fuera de la diagonal son igual a ρ y v corresponde a los grados de libertad de la cópula t de student. La distribución

multivariada t de student es escogida por dos razones, la primera es que ésta converge a la distribución gaussiana cuando los grados de libertad tiende al infinito ($v \rightarrow \infty$) de tal manera que se puede empezar con un modelo que se aproxima a una distribución normal multivariada y progresivamente ir alejándose de esta distribución por medio de valores pequeños de v de tal manera que se puede observar el impacto que tiene las distribuciones con colas pesadas en las medidas de riesgo de un portafolio crediticio. La segunda razón es que a pesar que la cópula gaussiana y la t de student vienen de la misma familia de cópulas, la última tiene la propiedad de presentar dependencia en las colas, lo que tiende a generar eventos extremos con probabilidades de ocurrencia mayor a la cópula gaussiana siendo esta característica importante ya que permite modelar el comportamiento real de un portafolio de crédito que se caracteriza por tener colas pesadas.

Las cópulas normal y t de student se aplican a tres modelos de crédito homogéneos que tienen calidad crediticia decreciente, y son catalogados como A, B, C, donde los parámetros que definen la calidad crediticia está dado por la probabilidad de incumplimiento y la correlación entre activos (Cuadro 4.12).

Grupo	π	ρ
A	0.01 %	2.58 %
B	0.50 %	3.80 %
C	7.50 %	9.21 %

Cuadro 4.12: Valores de la probabilidad de incumplimiento (π) y correlación (ρ) para grupos homogéneos.

El ejercicio de simulación tiene por objetivo medir los cambios en las medidas de riesgo de un portafolio de crédito cuando se varían la probabilidad de incumplimiento, la correlación, el tamaño del portafolio y los grados de libertad de una cópula t de student de tal manera que se puede identificar cuáles son los factores de riesgo que tiene mayor incidencia en un portafolio de crédito, cabe mencionar que para generar la simulación se tiene que seguir los siguientes pasos:

Paso 1) Se define el tamaño m del portafolio, el valor del principal de cada crédito (V_i) es de \$100,000 y la tasa de recuperación de los créditos (r_i) sigue una distribución beta con media igual a 0,4 y varianza igual a $0,25^2$.

Paso 2) A partir de la probabilidad de incumplimiento p_i se determina el umbral homogéneo de cada crédito por medio del supuesto utilizado por los modelos de crédito KMV y CreditMetricsTM donde las distribuciones marginales siguen una normal estándar, de tal manera que el umbral de cada crédito es $d_{i1} = F^{-1}(p_i)$.

Paso 3) Se genera n escenarios de un vector de variables latentes m dimensional a partir de una cópula gaussiana y una cópula t de student de v grados de libertad donde los valores fuera de la diagonal de la matriz de correlación son iguales a ρ .

Paso 4) A partir de los créditos que incumplen se calcula la pérdida del portafolio en cada escenario de la siguiente manera

$$L = \sum_{i=1}^m Y_i \times V_i \times (1 - r_i)$$

donde

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{cuando } X_i < d_{i1} = F^{-1}(p_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Paso 5) Para los n escenarios se calcula una batería de medidas de riesgo siendo estos *el percentil de la pérdida del portafolio (ML), la pérdida esperada en la cola (ES) y percentil del número de incumplidos (MI)*; donde, el *ML*, *ES* y *MI* se definen de la siguiente manera:

$$ML_\alpha = \text{inf} \{L \mid F_L(L) \geq \alpha\}$$

$$MP_\alpha = \text{inf} \{I \mid F_I(I) \geq \alpha\}$$

$$ES_\alpha = E(L \mid L \geq ML_\alpha).$$

Paso 6) Se repiten los pasos del 2) al 5) para diferentes valores de incumplimiento, correlación.

En todas las simulaciones se ha generado 10.000 escenarios de las medidas de riesgo, donde se analiza la frecuencia de los incumplimientos y las pérdidas de los diferentes portafolios homogéneos.

Análisis de la frecuencia de incumplimientos

El número de créditos incumplidos en un portafolio de tamaño m se obtiene por medio de $M = \sum_{i=1}^m Y_i$, y a partir de calculos empíricos se verifica que el promedio de créditos incumplidos siempre es cercano a $m\pi$. Los índices utilizados para medir el riesgo extremo en los portafolios de crédito son los cuantiles al 95% y 99%, mismos que se visualizan en el Cuadro (4.13), donde se observa que están influenciados por la calidad crediticia del portafolio debido a que presentan valores altos para portafolios con baja calidad crediticia (B y C). Para el caso de un portafolio donde se mantiene fija la correlación pero disminuyen los grados de libertad se observa que el número de incumplidos aumenta, esto evidencia que la medición del riesgo extremo de un portafolio depende del modelo crediticio que se utilice, por lo que no se puede imponer de manera subjetiva la estructura de dependencia del modelo de crédito. En la Figura 4.23 se presentan las distribuciones del número de incumplimientos de un mismo portafolio con baja calidad crediticia y altamente correlacionados; donde, se evidencia el impacto que tiene la cópula en la estructura de dependencia de los créditos.

Tamaño	Grupo	Incumplimiento al 95%				Incumplimiento al 99%			
		$v = \infty$	$v = 50$	$v = 10$	$v = 4$	$v = \infty$	$v = 50$	$v = 10$	$v = 4$
100	A	0	0	0	0	0	1	0	0
100	B	2	2	3	2	3	4	7	10
100	C	17	18	24	27	24	25	59	40
1000	A	1	1	0	0	1	2	2	0
1000	B	12	16	22	23	17	28	31	102
1000	C	166	171	205	266	224	248	304	395

Cuadro 4.13: Percentiles al 95% y 99% de la distribución de incumplimientos para diferentes portafolios de crédito.

Distribución de pérdida

Para comparar la distribución de pérdida de un portafolio homogéneo se construye un índice que es la división de las medidas de riesgo de un portafolio con cópula t con las generadas por una cópula gaussiana, los que son presentados en el Cuadro (4.14). Se aprecia que el índice relativo a la pérdida promedio es cercano a 1, lo que significa que

es invariante a la correlación y a la probabilidad de incumplimiento; sin embargo, los índices relacionados con la asimetría y agudeza son siempre mayores que uno, por lo que la cópula t ocasiona que la distribución sea más asimétrica que la distribución normal, esto se observa en la Figura 4.23 donde cada vez que se reduce los grados de libertad la distribución de pérdida es más aguda y la cola de la derecha es más larga.

Grupo	ν	Media	Asimetría	Agudeza	ML			ES		
					90 %	95 %	99.5 %	90 %	95 %	99.5 %
A	50	1.14	2.73	12.89	1.00	0.98	1.69	1.27	1.26	1.94
A	10	1.07	6.78	47.62	1.00	-	2.66	3.10	2.32	5.31
A	4	0.80	13.09	157.47	1.00	-	0.58	12.82	9.59	6.60
B	50	1.01	1.68	1.85	1.21	1.32	1.58	1.38	1.47	1.63
B	10	1.02	3.89	8.20	1.42	1.99	3.88	2.47	3.02	4.60
B	4	1.03	4.83	10.08	0.85	2.26	7.40	3.54	5.00	8.58
C	50	1.00	1.12	1.14	1.05	1.05	1.08	1.06	1.07	1.11
C	10	1.01	1.31	1.30	1.20	1.25	1.38	1.28	1.33	1.43
C	4	1.00	1.54	1.47	1.44	1.59	1.82	1.62	1.71	1.86

Cuadro 4.14: Índices de la distribución de pérdida de con cópula t con una gaussiana para portafolios homogéneos de tamaño 1000.

Análisis entre grupos homogéneos A partir de los índices de asimetría y agudez se observa que la cópula t tiene mayor incidencia en el modelo crediticio con la mejor calidad crediticia (A) y menor incidencia en el grupo de peor calidad (C), donde *la pérdida esperada en la cola* es la más grande para los grupos con la mejor calidad crediticia; esto, evidencia que un portafolio con buena calidad crediticia es más propenso en presentar pérdidas extremas, lo que afecta de gran manera en la manera de constituir el capital por parte de una institución financiera. Como caso particular se aprecia que el portafolio con calificación A y grados de libertad igual a 4, el percentil de la pérdida a un nivel de significancia del 99.5 % para una cópula t es 40 % menor que la generada por una cópula gaussiana; sin embargo, la correspondiente pérdida esperada en la cola es 1100 % más grande.

Del ejercicio de simulación se puede concluir que el riesgo extremo se presenta con mayor frecuencia en portafolios con mejor calidad crediticia por lo que se tiene que definir políticas crediticias para mitigar este posible evento, es importante identificar la estructura

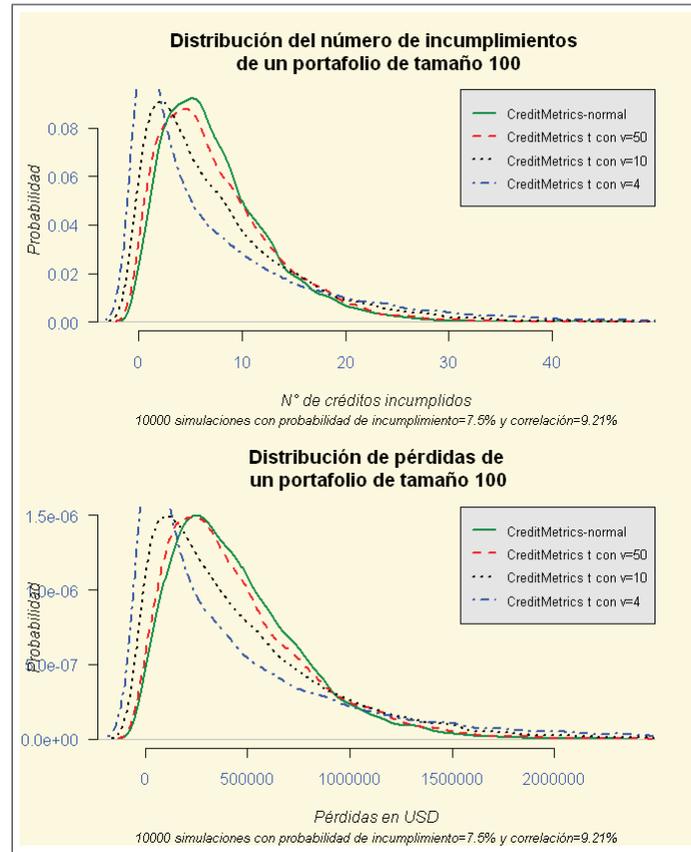


Figura 4.23: Distribuciones del incumplimiento y de las pérdidas de portafolios homogéneos tipo C con diferentes grados de libertad.

de dependencia entre los créditos ya que es fundamental para la medición adecuada del riesgo de crédito.

4.3.3. Modelo de mixtura

Un portafolio de crédito se puede considerar de manera general como una colección de m contratos o créditos que pueden presentar dos posibles escenarios: incumplir o pagar lo pactado. Para medir los posibles escenarios que puede presentar un crédito se define una variable Y de la siguiente manera:

$$Y_i = \begin{cases} 1 & \text{si incumple} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (4.38)$$

así, el número de créditos incumplidos M que puede presentar un portafolio en un horizonte de tiempo T es:

$$M = \sum_{i=1}^m Y_i.$$

Si se supone que los créditos del portafolio son independientes de probabilidad de incumplimiento igual a un valor fijo p entonces se puede considerar a cada crédito como un experimento de *Bernoulli* de parámetro p de tal manera que el número de incumplimientos del portafolio sigue una distribución binomial de parámetro m y p , $M \sim B(m, p)$.

En estadística el supuesto de independencia facilita el desarrollo de modelos; por ejemplo, la ley de los grandes números y el teorema de límite central son obtenidos a partir del supuesto de independencia entre las variables aleatorias, por lo que si se supone que los créditos de un portafolio son independientes entre ellos y por el teorema de límite central se tendría que el número de incumplidos se comporta como una variable gaussiana siempre y cuando el tamaño del portafolio de crédito sea grande. En este sentido no es necesario utilizar la simulación de Monte Carlo para determinar la distribución de los incumplidos de un portafolio ya que se puede expresar de forma cerrada donde las propiedades de esta distribución son conocidas. Desafortunadamente, este supuesto no es realista para portafolios crediticios dando como resultado índices de riesgo inadecuados, en este sentido es necesario desarrollar aproximaciones más realistas para el número de incumplimiento de un portafolio y por ende de la pérdida total.

En los modelos de mixtura, la idea básica para modelar dependencia es considerar que el incumplimiento de un deudor (p) depende de un conjunto de factores económicos tales como las variables macroeconómicas las que son modeladas estocásticamente; así, la dependencia entre incumplimientos se la obtiene de la dependencia que tiene cada incumplimiento con el mismo conjunto de factores económicos. Los modelos de mixtura se los puede dividir en los modelos de Bernoulli y de Poisson cuyas definiciones se presentan a continuación.

Definición 29 (Modelo de mixtura Bernoulli) Dado un $p < m$ y un vector aleatorio p -dimensional $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)'$, el vector $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_m)'$ sigue un modelo mixto de Bernoulli con vector de factores Ψ si existen funciones $p_i : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$, $1 \leq i \leq m$, de

tal manera que los componentes de \mathbf{Y} condicionados a $\Psi = \psi$ son variables aleatorias independientes con distribución Bernoulli de parámetro $P(Y_i = 1 | \Psi = \psi) = p_i(\psi)$.

Si se dispone de un vector de créditos $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)'$ en $\{0, 1\}^m$ y a partir de la definición (29) se tiene que la distribución conjunta condicional de los incumplimientos del portafolio de tamaño m al vector de factores Ψ es de la siguiente manera:

$$P(Y = y | \Psi) = \prod_{i=1}^m Q_i(\Psi)^{y_i} (1 - Q_i(\Psi))^{1-y_i}, \quad (4.39)$$

de lo anterior la distribución incondicional de los incumplimientos de Y se la obtiene integrando la ecuación (4.39) sobre la distribución del vector de factores Ψ

$$P(Y = y) = \int_{[0,1]^m} \prod_{i=1}^m Q_i(\Psi)^{y_i} (1 - Q_i(\Psi))^{1-y_i} dF(Q_1, \dots, Q_m) \quad (4.40)$$

de la ecuación (4.40) se observa que la distribución de incumplimientos queda completamente especificada por la estructura de dependencia de la distribución de las probabilidades de incumplimientos de los créditos y de manera particular se tiene que la probabilidad de incumplimiento de un crédito i esta dado por $\bar{p}_i = P(Y_i = 1) = E(p_i(\Psi))$.

A partir de la definición (29) se puede observar que el modelo de *Credit Risk*⁺ puede ser representado como un *modelo de mixtura Bernoulli* donde la distribución del incumplimiento esta dado por

$$\begin{aligned} P(Y_i = 1 | \Psi) &= Q_i(\Psi) \\ Q_i(\Psi) &= 1 - \exp(-\mathbf{w}_i' \Psi) \end{aligned}$$

donde $\Psi = (\psi_1, \dots, \psi_p)'$ es un vector p -dimensional de factores macroeconómicos cuyos elementos son independientes y siguen una distribución gamma, con $p < m$ y $\mathbf{w}_i = (w_{i,1}, \dots, w_{i,p})'$ es el vector positivo de pesos de los factores macroeconómicos.

Dado que el incumplimiento de un crédito es un evento poco frecuente se analiza la opción de aproximar una variable aleatoria de Bernoulli a partir de variables aleatorias de Poisson dando origen a los modelos de mixtura de Poisson, en este modelo es permitido que un crédito incumpla más de una vez en un horizonte de tiempo con la característica que la probabilidad que ocurra este evento sea baja; la notación que se utiliza para determinar

este evento es $\tilde{Y}_i \in \{0, 1, 2, \dots\}$ y representa el número de incumplimientos que puede presentar un crédito en un horizonte de tiempo fijo.

Definición 30 (Modelo de Mixtura Poisson) Dado p y Ψ como en la definición (29), el vector $\tilde{Y} = (\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_m)'$ sigue un modelo de mixtura de Poisson con factores Ψ si existe funciones $\lambda_i = \mathbb{R}^p \rightarrow (0, \infty)$, $1 \leq i \leq m$, de tal manera que los componentes de \tilde{Y} condicionados a $\Psi = \psi$ son variables aleatorias independientes con distribución de Poisson de parámetro $\lambda_i(\psi)$

Para poder calibrar este tipo de modelos se parte del supuesto que la probabilidad que un crédito incumpla más de una vez es pequeño de tal manera que esta probabilidad es igual a la de un crédito que incumpla una sola vez (p_i); es decir,

$$p_i = \mathbb{P}[\tilde{Y}_i \geq 1] = 1 - e^{-\lambda_i(\psi)} \approx \lambda_i(\psi) \quad (4.41)$$

así la variable aleatoria $\tilde{M} = \sum_{i=1}^m \tilde{Y}_i$ es aproximadamente igual al número de créditos incumplidos. De manera general se tiene que la suma de dos variables independientes de Poisson $\tilde{Y}_1 \sim Poisson(\lambda_1(\psi))$, $\tilde{Y}_2 \sim Poisson(\lambda_2(\psi))$ sigue una distribución de Poisson de parámetro $\lambda_1(\psi) + \lambda_2(\psi)$ por lo que la distribución condicional de \tilde{M} respecto a ψ es igual a

$$P(\tilde{M} = k \mid \Psi = \psi) = e^{-\bar{\Lambda}} \frac{\bar{\Lambda}^k}{k!}$$

donde

$$\bar{\Lambda} = \sum_{i=1}^m \lambda_i(\psi). \quad (4.42)$$

A partir de las definiciones de los modelos de mixtura de Bernoulli y Poisson se puede apreciar que aparentemente la estructura de ambos modelos es muy diferente; sin embargo, la igualdad (4.43) permite establecer un criterio de semejanza entre ellos, lo que garantiza que los resultados obtenidos por ambos modelos sean similares.

$$p_i(\psi) = 1 - \exp(-\lambda_i(\psi)) \quad (4.43)$$

Para obtener la igualdad (4.43) se parte del supuesto de que la variable \tilde{Y} sigue una distribución de Poisson y a través de esta se construye un indicador $Y_i = I_{\{\tilde{Y}_i \geq 1\}}$, que

siguen un modelo de mixtura de Bernoulli lo que permite comparar ambos modelos de mixtura. De lo anterior se observa que el modelo de CreditRisk⁺ se lo puede interpretar de mejor manera como un modelo de mixtura de Poisson.

Modelos de mixtura Bernoulli de un factor

En situaciones prácticas es difícil disponer de información de todos los factores económicos para calibrar los modelos de mixtura por lo que es conveniente considerar a los modelos de un solo factor donde se los puede ajustar sin gran dificultad a la información disponible de incumplimiento de los créditos de un portafolio tal como se observa en la sección (4.3.5). Para especificar los modelos de mixtura Bernoulli de un factor se considera una variable aleatoria Ψ con valores en los reales y un conjunto de funciones $Q_i(\Psi) : \mathbb{R} \mapsto [0, 1]$ las que se encuentran condicionadas a Ψ , y un vector \mathbf{Y} que indica los créditos incumplidos del portafolio cuyos elementos son independientes y siguen distribuciones de Bernoulli de parámetros $P(Y_i = 1 | \Psi) = Q_i(\Psi)$. A continuación se presentan algunos casos especiales de los modelos de mixtura de un solo factor que son necesarios para determinar la distribución de incumplimientos de un portafolio de crédito; además, se muestra una aproximación asintótica del portafolio de crédito, que permite determinar el Valor en Riesgo del portafolio de crédito por medio de una expresión cerrada logrando disponer de una metodología capaz de obtener indicadores de riesgo de manera inmediata.

Modelos de Mixtura Bernoulli permutables Para realizar un análisis general de los modelos de riesgo de crédito es adecuado tratar de generalizarlos a partir de valores idénticos de las probabilidades de incumplimiento de los créditos, en este caso al modelo mixto de Bernoulli se le conoce como un modelo mixto permutable donde la variable aleatoria mixta $Q = p_1(\psi)$ presenta una función de distribución $G(q)$; así, el número de incumplimientos M de un portafolio es igual a la suma de m variables aleatorias de Bernoulli de parámetro q donde M sigue una distribución binomial de parámetro q y m ; es decir,

$$P(M = k) = \binom{m}{k} q^k (1 - q)^{m-k}, \quad (4.44)$$

y la distribución incondicional del número de incumplimiento se obtiene a través de la integración de la ecuación (4.44) sobre la variable aleatoria q

$$P(M = k) = \binom{m}{k} \int_0^1 q^k (1 - q)^{m-k} dG(q).$$

Bajo el supuesto de que los créditos presentan la misma probabilidad de incumplimiento se puede determinar que las probabilidades de incumplimiento incondicionadas de cualquier orden es igual a los momentos de la distribución mixta

$$\begin{aligned} \pi_k &= P(Y_1 = 1, \dots, Y_k = 1) \\ &= E(E(Y_1, \dots, Y_k | Q)) \\ &= E(Q^k), \end{aligned}$$

así la covarianza de las variables aleatorias Y_i y Y_j se la puede expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} cov(Y_i, Y_j) &= \pi_2 - \pi^2 \\ &= var(Q) \geq 0, \end{aligned}$$

lo que significa que en los modelos mixtos permutables la correlación entre las variables aleatorias Y_i es siempre mayor a cero.

Los principales modelos de riesgo créditos desarrollados por diferentes empresas se los puede relacionar con específicos modelos mixtos Bernoulli permutables siendo estos los siguientes:

- *Distribución mixta Beta*, se supone que la variable aleatoria Q sigue una distribución Beta $Q \sim Beta(a, b)$ de densidad $g(q) = \beta(a, b)^{-1} q^{a-1} (1 - q)^{b-1}$, $a, b > 0$, donde β denota a la función Beta. *Este modelo es similar a la versión de un solo factor de CreditRisk⁺.*
- *Distribución mixta probit normal*, se supone que la variable aleatoria Q es igual a $\Phi(\mu + \sigma\psi)$ para $\psi \sim N(0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ donde Φ representa una distribución normal estándar. *Este modelo puede ser visto como la versión de un solo factor de CreditMetrics y KMV.*

- *Distribución mixta logit normal*, se supone que la variable aleatoria Q es igual a $1/(1 + \exp(-\mu - \sigma\psi))$ para $\psi \sim N(0, 1)$, $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$. Este modelo puede ser visto como la versión de un solo factor de *CreditPortfolioView*, para más detalles puede ver Crounhy, Galai y Mark [10].

Cabe mencionar que en el modelo con distribución Beta las probabilidades de incumplimiento de orden alto π_k y la distribución de M pueden ser calculadas de manera explícita, a diferencia de otros modelos como el logit o probit normal donde se tiene que realizar una evaluación numérica.

Para complementar el análisis de los *modelos mixtos permutables* se realiza un ejercicio numérico donde se parte de información histórica de los créditos otorgados y fallidos de un portafolio con calificación A de un institución financiera ABC²⁸. Cabe mencionar que la calibración de cualquier modelo de mixtura solamente es necesario disponer dos de los siguientes parámetros: probabilidad de incumplimiento (π), covarianza entre incumplimientos (π^2) y la correlación entre los créditos. Estos parámetros son estimados por medio del método de momentos²⁹, este método estima los momentos de primer y segundo orden de la distribución mixta que aproximan a la probabilidad de incumplimiento y covarianza entre incumplimientos del portafolio respectivamente; esta estimación se fundamenta en una serie histórica del número total de créditos y de los créditos incumplidos que pertenecen a una misma calificación crediticia. Del método de momentos se determina que los créditos de este portafolio presentan una probabilidad de incumplimiento igual al 0.10% y una correlación entre los créditos del 3.88%, y con esta información se calibran los modelos mixtos Probit, Logit y Beta cuyos resultados se observan en el Cuadro (4.15). Cabe mencionar que estos modelos mixtos se aproximan a los modelos *CreditMetricsTM*, *CreditPortfolio View* y *CreditRisk⁺* respectivamente.

La distribución del número de incumplimiento se encuentra completamente determinada por la variable mixta del incumplimiento Q logrando obtener modelos mixtos binomiales que cuantifican la dependencia en un portafolio de crédito; para medir el impacto que tienen los modelos mixtos en un portafolio de crédito se compara la distribución de

²⁸Los datos históricos utilizados en este ejercicio se presenta en el Anexo G.

²⁹Para un mejor detalle del método de momentos se realiza en la sección (4.3.5).

Modelo	Parámetros	Valores
Probit	μ	-3.16
	σ	0.23
Logit	μ	-7.14
	σ	0.74
Beta	a	1.52
	b	1458.39

Cuadro 4.15: Valor de parámetros de varios modelos mixtos de Bernoulli con valor de probabilidad de incumplimiento del 0.10 % y correlación entre créditos del 3.88 %.

los incumplimientos generados por modelos mixtos binomiales y por un modelo binomial donde se supone que los créditos son independientes tal como se observa en la Figura 4.24, donde se aprecia dos resultados importantes

Nivel de confianza	Modelo de mixtura			
	Probit	Logit	Beta	Independiente
50 %	2.00	2.00	2.00	2.00
95 %	6.00	6.00	7.00	5.00
99 %	10.00	10.00	9.00	6.00
99.5 %	12.01	11.00	10.00	7.00
99.9 %	14.00	13.00	12.00	8.00

Cuadro 4.16: Valor en Riesgo del número de incumplimientos de un portafolio de 2000 créditos con probabilidad de incumplimiento del 0.10 % y correlación entre créditos del 3.88 % generados con modelos de mixtura binomial Probit, Logit, Beta y un modelo binomial independiente.

- a) Los modelos de CreditMetricsTM (Modelo mixto probit), CreditRisk⁺ (Modelo mixto Beta) y Credit Portafolio View (Modelo mixto logit) presentan distribuciones similares del número de incumplimiento dando como resultado que los indicadores de riesgo de crédito (Valor en Riesgo) sean parecidos tal como se observa en el Cuadro (4.16).
- b) La distribución del número de incumplimiento generado por los modelos mixtos presentan colas pesadas siendo esta una característica de un portafolio donde los créditos presentan dependencia, a diferencia de los modelos de crédito con créditos independientes donde la cola es liviana y los índices de riesgo son inadecuados, tal como

se observa en el Cuadro (4.16) donde el Valor en Riesgo es menor para niveles de confianza superiores al 95 %.

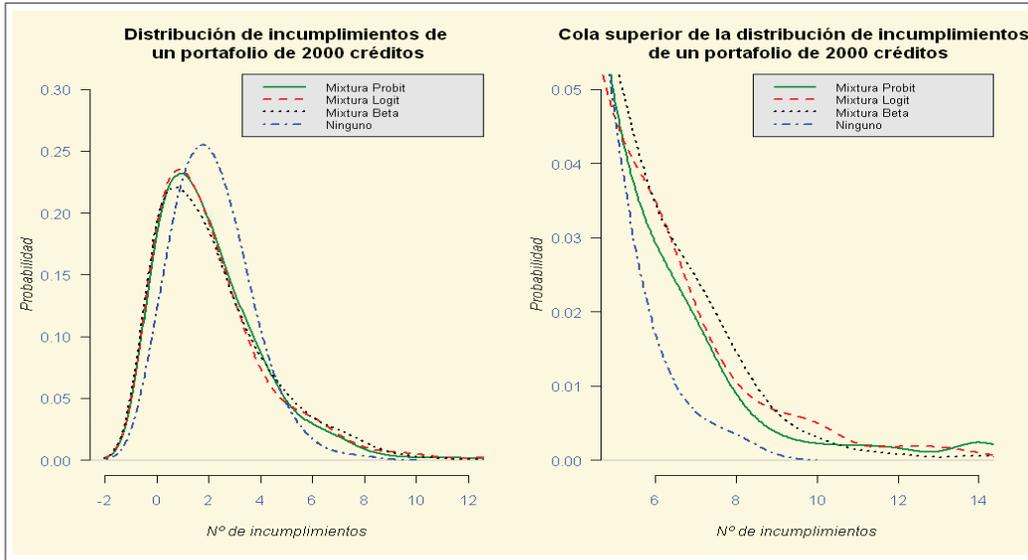


Figura 4.24: Distribución de incumplimientos de un portafolio de 2000 créditos con probabilidad de incumplimiento del 0.10 % y correlación entre créditos del 3.88 % generada con modelos de mixtura Bernoulli de un factor.

Modelos de regresión Mixtura Bernoulli De manera general, los modelos mixtos Bernoulli se los puede especificar de la siguiente manera

$$p_i(\psi) = h(\mu + \beta' x_i + \sigma\psi) \quad (4.45)$$

donde $h : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ es una función estrictamente creciente, ψ es una variable aleatoria que siguen una distribución normal estándar y μ , σ y $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_k)$ representan los parámetros de intercepto y escala de las k variables exógenas que conforman la función h ; como caso particular si la función h es igual a una distribución normal ($h(x) = \Phi(x)$) o una distribución logística ($h(x) = 1/(1 + \exp(-\mu - \sigma\psi))$) que no incorpora variables exógenas entonces los modelos mixtos Bernoulli presentan *distribuciones mixtas probit y logit normal* para el caso de portafolios homogéneos de crédito. Con la especificación (4.45), fácilmente se puede construir modelos mixtos para portafolios heterogéneos, que son influenciados por una sola variable mixta ψ y por variables exógenas que explican

la probabilidad de incumplimiento de cada individuo del portafolio de crédito. Así, las variables exógenas pueden ser variables cualitativas o cuantitativas; para el primer caso, las variables exógenas especifican la pertenencia de los individuos del portafolio a ciertos grupos homogéneos; por ejemplo, calificaciones crediticias o sectores económicos; para el segundo caso, las variables exógenas puede ser ratios financieros de las empresas, variables macroeconómicas como el Producto Interno Bruto, inflación entre otros.

Cabe mencionar que la especificación (4.45) para los modelos mixtos Bernoulli de un solo factor es un caso particular de los modelos lineales generalizados mixtos (GLMM³⁰), estos modelos permiten tomar en cuenta el comportamiento que tiene un individuo en distintas situaciones; por ejemplo, cuando tiene cierta enfermedad, pertenece a cierto país, o presenta una cierta calificación crediticia, para lo cual utiliza variables explicativas con comportamiento aleatorio; adicionalmente, los modelos GLMM permiten relacionar variables con distribuciones diferentes a la normal; así toma en cuenta a las distribuciones que son parte de la familia exponencial que son de tipo binomial, multinomial, poisson o más generalmente variables cuya varianza es función de la media³¹.

La especificación (4.45) puede ser expresada bajo la estructura de los modelos GLMM de la siguiente manera:

$$p_i(\psi) = h(\mu + \beta' x_i + \psi) \quad (4.46)$$

donde h es una función creciente, el vector x_i contiene variables explicativas para el individuo i , μ y β son los parámetros del GLMM. La única diferencia del modelo GLMM (4.46) con el modelo mixto Bernoulli (4.45) es la no presencia del parámetro de escala σ ya que se encuentra implícito en la variable aleatoria ψ que sigue una distribución normal de media cero y varianza σ^2 . La variable aleatoria ψ permite capturar el comportamiento de la variabilidad de la variable dependiente que no puede ser explicado por variables exógenas pero puede ser explicado por ciertos factores inobservables.

Los modelos GLMM presentan tres elementos básicos a ser tomados en cuenta para su modelamiento siendo estos los siguientes:

³⁰Estas siglas corresponde a su nombre en inglés *generalized linear mixed models*.

³¹Para un mejor detalle de los modelos lineales mixtos generalizados puede verse en el documento *Generalized Linear and Mixed Models* [35].

1. *Vector de efectos aleatorios*; corresponde a los factores sistémicos (ψ) que afecta a un conjunto de individuos
2. *Distribución de los efectos aleatorios*; dado que la variable objetivo depende de los efectos aleatorios ψ , es necesario considerar que la distribución de los efectos aleatorios pertenecen a una familia exponencial con lo que garantiza que los elementos de la variable objetivo sean condicionalmente independiente.
3. *Función de acople*, es necesario disponer de un *predictor lineal* ($\eta_{t,i}(\psi_t)$) que se encuentra condicionado a los efectos aleatorios ψ_t ; es decir, $\eta_{t,i}(\psi_t) = \mu + \beta' x_{t,i} + \psi_t$ donde i corresponde al individuo y t al periodo.

Para observar la importancia de los *modelos de Mixtura Bernoulli con variables exógenas* se va a construir un modelo de riesgo de crédito para un portafolio de créditos con calificaciones A o B³². En la Figura 4.25 se presenta la evolución histórica anual de la probabilidad de incumplimiento para las diferentes calificaciones de crédito, se observa que la probabilidad de incumplimiento de los créditos con la mejor calificación crediticia (A) presenta en promedio un bajo valor y poca variabilidad durante los años de 1980 hasta 2005; a diferencia de los créditos con la peor calificación crediticia (B) cuya variabilidad es muy alta, esto evidencia el comportamiento específico de cada crédito en las calificaciones crediticias, por lo que es adecuado utilizar los modelos GLMM para construir un modelo de riesgo de crédito que incorpore esta variabilidad y represente de mejor manera los datos reales de incumplimiento.

Para que el modelo de riesgo de crédito tome en cuenta la variabilidad temporal de la probabilidad de incumplimiento es necesario incorporar un efecto aleatorio temporal que representa *el estado de la economía*, en el modelo se considera que el efecto aleatorio ψ sigue una distribución normal estándar; además, se observa que el valor esperado de la probabilidad de incumplimiento para cada calificación crediticia es diferente y para tomar en cuenta esta característica se incorpora en el modelo como variable explicativa a la calificación crediticia.

³²Los datos históricos utilizados en este ejercicio se presenta en el Anexo G.

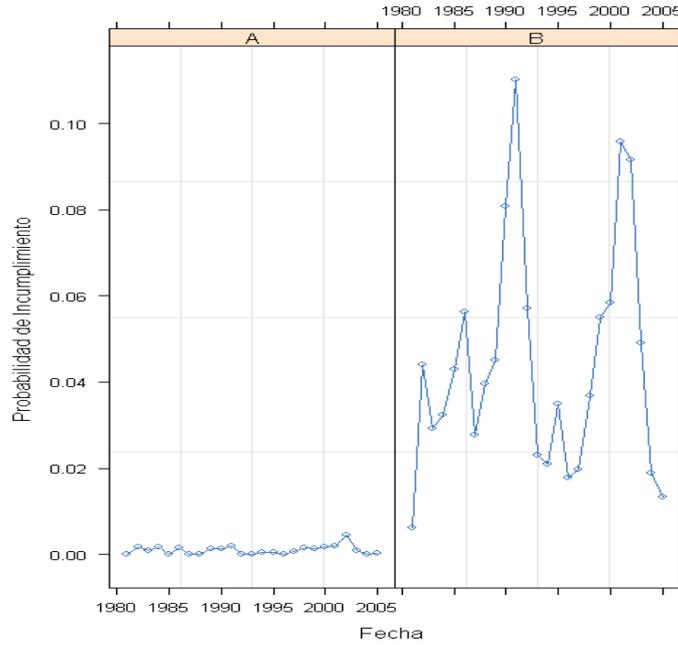


Figura 4.25: Evolución de la probabilidad de incumplimiento de los créditos con calificación A y B desde 1980 hasta 2005.

Cabe mencionar que el modelo de crédito debe permitir identificar la distribución del número de incumplimientos del portafolio de crédito para lo cual se utiliza un modelo de mixtura binomial con variables exógenas cuya estructura es la siguiente:

$$P(M_t = l_t \mid \Psi = \psi) = \prod_{r=1}^2 \binom{m_{t,r}}{l_{t,r}} p_r(\psi_t)^{l_{t,r}} (1 - p_r(\psi_t))^{m_{t,r} - l_{t,r}} \quad (4.47)$$

donde $r = 1, 2$ representa la calificación crediticias A y B de los créditos del portafolio, $m_{t,r}$ es el número de créditos con calificación r en el tiempo t , $M_{t,r}$ es el número de incumplidos, y $p_r(\psi_t) = h(\mu_r + \psi_t)$ es el modelo mixto Bernoulli de un solo factor multiperiodo ya que toma en cuenta la variabilidad temporal de la probabilidad de incumplimiento por calificación crediticia. En este ejercicio se va a considerar los modelos mixtos Bernoulli Logit y Probit que permiten representar a los modelos de CreditMetricsTM y Credit PortfolioView, cuyos parámetros son estimados a partir del método de máxima verosimilitud³³, resultados se presentan en el Cuadro (4.17).

³³En la sección (4.3.5) se detalla los métodos de estimación de los parámetros de un modelo de crédito.

Modelo	Estructura	Parámetros	Valores
Probit	$p_i(\psi) = \Phi(\mu_{r(i)} + \sigma\psi)$	$\mu_{r(1)}$	-3.17
		$\mu_{r(2)}$	-1.76
		σ	0.27
Logit	$p_i(\psi) = \frac{1}{(1+\exp(\mu_{r(i)}+\sigma\psi))}$	$\mu_{r(1)}$	-5.12
		$\mu_{r(2)}$	2.67
		σ	0.62

Cuadro 4.17: Valor de los parámetros de varios modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli con valor de probabilidad de incumplimiento del grupo A del 0.10% y del Grupo B del 4.42%.

Para medir el buen ajuste de los modelos mixtos Bernoulli se compara la esperanza de la probabilidad de incumplimiento empírica con las generadas por los modelos de mixtura tal como se observa en en Cuadro (4.18), donde se puede apreciar que ambos modelos de mixtura se aproximan al valor real lo que garantiza que el ajuste es adecuado; adicionalmente, con los modelos de mixtura se determina la correlación entre los incumplimientos de cada calificación crediticia donde se observa que estos valores son muy bajos y para los créditos con calificación B presentan una mayor dependencia lineal entre ellos. Cabe mencionar que para la estimación de la probabilidad de incumplimiento es necesario evaluar la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}^{(r)} &= E(p_r(\psi_t)) \\ \widehat{\pi}^{(r)} &= \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu_r + z)\phi(z)dz, \quad 1 \leq r \leq 2\end{aligned}\quad (4.48)$$

donde $\widehat{\pi}^{(r)}$ representa la probabilidad de incumplimiento empírica de los créditos con calificación r y ϕ es la densidad normal estándar. Para la estimación de la correlación entre incumplimientos es necesario disponer de la distribución de incumplimiento conjunto de dos créditos donde se tiene que evaluar la siguiente expresión

$$\begin{aligned}\widehat{\pi}_2^{(r_1, r_2)} &= E(p_{r_1}(\psi_t)p_{r_2}(\psi_t)) \\ \widehat{\pi}_2^{(r_1, r_2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} (h(\mu_{r(1)} + z)(h(\mu_{r(2)} + z)\phi(z)dz\end{aligned}$$

donde $\widehat{\pi}_2^{(r_1, r_2)}$ representa la covarianza de los incumplimientos de los créditos con calificación r_1 y r_2 ; así, la correlación entre incumplimiento de cada calificación crediticia r_1 y

r_2 se la obtiene por medio de la siguiente expresión:

$$\rho_Y^{(r1,r2)} = \frac{\hat{\pi}_2^{(r1,r2)} - \hat{\pi}^{(r1)}\hat{\pi}^{(r2)}}{\sqrt{(\hat{\pi}^{(r1)} - (\hat{\pi}^{(r1)})^2)(\hat{\pi}^{(r2)} - (\hat{\pi}^{(r2)})^2)}}.$$

Calificación	Probabilidad de incumplimiento			Correlación			
	Probit	Logit	Real	Probit		Logit	
A	0.11	0.11	0.10	0.11	0.40	0.05	0.30
B	4.45	4.48	4.43	0.40	1.53	0.30	1.81

Cuadro 4.18: Estimación del porcentaje de la probabilidad y la correlación entre incumplimiento de cada calificación crediticia a través de modelos de mixtura Probit y Logit.

Para medir el impacto de los modelos mixtos Binomiales en el portafolio de crédito se compara la distribución del incumplimiento de estos modelos con la generada por un modelo binomial donde se supone que existe independencia entre los créditos, este resultado se presenta en la Figura 4.26, donde se evidencia la similitud de la distribución del incumplimiento de los modelos CreditMetricsTM (modelo mixtura Probit) y Credit PortfolioView (modelo mixtura Logit); además, al comparar ambos modelos mixtos con un modelo donde los créditos se suponen independientes se aprecia que los modelos mixtos presentan una cola más pesada, donde se aprecia el impacto que tiene la correlación en la distribución del incumplimiento.

Nivel de confianza	Modelo de mixtura		
	Probit	Logit	Independiente
50 %	2.00	2.00	2.00
95 %	6.00	6.00	5.00
99 %	10.00	9.00	6.00
99.5 %	10.00	10.00	7.00
99.9 %	14.00	12.00	7.00

Cuadro 4.19: Valor en riesgo de varios modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A es del 0.10 % y del Grupo B del 4.42 %.

Finalmente, para contrastar los resultados entre los diferentes modelos de crédito se estima el Valor en Riesgo (VaR) del número de incumplimientos para diferentes niveles

de confianza dando como resultado que los modelos mixtos Probit y Logit presentan indicadores de riesgo similares; a diferencia del modelo con créditos independientes que presentan valores muy bajos lo que subestima la pérdida real que puede incurrir en el porfolio (Cuadro 4.19).

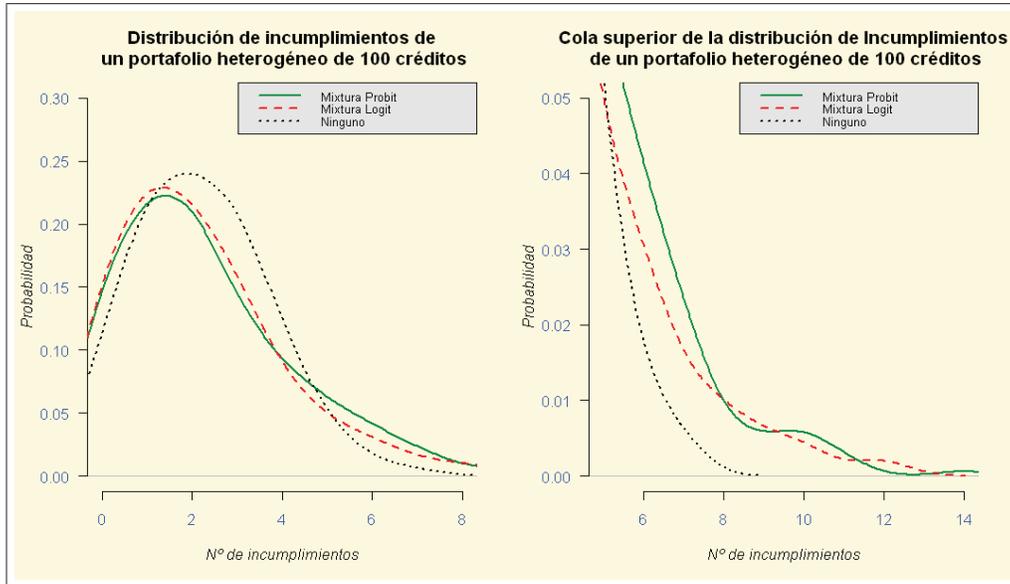


Figura 4.26: Distribución de incumplimientos de un portafolio de 100 créditos generada con modelos de mixtura Bernoulli heterogéneos de un factor para créditos con cali-ficaciones A y B cuyas probabilidades de incumplimiento son 0.10 % y 4.42 % respectivamente.

Aproximación asintótica de la distribución de pérdida con modelos mixtos

Bernoulli En situaciones donde la distribución de pérdida de un portafolio de crédito no puede ser expresada de forma cerrada, se la puede obtener por medio de la simulación de Monte Carlo y a partir de ella tener indicadores crediticios necesarios y útiles para una buena administración del portafolio de crédito. Cabe mencionar, que una de las características relevantes de una cartera de crédito es la gran cantidad de información³⁴, de tal manera que para obtener la distribución de pérdida es necesario disponer de grandes recursos informáticos, lo que limita la construcción de indicadores de riesgo de manera inmediata. En este sentido, es útil disponer de resultados asintóticos para portafolios de

³⁴En algunos casos un portafolios puede estar conformado por millones de créditos.

gran tamaño de tal manera que se pueda aproximar la distribución de pérdida de forma directa sin tener la necesidad de realizar simulaciones de Monte Carlo, lo que permite economizar tiempo y recursos de la institución financiera. A partir de los resultados asintóticos para portafolios se muestra que la cola superior de la distribución de pérdida obtenida a partir de los modelos crediticios esta ampliamente influenciada por la cola superior de la distribución de una variable mixta; de tal manera que se puede obtener reglas adecuadas para establecer el capital de una institución financiera para cubrir el nivel de riesgo.

Para desarrollar las propiedades asintóticas de la distribución de pérdida de un portafolio es necesario denotar los componentes del riesgo de crédito de un portafolio de la siguiente manera: $(e_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una secuencia infinita de *exposiciones determinísticas positivas*, $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ la correspondiente secuencia de *indicadores de incumplimiento* y sea $(\delta_i)_{i \in \mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias con valores entre $(0, 1)$ que representa el *porcentaje de pérdida* al momento de incumplir un crédito. En este sentido la pérdida para un portafolio de crédito de tamaño m está dado por:

$$L^{(m)} = \sum_{i=1}^m L_i$$

$$L_i = e_i \delta_i Y_i$$

de tal maneaa que L_i representa la pérdida individual de cada crédito. Para obtener un modelo que aproxime asintóticamente la distribución de pérdida es necesario que se cumpla los siguiente supuestos:

- i) Existen un vector aleatorio Ψ de dimensión p y funciones $l_i : \mathbb{R}^p \rightarrow [0, 1]$, de tal manera que $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$ condicionado a Ψ conforma una secuencia de variables aleatorias independientes de media $l_i(\psi) = E(L_i \mid \Psi = \psi)$. Este supuesto se fundamenta en el hecho de que el indicador de incumplimiento depende del vector Ψ , por lo que también lo están las pérdidas individuales; además, existe evidencia empírica donde la pérdida debido al incumplimiento depende del estado en que se encuentra la economía subyacente.

ii) Existen una función $\tilde{l} : R^p \rightarrow R^+$ tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} E(L^{(m)} | \Psi = \psi) = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i(\psi) = \tilde{l}(\psi)$$

para todo $\psi \in R^p$. $\tilde{l}(\psi)$ se conoce como la *distribución de pérdida condicionada asintótica*.

En este supuesto se mantiene constante la composición inicial del portafolio.

iii) Existen un $C < \infty$ tal que $\sum_{i=1}^m \left(\frac{e_i}{i}\right)^2 < C$ para todo m .

Este supuesto impide que la exposición del portafolio aumente infinitamente a medida que crece el tamaño del mismo.

El siguiente resultado muestra que a partir de estos supuestos, *la pérdida promedio de un portafolio queda completamente determinado por la distribución de pérdida condicional asintótica $\tilde{l}(\psi)$ y por la realización de un vector aleatorio factorial Ψ .*

Proposición 31 *Se considera una secuencia de $L^{(m)} = \sum_{i=1}^m L_i$ donde se satisface los supuestos i), ii) y iii). Se denota por $P(\cdot | \Psi = \psi)$ la distribución condicional de la serie $(L_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Luego*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} L^{(m)} = \tilde{l}(\psi)$$

Para el caso de un modelo mixto Bernoulli unifactorial, la siguiente proposición permite obtener un resultado importante que permite relacionar los cuantiles de la pérdida de un portafolio con los cuantiles de la distribución mixta Bernoulli.

Proposición 32 *Se considera una secuencia de $L^{(m)} = \sum_{i=1}^m L_i$ donde se satisface los supuestos i), ii) y iii), y se dispone de una variable unidimensional mixta Ψ cuya función de distribución es $G(\Psi)$. Se supone que la función de pérdida asintótica condicional es estrictamente creciente y continua a la derecha y G es estrictamente creciente en $q_\alpha(\Psi)$; es decir, $G(q_\alpha(\Psi) + \delta) > \alpha$ para todo $\delta > 0$. Luego se tiene que*

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} q_\alpha(L^{(m)}) &= \tilde{l}(q_\alpha(\Psi)) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{i=1}^m l_i(q_\alpha(\Psi)) \end{aligned}$$

La proposición (32) indica que el cuantil de las pérdidas de un portafolio es igual a la suma de las pérdidas condicionales de cada crédito evaluadas en el cuantil de la variable mixta Ψ . Para el caso donde la exposición de los créditos es igual a 1 y el porcentaje de las pérdidas es igual al 100%, las pérdidas del portafolio $L^{(m)}$ es equivalente al total de crédito incumplidos, y aplicando la proposición (32) se puede decir que el cuantil de los incumplimientos de un portafolio es igual a la suma de las probabilidades de incumplimiento condicional de cada crédito evaluadas en el cuantil de la variable mixta Ψ . Finalmente, por medio de la proposición (32) es posible obtener dos resultados interesantes; el primero, es que la cola de la distribución de pérdida de un portafolio se encuentra directamente relacionada con la cola de la distribución de la variable mixta Ψ ; el segundo resultado es que esta proposición permite disponer de una estructura cerrada para obtener el Valor en Riesgo de un portafolio de crédito.

Para contrastar los resultados asintóticos de un portafolio de crédito con los generados por la simulación de Monte Carlo, se considera un portafolio crediticio heterogéneo³⁵ conformado por cien créditos que tienen calificaciones crediticias de A o B cuyas probabilidades de incumplimiento promedio son del 0.10 % y del 4.43 % respectivamente. Cabe mencionar que las exposiciones $(e_i)_{i \in \{1, \dots, 100\}}$ y el porcentaje de pérdida de cada crédito $(\delta_i)_{i \in \{1, \dots, 100\}}$ se consideran fijos cuyos valores son de 100 usd y 50 % respectivamente. De lo anterior se puede especificar que la pérdida del portafolio es igual a:

$$L^{(m)} = \sum_{i=1}^m L_i$$

$$L_i = 100 * Y_i * 0,5$$

donde la variable estocástica Y_i es expresada por medio de un modelo mixtura Bernoulli, y para obtener la pérdida del portafolio se realiza la simulación de Monte Carlo a partir de tres estructuras crediticias diferentes siendo estas CreditMetricsTM, Credit Portafolio View y CreditRisk⁺ las que son generalizadas por medio de los modelos de mixtura Probit, Logit y Poisson respectivamente. En la Figura 4.27 se presenta la cola superior de la distribución de la pérdida del portafolio y de la probabilidad condicional que es expresada por los modelos mixtura Bernoulli, donde se aprecia claramente la incidencia

³⁵Los datos históricos utilizados en este ejercicio se presenta en el Anexo G.

de los modelos de mixtura en la distribución de pérdida; por ejemplo, se observa que en ambas distribuciones el modelo mixtura Probit presenta la cola más liviana, lo que indica que existe poca ocurrencia de incumplimientos en el portafolio y limita la presencia de pérdidas extremas.

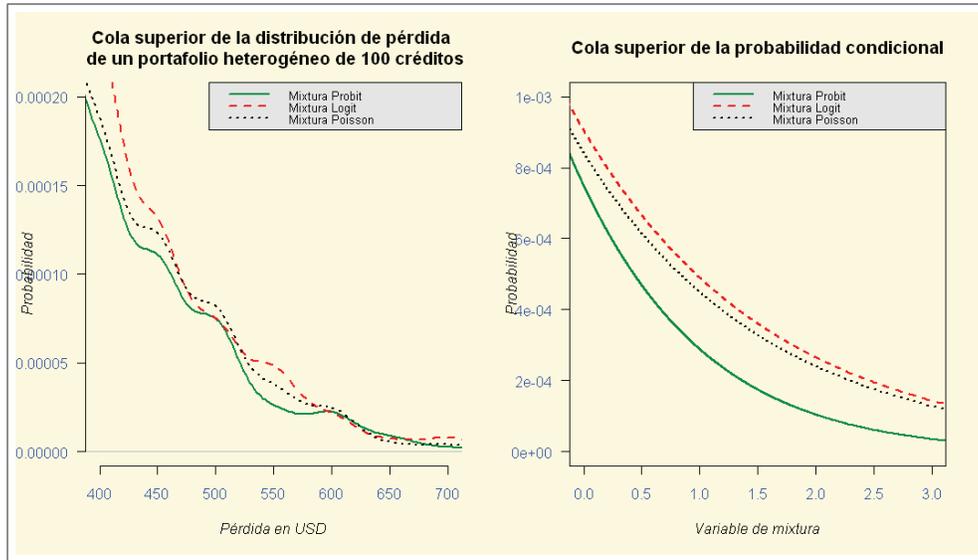


Figura 4.27: Distribución de pérdida de un portafolio heterogéneos y la distribución mixta Bernoulli.

La anterior observación ratifica la proposición (31) donde se especifica que la distribución de las pérdidas esta influenciada por la realización del vector aleatorio factorial.

Dado que las anteriores estructuras crediticias permiten comprender las interrelaciones entre los créditos, esto facilita la cuantificación de la máxima pérdida que tienen el portafolio de crédito a partir de indicadores de riesgo como el VaR para diferentes niveles de confianza; esto es posible a partir de la generación de 10000 simulaciones de la pérdida del portafolio de crédito; sin embargo, cabe mencionar que el ejercicio de simulación es más costoso en tiempo mientras mayor es el número de créditos que tiene el portafolio; para evitar estos problemas, se puede aplicar la proposición (32) donde el percentil de la pérdida del portafolio de crédito para los diferentes modelos de mixtura se aproximan de

la siguiente manera:

$$q_\alpha(L) \approx \sum_{i=1}^{100} e_i \delta_i p_i(q_\alpha(\psi))$$

$$q_\alpha(L) \approx \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{100} e_i \delta_i \phi(\mu + \beta_i \psi), \text{ (mixtura Probit)} \\ \sum_{i=1}^{100} e_i \delta_i \left(\frac{1}{1 + \exp(-(\mu + \beta_i \psi))} \right), \text{ (mixtura Logit)} \\ \sum_{i=1}^{100} e_i \delta_i (1 - \exp(-\exp(\mu + \beta_i \psi))), \text{ (mixtura Poisson)} \end{array} \right.$$

En la Cuadro (4.20) se comparan los indicadores de riesgo del portafolio para diferentes niveles de confianza obtenidos por medio de la simulación de Monte Carlo y por la aproximación asintótica, donde se puede observar que los valores generados por ambas metodologías son muy próximos entre ellos, lo que confirma la proposición (32).

Nivel de Confianza	Simulación Monte Carlo			Aproximación asintótica		
	Probit	Logit	Poisson	Probit	Logit	Poisson
50 %	100.00	100.00	100.00	99.75	97.58	93.21
95 %	300.00	300.00	300.00	241.54	252.00	253.62
99 %	450.00	450.00	450.50	332.92	365.03	378.94
99.5 %	500.00	500.00	500.00	372.02	416.02	437.57
99.9 %	500.05	550.20	550.10	462.85	539.24	584.56

Cuadro 4.20: Valor en riesgo de varios modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A es del 0.10 % y del Grupo B del 4.42 %.

4.3.4. Relación entre el Modelo por umbrales y Mixtura

A primera vista, los modelos de variables latentes y los modelos de mixtura Bernoulli aparentan ser modelos muy diferentes; sin embargo, como ha mencionado Gordy (2000)³⁶, estas diferencias son solamente de presentación e interpretación ya que matemáticamente son equivalentes; por ejemplo, Gordy demuestra que los modelos del tipo CreditMetricsTM y KMV pueden ser escritos como modelos de mixtura Bernoulli siempre y cuando el

³⁶Para un mejor detalle puede observarse en el documento *A comparative anatomy of credit risk models* [23].

retorno de los activos puedan expresarse a partir de un modelo factorial. A continuación se generaliza el estudio realizado por Gordy; de tal manera que se desarrolla la teoría que permite relacionar los modelos de variables latentes y los modelos de mixtura logrando facilitar la aplicación de técnicas estadísticas para resolver y calibrar los modelos de riesgo de crédito; por ejemplo, se determina que la distribución del número de incumplimientos en CreditMetricsTM puede obtenerse mucho más rápido si este modelo es expresado como un modelo tipo mixtura.

Las siguientes condiciones garantizan que un modelo de variables latentes puede ser expresado como un modelo de mixtura Bernoulli.

Definición 33 *Una variable aleatoria \mathbf{X} presenta una estructura de independencia de dimensión p condicional a $\boldsymbol{\psi}$ siempre y cuando existe un $p < m$ y un vector aleatorio p dimensional $\boldsymbol{\psi} = (\psi_1, \dots, \psi_p)$ de tal manera que los componentes del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ condicionado a $\boldsymbol{\psi}$ son independientes.*

Lema 34 *Sea (\mathbf{X}, \mathbf{D}) un modelo de umbrales para un vector aleatorio m dimensional \mathbf{X} . Si \mathbf{X} presenta una estructura de independencia de dimensión p condicional a $\boldsymbol{\psi}$ luego el indicador $Y_i = I_{\{X_i \leq d_{i1}\}}$ sigue un modelo mixto Bernoulli con factor $\boldsymbol{\psi}$, donde la probabilidad de incumplimiento condicional esta dada por*

$$p_i(\boldsymbol{\psi}) = P(X_i \leq d_{i1} \mid \boldsymbol{\psi})$$

Una de las principales herramientas utilizadas para la implementación de los modelos comerciales de variables latentes es el modelo factorial, que permite especificar el comportamiento de los retornos de los activos (por ejemplo, en CreditMetricsTM y KMV) a partir de ciertas variables exógenas, logrando determinar la distribución de pérdida del portafolio de crédito. De manera general, se puede decir que la estructura del vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_m)$ que es parte de un modelo por umbrales (\mathbf{X}, \mathbf{D}) , presenta una estructura de la familia normal mixta, es decir

$$\mathbf{X} = \mu(W) + g(W)Z \tag{4.49}$$

donde W y Z son independientes y $Z_i = \sum_{j=1}^p a_{i,j}\theta_j + \sigma_i\varepsilon_i$ tiene una representación factorial, donde el vector aleatorio $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_p) \sim N_p(0, \Omega)$ es independiente de las variables

aleatorias $\varepsilon_{i \in \{1, \dots, p\}}$ que son independientes e idénticamente distribuidas con distribución normal estándar. De lo anterior, se observa que \mathbf{X} está condicionado al comportamiento del vector $\boldsymbol{\psi} = (\theta_1, \dots, \theta_p, W)$ de dimensión $(p+1)$ y por la definición (33), $X_{i \in \{1, \dots, m\}}$ es independiente y normalmente distribuida con media $\mu_i(W) + g(W) \sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j$ y varianza $(g(W)\sigma_i)^2$; a partir del Lema (34) se tiene que el modelo por umbrales (\mathbf{X}, \mathbf{D}) presenta una probabilidad de incumplimiento condicional igual a:

$$\begin{aligned}
 Q_i(\boldsymbol{\psi}) &= P(X_i < D_0^i \mid \boldsymbol{\psi}) \\
 Q_i(\boldsymbol{\psi}) &= P\left(\mu_i(W) + g(W) \left(\sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j + \sigma_i \varepsilon_i\right) < D_0^i \mid \boldsymbol{\psi}\right) \\
 Q_i(\boldsymbol{\psi}) &= P\left(\varepsilon_i < \frac{D_0^i - \mu_i(W) - g(W) \sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j}{g(W)\sigma_i} \mid \boldsymbol{\psi}\right) \\
 Q_i(\boldsymbol{\psi}) &= \phi\left(\frac{D_0^i - \mu_i(W) - g(W) \sum_{j=1}^p a_{i,j} \theta_j}{g(W)\sigma_i}\right)
 \end{aligned} \tag{4.50}$$

dando como resultado un modelo equivalente mixto Bernoulli con probabilidad de incumplimiento condicional igual a $Q_i(\boldsymbol{\psi})$ donde la distribución binomial mixta del número de incumplimiento esta expresado de la siguiente manera:

$$P(Y = y \mid \boldsymbol{\psi}) = \prod_{i=1}^m Q_i(\boldsymbol{\psi})^{y_i} (1 - Q_i(\boldsymbol{\psi}))^{1-y_i}. \tag{4.51}$$

Si en la ecuación (4.49) se considera que $\mathbf{X} = \mathbf{Z}$ donde \mathbf{Z} son variables críticas estandarizadas y existe un único factor $\boldsymbol{\psi}$ que explica el comportamiento de estas variables, entonces en este caso el modelo mixto Bernoulli corresponde al modelo CreditMetricsTM unifactorial donde la respectiva probabilidad de incumplimiento condicional es:

$$Q_i(\boldsymbol{\psi}) = \phi\left(\frac{\phi^{-1}(\bar{p}_i) - \beta_i \boldsymbol{\psi}}{\sqrt{1 - \beta_i^2}}\right), \tag{4.52}$$

en este caso la cópula de la variables latente siguen una distribución normal multivariante. Una situación de gran importancia es cuando se considera $\mathbf{X} = g(w)\mathbf{Z}$ con $g(w) = \sqrt{\frac{w}{v}}$

donde $w \sim \chi_v^2$, las variables críticas \mathbf{X} presentan una distribución multivariada t de student cuyos marginales siguen una distribución estándar t de student con v grados de libertad; así, este modelo permite representar la dependencia en la cola superior de la distribución de pérdida de un portafolio, de tal manera que este modelo controla la ocurrencia del incumplimiento de los créditos en el portafolio a través de la variable aleatoria $g(w) = \sqrt{\frac{v}{w}}$; así, cuando $g(w)$ es mayor a uno, el número de incumplimientos del portafolio de crédito aumenta considerablemente. En este modelo las variables latentes presentan una probabilidad de incumplimiento condicional con la siguiente estructura:

$$Q_i(\boldsymbol{\psi}) = \phi \left(\frac{t_v^{-1}(\bar{p}_i)W^{-\frac{1}{2}} - \beta_i\boldsymbol{\psi}}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} \right). \quad (4.53)$$

La ecuación (4.50) es crucial para la simulación de Monte Carlo de un modelo por umbrales cuando las variables críticas siguen una distribución mixta normal, permitiendo obtener la distribución de pérdida de un portafolio de crédito. Esta aproximación ayuda a realizar simulaciones a portafolios de gran tamaño de manera rápida y eficiente ya que en vez de simular los elementos del portafolio basta con simular la variable aleatoria explicativa $\boldsymbol{\psi}$. Los pasos para obtener una distribución de pérdida de un portafolio de crédito a partir de la simulación de Monte Carlo por medio de un modelo de mixtura son los siguientes:

1. Generar m números aleatorios de cada variable explicativa del modelo factorial de la ecuación (4.49); *como caso particular si se considera un modelo t de student unifactorial, se tiene que generar m números aleatorios de una distribución normal estándar.*
2. Estimar los parámetros de la probabilidad de incumplimiento condicional (4.50) a partir de un modelo lineal mixto generalizado; *para el caso t de student unifactorial, los parámetros de la probabilidad de incumplimiento (ecuación 4.53) se obtiene de la siguiente manera:*
 - a) *Estimar los parámetros β_i a partir de un modelo mixto lineal generalizado que tiene la misma estructura de un modelo mixto probit (ecuación 4.52).*

b) Estimar los grados de libertad de la variable aleatoria $w \sim \chi_v^2$, para lo cual se tiene que resolver la siguiente igualdad:

$$\hat{\pi}^{(r)} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi \left(\frac{t_v^{-1}(\bar{p}_i)w^{-\frac{1}{2}} - \beta_i z}{\sqrt{1 - \beta_i^2}} \right) F_Z(z) F_W(w) dz dw, \quad 1 \leq r \leq s \quad (4.54)$$

donde $\hat{\pi}^{(r)}$ es la probabilidad de incumplimiento empírica para el grupo de créditos con calificación r .

3. Generar m números aleatorios $g(w) = \sqrt{\frac{v}{w}}$, donde $w \sim \chi_v^2$.
4. Con cada número aleatorio de 1) y 3) se genera para cada crédito del portafolio su respectiva probabilidad de incumplimiento según la ecuación (4.50), de esta manera se obtiene una serie de experimentos de Bernoulli independientes de dimensión r que corresponde al tamaño del portafolio de crédito;
5. Generar r números aleatorios de distribución uniforme estandarizada.
6. Generar una serie de variables dicotómicas que indica el incumplimiento de los crédito a partir de la comparación de la probabilidad de incumplimiento con los número aleatorios del literal 5).
7. Para cada crédito i incumplido cuantificar la pérdida por medio de la siguiente expresión

$$L_i = e_i \delta_i$$

donde e_i corresponde a la exposición del crédito i y δ_i es el porcentaje de pérdida de cada crédito i que no se podrá recuperar; de esta manera se obtiene la pérdida del portafolio de crédito.

8. Se genera una serie de pérdidas del portafolio de crédito a partir del literal 7); y con esta información se construye la distribución de pérdida.

Para medir el impacto que tiene el modelo de mixtura en la distribución de pérdida se determina la distribución de pérdida de un portafolio de crédito heterogéneo³⁷ conformado

³⁷Los datos históricos utilizados en este ejercicio se presenta en el Anexo G.

por cien créditos que tienen calificaciones crediticias de A o B cuyas probabilidades de incumplimiento promedio son del 0.10 % y del 4.43 % respectivamente, las exposiciones $(e_i)_{i \in \{1, \dots, 100\}}$ y el porcentaje de pérdida de cada crédito $(\delta_i)_{i \in \{1, \dots, 100\}}$ se consideran fijos cuyos valores son de 100 usd y 50 % respectivamente. Los modelos de mixtura que son considerados para construir las distribuciones de pérdida es un probit, dos modelos t de student con 5 y 50 grados de libertad y un modelo donde los créditos son independientes cuyos resultados se observan en la Figura 4.28 donde se puede evidenciar dos resultados; el primero, es que un modelo t de student de 50 grados de libertad genera una distribución de pérdida similar al modelo de mixtura Probit; por lo que, a medida que los grados de libertad de una cópula t de student tienden al infinito este se aproxima a una cópula gaussiana; el segundo resultado, es que a menor grados de libertad se tiene una mayor ocurrencia de eventos de incumplimientos lo que produce colas más pesadas y se presenta valores de pérdida extremos.

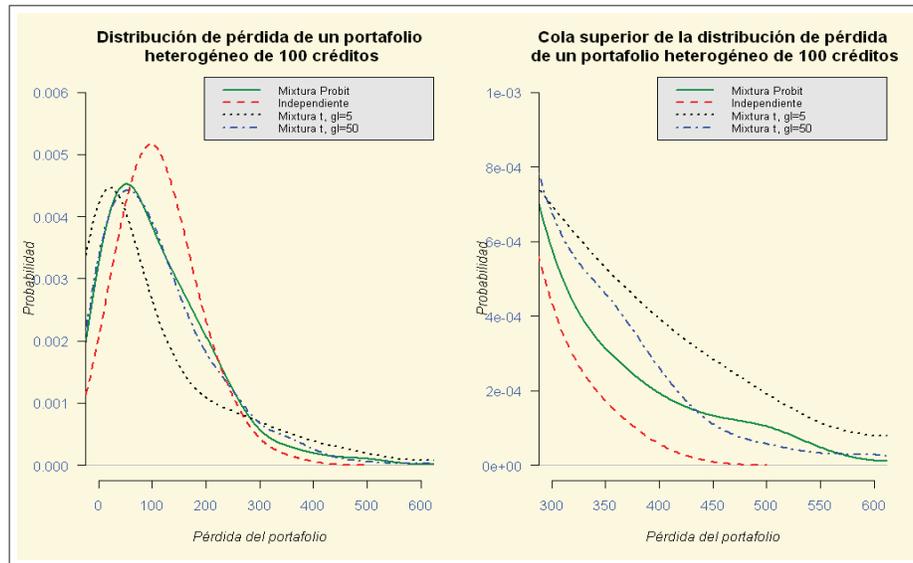


Figura 4.28: Distribución de pérdida de un portafolio heterogéneos de 100 créditos generada a partir de modelos de mixtura t de student .

Para cuantificar el impacto de los grados de libertad de un modelo de mixtura t de student en la distribución de pérdida de un portafolio se determina el Valor en Riesgo para los diferentes modelos de mixtura antes señalados, donde se evidencia que a mayor

nivel de confianza las pérdidas que puede presentar un modelo de mixtura t de student duplica las pérdidas obtenidas por un modelo de mixtura probit por lo que evidencia que los modelos tradicionales de riesgo de crédito no permiten construir indicadores de riesgo consistentes con el comportamiento de los créditos en un portafolio.

Nivel de Confianza	Modelo de Mixturas			
	Probit	Independiente	t con 5 gl	t con 50 gl
50 %	100.00	100.00	50.00	100.00
95 %	300.00	250.00	450.00	300.00
99 %	450.00	300.50	800.50	450.00
99.5 %	500.00	350.00	950.25	500.25
99.9 %	550.10	400.00	1150.25	700.15

Cuadro 4.21: Valor en riesgo de varios modelos heterogéneos mixtos t de student donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A es del 0.10 % y del Grupo B del 4.42 %.

4.3.5. Calibración de modelos de riesgo de crédito

En esta sección se determinó que la estructura de los modelos de créditos comerciales pueden ser esquematizados en dos grandes grupos, siendo estos los modelos por umbrales y los modelos de mixtura; donde los primeros son calibrados a partir de la información de la *probabilidad de incumplimiento* (p) y la *correlación entre variables latentes* ($\rho_{i,j}$), ya que los umbrales se los obtiene directamente de las probabilidades de incumplimiento y el comportamiento de las variables latentes está expresada por una cópula normal mixta de parámetros igual a la matriz de correlación de las variables latentes. Cabe mencionar, si las variables latentes son explicadas por un modelo unifactorial; es decir, $X_i = w_i Z + \sqrt{1 - w_i^2} \varepsilon_i$, con $cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, $cov(Z, \varepsilon_i) = 0$, $\forall i$, por el Lema (34) al modelo de variables latentes se le puede expresar como un modelo de mixtura con *probabilidad de incumplimiento* y la *correlación entre variables latentes* igual a:

$$\begin{aligned}
 \hat{\pi} &= E(P(X_i \leq d_{i1} | \psi)) \\
 \rho_{i,j} &= \frac{cov(X_i, X_j)}{\sigma(X_i)\sigma(X_j)} \\
 &= cov(w_i Z + \sqrt{1 - w_i^2} \varepsilon_i, w_j Z + \sqrt{1 - w_j^2} \varepsilon_j) \\
 &= w_i w_j.
 \end{aligned}$$

de tal manera que a partir de la correlación de las variables latentes es posible determinar los parámetros del modelo de mixtura unifactorial; así, para calibrar el modelo de mixtura es necesario conocer la *probabilidad de incumplimiento y la correlación entre variables latentes*.

De manera general, para calibrar los modelos de créditos se tiene estimar los siguientes parámetros:

1. La probabilidad de incumplimiento de cada crédito, *la que es usualmente estimada por medio de la información histórica de un grupo de créditos incumplidos que presentan características similares; por ejemplo, la evolución de la tasa de incumplimiento de los créditos con calificación A.*
2. Los parámetros de un modelo que describe la dependencia entre incumplimientos; *para este caso se considera a los modelos mixtos cuyos parámetros pueden ser estimados por el método de momentos y por el proceso de máxima verosimilitud.*

A continuación se describe los métodos estadísticos para la estimación de los parámetros de un modelo de mixtura Bernoulli utilizando la información histórica de créditos incumplidos en un portafolio crediticio, donde los créditos se agrupan en categorías con similares características; por ejemplo, las calificaciones asignadas por la calificadora de Standard and Poor's o por el sistema de calificación interna de un banco.

Calibración por el método de momentos

Se supone que se tiene n años de información histórica del número de incumplimientos para un grupo homogéneo de créditos, se denota por m_j al número de créditos observados y M_j al número de créditos incumplidos en el año j donde $j = 1, \dots, n$. Además se considera que el incumplimiento de los créditos es generado por un modelo mixto Bernoulli permutable; por lo que la probabilidad condicional $Q(\psi)$ de todos los créditos es la misma, de tal manera el la probabilidad de incumplimiento ($\hat{\pi}$) y la probabilidad de incumplimiento conjunta de dos créditos ($\hat{\pi}_2$) es igual al momento de primer y segundo orden de la

distribución mixta $Q(\psi)$:

$$\hat{\pi} = E(Q(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu + \sigma z) \phi(z) dz \quad (4.55)$$

$$\hat{\pi}_2 = E(Q(\psi)^2) = \int_{-\infty}^{\infty} h(\mu + \sigma z) h(\mu + \sigma z) \phi(z) dz \quad (4.56)$$

y para calibrar un modelo de crédito comercial unifactorial³⁸ se puede considerar a $h(\cdot)$ como la distribución mixta Logit, Probit o Poisson.

Cabe mencionar que la resolución del sistema de ecuaciones formado por (4.55) y (4.56) permite determinar los parámetros del modelo de mixtura, para lo cual se tiene que estimar la probabilidad de incumplimiento ($\hat{\pi}$) y la probabilidad de incumplimiento conjunta de dos créditos ($\hat{\pi}_2$) a través del método de momentos cuyo estimador general esta dado por:

$$\begin{aligned} \hat{\pi}_k &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{\binom{M_j}{k}}{\binom{m_j}{k}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{M_j(M_j-1)\dots(M_j-k+1)}{m_j(m_j-1)\dots(m_j-k+1)}, \quad 1 \leq k \leq \min\{m_1, \dots, m_n\} \end{aligned}$$

para comprender este estimador, considerese el caso cuando $k = 1$

$$\hat{\pi} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{M_j}{m_j}$$

donde se interpreta como el promedio de la tasa de créditos incumplidos y es equivalente a la probabilidad de incumplimiento de la cartera de crédito y la respectiva correlación entre incumplimientos es igual a:

$$\rho_Y = \frac{\hat{\pi}_2 - \hat{\pi}^2}{\hat{\pi} - \hat{\pi}^2}.$$

De tal manera que $\hat{\pi}_k$ es un estimador insesgado y consistente³⁹ del momento teórico π_k cuando $n \rightarrow \infty$.

Cabe mencionar que la calibración anterior solamente es efectuada para un grupo de créditos homogéneos; sin embargo, cuando el portafolio está conformado por diferentes

³⁸En la sección (4.3.3) se presenta la relación que tiene Credit MetricsTM, Credit PortfolioView y CreditRisk⁺ con los modelos de mixtura unifactorial.

³⁹Para un mejor detalle se puede observar en Frey and McNeil (2001)

grupos de créditos donde se considera que cada grupo es explicado por un modelo específico de mixtura entonces la calibración de los modelos se la realiza aplicando el método de momentos a cada grupo de crédito. La estimación de los parámetros de los modelos de mixtura de cada grupo de manera separada significa que se está considerando independencia entre los grupos de crédito lo cual es un supuesto muy fuerte. Es posible acoplar el método de momentos para portafolios heterogéneos considerando dependencia entre los grupos; sin embargo, los resultados no son confiables por lo que se puede utilizar métodos consistentes para este objetivo como es el caso del método de máxima verosimilitud.

Calibración por el método de máxima verosimilitud

Para implementar el método de máxima verosimilitud (ML) es necesario disponer de la distribución conjunta del número de incumplimientos de un portafolio heterogéneo, para lo cual se debe disponer en cada año⁴⁰ de información de k grupos de calificación crediticia $r \in \{1, \dots, k\}$; donde se toma en cuenta para cada año j y grupo r el número de créditos otorgados $m_{j,r}$ y el número de créditos que han incumplido $M_{j,r}$ en el transcurso de un año.

Se supone que la distribución mixta del crédito i (Q_i) depende de un solo factor ψ y es la misma para todos los créditos que pertenecen a una calificación crediticia:

$$Q_i = h(\mu_r + \sigma_r \Psi)$$

donde $h(\cdot)$ puede ser un modelo unifactoriales de mixtura Probit, Logit, Poisson y t de student de tal manera que la función de probabilidad conjunta condicional e incondicional de los créditos incumplidos $M = (M_1, \dots, M_k)$ en el año j es respectivamente:

$$P(M_j = l_j | \Psi) = \prod_{r=1}^k \binom{m_{jr}}{l_{jr}} h(\mu_r + \sigma_r z_j)^{l_{jr}} (1 - h(\mu_r + \sigma_r z_j))^{m_{jr} - l_{jr}}$$

$$P(M_j = l_j) = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^k \binom{m_{jr}}{l_{jr}} h(\mu_r + \sigma_r z_j)^{l_{jr}} (1 - h(\mu_r + \sigma_r z_j))^{m_{jr} - l_{jr}} \phi(z_i) dz_i$$

donde $l_j = (l_{j,1}, \dots, l_{j,k})'$ y ϕ representa la densidad normal estándar.

⁴⁰Dependiendo del comportamiento de los créditos de un portafolio, la unidad de tiempo puede ser meses, trimestre o una unidad específica.

Cabe especificar que los factores de riesgo Ψ_1, \dots, Ψ_n relacionado con los n años de análisis se considera que son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidos con distribución normal estándar y representan el cambio en valor de los factores macroeconómicos en el respectivo año; así, la función de máxima verosimilitud de n vectores aleatorios del número de créditos incumplimiento en las k calificaciones crediticias es:

$$L(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}, \mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n) = \sum_{j=1}^n \sum_{r=1}^k \log \left(\frac{m_{j,r}}{l_{j,r}} \right) + \sum_{j=1}^n \log(I_j)$$

$$I_j = \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{r=1}^k h(\mu_r + \sigma_r z_j)^{l_{j,r}} (1 - h(\mu_r + \sigma_r z_j))^{m_{j,r} - l_{j,r}} \phi(z) dz$$

donde $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_k)'$ y $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_k)'$ representa los parámetros desconocidos de los k grupos crediticios los que son expresados en función de la realización $\mathbf{l}_1, \dots, \mathbf{l}_n$ que representa el número de incumplimientos de los k grupos durante n años. De tal manera cuando se maximiza la función de máxima verosimilitud en función de $\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\sigma}$ se determina los estadígrafos de los parámetros de las funciones de mixtura de cada grupo de calificación crediticia donde se incorpora la dependencia entre estos grupos.

Capítulo 5

Optimización de un portafolio de crédito

5.1. Introducción

A partir de datos empíricos se ha observado que la distribución de pérdida de un portafolio de crédito es asimétrica y presenta colas pesadas; de tal manera, que para tomar en cuenta este comportamiento se incorporan las cópulas en los modelos de crédito, dando como resultado que la distribución de pérdida sea estimada adecuadamente por medio de la simulación de Monte Carlo; esto permite construir medidas de riesgo y optimizar el portafolio de crédito de manera eficiente; evitando que se subestime el riesgo extremo del portafolio y logrando que se asigne adecuadamente el capital del banco.

En la simulación de Monte Carlo es necesario generar diferentes escenarios de pérdida del portafolio de crédito a través de los modelos de mixtura donde se simula el estado de los créditos en un horizonte de tiempo dado y por medio de variables aleatorias que siguen una cópula t de student, permite capturar el comportamiento estocástico del incumplimiento de los créditos. Cabe mencionar, que por facilidad y mejor entendimiento de los modelos de crédito se considera que los estados del crédito son: incumplir y no incumplir, omitiendo la migración de los créditos a diferentes calificaciones crediticias.

Así, el Valor en Riesgo y el Déficit Esperado obtenidos a partir del modelo de mixtura constituyen indicadores adecuados para medir el riesgo del portafolio, de tal manera que

le permiten al administrador de riesgo asignar el capital que necesita el banco para cubrir un cierto nivel de riesgo del portafolio de crédito. Cabe mencionar que el modelo de mixtura permite relacionar el retorno esperado del portafolio con su respectivo nivel de riesgo de manera eficiente, así es posible construir el apropiado espacio *riesgo-rentabilidad* del portafolio de crédito, a partir de un ejercicio de optimización donde se minimiza el riesgo extremo del portafolio condicionado a una cierta rentabilidad esperada dando lugar a la frontera eficiente del portafolio de crédito. La metodología utilizada para obtener la frontera eficiente es la propuesta por Rockefellar y Uryasev (1999) donde se muestra que la minimización del Valor en Riesgo Condicionado (*CVaR*) permite obtener un adecuado capital regulatorio, situación que no se logra cuando se considera como medida de riesgo¹ a la varianza del portafolio.

5.2. Medidas de riesgo de un portafolio de crédito

Para generar los escenarios de pérdida de un portafolio crediticio, se considera a este como una colección de m contratos o créditos que pueden presentar dos posibles escenarios: incumplir o pagar lo pactado, de tal manera que la pérdida de un *crédito* i en un *escenario* j para un horizonte de tiempo dado es:

$$L_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{si no incumple} \\ N_i(1 - R_i) & \text{si el crédito incumple} \end{cases}$$

donde R_i corresponde a la tasa de recuperación del *crédito* i . La posible pérdida que puede presentar un crédito esta condicionado al comportamiento aleatorio del incumplimiento del crédito por lo que se puede considerar a este como un experimento de Bernoulli donde la probabilidad que incumpla es Q_i ; sin embargo, para tomar en cuenta el comportamiento específico del incumplimiento de cada crédito y la dependencia que existe entre el incumplimiento de los créditos, se utilizan los modelos de mixtura Bernoulli heterogéneos donde la probabilidad de incumplimiento esta condicionado al comportamiento aleatorio de una variable ψ , es decir:

$$Q_i(\psi) = h(\mu_{r(i)} + \sigma\psi)$$

¹Un detatalle sobre medidas coherentes de riesgo puede verse en el Apéndice [3].

donde $r(i) = \{1, \dots, n\}$ corresponde a la categoría crediticia que pertenece el *crédito* i^2 . De tal manera que un *crédito* i incumple en el *escenario* j cuando la probabilidad de incumplimiento condicional $Q_i(\psi)$ es menor que una variable aleatoria q_i que sigue una distribución uniforme estándar; así, la pérdida del portafolio en el *escenario* j para un horizonte de tiempo dado es:

$$L_j = \sum_{i=1}^m L_{ij}, \quad (5.1)$$

además, la pérdida de cada *crédito* i se mantiene cuando se multiplica por la variable identidad $x_i = 1$ por lo que la ecuación (5.1) puede escribirse de la siguiente manera:

$$L_j(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^m L_{ij}x_i,$$

donde $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)^T$ corresponde al vector de posiciones de los créditos en el portafolio de tal manera que las pérdidas del portafolio están condicionadas al comportamiento de este vector. De lo anterior, el portafolio puede ser optimizado a partir de una nueva especificación de la estructura del vector de posiciones dando como resultado que se minimice algún índice de riesgo del portafolio de crédito. Para el caso de portafolios crediticios, los indicadores de riesgo más usados son los siguientes:

1. *Pérdida esperada del portafolio*: corresponde a la pérdida promedio que puede presentar el portafolio de crédito, la estructura de este índice de riesgo es la siguiente:

$$EL(\mathbf{x}) = \frac{\sum_{j=1}^s L_j(\mathbf{x})}{s} \quad (5.2)$$

donde s corresponde al número de escenarios del portafolio.

2. *Máxima pérdida del portafolio a un nivel de probabilidad α* : es el α cuantil de la distribución de pérdida del portafolio de crédito, cuya estructura es la siguiente:

$$ML_\alpha(\mathbf{x}) = \inf \{x \mid F(\mathbf{x}) \geq \alpha\} \quad (5.3)$$

donde $F(\mathbf{x})$ corresponde a la distribución de pérdida del portafolio.

²Para un mejor detalle de estos modelos puede observarse en la sección (4.3.3)

3. *Pérdida inesperada*, conocido como Credit VaR y corresponde a la diferencia entre la máxima pérdida del portafolio a un nivel de probabilidad α y la pérdida esperada:

$$VaR_\alpha = ML_\alpha(\mathbf{x}) - EL(\mathbf{x}) \quad (5.4)$$

4. *Déficit esperado*, es una medida de riesgo extremo y corresponde a la pérdida esperada de las pérdidas mayores a la máxima pérdida del portafolio a un nivel de probabilidad α :

$$ES_\alpha(\mathbf{x}) = ML_\alpha(\mathbf{x}) + \frac{1}{(1-\alpha)s} \sum_{j=1}^s (L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}))^+ \quad (5.5)$$

donde

$$(L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}))^+ = \begin{cases} L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}) & \text{si } L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}) > 0; \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (5.6)$$

5. *Valor en Riesgo Condicional*, es una medida alternativa a ML_α y cuantifica las pérdidas que se puede encontrar en las colas de las distribuciones. Como medida de riesgo tiene ventajas significativas frente al ML_α y se la obtiene también de la distribución de pérdidas del portafolio. Se define como la pérdida esperada para los casos en que la pérdida del portafolio exceda un valor k , para el caso donde k es igual al ML_α estamos en el caso del *Déficit Esperado*, la estructura del valor en riesgo condicional es:

$$CVaR_\alpha = \min_k \left\{ k + \frac{1}{(1-\alpha)s} \sum_{j=1}^s (L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}))^+ \right\} \quad (5.7)$$

Cabe mencionar que dos medidas de riesgo son idénticas si sus funciones de distribución son continuas; sin embargo, la estimación de la distribución de pérdida del portafolio crediticio es discontinua debido a que se utiliza la simulación de Monte Carlo; de tal manera, que no se puede obtener una equivalencia entre dos medidas de riesgo; Rockafellar y Uryasev (2001) demostraron que en distribuciones discretas es posible mantener una igualdad entre el Déficit Esperado y el Valor en Riesgo Condicional siempre y cuando se cumpla que $s \times \alpha$ sea un número entero, donde s corresponde al número de escenarios y α el nivel de probabilidad.

El $CVaR_\alpha$ es una medida complementaria al ML_α ya que cumple todas las propiedades exigidas para ser una medida coherente de riesgo³, desde el punto de vista académico de la teoría de la medida. El $CVaR_\alpha$ cuantifica las pérdidas que exceden el ML_α y actúa como una cota superior para el ML_α , por lo tanto un portafolio con bajo $CVaR_\alpha$ también tiene un bajo ML_α . De tal manera que el $CVaR_\alpha$ representa convenientemente el riesgo y es aplicable a distribuciones de pérdida no simétricas, además es una función convexa lo que garantiza la existencia de un único óptimo global y local, situación que no cumple el ML_α de tal manera que cuando se utilizan técnicas de programación lineal para minimizar esta medida puede conducir a identificar un punto como óptimo global cuando en realidad no lo es. De lo anterior y fundamentándose en la metodología desarrollada por Rockafellar y Uryasev (1999) para optimizar un portafolio de crédito se utiliza como medida de riesgo al $CVaR_\alpha$, ya que garantiza la identificación del mínimo global de tal manera que la frontera eficiente del portafolio de crédito cuantifica adecuadamente la relación *riesgo-rentabilidad*.

5.3. Modelo de Optimización

La principal característica de un portafolio crediticio es que la distribución de pérdida tiene colas pesadas por lo que existe mayor probabilidad de la ocurrencia de eventos extremos como es el caso del incumplimiento conjunto de los créditos de un portafolio, por lo que el supuesto de normalidad del incumplimiento de los créditos es inadecuado; así, Mausser y Rosen (1999) señalan que el método tradicional para construir la frontera eficiente de un portafolio es inaplicable en portafolios crediticios, y logran demostrar que portafolios eficientes respecto a la varianza no son eficientes respecto a índices de riesgo extremo. Cabe mencionar, que en el negocio bancario los eventos extremos tienen una gran influencia en la estabilidad del banco; razón por la cual, la medida capaz de identificar el riesgo extremo del portafolio es el Valor en Riesgo Condicional y siguiendo la metodología de Rockafellar y Uryasev (1999) es posible optimizar un portafolio de crédito en función del vector de posiciones de los créditos por medio de la minimización del Valor en Riesgo Condicional para lo cual se tiene que resolver el siguiente problema de programación lineal:

³Para un mejor detalle sobre medidas coherentes de riesgo puede revisarse Artzner Philippe [3].

$$\min_{(\mathbf{x}, k)} \left\{ k + \frac{1}{(1-\alpha)^s} \sum_{j=1}^s (L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}))^+ \right\} \quad (5.8)$$

sujeito a la siguientes restricciones:

$$\sum_{i=1}^n N_i x_i = \sum_{i=1}^n N_i \quad (5.9)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i \quad (5.10)$$

$$\sum_{i=1}^n N_i (r_i - R) x_i \geq 0. \quad (5.11)$$

La ecuación (5.9) corresponde a la *restricción de equilibrio* y garantiza que el monto total del portafolio es invariante al proceso de optimización; es decir, que el proceso de optimización no influye en la estrategia del negocio bancario y sirve de apoyo en su planificación estratégica.

La ecuación (5.10) representa los *límites de las posiciones* que debe tener los montos de los créditos, así una posición crediticia no puede tomar valores negativos, ya que no tiene sentido financiero; por esta razón, solamente se considera que la posición de los créditos debe ser mayor o igual a cero.

La ecuación (5.11) permite incorporar el *retorno objetivo* R del portafolio, de tal manera que el problema de optimización logra minimizar el riesgo extremo dando como resultado que el retorno esperado del portafolio sea mayor o igual que el retorno objetivo.

En este modelo se supone que el portafolio antes de la optimización contiene una unidad para cada crédito, esto es $x_i = 1$ para todos los créditos del portafolio y después de la optimización el portafolio contendrá x_i^* unidades para cada *crédito* i ; por ejemplo, si $x_i^* = 2$, el modelo de optimización sugiere que se debería duplicar el monto del *crédito* i .

Si se repite el proceso de optimización para diferentes retornos objetivos R se puede construir la frontera eficiente del portafolio crediticio en el nuevo espacio *riesgo-rentabilidad*, cabe mencionar que *la frontera eficiente es un conjunto de portafolios que simultáneamente maximizan el retorno para un nivel dado de riesgo y minimizan el riesgo para un nivel dado de retorno*.

5.4. Aplicación del modelo de Optimización

La metodología presentada en la sección anterior para la optimización de un portafolio crediticio, se va a implementar en un portafolio heterogéneo crediticio conformado por 100 créditos con montos (exposición) iguales a 100 usd, severidad del 50%; donde los créditos con alta calificación crediticia (A) tienen una rentabilidad del 10% y los de baja calidad (B) una rentabilidad del 30%⁴. Cabe mencionar que el monto total del portafolio es de 10 000 usd, y las pérdidas del portafolio es determinado con un nivel de confianza del 99.9% en un horizonte de tiempo de un año.

El modelo de crédito utilizado para determinar las pérdidas del portafolio corresponde a un modelo de mixtura t de student cuyos parámetros fueron calibrados⁵ con la información histórica del incumplimiento de los créditos⁶ y con la composición de la cartera de crédito a diciembre del 2006⁷. En el Tabla (5.1) se presenta los parámetros del modelo de mixtura heterogéneo t de student, donde se aprecia que el intercepto para créditos con calificación A presenta el valor más grande en valor absoluto, dando como resultado que este grupo tenga en promedio una probabilidad de incumplimiento baja; cabe mencionar que en este modelo los grados de libertad para un cópula t de student es de 3.56, lo que indica que la cola superior de la distribución de pérdida sea pesada, evidenciando que este modelo permite capturar el comportamiento real de una cartera de crédito (Figura 5.1).

A partir del modelo de mixtura t de student calibrado, se simulan 1000 escenarios de la probabilidad de incumplimiento de cada crédito del portafolio, de tal manera que un crédito i incumple en el escenario j si la probabilidad de incumplimiento es menor a un número aleatorio uniforme estandarizado. Así, se obtiene 1000 escenarios para la pérdida del portafolio de crédito original, donde se supone que el portafolio está compuesto por un vector de posiciones igual a la unidad; es decir, cada crédito tiene una exposición igual a la unidad, donde la unidad corresponde a 100 usd.

Finalmente; para medir el riesgo implícito en el portafolio original, se calcula la pérdida

⁴La composición de los créditos del portafolio se presenta en el Anexo (H).

⁵El método utilizado para calibrar un modelo de mixtura se presenta en la sección (4.3.5).

⁶La evolución histórica de los créditos incumplidos por calificación crediticia se presenta en el Apéndice (G).

⁷La composición de los créditos del portafolio se presenta en el Anexo (H).

Modelo	Estructura	Parámetros	Valores
Mixtura	$\phi\left(\frac{t_v^{-1}(\bar{p}_i)W^{-\frac{1}{2}}-\beta\psi}{\sqrt{1-\beta^2}}\right)$	$t_v^{-1}(\bar{p}_A)$	-8.13
t de student		$t_v^{-1}(\bar{p}_B)$	-2.42
		β	0.26
		v	3.56

Cuadro 5.1: Valor de los parámetros de un modelos heterogéneos mixtos de Bernoulli t de student, donde la probabilidad de incumplimiento del grupo A y B es el 0.10 % y 4.42 % respectivamente.

esperada, el Valor en Riesgo Condicional (pérdida extrema); y, el Credit VaR dando como resultado que la provisión y capital económico que necesita la institución para cubrir el riesgo hasta un 99.9 % de confianza es de 112 usd y 1251 usd respectivamente. Además; con el nivel de riesgo que incurre la institución financiera se esperaría que la rentabilidad del portafolio sea del 20 %.

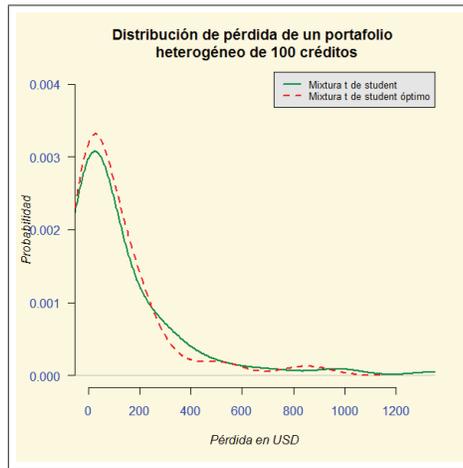


Figura 5.1: Distribución de pérdida del portafolio de crédito original y optimizado.

Para optimizar al portafolio original crediticio, se utiliza el procedimiento descrito en la sección anterior donde se minimiza el Valor en Riesgo Condicional a un nivel de confianza del 99.9 % sujeto a las restricciones (5.9), (5.10) y (5.11).

Para identificar la respectiva frontera eficiente de este portafolio, se efectua el proceso de optimización para diferentes niveles de rentabilidad objetivos del portafolio tal como se observa en la Figura 5.2 donde la curva en el espacio *riesgo-rentabilidad* corresponde a la

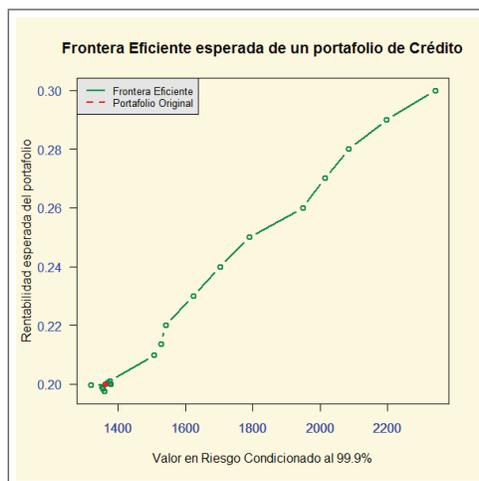


Figura 5.2: Frontera Eficiente promedio de un portafolio formado por 100 créditos con diferentes calificaciones crediticias para un nivel de confianza del 99.9%.

frontera eficiente y se aprecia que la rentabilidad del portafolio original sujeto al nivel de riesgo se encuentra sobre la frontera eficiente, determinando que con este nivel de riesgo la institución no puede esperar mayor rentabilidad.

La importancia de construir la frontera eficiente de un portafolio es que permite medir el nivel de riesgo que se encuentra asociado con una rentabilidad específica y determinar si las provisiones y capital económico asignado por la institución están acordes con el riesgo asumido; por ejemplo, se observa que portafolios con rentabilidades entre el 19.80% al 20.10% tienen pérdidas semejantes; mientras que, rentabilidades mayores al 22% presentan pérdidas cuyo crecimiento es proporcional al nivel de riesgo; así, como caso particular, si el banco requiere que el portafolio de crédito tenga una rentabilidad del 25%, debe disponer de una provisión de 175 usd y un capital económico del 1600 usd para cubrir el nivel de riesgo con nivel de probabilidad del 99.9% (Figura 5.3).

Para comprender de mejor manera el impacto del proceso de optimización en la composición del vector de posiciones, se grafica las posiciones de los 100 créditos para diferentes niveles de rentabilidad objetivos (Figura 5.4), donde los primeros 50 créditos tiene calificación crediticia A y los demás calificación B, de tal manera que se puede apreciar que para un rentabilidad requerida del 20% es necesario que los montos de los créditos se encuentren alrededor de 100 usd (el vector de posiciones es cercano a 1); por otro lado,

Rentabilidad del Portafolio	Pérdida Esperada	Pérdida Extrema	Credit VaR
19.80 %	111	1354	1243
19.90 %	111	1353	1242
20.00 %	112	1319	1207
20.00 %*	112	1363	1251
20.10 %	114	1370	1256
21.00 %	125	1508	1383
21.40 %	128	1527	1400
22.00 %	135	1542	1407
23.00 %	146	1624	1478
24.00 %	158	1703	1545
25.00 %	169	1791	1622
26.00 %	178	1949	1770
27.00 %	188	2015	1827
28.00 %	199	2086	1887
29.00 %	212	2198	1986
30.00 %	222	2342	2120

* = Portafolio crediticio Original

Cuadro 5.2: Índices de riesgo para portafolios crediticos con máximos niveles de rentabilidad y mínimo riesgo.

se observa que para un rentabilidad del 25 % es necesario que se disminuya a 50 usd los montos de los créditos con calificación A (valor de la posición de los 50 primeros créditos cercano a 0.5) y se aumente a 150 usd los crédito calificados con B (valor de la posición de los últimos 50 créditos cercano a 1.5).

Hay que notar que el modelo sugiere que para tener una mayor rentabilidad es necesario tranferir el riesgo a créditos con baja calidad crediticia, situación que concuerda con el pensamiento de que *a mayor riesgo mayor rentabilidad*; así, este modelo permite identificar la mejor exposición que puede incurrir los créditos de manera individual garantizando que la institución disponga de la mayor rentabilidad posible del portafolio crediticio.

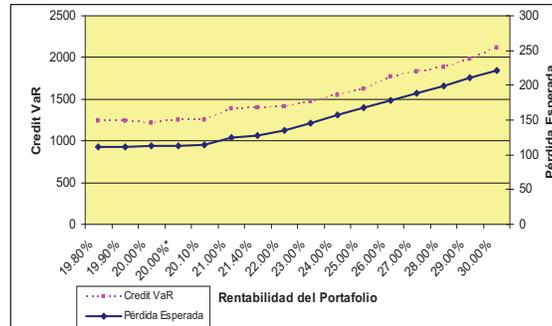


Figura 5.3: Tendencia del riesgo diferentes niveles de rentabilidad del portafolio de crédito

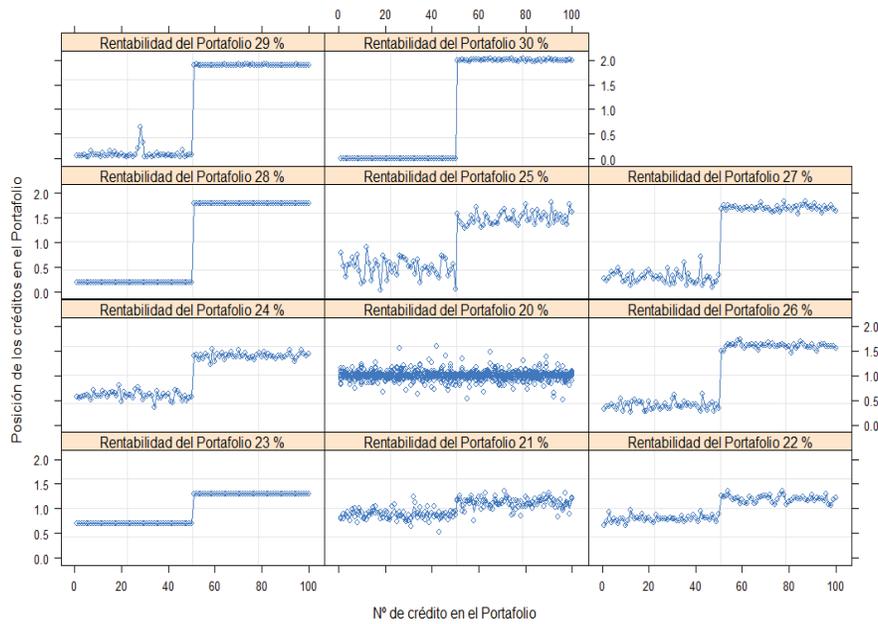


Figura 5.4: Composición del vector de posiciones del portafolio de crédito para diferentes niveles de rentabilidad y mínimo riesgo.

Parte II

Aplicación

Capítulo 6

Implementación de modelos crediticios en una Institución Financiera Ecuatoriana

6.1. Introducción

En capítulos anteriores, se han detallado los principales modelos de riesgo de crédito que son utilizados en mercados desarrollados para determinar la distribución de pérdida de un portafolio; así también, un modelo de crédito para mercados emergentes que permite medir el nivel de concentración que se presenta en una cartera de crédito; estos modelos, logran que una institución financiera pueda constituir de manera coherente las provisiones y el capital económico para cubrir un cierto nivel de riesgo asumido por la colocación de créditos, de tal manera que estos modelos son herramientas esenciales para una adecuada administración del riesgo crediticio. El desarrollo teórico de los modelos de riesgo de crédito permite generalizarlos a partir de los modelos de mixtura y de las funciones cópula; y logra determinar que la concentración de una cartera incide directamente en el riesgo de crédito. Estos conceptos facilitan la comprensión de los modelos de crédito y transparentan la calibración e implementación de los mismos en cualquier cartera; además, a partir de la teoría de los modelos crediticios se puede construir herramientas para la gestión de un portafolio como por ejemplo:

- *La frontera eficiente de un portafolio crediticio*; donde se relaciona el riesgo con la rentabilidad esperada de un portafolio; constituyéndose, en una herramienta óptima para la planificación estratégica de la institución financiera.
- *La asignación de cupos*, donde se asigna de manera adecuada los montos solicitados de los créditos según su nivel de riesgo; lo que constituye una herramienta fundamental para controlar el riesgo a través del monto aprobado.

En este capítulo se hará uso de los conceptos de riesgo de crédito para desarrollar, implementar y calibrar los modelos CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, CreditRisk⁺, CyRCE y la cópula t de student en una cartera de créditos automotrices con información histórica desde Enero del 2006 hasta Diciembre del 2008, mismos que permitirán determinar la pérdida futura que puede tener la cartera en los próximos seis meses. Con el desarrollo de estos modelos se conforma un sistema que permite analizar y monitorear el riesgo de una cartera crediticia en el mediano plazo dando lugar al diseño de políticas para el control y la mitigación del riesgo de crédito.

6.2. Descripción del portafolio de crédito

El portafolio crediticio a utilizar comprende créditos comerciales del segmento automotriz,¹ con montos promedios de 13000 usd, plazo de cuatro años y tasa de interés del 14%. A inicios del período (Enero 2006) los créditos vigentes estaban conformados por 577 y al final (Diciembre 2008) se dispone de 1857 créditos, por lo que el crecimiento promedio mensual de los créditos vigentes de esta cartera es del 4% mensual.

Para conocer la pérdida potencial que puede tener un portafolio, primero se tiene que determinar la pérdida (P_i) de cada *crédito* i para lo cual se tiene que disponer de las siguientes variables: *el incumplimiento* (Y_i), *la exposición* (E_i) y *la severidad* (Δ_i); donde la pérdida potencial del *crédito* i es expresada de la siguiente manera:

$$P_i = E_i \Delta_i Y_i \quad (6.1)$$

¹Por razones de confidencialidad de la institución financiera se ha decidido mantener en reserva el origen de la información; sin embargo, este limitante no afecta de ninguna manera a los resultados obtenidos respecto a la distribución de pérdida de este portafolio.

de tal manera que la pérdida del portafolio se la obtiene así:

$$L = \sum_{i=1}^m E_i \Delta_i Y_i, \quad (6.2)$$

donde m corresponde al número de créditos que tiene el portafolio. De lo anterior, se observa que la pérdida del portafolio está condicionado a la distribución multivariada del incumplimiento de los créditos, misma que es obtenida a partir de la evolución histórica de la tasa de incumplimiento de los grupos homogéneos del portafolio de créditos automotrices. Para construir la tasas de incumplimiento se tiene que seguir los siguientes pasos:

1. *Definir el evento de incumplimiento para cada crédito.*
2. *Segmentar la cartera automotriz en grupos homogéneos crediticios.*

En el primer paso, se tiene que *definir de manera adecuada el incumplimiento de un crédito i* , misma que es expresada a partir de una variable dicotómica de la siguiente manera:

$$y_i = \begin{cases} 1 & \text{si el crédito } i \text{ incumple} \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (6.3)$$

Esta variable es fundamental para la obtención de la distribución de pérdida y por ende en la construcción del modelo crediticio. Debido a que el incumplimiento proporciona la información necesaria para identificar las pérdidas reales que presenta la institución financiera en la cartera de crédito. Cabe mencionar que la variable incumplimiento del crédito i es contruida a partir de la información respectiva de los días de mora, de la siguiente manera:

$$y = \begin{cases} 1 & \text{si } n > n_u \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.4)$$

donde n corresponde los días mora del crédito i y n_u representa el número de días de mora máximo que puede tener un crédito para no ser considerado como un crédito incumplido; por ejemplo, si se conoce a priori que el promedio de los días de mora de los créditos de una cartera automotriz es 12, significa que en términos normales los deudores se retrazan en sus pagos hasta 12 días; sin embargo, si un crédito retrasa su pago en 30 días esto

indica que el deudor no tiene la capacidad o la voluntad de cancelar la cuota, por lo que se podría esperar que el saldo del crédito no sea cancelado de tal manera que este crédito es considerado como incumplido ya que representa una pérdida potencial para la institución financiera.

Del ejemplo anterior se evidencia la importancia que tiene la identificación de los días de mora máxima para la especificación del incumplimiento de un crédito, para lo cual se utiliza el *método de cosechas*² donde se analiza el comportamiento crediticio de grupos de créditos y con este método se evidencia que el comportamiento de los créditos con días de mora entre 31 y 60 días tienden a deteriorarse más rápido la calidad crediticia, por lo que podría considerar que los días de mora máximo que puede tener un crédito para no ser considerado como incumplido es de 60 días (Figura 6.1).

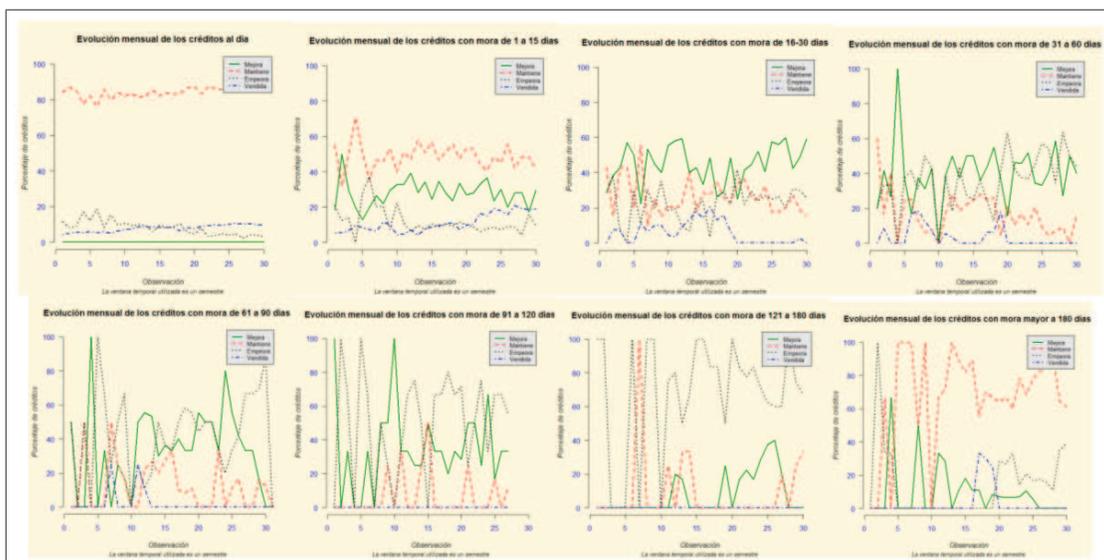


Figura 6.1: Evolución de la proporción de los créditos vendidos, que mejoran, que empeoran y se mantienen en su calidad crediticia para cada grupo crediticio del portafolio.

En el segundo paso se tiene que segmentar la cartera crediticia en grupos homogéneos ya que no es posible realizar el análisis de la dependencia entre los créditos incumplidos de manera individual debido a las siguientes razones:

1. Los créditos no son originados al mismo tiempo ni tienen el mismo plazo por lo

²Un mejor detalle de esta metodología se encuentra en el Apéndice I.2.

Subgrupo	N° de créditos	% de la cartera	Índices promedios			
			Incumplimiento	Tasa de interes	Monto	Plazo
G1	5742	14.39 %	2,4 %	13.55 %	13,427	3.39 años
G2	17495	49.97 %	1,9 %	13.92 %	13,236	4.05 años
G3	13409	35.64 %	0,9 %	14.59 %	12,886	3.02 años

Cuadro 6.1: Tabla resumen de los tres grupos crediticios homogéneos de una cartera crediticia comercial automotriz que son creados a partir del método CHAID.

complica el análisis del portafolio.

2. Pueden existir créditos con buen comportamiento crediticio por lo que la estimación del incumplimiento conjunto del portafolio puede ser inconsistente.
3. Para cuantificar la dependencia entre incumplimientos se tiene que disponer de la matriz de correlación, por lo que en portafolios con gran cantidad de créditos esta matriz es difícil de construir.

A partir de lo anterior se evidencia la necesidad de identificar grupos homogéneos en el portafolio crediticio para un mejor análisis de la dependencia de los créditos; sin embargo, esta agrupación no puede ser realizada a partir de los días de mora del crédito ya que a priori no se conoce el comportamiento de los créditos. En este sentido la técnica utilizada para segmentar el portafolio es el árbol de decisión también conocido como *detección de interacción automática Ji-cuadrada* (CHAID) que permite identificar divisiones óptimas cuando las variables dependientes son continuas, nominales e incluso categóricas. Este procedimiento determina una serie de reglas que permite obtener una partición del portafolio original a partir de alguna variable clave.³ Tras utilizar como variable clave a los días mora y como variables independientes a la tasa de interés y el plazo; el método CHAID arrojó una segmentación de tres grupos, donde el primer grupo tiene en promedio una tasa de incumplimiento del 2.4 %, el segundo del 1.9 % y el tercero del 0.9 % (Cuadro 6.1).

Por medio del método CHAID se observa claramente que cada grupo homogéneo tiene un comportamiento específico crediticio; así, el grupo G1 presenta la mayor tasa

³El detalle de método CHAID se explica en el Apéndice I.1.

de incumplimiento mientras que G3 tiene la menor tasa; sin embargo, la tasa de interés y el monto de los créditos aprobados en cada grupo no están acordes con el nivel de riesgo asumido por la institución financiera; por ejemplo, el grupo con mayor tasa de incumplimiento presenta en promedio la menor tasa de interés y el mayor monto, situación que evidencia que las herramientas utilizadas por la institución financiera para administrar el riesgo son inadecuadas. En la Figura 6.2 se observa el comportamiento de los grupos crediticios en los últimos 30 meses, donde se evidencia una caída en la tasa de incumplimiento por lo que se puede garantizar que este comportamiento no es estacionario y evidencia la necesidad de incorporar en los modelos de créditos esta tendencia de los créditos incumplidos.

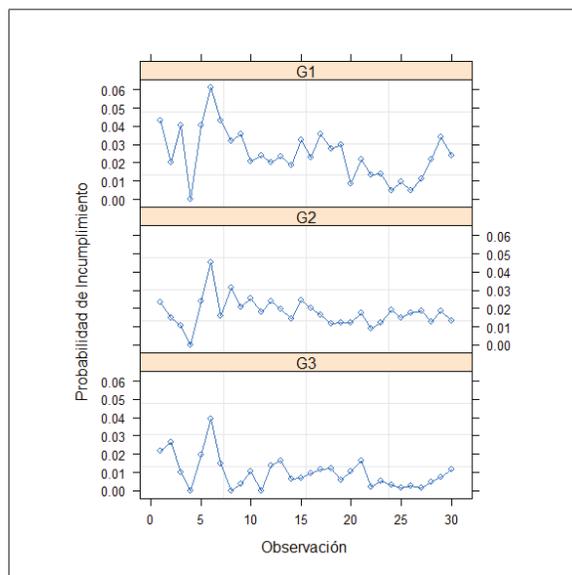


Figura 6.2: Evolución del incumplimiento para tres grupos homogéneos crediticios desde Junio del 2006 hasta Diciembre 2008.

Finalmente, para conocer la pérdida potencial que puede tener el portafolio de créditos automotrices en los próximos seis meses, se tiene que conocer la exposición de cada *crédito* i al momento del incumplimiento, misma que corresponde al saldo de los créditos; sin embargo, esta información es difícil de conocer a priori debido a que es variante en el tiempo. Una aproximación de la exposición de cada crédito se la obtiene a partir del saldo

inicial (S_i^0) que tiene el *crédito* i y de la tasa de exposición ponderada (Δ_i^e) del portafolio:

$$E_i = S_i^0 \Delta^e \quad (6.5)$$

donde la tasa de exposición corresponde al promedio histórico en n períodos de la razón entre el volumen total de créditos que han incumplido en una ventana temporal de seis meses ($VItot_i$) y el volumen total de los créditos al inicio de la ventana temporal ($Vtot_i$).

$$\Delta^e = \sum_{i=1}^n \frac{VItot_i}{Vtot_i}, \quad (6.6)$$

donde la tasa de exposición de cada *crédito* i en la cartera automotriz es del 76.9%.

Cabe mencionar que por falta de información de la recuperación de los créditos incumplidos de la cartera automotriz, se considera que la institución financiera pierde el 100% de la exposición de los créditos incumplidos, por lo que este valor corresponde a la severidad que tendría cada crédito.

6.3. Ajuste de la cartera a modelos mixtura

En la sección 4.3 se presentó que cualquier modelo crediticio comercial⁴ pertenece a una de las siguientes categorías: *modelos por umbrales y los de mixtura*, donde estos modelos a primera vista parecen ser muy diferentes; sin embargo, matemáticamente son equivalentes siempre y cuando el retorno de los activos pueda ser expresado a partir de un modelo factorial. Aparentemente, la equivalente entre los modelos por umbrales y los de mixtura es obtenida bajo ciertas condiciones que dispone un mercado desarrollado, donde existe una amplia información histórica sobre el comportamiento de los retornos de los activos de las empresas; sin embargo, en la sección 4.3 se pudo evidenciar que la información necesaria y suficiente para calibrar un modelo de crédito es la evolución de la tasas de incumplimiento de los créditos, esta información sin más complicación puede ser obtenida para cualquier institución financiera de tal manera que los modelos crediticios comerciales pueden ser implementados y calibrados en mercados poco desarrollados como es el caso Ecuatoriano.

Adicionalmente, en la sección 4.3 se presentó que los modelos de créditos son un caso especial de los modelos lineales generalizados mixtos (GLMM), por lo que se puede utilizar los métodos de estimación de los modelos GLMM para determinar los parámetros de un modelo de crédito⁵.

Para calibrar de manera adecuada los modelos crediticios, a la información de la cartera automotriz, se tiene que incorporar en el modelo las siguientes características del portafolio de crédito:

1. *Cada grupo homogéneo que conforma el portafolio crediticio tiene rasgos específicos respecto a la calidad crediticia; por ejemplo, en el grupo crediticio G1 incorpora créditos cuya tasa de incumplimiento es la más alta de todos los créditos del portafolio.*
2. *La tendencia de la tasa de incumplimiento de cada grupo homogéneo es decreciente; por ejemplo, se aprecia que el primer dato de la tasa de incumplimiento de los*

⁴Los modelos que se hacen referencia son: CreditMetrics^{MT}, Credit PortfolioView, CreditRisk⁺.

⁵El método utilizado para estimar los parámetros de los modelos de créditos es el de máxima verosimilitud, debido a que se obtiene estimaciones más consistentes.

Modelo	Estructura	Parámetros	Valores
Credit Metrics TM	$p_i(\psi) = \Phi(\mu_{r(i)} + \beta x + \sigma \psi)$	$\mu_{r(G1)}$	-1.83
		$\mu_{r(G2)}$	-1.94
		$\mu_{r(G3)}$	-2.21
		β	-0.01
		σ	0.112
Credit PortfolioView	$p_i(\psi) = \frac{1}{(1 + \exp(\mu_{r(i)} + \beta x + \sigma \psi))}$	$\mu_{r(G1)}$	-3.33
		$\mu_{r(G2)}$	-3.60
		$\mu_{r(G2)}$	-4.31
		β	-0.03
		σ	0.27
Credit Risk ⁺	$p_i(\psi) = 1 - e^{(-e(\mu_{r(i)} + \beta x + \sigma \psi))}$	$\mu_{r(G1)}$	-3.38
		$\mu_{r(G2)}$	-3.69
		$\mu_{r(G3)}$	-4.29
		β	-0.03
		σ	0.33
Cópula t	$p_i(\psi) = \Phi(\mu_{r(i)} + \beta x + \sigma \psi)$	$\mu_{r(G1)}$	-2.41
		$\mu_{r(G2)}$	-2.6
		$\mu_{r(G3)}$	-2.9
		β	-0.01
		σ	0.112
		gl	27.46

Cuadro 6.2: Estimación de los parámetros de cuatro modelos crediticios para un portafolio formado por tres grupos homogéneos.

créditos que pertenecen al *grupo crediticio G1* es del 4%, mientras que el último dato es del 2% (Figura 6.2).

3. Se presenta una alta variabilidad de la tasas de incumplimiento para cada grupo homogéneo; por ejemplo, para el *grupo crediticio G1* se observa que la tasa de incumplimiento fluctua entre el 6% y 0.5% (Figura 6.2).

Para incorporar las características del portafolio automotriz en el modelo GLMM, es necesario que el modelo incorpore un *vector de efectos fijos* ya que esto permite tomar en cuenta la calidad crediticia de cada grupo homogéneo, *una variable exógena* que corresponde a la tendencia de la tasas de incumplimiento; y, *un efecto aleatorio* que permite tomar en cuenta la variabilidad de la tasa de incumplimiento y se puede considerar como el factor sistémico que afecta a toda la cartera de manera general.

Cabe mencionar que a partir de las estimaciones de los parámetros de cada modelo

Grupo crediticio	CM	CPV	CRP	CT	M.M
G1	2.438	2.46	2.463	1.715	2.464
G2	1.878	1.881	1.801	1.23	1.794
G3	0.934	0.942	0.99	0.655	0.982

CM = CreditMetricsTM
 CPV = Credit PorfolioView
 CRP = Credit Risk⁺
 CT = Cópula t de student
 M.M = Método de momento

Cuadro 6.3: Estimación de la probabilidad de incumplimiento de cada grupo crediticio utilizando modelos de mixturas y el método de momentos.

de crédito⁶ (Cuadro 6.2) se observa que el intercepto de cada grupo homogéneo permite cuantificar de manera adecuada la tasas de incumplimiento esperada en cada grupo; así, en el modelo CreditMetricsTM, el valor más bajo del intercepto corresponde al grupo de crédito que tiene la menor tasa de incumplimiento. Como caso especial de los modelos de crédito se tiene a la *cópula t de student*, la cual permite cuantificar eventos de incumplimiento extremos en el portafolio a partir de los grados de libertad de la distribución t de student, donde se observa que los grados de libertad para este modelo es del 27.46,⁷ indicando que la cola superior de la distribución de pérdidas del portafolio con créditos automotrices es pesada, esto significa que las pérdidas extremas del portafolio es ocasionada por la ocurrencia conjunta de los incumplimientos de los créditos.

Una de las pruebas que se utiliza para verificar si los modelos de créditos capturan de manera adecuada la información del incumplimiento del portafolio automotriz es comparar la probabilidad de incumplimiento estimada⁸ por cada modelo crediticio con la obtenida por el método de momentos (Cuadro 6.3); donde se puede apreciar que todos los modelos de crédito a excepción del *cópula t de student* presentan valores similares, esto puede deberse al método utilizado para determinar los grados de libertad de la *cópula t de*

⁶Las estimaciones de los modelos se las obtuvieron a partir del software R versión 2.8.1 por medio del paquete QRMLib que es un módulo gratuito y sirve de apoyo del libro Quantitative Risk Management que fue desarrollado por Alexander J. McNeil, Rudiger Frey and Paul Embrechts.

⁷El programa para la estimación de los grados de libertad fueron realizados en el paquete R versión 2.8.1.

⁸Para determinar la probabilidad de incumplimiento de los modelos de crédito se utiliza la ecuación (4.48) y en el caso particular del *cópula t de student* se utiliza la ecuación (4.54).

MODELO	GRUPO	GRUPO		
		G1	G2	G3
CM	G1	0.286	0.261	0.202
	G2	0.261	0.238	0.184
	G3	0.202	0.184	0.143
CPV	G1	0.308	0.271	0.193
	G2	0.271	0.238	0.169
	G3	0.193	0.169	0.121
CRP	G1	0.406	0.347	0.260
	G2	0.347	0.297	0.221
	G3	0.260	0.221	0.164
CT	G1	1.291	0.791	1.058
	G2	0.791	1.138	1.002
	G3	1.058	1.002	0.888

CM = CreditMetricsTM
 CPV = Credit PorfolioView
 CRP = Credit Risk⁺
 CT = Cópula t de student

Cuadro 6.4: Estimación de las matrices de correlación entre incumplimiento utilizando los modelos de mixtura.

student; sin embargo, esta prueba es referencial y no permite concluir respecto a la consistencia del modelo.

Para comprender la dependencia entre los incumplimientos de los créditos en cada grupo homogéneo, se utiliza la matriz de correlación entre incumplimientos (Cuadro 6.4); donde se puede observar que todas las matrices de correlación son similares, así la correlación entre los incumplimientos del *grupo crediticio G1* es la más alta (por ejemplo, en el modelo CreditMetricsTM es del 0.286 %); sin embargo, el modelo *copula t de student* presenta valores muy diferentes, esto es debido a que en la cópula t de student, la dependencia es explicada por medio de dos elementos: la matriz de correlación y los grados de libertad, por lo que no tiene sentido comparar la correlación del modelo cópula con las obtenidas por los otros modelos de crédito.

MODELO	GRUPO	Probabilidad de incumplim- iento	Matriz de covarianza		
			G1	G2	G3
CM	G1	2.464 %	6.8e-05	5.5e-05	3.0e-05
	G2	1.794 %	5.5e-05	4.4e-05	2.4e-05
	G3	2.464 %	3.0e-05	2.4e-05	1.3e-05

CM = CreditMetricsTM

Cuadro 6.5: Estimación de las matrices de covarianza entre incumplimiento utilizando los modelos de mixtura.

6.4. Ajuste de la cartera al modelo CyRCE

En el modelo CyRCE al igual que los modelos comercializados de riesgo de crédito (Por ejemplo, CreditMetricsTM y CreditRisk⁺) su diseño depende de que los créditos de la cartera bajo análisis estén calificados; lo que permite disponer de información sobre tasas de incumplimiento asociadas a cada calificación dando lugar a la obtención de sus respectivas *probabilidades de incumplimiento* y sus *correlaciones*. Estas se constituyen en los parámetros de un modelo de riesgo de crédito bajo el supuesto de que los retornos de los activos del portafolio siguen una distribución normal multivariada. El método utilizado para estimar la probabilidad de incumplimiento en cada calificación es el de máxima verosimilitud cuyo estimador corresponde al método de momentos; por otro lado, para facilitar la estimación de la correlación entre créditos incumplidos se utiliza un modelo de mixtura Probit ya que permite determinar la distribución conjunta de los créditos incumplidos de un portafolio específico y por ende la correlación entre los diferentes grupos crediticios tal como se observa en el Cuadro (6.5).

6.5. Prueba de desempeño de los modelos de crédito

La prueba de desempeño (*BackTesting*) es fundamental para el proceso de evaluar y calibrar los modelos de riesgo de crédito ya que permite verificar si el modelo está midiendo el riesgo de manera adecuada. Para realizar un *BackTesting* es necesario realizar estimaciones recursivas del Valor en Riesgo (VaR_α) de un portafolio de crédito para un período determinado, tal como se describe a continuación (en este caso se supone que existe información hasta el periodo n):

i) Con la información hasta el período t , se calcula las pérdidas reales (L_{t+k}) y el Valor en Riesgo del portafolio ($\widehat{VaR}_{\alpha,t+k}$) con un nivel de confianza α , donde $t = n_1, n_1 + 1, \dots, n - k$ y k representa el tiempo de tenencia del portafolio.

ii) A partir de los Valores en Riesgo estimados, se construye la sucesion I_{t+k} , la cual se define como:

$$I_{t+k} = \begin{cases} 1 & \text{si } L_{t+k} > \widehat{VaR}_{\alpha,t+k} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.7)$$

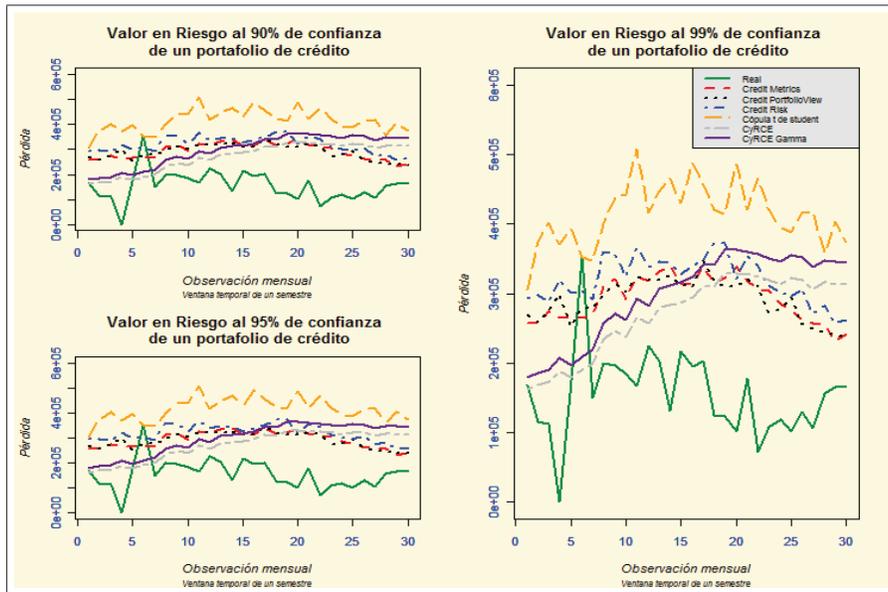


Figura 6.3: Evolución histórica del Valor en Riesgo semestral de un portafolio de créditos automotrices con un nivel de confianza del 90 %, 95 % y 99 %.

Los puntos antes mencionados permiten validar la consistencia de los modelos de riesgo de crédito ya que en un modelo adecuado de riesgo de crédito se debería esperar que la probabilidad de que las pérdidas reales superen al VaR_α (*proporción de fallas*) sea exactamente igual al nivel de significancia utilizado en el VaR_α ; o de manera equivalente se esperaría que la sucesión I_{t+k} este conformado por variables aleatorias i.i.d de experimentos de Bernoulli con probabilidad de éxito cercano a $1 - \alpha$. Para probar la hipótesis nula de que la proporción de fallas sea exactamente igual al nivel de significancia del Valor en Riesgo ($H_0 : p = 1 - \alpha$), debe ocurrir que el estadístico de Kupiec⁹ se distribuya asintóticamente como una Chi-cuadrado con un grado de libertad, mismo que tiene la siguiente forma:

$$LR_{pof} = -2 \log \left(\frac{p^x(1-p)^{m-x}}{\hat{p}^x(1-\hat{p})^{m-x}} \right) \quad (6.8)$$

donde m corresponde al número de observaciones incluidas en el *Backtesting*, x es el número de veces de que las pérdidas superan al VaR_α y $\hat{p} = x/m$ corresponde al estimador de máxima verosimilitud del parámetro p .

		Credit Metrics			Credit PortfolioView			Credit Risk		
Nivel de confianza		99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
Excepciones		1	1	1	1	1	1	1	1	1
Excepciones esperadas		0.3	1.5	3	0.3	1.5	3	0.3	1.5	3
Probabilidad de fallas (PF)		3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %	3.3 %
PF esperadas		1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %
		Cópula t de student			CyrCE			CyrCE Gamma		
Nivel de confianza		99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %	99 %	95 %	90 %
Excepciones		0	1	2	2	4	6	1	3	3
Excepciones esperadas		0.3	1.5	3	0.3	1.5	3	0.3	1.5	3
Probabilidad de fallas (PF)		0 %	3.3 %	6.6 %	6.6 %	13.3 %	20 %	3.3 %	10 %	10 %
PF esperadas		1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %	1 %	5 %	10 %

Cuadro 6.6: Índices de desempeño de los diferentes modelos crediticios en una cartera automotriz.

⁹Un mejor detalle puede encontrarse en el documento *Backtesting* desarrollado por Peter Chirstofersen.

Para identificar el modelo de riesgo de crédito que mejor representa la realidad de la cartera de créditos automotrices, se realizan las pruebas de desempeño a los siguientes modelos de riesgo: CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, Credit Risk⁺, cópula t de student, CyRCE y CyRCE Gamma. En la Figura 6.3 se visualiza que el VaR de los modelos crediticios CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, Credit Risk⁺ y cópula t de student siguen la tendencia de las pérdidas del portafolio a diferencia de los modelos de concentración donde el VaR se estabiliza a partir de noviembre del 2007 (observación 17), esto se debe principalmente por la concentración de la cartera en el segmento de bajo riesgo. Además se puede apreciar que el Valor en Riesgo del CreditMetricsTM, Credit Portfolio View, Credit Risk⁺ presentan valores similares, validando así la equivalencia entre estos modelos; situación que no causa sorpresa ya que todos estos modelos se fundamentan en distribuciones normales multivariadas. A primera vista, el VaR del modelo cópula t

Modelo	Pruebas de desempeño		
	Nivel de confianza		
	99 %	95 %	90 %
CreditMetrics	31.14 %	65.6 %	16.3 %
CreditPortfolioView	31.14 %	65.6 %	16.3 %
CreditRisk ⁺	31.14 %	65.6 %	16.3 %
Copula t	43.7 %	65.6 %	51.9 %
CyRCE	3.8 %	7.9 %	10.3 %
CyRCE Gamma	31.14 %	26.6 %	100 %

Cuadro 6.7: Probabilidad de que las proporción de fallas teóricas sea igual a las empíricas con información desde Junio de 2006 hasta Diciembre del 2008.

aparenta sobreestimar las pérdidas reales del portafolio; sin embargo, la probabilidad de fallas de este modelo es la más cercana al nivel de significancia empleado (Cuadro 6.6), identificando a este como el mejor modelo que logra representar las pérdidas del portafolio automotriz; más aún, este modelo permite identificar de manera adecuada las pérdidas extremas del portafolio ya que la probabilidad de fallas se aproxima al nivel de significancia a medida que éste sea más pequeño. Lo mencionado anteriormente, se verifica a partir de la prueba estadística de Kupiec donde el modelo cópula t presenta las probabilidades más altas de no rechazar la hipótesis nula a diferencia de la obtenida por el CyRCE gamma al 90 % de confianza, lo anterior pone en evidencia que el modelo CyRCE gamma no tiene

la capacidad para medir el riesgo extremo del portafolio; sin embargo, este modelo es más consistente cuando los niveles de significancia son altos (Cuadro 6.7). Lo anterior pone en evidencia que el administrador de riesgo debe trabajar con algunos modelos de riesgo de crédito ya que cada uno tiene diferentes potencialidades y conjuntamente permiten monitorear el riesgo de manera efectiva.

6.6. Análisis de concentración

El modelo CyRCE detallado en el Capítulo 3 evalúa la suficiencia de capital y provisión que es asignado por un banco a una cartera de créditos, a través de la comparación del VaR de dicha cartera para un cierto nivel de confianza dado. Así el VaR constituye ser lo mínimo en capital y provisión que debe tener un banco para no incurrir en pérdidas por riesgo de crédito. La descomposición del VaR a partir del índice de Rayleigh y la concentración de Herfindahl Hirschman (HH) permiten apreciar en qué medida la concentración de la cartera contribuye al riesgo de crédito y logra identificar la máxima concentración que puede soportar un banco a partir del capital y provisiones asignado, lo que facilita la asignación de límites a los montos de los créditos logrando constituirse en una herramienta adecuada para monitorear y mitigar el riesgo de crédito.

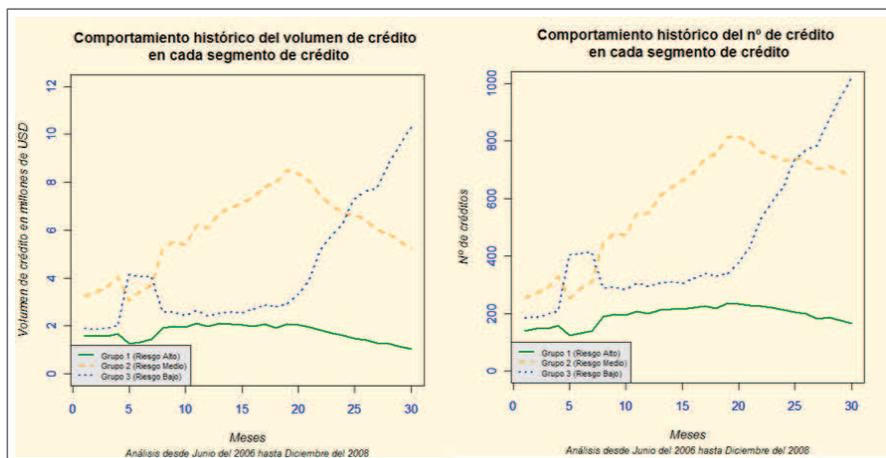


Figura 6.4: Comportamiento del volumen y número de créditos de los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo en una cartera automotriz desde Junio del 2006 a Diciembre del 2008.

Para analizar la concentración de la cartera de créditos automotrices primero se realiza un análisis descriptivo gráfico del comportamiento del volumen y de la cantidad de créditos que pertenecen a los diferentes segmentos de riesgo, de tal manera que se pueda validar los resultados obtenidos con el modelo CyRCE. En la Figura 6.4 se observa como el comportamiento del volumen y la cantidad de créditos para los segmentos de *Riesgo Medio* y *Bajo* tienen un crecimiento sostenido desde Junio del 2006 hasta Diciembre

del 2007 (*los primeros diez y nueve meses*); sin embargo, a partir de Enero del 2008 se aprecia claramente el cambio en las políticas crediticias donde se toman la decisión de *disminuir la colocación de los créditos en el segmento de Riesgo Medio y aumentar considerablemente en el segmento de Riesgo Bajo*. De lo anterior se puede pensar que la institución financiera dispone de herramientas para monitorear el riesgo; sin embargo, no dispone de herramientas para mitigarlo de manera adecuada, ya que las políticas deben ir direccionadas en la asignación del tasas de interés, plazo y/o el monto según el nivel de riesgo que tenga cada crédito, situación que no se observa en las políticas tomadas por la institución financiera.¹⁰

Para analizar la concentración de la cartera de crédito automotriz a través del modelo CyRCE, se establen dos escenarios, el primero corresponde al *escenario base*, donde se supone que la institución financiera mitiga el riesgo total de la cartera a partir del capital y provisiones, que estan conformados por el VaR del modelo cópula t de student;¹¹ además, para mitigar el riesgo crediticio de cada segmento, la institución financiera asigna una parte del capital y provisión del portafolio total, misma que es igual a la proporción que tiene cada segmento crediticio en la cartera total (Cuadro 6.1). El segundo escenario corresponde al *escenario óptimo*, donde se cuantifica el capital y provisión óptimo que debe asignar la institución financiera a cada segmento crediticio de tal manera que pueda mitigar el riesgo crediticio ocasionado por concentración; y así, asignar límites a los créditos de manera adecuada.

6.6.1. Escenario base

Al realizar el *análisis de la suficiencia de capital y provisión* durante Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008, se puede apreciar que la asignación realizada a la cartera total es adecuada; sin embargo, para los segmentos de *Riesgo Alto y Medio* solamente avanza a cubrir hasta Diciembre del 2007 y Junio del 2008 respectivamente (Figura 6.5).

Cabe mencionar que la brecha entre el capital y provisión con el VaR para los segmen-

¹⁰Un mayor detalle puede encontrarse en el Manual para el Administrador el Riesgo, diseñado por la asociación internacional de administradores de riesgo PRMIA [27].

¹¹En la sección anterior se identificó al modelo cópula t de student como el mejor modelo que permite capturar el comportamiento de las pérdidas de la cartera automotriz.

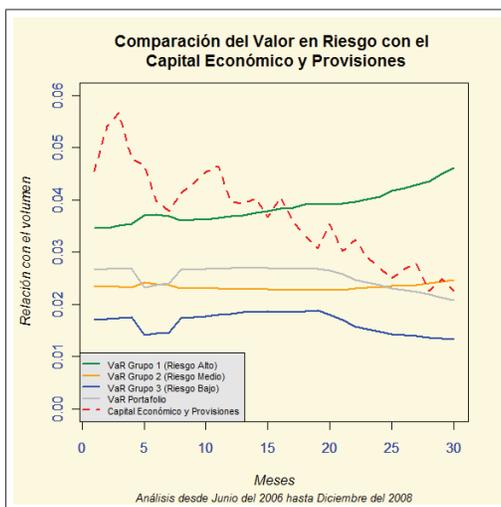


Figura 6.5: Comparación del Valor en Riesgo al 99 % de confianza con el Capital Económico y Provisiones del portafolio total y de los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

tos crediticios es más grande al inicio del período de análisis (*Junio del 2006*) y tiende a decrecer con el paso del tiempo; donde la brecha es mayor para el segmento de *Riesgo Bajo* y más corta para el segmento de *Riesgo Alto*, esto evidencia lo inadecuado de la política crediticia para mitigar el riesgo en cada segmento ya que se esperaría que la institución asigne más capital y provisión para el segmento con *Riesgo Alto* y menos al segmento de *Riesgo Bajo*.

A partir de la asignación de capital y provisión que realiza la institución financiera en cada segmento crediticio, se puede analizar el nivel de concentración que puede soportar estos segmentos; en la Figura 6.6 se puede observar que el segmento de *Riesgo Alto* (G1) puede soportar el nivel de concentración solamente en los meses comprendidos entre Junio y Septiembre del 2006 (*cuatro primeros meses de análisis*); el segmento de *Riesgo Medio* (G2) entre Junio del 2006 hasta Junio del 2008 (*diez y siete primeros meses*). Lo anterior pone nuevamente en evidencia que la asignación de capital y provisión para los segmentos crediticios es inadecuado, más aún, con el análisis de concentración se observa que la institución financiera tenía que haber reestructurado las políticas crediticias para el segmento de Riesgo Medio a partir de Junio de 2007 y mas no en Enero del 2008 (Figura 6.4).

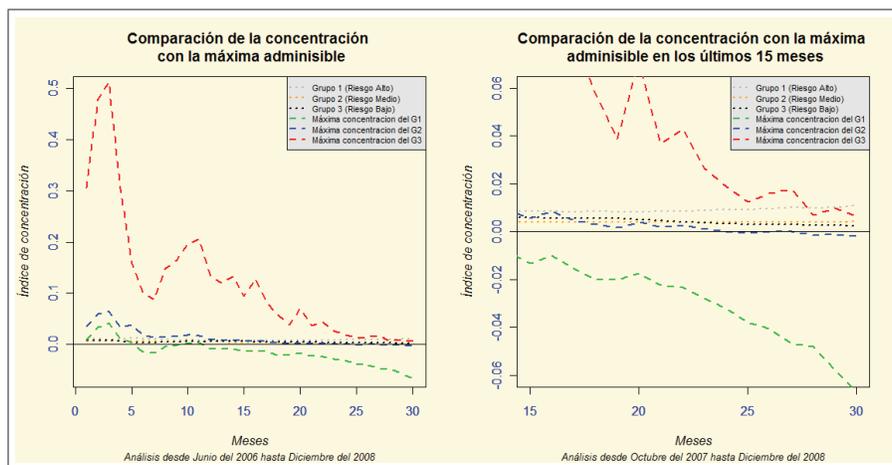


Figura 6.6: Comparación de la concentración de los segmentos crediticio de Alto, Medio y Bajo riesgo con la máxima admisible determinada por el modelo CyRCE desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

Finalmente, a partir del análisis de concentración que realiza el modelo CyRCE a cada segmento de crédito, se puede asignar límites a los montos de los créditos, mismos que se les obtiene a partir del capital y provisión asignado en cada segmento. Para realizar el análisis de los límites crediticios durante Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008, se seleccionan tres meses representativos, siendo estos Enero de 2006, Marzo de 2007 y Junio de 2008 (Figura 6.7), donde se identifica los montos de los créditos que superan el límite asignado por el modelo CyRCE para cada segmento crediticio, donde se puede observar que en Enero de 2006 el modelo limita a 15000 usd el monto de los créditos que pertenecen al segmento de *Riesgo Alto*; en Marzo del 2007, el modelo indica que no se debe otorgar créditos (monto máximo de 0 usd) al segmento de *Riesgo Alto* y finalmente en Junio del 2008 el modelo solamente otorga créditos al segmento de *Riesgo Bajo*. De lo anterior claramente se observa como el modelo CyRCE asigna el límite de los montos a partir de la capacidad que tiene el capital y provisión para soportar la concentración existente en cada segmento de crédito.

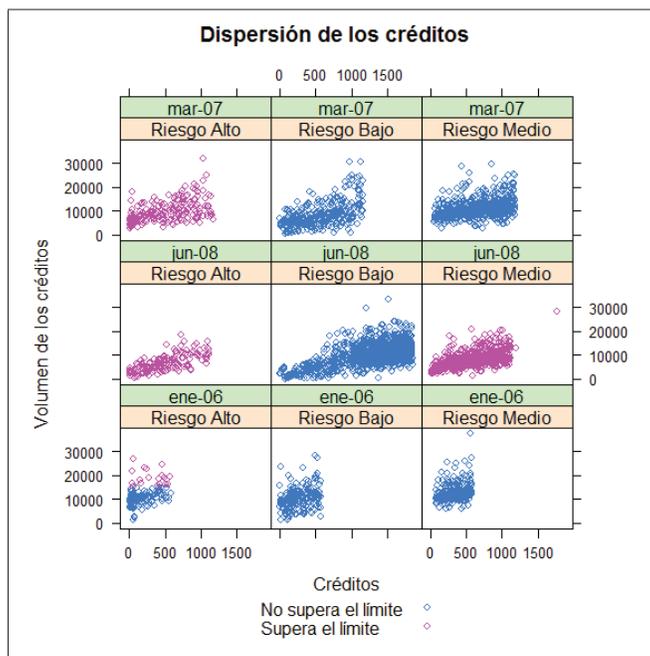


Figura 6.7: Identificación de los créditos que pertenecen a los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo que superan el cupo máximo admisible por concentración crediticia.

6.6.2. Escenario óptimo

En la anterior sección se observó que la asignación de capital y provisión en cada segmento crediticio a partir de la participación que tienen con respecto a la cartera total es inadecuada, dando lugar a que la institución asigne demasiados recursos para el segmento de *Riesgo Bajo* y poco en los otros segmentos. Para contrarrestar el problema anterior, el administrador debe elaborar una *política óptima* donde se asigne el mínimo capital y provisión que necesita cada segmento crediticio para cubrir el nivel de riesgo asumidos, dando lugar a que los recursos disponibles por la institución financiera sean asignados optimamente.

Para elaborar la *política óptima* que necesita la institución financiera, se utiliza el modelo CyRCE, el cual relaciona la suficiencia de capital y provisión con la concentración de cada segmento crediticio (ecuación 3.38), este modelo permite optimizar el capital y la provisión que necesita el *segmento i* por medio de la minimización del límite de la concentración,

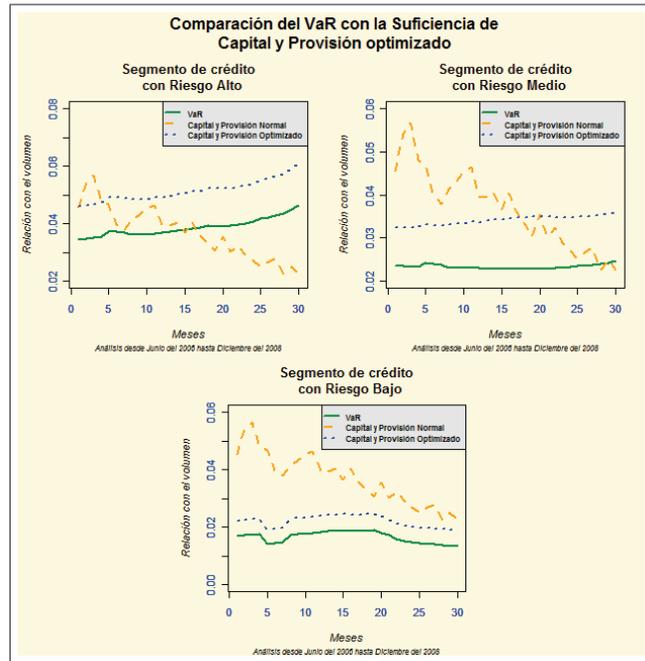


Figura 6.8: Asignación óptima del capital económico y provisiones en cada segmento crediticio capaz de cubrir el Valor en Riesgo al 99% de confianza desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

para lo cual se tiene que resolver el siguiente problema de programación no lineal:

$$\min_{\psi_i} \left\{ \left(H(F_i) - \left(\frac{\psi_i - p_i}{z_\alpha \phi \sigma_i} \right)^2 + \frac{1}{(\sigma_i V_i)^2} \sum_{\{j|j \neq i\}} F_i^T C_{ij} F_j \right)^2 \right\} \quad (6.9)$$

sujeto a la siguiente restricción:

$$0 \leq \psi_i \leq V_i \quad (6.10)$$

La ecuación (6.10) representa los límites que puede tener la suficiencia de capital y provisión; así, la suficiencia de capital y provisión no puede tener valores negativos ya que no tienen sentido financiero.

El ejercicio de programación no lineal se realiza para los meses comprendidos entre Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008, dando como resultado que la nueva composición del capital y provisión de la institución cubra durante todos los meses el nivel de concentración que tienen los segmentos crediticios (Figura 6.9), garantizando que la institución soporte el nivel de concentración asumido en cada segmento, lo que limita la

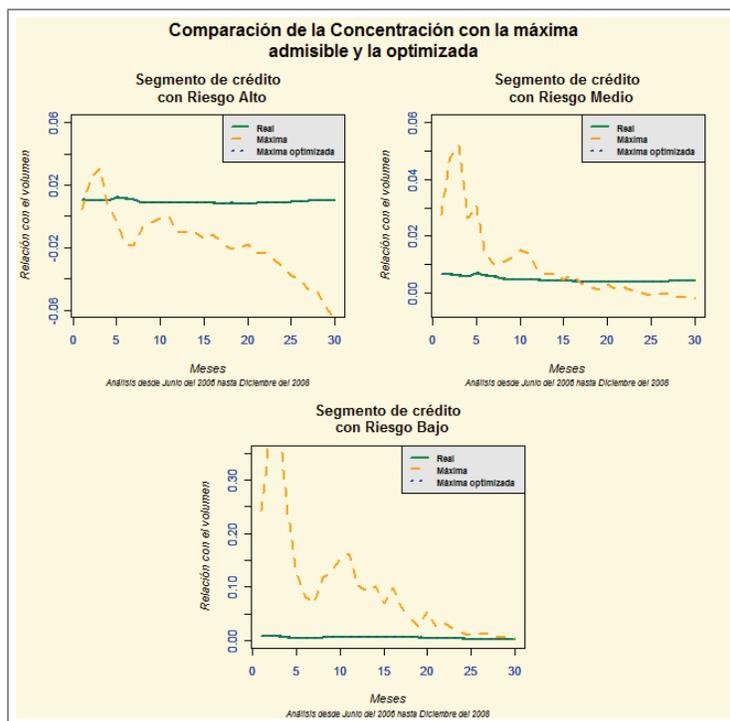


Figura 6.9: Comparación de la concentración real en cada segmento de crédito con la máxima admisible obtenida a partir del capital y provisión óptimo desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

posible pérdida que pueda tener la institución financiera. Al comparar el Capital y Provisión del *escenario base* con el *optimizado* (Figura 6.8) se observa claramente en éste último escenario, la nueva asignación de capital y provisión permite cubrir el VaR al 99 % de confianza; más aún, logra que el capital y la provisión se ajusten a la realidad de cada segmento; por ejemplo, para el segmento de *Riesgo Alto* se observa como éste aumenta a medida que el nivel de riesgo aumenta, ocurriendo lo contrario para el segmento de *Riesgo Bajo*.

Finalmente, a partir de la nueva asignación de capital y provisión en cada segmento crediticio, se puede determinar los límites del monto de los créditos donde se aprecia que el modelo CyRCE otorga créditos en todos los segmentos (monto de los créditos mayor a cero); y, permite identificar los créditos que tienen mayor riesgo por concentración; por ejemplo, en Junio del 2008 el modelo limita el monto de los créditos en el segmento de *Riesgo Alto*.

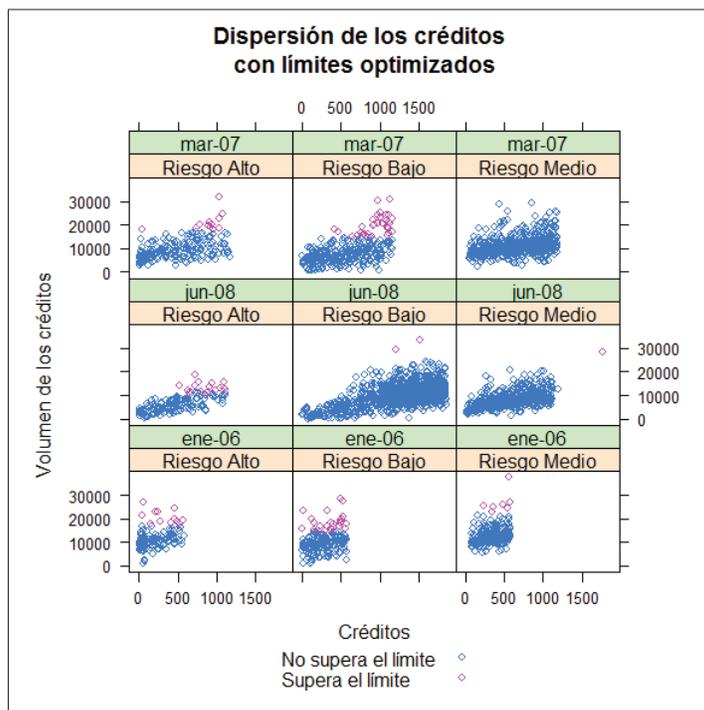


Figura 6.10: Identificación de los créditos que pertenecen a los segmentos crediticios de Alto, Medio y Bajo riesgo que superan el cupo máximo admisible obtenido a partir del capital provisión óptimo.

En la Figura 6.11 se observa la evolución de los cupos para los montos de los créditos en cada segmento, donde aparentemente el modelo asigna límites de manera inadecuada, ya que otorga un mayor cupo a los créditos de *Riesgo Medio* que los de *Riesgo Bajo*; sin embargo, este cupo va directamente relacionado con el volumen asignado en cada segmento crediticio y con el límite determinado por el modelo CyRCE; así, históricamente se observa que la participación del volumen del segmento de *Riesgo Bajo* (35.64 %) es menor que el de *Riesgo Medio* (49.97 %) situación que permite evidenciar que la incogruencia de los cupos de los montos es causada por la inadecuada planificación de la colocación del volumen en cada segmento de crédito; lo anterior pone al descubierto que la institución financiera no dispone de herramientas para realizar una planificación estratégica según el nivel de riesgo asumido.

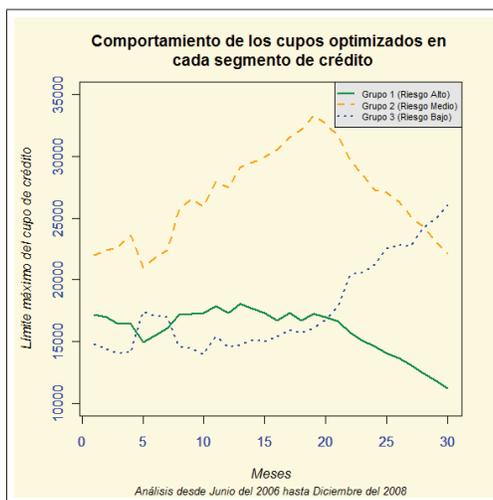


Figura 6.11: Comportamiento de los cupos de los créditos en los segmentos de Alto, Medio y Bajo riesgo a partir de la nueva asignación del capital y provisión desde Junio del 2006 hasta Diciembre del 2008.

6.7. Optimización del portafolio de créditos

En la anterior sección se presentó las múltiples aplicaciones que tiene el modelo CyRCE para administrar una cartera de créditos, donde las principales utilidades del modelo son la asignación óptima del capital y provisión e imponer límites a los montos de créditos a partir del nivel de concentración de la cartera de crédito. Sin embargo, este modelo no permite apoyar a uno de los principales objetivos que tiene el administrador de riesgo que es el diseño de un portafolio crediticio que le permita maximizar la rentabilidad esperada del portafolio con el mínimo riesgo. En este sentido, el administrador debe conocer a priori el espacio *riesgo-rentabilidad* que tiene la cartera de créditos para que pueda asignar de manera adecuada los recursos de la institución financiera en las diferentes líneas del negocio.¹² En la teoría moderna de portafolios, el espacio *riesgo-rentabilidad* es construida a partir de la frontera eficiente, la que permite al inversionista elegir una cartera con alta rentabilidad y bajo riesgo (*cartera óptima*).

Sin embargo, para construir la frontera eficiente de un portafolio crediticio no se puede

¹²Cabe mencionar que los estudios realizados sobre el diseño de un portafolio se fundamenta en los modelos tradicionales de Markowitz (1959), Altman y Saunders (1998) donde explotan las virtudes de la teoría moderna de portafolios.

tribución de pérdida del portafolio crediticio, para lo cual se utilizan los cópulas t de student en los modelos de créditos, ya que permite construir indicadores consistentes de pérdida extrema. Para el caso de la cartera automotriz, dado que no se conoce la rentabilidad por crédito, se utiliza a la tasa de interés como una aproximación a esta variable, de tal manera que la frontera eficiente permite identificar portafolios que le permita a la institución tener una alta tasa de interés con el mínimo riesgo; indicando a la institución la manera de asignar los recursos en las diferentes líneas del negocio para tener la tasa de interés esperada. A su vez, la frontera eficiente permite identificar el nivel de capital y provisión que necesita la institución para cubrir el nivel de riesgo asumido.

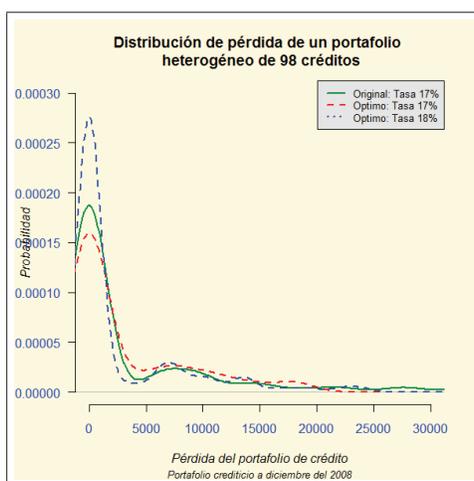


Figura 6.14: Comparación de la distribución de pérdida de un portafolio crediticio con diferentes tasas de interés objetivo.

Para construir la frontera eficiente se va a utilizar un subportafolio de la cartera automotriz donde se consideran créditos concedidos en Diciembre del 2008 y donde el modelo crediticio es el de mixtura cuya distribución multivariada sigue una cópula t de student con 27.46 grados de libertad¹⁴.

En la Figura 6.12 se observa la frontera eficiente de la subcartera automotriz, de donde se puede notar que la rentabilidad de la cartera analizada es del 17%¹⁵ y con un nivel de confianza del 99% su pérdida máxima es de 50000 usd. De lo anterior, se puede apreciar

¹⁴En la subsección 6.3 se presenta los parámetros de los modelos de créditos para la cartera automotriz.

¹⁵Corresponde al punto de color rojo en la frontera eficiente.

que la frontera eficiente constituye una herramienta adecuada para la administración de un portafolio desde la perspectiva *riesgo-rentabilidad*, debido a que permite evaluar portafolios con diferentes niveles de riesgo por medio de la generación de indicadores de riesgo extremo; tal como se observa en la Figura 6.13 donde se presenta la evolución de dos indicadores de riesgo, el primero corresponde al Déficit Esperado y corresponde a un indicador de riesgo extremo y el segundo es la Pérdida Esperada. De estos indicadores se puede observar como el indicador de riesgo extremo es una adecuada medida de riesgo ya que éste varía a medida que cambia la rentabilidad esperada del portafolio, situación que no se evidencia en la pérdida esperada.

Además, hay que notar como los portafolios cuyos rendimientos se encuentra entre 16.93 % y el 18 % presentan los mínimos valores de pérdida extrema (déficit esperado), identificando a éstos como portafolios de más bajo riesgo; así, la institución puede reestructurar la asignación de recursos en el subportafolio automotriz para obtener una rentabilidad del 18 % sin la necesidad de aumentar el nivel de riesgo.

Índices	Portafolio Inicial	Portafolio Óptimo 1	Portafolio Óptimo 2
Déficit esperado al 90 %	14264.62	13203.93	13274.93
Déficit esperado al 95 %	22749.13	17886.19	19338.49
Déficit esperado al 99 %	42690.74	36286.63	49556.86
Pérdida esperada	4336.15	3968.98	4068.74
Tasa	17 %	17 %	18 %

Cuadro 6.8: Indicadores de riesgo para un subportafolio automotriz con diferentes tasas de interés objetivo.

Para transparentar la potencia que tiene la frontera eficiente en la administración del subportafolio automotriz, se compara la distribución de pérdida del portafolio original con dos portafolios de la frontera eficiente, donde uno de ellos tiene el mismo rendimiento del portafolio original (17 %) y el otro presenta una rentabilidad del 18 % (Figura 6.14); donde se observa que a pesar que el portafolio original presenta el mismo valor en riesgo condicional que el portafolio óptimo de la frontera eficiente, éste último presenta un menor nivel de riesgo debido a que la cola superior de la distribución de pérdida es más liviana; o de manera equivalente, la agudeza de ésta distribución es menor que la generada por la distribución del portafolio original.

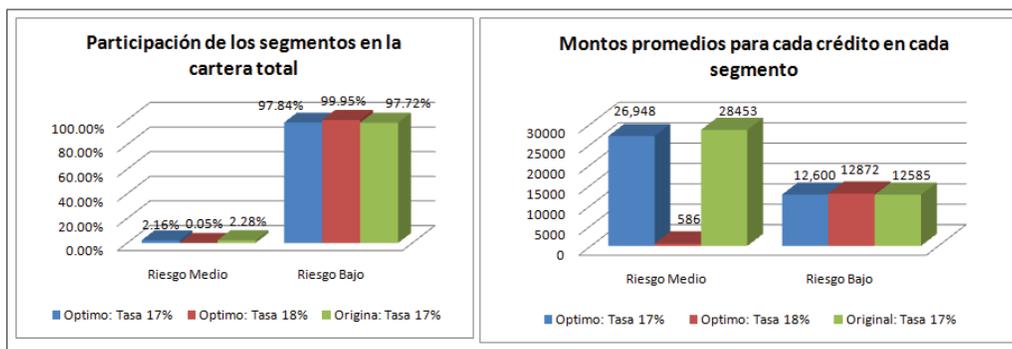


Figura 6.15: Reestructuración de la participación de los segmentos crediticios y de los montos de cada crédito en un subportafolio automotriz a partir de la frontera eficiente.

Por otro lado, cuando se compara la distribución de pérdida del portafolio original con el del portafolio óptimo con rendimiento del 18 % se observa como éste último presenta un mayor nivel de riesgo ya que éste presenta una cola más pesada; o de manera equivalente se aprecia como la agudeza de esta distribución es mayor que la obtenida por el portafolio original.

De lo anterior se observa como la agudeza de la distribución de pérdida puede ser considerado como otro indicador de riesgo ya que un portafolio de riesgo alto tiene una mayor agudeza que otro de riesgo bajo. Una característica importante sobre portafolios crediticios es que a medida que el riesgo aumenta, la pérdida esperada tiende a disminuir, tal como se observa en el Cuadro 6.8 donde el portafolio con el más alto rendimiento (18 %) tiene la más pequeña pérdida esperada (4068 usd.).

Del anterior análisis se puede decir que la institución financiera puede aumentar el rendimiento del portafolio hasta el 18 % sin la necesidad de aumentar el nivel de riesgo; para lo cual, se tiene que reestructurar la participación de los segmentos crediticios y los montos de cada crédito (Figura 6.15) de donde se puede apreciar como el modelo aumenta la participación en el segmento de *Riesgo Bajo* de 97.72 % al 99.95 % y disminuye en el segmento de *Riesgo Medio* de 2.28 % a 0.05 %; además, el modelo sugiere aumentar el monto a los créditos de *Riesgo Bajo* de 12585 a 12872 usd. y disminuir los montos a los créditos de *Riesgo Medio* de 28453 a 586 usd. Hay que notar que la anterior política está acorde con la intuición financiera donde se conoce que para controlar el riesgo se tiene que

limitar los montos a los créditos de más alto riesgo y aumentar a los de más bajo riesgo; situación que se la obtiene a partir de optimizar las pérdidas de un portafolio crediticio por medio de la aplicación de la frontera eficiente en la administración del portafolio crediticio.

Capítulo 7

Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Conclusiones

- Para determinar la distribución de pérdida de un portafolio crediticio, es necesario conocer la distribución multivariada de los incumplimientos de los créditos del portafolio, donde los modelos $\text{CreditMetrics}^{TM}$, CreditRisk^+ , KMV , $\text{Credit Portfolio View}$ y CyRCE suponen que la distribución de los incumplimientos del portafolio de créditos se comporta como una normal multivariada, cuyos parámetros son calibrados a través de un modelo factorial.
- El supuesto de que los incumplimientos se distribuyen como una normal multivariada no permite capturar las pérdidas extremas que puede tener un portafolio crediticio, situación que ha sido la principal causa para la quiebra de instituciones financieras.
- Desde un punto de vista matemático, el KMV y el modelo $\text{CreditMetrics}^{TM}$ son lo mismo siempre y cuando restrinjamos al $\text{CreditMetrics}^{TM}$ a un portafolio de pérdidas para un período.
- Los modelos para portafolios crediticios pueden ser generalizados en dos grandes grupos; el primero corresponde a los modelos de variables latentes, donde se encuentran KMV y $\text{CreditMetrics}^{TM}$ y el segundo a los modelos de mixtura, donde se encuentra CreditRisk^+ .

- Los modelos de variables latentes pueden ser escritos como modelos de mixtura, siempre y cuando el retorno de los activos pueda expresarse a partir de un modelo factorial.
- A partir del modelo CyRCE se evidencia que el factor esencial para determinar la distribución de pérdida de un portafolio de crédito es la concentración de la cartera, misma que se encuentra representada por el índice de Herfindahl Hirschman.
- A pesar de que el modelo CyRCE es un modelo no muy conocido como los paradigmas CreditMetricsTM, RiskMetrics⁺, KMV, permite estimar pérdidas que son similares a las obtenidas con los modelos conocidos, lo que permite concluir que el modelo CyRCE es un modelo aceptable para estimar pérdidas.
- El modelo CyRCE permite conocer el capital económico y las provisiones que necesitan una institución financiera para cubrir el riesgo asumido en el portafolio de créditos.
- El modelo CyRCE puede medir la concentración de créditos en un portafolio lo que permite tener una administración acertada del portafolio de créditos y por tanto del riesgo de crédito, ya que si se emplea como una herramienta a priori, permite conocer con anterioridad cuales son los límites en los cupos de los créditos que se deben otorgar.
- En el caso donde se supone que los incumplimientos se distribuyen como una normal multivariada, la probabilidad de incumplimiento de cada crédito y la matriz de varianza covarianza entre incumplimientos corresponden a los parámetros necesarios y suficientes de un modelo para portafolios crediticios.
- La información necesaria y suficiente para estimar los parámetros de un modelo para portafolios crediticios es la evolución histórica de la tasa de incumplimiento para sub grupos crediticios del portafolio original.
- Para cuantificar de manera adecuada la pérdida extrema de un portafolio crediticio, es necesario determinar la mejor distribución multivariada que se ajuste al compor-

tamiento de los créditos incumplidos para lo cual se emplea las funciones cópula, y en el caso de portafolios crediticios se emplea la cópula multivariada t student.

- A partir del espacio *riesgo-rentabilidad* se puede optimizar los recursos disponibles de una institución financiera tales como el capital económico y las provisiones, a través de la frontera eficiente, para lo cual se tiene que utilizar como medida riesgo al Valor en Riesgo Condicional, ya que éste permite *maximizar el retorno para un nivel dado de riesgo y minimizar el riesgo para un nivel dado de retorno* de manera consistente, situación que no se logra cuando se utiliza el Valor en Riesgo.
- A partir del espacio *riesgo-concentración* es posible identificar el capital económico y provisión óptimos que necesita la institución financiera para cubrir el nivel de concentración asumido por el portafolio total como por los diferentes segmentos crediticios, para lo cual se emplea el modelo CyRCE donde se relaciona el capital económico y provisión con la concentración de la cartera de créditos.
- A partir de la información histórica de la tasa de incumplimiento del portafolio automotriz fue posible calibrar de manera adecuada los modelos CreditMetricsTM, CreditRisk⁺, Credit Portfolio View, CyRCE y cópula t, dando como resultado que las distribuciones de pérdida de los tres primeros modelos son similares, lo que permite confirmar la equivalencia de los modelos de variables latentes con los de mixtura.
- A través de la prueba de desempeño (*BackTesting*) efectuadas a los modelos empleados en este trabajo, se determinó que el mejor modelo que cuantifica las pérdidas extremas del portafolio corresponde al modelo cópula t student, lo que confirma que el uso de distribuciones normales multivariadas no es adecuado para cuantificar las pérdidas de un portafolio crediticio.
- El análisis de concentración de la cartera crediticia automotriz permite construir indicadores adelantados de la calidad crediticia, ya que ayuda a visualizar el contínuo deterioro de la cartera por causa de la concentración.

- Al aplicar el modelo CyRCE a la cartera de créditos se observa como el modelo asigna el límite de los montos a partir de la capacidad que tiene la institución financiera (el capital y provisión) para soportar la concentración existente en cada segmento de crédito.
- Al optimizar el capital y provisión a partir del modelo CyRCE se observa que ésta nueva asignación de recursos cubre adecuadamente el nivel de riesgo asumido por la institución (VaR al 99%), de lo que se evidencia que este modelo logra asignar de manera eficiente los recursos de la institución en los diferentes segmentos crediticios.
- Al optimizar el capital económico y provisión a partir del espacio *riesgo-rentabilidad* se aprecia que es posible gestionar la cartera crediticia para obtener la mayor rentabilidad con el menor riesgo posible, donde el modelo sugiere que para aumentar la rentabilidad y mantener el mismo nivel de riesgo, se tiene que disminuir la participación de la cartera en el segmento de Riesgo Medio y aumentar en el segmento de Riesgo Bajo, para lo cual se tiene reestructurar los cupos de los créditos en cada segmento crediticio.

7.2. Recomendaciones

- Sería adecuado que las instituciones financieras del país empiecen a utilizar modelos como los expuestos en este trabajo con el objetivo de disponer una batería de herramientas cuyos resultados sirvan para administrar adecuadamente el riesgo de crédito y especialmente conozcan el nivel de riesgo que están asumiendo en el negocio y en función de ello puedan ir analizando escenarios en donde se permita medir el impacto del riesgo asumido por la entidad en el rendimiento, capital y provisiones
- La segmentación del portafolio de créditos que necesita el modelo CyRCE debe ser analizado con un buen criterio ya que puede determinarse segmentos en donde no se observe riesgo y por tanto en los resultados del modelo no se identifique correctamente el riesgo de crédito existente. Con ello, otros segmentos riesgosos podrían pasar por desapercibido produciendo una medición inadecuada del riesgo

del portafolio de créditos.

- Una de las herramientas crediticias que complementa a los modelos desarrollados en la presente tesis corresponde a los modelos dinámicos crediticios, por lo que se sugiere para las próximas investigaciones se trabaje sobre esta herramienta ya que permite identificar el período en el cuál el cliente puede incumplir; lo que permitiría al administrador asignar el plazo de los créditos según el nivel de riesgo.
- Para el diseño, construcción y calibración de los modelos de riesgo de crédito presentados en este trabajo, es adecuado utilizar el software gratuito R ya que dispone de librerías que permiten disponer de herramientas para la gestión de cartera en tiempo real.
- Para determinar las garantías de los títulos valores instrumentados por operaciones crediticias, se recomienda que éstas sean cuantificadas por lo menos a partir de la distribución de pérdidas del portafolio de créditos ya que de ser así, se obtendrían títulos más apetecibles en el mercado de valores, lo que a su vez garantiza que la institución financiera obtenga la rentabilidad esperada del proceso de titularización.

Bibliografía

- [1] Alexander Gordon, Baptista Alexandre (2003). *CVaR as a Measure of Risk: Implication for Portfolio Selection*.
- [2] Andersson Fredrik, Uryasev Stanislav (1999). *Credit risk optimization with conditional value at risk criterion*. Center for Applied Optimization, University of Florida.
- [3] Artzner Philippe, Delbaen Freddy, Eber Marc Jean, Heath David (1998). *Coherent Measures of Risk*.
- [4] Avila Embríz Fernando, Márquez Diez-Canedo Javier, Romero Aranda Alberto (2002). *"Implantación del Modelo CyRCE: Simplificaciones por estructura y estimación de parámetros."*. Banco de México
- [5] Banco de México (2005). *Definiciones Básicas de riesgos*
- [6] Becerra Oscar, Melo Luis (2008). *Medidas de riesgo financiero usando Cópulas: teoría y aplicaciones*. Banco de la República de Colombia
- [7] Bluhm, Overbeck, Wagner (2003). *An introduction to Credit Risk Modelling*. Chapman & Hall
- [8] Cherubini Umberto, Luciano Elisa, Vecchiato Walter (2004). *Copula methods in finance*. Wiley
- [9] Cintas del Río Rosario (2007). *Teoría de Cópulas y control de riesgo financiero*. Universidad Complutense de Madrid.

-
- [10] Crouhy Michel, Galai Dan, Mark Robert (2000). *A comparative analysis of current credit risk models*. Journal of Banking & finance
- [11] Di Clemente Annalisa, Romano Claudio (2004). *Measuring and Optimizing portfolio credit risk: A copula-based Approach*. Centro Interdipartimentale sul Diritto e l'Economia dei Mercati.
- [12] Elizondo Alán.(2004). *"Medición integral de riesgo de crédito"* Limusa.
- [13] Embrechts, McNeil, Straumann (1999) *Correlation: Pitfalls and Alternatives*. Swiss Federal Institute of Technology Zurich
- [14] Embrechts, McNeil, Frey, (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton
- [15] Embrechts, McNeil, Lindskog (2001). *Modelling Dependence with Copulas and Application to Risk Management*. Swiss Federal Institute of Technology Zurich
- [16] Embrechts, McNeil, Frey (2005). *Quantitative Risk Management*. Princeton.
- [17] Fernández Daniel, Soares Netto Rosario (2008). *Valor en Riesgo de las carteras de préstamos bancarios*. Universidad de la República.
- [18] Foro Conjunto de: Comité de Basilea de Supervisión Bancaria, Organización Internacional de Comisiones de Valores, Asociación Internacional de Supervisores de Seguros (1999). *"Principios sobre Concentraciones de Riesgo"*. Basilea.
- [19] Frey, McNeil (2002). *VaR and expected shortfall in portfolio of dependent credit risks: Conceptual and practical insights*. Swiss Federal Institute of Technology Zurich
- [20] García Céspedes Juan Carlos (2001). *Correlaciones y Cópulas en finanzas*. RiskLab.
- [21] Galicia Romero Martha (2003). *Riesgo de crédito*. Instituto de riesgo financiero
- [22] Gonzáles Andrés, González Silvia (2000). *Notas sobre R: Un entorno de programación para Análisis de Datos y Gráficos*. Instituto de Estadística de Andalucía.
- [23] Gordy Michel (2000). *A comparative anatomy of credit risk models*. Journal of Banking and Finance

-
- [24] Gutiérrez , Elizondo Alan (2004). *Riesgo de crédito: El enfoque actuarial*.
- [25] Hull John (2006). *Risk Management and Financial Institutions*. Prentice Hall
- [26] Johnson T.C and McNeil A. J. *Industrial Implementation of Merton's Model*
- [27] Koenig David (2004). *The Professional Risk Manager's Handbook, Volumen III, Risk Management Practice*. The Official Handbook for the PRM Certification.
- [28] Lamothe Prosper (1993). *Opciones Financieras un enfoque fundamental*. McGrawHill.
- [29] Malevergne, Sornette (2006). *Extreme Financial Risks*. Springer.
- [30] Márquez Canedo Javier Diez (2006). *Una nueva visión del riesgo de crédito*. Limusa.
- [31] Márquez Diez Canedo Javier, López Gallo Fabrizio. *Un modelo de análisis el Riesgo de crédito y su aplicación para realizar una prueba de estrés del sistema financiero mexicano*. Banco de España.
- [32] Márquez Diez Canedo Javier (2002). *Suficiencia de Capital y Riesgo de Crédito en Carteras de Préstamos Bancarios*. Banco de México.
- [33] Márquez Diez Canedo Javier (2002). *El impacto de la correlación entre impagos en la concentración de riesgo en portafolios de préstamos bancarios*. Banco de México.
- [34] Masala Giovanni, Menzietti Massimiliano, Micossi Marco (2004). *Optimization of conditional VaR in an Actuarial Modelo for Credit Risk assuming a Student Copula Dependence Structure*.
- [35] McCullach Charles E., Searle, Shayle R (2001). *Generalized, Linear and Mixed Models*. Willey Intercience publication.
- [36] Nyfeler Mark A. (2000). *Modeling Dependence in Credit Risk Management*. Swiss Federal Institute of Technology Zurich

-
- [37] Palmquist Jonas, Uryasev Stanislav, Krokmal Pavlo (1999). *Portfolio Optimization with conditional Value at Risk objective and constraints*. Center for Applied Optimization, University of Florida.
- [38] Perotti Estrella (2007). *El modelo de Merton como una medida alternativa de valoración de riesgo de default*. Escuela Superior de Economía y Administración de Empresas. Argentina.
- [39] Ricci Vito (2005). *Fitting distributions with R*
- [40] Rockfellar Tyrrell, Uryasev Stanislav (2001). *Conditional value at risk for general loss distributions*. Center for Applied Optimization, University of Florida.
- [41] Roberto de Matteis (2001). *Fitting copulas to data*. Swiss Federal Institute of Technology Zurich
- [42] Sanchez Cerón Carlos. (2001). *Valor en Riesgo y otras aproximaciones*.
- [43] Tom Astebro (2003). *Banff Credit Risk Conference 2003*. University of Toronto.
- [44] Torres Gabriel, Olarte Ana (2005). *Valor en riesgo desde un enfoque de cópulas*. Universidad EAFIT
- [45] Trivedi Pravin K, Zimmer David M. (2007). *Copula Modeling: An introduction for practitioners*. Foundations and Trends in Econometrics
- [46] Yan Jun (2007). *Enjoy the Joy of Copulas: With a Package copula*. University of Connecticut
- [47] Xin Chen (2006). *Dependence and the copula approach*. Simon Fraser University.
- [48] Zapata Galindo (2003). *Modelando el riesgo de crédito en Colombia: Matrices de transición para la cartera comercial*. Asobancaria

Apéndice A

Modelo Factorial

El análisis factorial es un modelo matemático el cual intenta explicar la correlación entre un gran conjunto de variables a partir de un número más pequeño de factores subyacentes. La principal suposición del análisis factorial es que no es posible observar directamente éstos factores subyacentes. Para lo cual se considera un vector de variables aleatorias $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^t$ cuyo vector aleatorio es μ y la matriz de varianza covarianza es Σ ; de donde, se dice que el modelo k factorial representa de manera adecuada a Z siempre que éste pueda ser escrito de la siguiente manera:

$$Z = AR + \varepsilon + \mu \quad (\text{A.1})$$

donde A es una matriz determinista de dimensión $n \times k$, $R = (R_1, \dots, R_k)^t$ y $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)^t$ son vectores aleatorios y los R_j se conoce como factores comunes y ε_i como factores específicos. Adicionalmente, se considera que:

$$E(R_j) = 0, \text{ para todo } j \quad (\text{A.2})$$

$$E(\varepsilon_i) = 0, \text{ para todo } i \quad (\text{A.3})$$

$$\text{Cov}(R_i, R_j) = \delta_{ij}, \text{ para todo } i, j \quad (\text{A.4})$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = \psi_i^2 \delta_{ij} \quad (\text{A.5})$$

$$\text{Cov}(\varepsilon_i, R_j) = 0, \text{ para todo } i, j \quad (\text{A.6})$$

donde la covarianza de ε es Ψ y δ_{ij} representa la función Kronecker. Por definición todos los factores son incorrelacionados y los factores comunes tienen varianza de uno.

Teorema 35 *Un modelo k factorial para $Z = (Z_1, \dots, Z_n)^t$, donde $k \leq n$ existe si y solamente si existe un único A y Ψ tal que*

$$\Sigma = AA^t + \Psi \quad (\text{A.7})$$

donde A corresponde una matriz de dimensión $n \times k$, cuyo rango es igual a k y Ψ es una matriz diagonal cuyos valores son $\psi_{i \in \{1, \dots, n\}}$

Apéndice B

Funciones Generadoras de Probabilidad

Para las medidas de riesgo de crédito que se basan en eventos de impago, son especialmente importantes las variables aleatorias que toman valores en el dominio de los números enteros "no negativos", es decir: $x \in Z^+ = \{0, 1, 2, \dots\}$. Su análisis se facilita mediante el estudio de las *funciones generadoras de probabilidad*.

Definición 36 Sea $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$ una sucesión de números reales, entonces si $A(s) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k s^k$ converge en un intervalo abierto $(-\varepsilon, \varepsilon)$, $A(s)$ es una función generadora para la sucesión $\{a_k\}_{k=0}^{\infty}$.

La variable "S" no tiene representación alguna y carece de significado lo importante es el coeficiente s^k donde $k = 1, 2, \dots$

Ejemplo 37 Para determinar la función generadora de una variable aleatoria que siguen una distribución uniforme es se tiene que considerar que

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{n} & \text{si } k = 1, \dots, n \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

entonces

$$A(s) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{n} s^k = \frac{s}{n} \left(\frac{1 - s^n}{1 - s} \right) \quad (\text{B.2})$$

Apéndice C

Distribuciones elípticas y esféricas

Para el desarrollo de los modelos crediticios CreditMetrics y KMV se supone que el logaritmo del retorno de los activos siguen un *ley normal multivariada* $N(0, \Sigma)$ o de manera equivalente se puede suponer que son *distribuidos elípticamente*, ésto tiene sentido debido a que la *distribución normal estándar* es miembro de esta familia. Como caso especial, se puede considerar que el indicador que permite cuantificar toda la dependencia existente en la distribución normal estándar es la correlación, situación que no se mantiene en la *distribuciones esféricas* ya que se tiene que complementar con información adicional. Un mejor detalle de las *distribuciones esféricas* se presenta a continuación.

Las *distribuciones elípticas* se fundamentan naturalmente como una extensión de las *distribuciones normales* $N(0, \Sigma)$, así como también como una extensión de las llamadas *distribuciones esféricas*. Para observar como estas tres distribuciones se relacionan, primero se empieza con las *distribuciones esféricas*, las que proveen de una familia de distribuciones simétricas para las variables aleatorias no correlacionadas con media cero.

Definición 38 Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ se dice que sigue una distribución esférica si para todos los planos ortogonales $\Gamma \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ($\Gamma \Gamma^t = 1_{n \times n}$) ocurre que

$$\Gamma X \stackrel{d}{=} X \tag{C.1}$$

donde $1_{n \times n}$ representa un matriz identidad de dimensión $n \times n$.

Teorema 39 Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ que sigue una distribución esférica se dice que existe su función característica es $\psi(s)$

$$X \sim \psi(s) \tag{C.2}$$

Definición 40 siempre y cuando exista una función $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\psi(s) = \phi(s^t s)$.

Corolario 41 Si X tiene una densidad $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ y éste puede ser expresado de manera equivalente por

$$f(x) = g(x^t x) \tag{C.3}$$

para alguna función $\phi : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ entonces se dice X está bien caracterizada por una distribución esférica cuyas densidades son esferas constantes.

Un ejemplo de una distribución esférica n dimensional es $N(0, \mathbf{1}_{n \times n})$.

Definición 42 *Un vector aleatorio $X = (X_1, \dots, X_n)^t$ se dice que tiene una distribución elíptica con parámetros μ, Σ si*

$$X \stackrel{d}{=} AY + \mu \tag{C.4}$$

donde Y sigue una distribución esférica, A es una matriz de dimensiones $n \times k$ y $AA^t = \Sigma$ con rango igual a k .

Apéndice D

Cóputas más comunes

Cóputa	Fórmula	Parámetros
Normal	$\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \exp\left(-\frac{x^2-2\theta xy+y^2}{2(1-\theta^2)}\right) dx dy$	$\theta \in [-1, 1]$
	$\phi^{-1}(\cdot)$: Inversa de la función de distribución normal estándar	
t	$\int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_v^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left(1 + \frac{x^2-2\theta xy+y^2}{v(1-\theta^2)}\right)^{-(v+2)/2} dx dy$	$\theta \in [-1, 1]$ v : g.l
	$t_v^{-1}(\cdot)$: Inversa de la función de distribución t con v g.l	
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in (0, \infty)$
Clayton generalizada	$\left\{ \left[(u_1^{-\theta} - 1)^\delta + (u_2^{-\theta} - 1)^\delta \right]^{1/\delta} + 1 \right\}^{-\frac{1}{\theta}}$	$\theta \in (0, \infty)$ $\delta \in [1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \log \{ [\eta - (1 - \exp(-\theta u_1))(1 - \exp(-\theta u_2))] / \eta \}$	$\theta \in (0, \infty)$ $\eta = 1 - e^{-\theta}$
Galambos	$u_1 u_2 \exp \left\{ \left[(-\log(u_1))^{-\theta} + (-\log(u_2))^{-\theta} \right]^{-1/\theta} \right\}$	$\theta \in [0, \infty)$
Gumbel	$\exp \left\{ - \left[(-\log(u_1))^\theta + (-\log(u_2))^\theta \right]^{1/\theta} \right\}$	$\theta \in [1, \infty)$
Gumbel II	$u_1 u_2 \exp \left[\frac{\theta \log(u_1) \log(u_2)}{-(\log(u_1) + \log(u_2))} \right]$	$\theta \in [0, 1]$
Husler y Riess	$\exp \left\{ \log(u_1) \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{2} \log \left(\frac{\log(u_1)}{\log(u_2)} \right) \right] + \log(u_2) \Phi \left[\frac{1}{\theta} + \frac{\theta}{2} \log \left(\frac{\log(u_2)}{\log(u_1)} \right) \right] \right\}$	$\theta \in [0, \infty)$
Joe Marshall Olkin	$1 - \left[(1 - u_1)^\theta + (1 - u_2)^\theta - (1 - u_1)^\theta (1 - u_2)^\theta \right]^{1/\theta}$	$\theta \in [1, \infty)$ $\theta_1 \in [0, 1]$ $\theta_2 \in [0, 1]$
Morgenstern	$u_1 u_2 [1 + \theta (1 - u_1) (1 - u_2)]$	$\theta \in [-1, 1]$

Apéndice E

Medidas Coherentes de Riesgo

Los modelos de Valor en Riesgo (VaR) en los últimos años han demostrado ser valiosos instrumentos de cara a la medición y gestión del riesgo. Sin embargo, su excesiva dependencia de hechos históricos hace que en muchas ocasiones puede fallar cuando son más necesarios, esto es, en movimientos extremos que podría provocar pérdidas muy importantes. Se puede pensar entonces en el VaR como un método necesario, pero no suficiente, debido a que presenta una serie de limitaciones que deben ser corregidas para implantar un sistema eficiente de control de riesgo en una institución financiera; así, el VaR como una medida de riesgo tiene problemas de incoherencia desde el punto de vista matemático situación que se expone a continuación.

Sea $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espacio de probabilidad tal que Ω es el espacio de resultados o estados de la naturaleza, \mathcal{F} es la σ -álgebra de eventos y \mathbb{P} es la medida de probabilidad. Para una variable aleatoria X de valor real, medible sobre este espacio de probabilidad, la distribución de probabilidad de X está dada por $F_X(x) = P(X \leq x)$. Se supone que la variable aleatoria X representa una pérdida financiera tal que $\omega \in \Omega$ es el número real $X(\omega)$ es la realización de una pérdida o un beneficio con $X(\omega) \geq 0$ para una pérdida y $X(\omega) \leq 0$ para un beneficio. Al conjunto de pérdidas financieras lo denotamos por χ .

Definición 43 (Medidas coherentes de riesgo) *Al mapeo del conjunto de pérdidas en el conjunto de los reales no negativos extendidos $\gamma : \chi \rightarrow [0, \infty]$ se denomina como medidas coherente de riesgo si se mantiene las siguientes propiedades:*

i) **Subaditividad:** Para todo X, Y elemento de χ se tiene que:

$$\gamma(X + Y) \leq \gamma(X) + \gamma(Y) \quad (\text{E.1})$$

ii) **Monotonicidad:** Para todo X, Y elemento de χ con $X \leq Y$ se tiene que $\gamma(X) \leq \gamma(Y)$

iii) **Homogeneidad positiva:** Para todo $\lambda > 0$ y para todo X elemento de χ se tiene:

$$\gamma(\lambda X) \leq \lambda \gamma(X) \quad (\text{E.2})$$

iv) **Invarianza traslacional:** Para todo x elemento de los reales y para todo X elemento de χ se tiene que:

$$\gamma(X + x) = \gamma(X) + x \quad (\text{E.3})$$

Nótese que la definición de medidas coherentes de riesgo antes mencionada difiere ligeramente de la propuesta por Artzner [3] pero es exactamente igual a la propuesta por Frey y McNeil [19] debido a que se considera a X como la pérdida de un portafolio y $\gamma(X)$ como el capital requerido por parte de la institución para cubrir las pérdida de X y que se encuentran acorde con la política crediticia de la institución financiera.

Para dar un significado financiero a la definición (43), a continuación se describe la parte intuitiva de las propiedades de esta definición:

Subaditividad: *Refleja el efecto de la diversificación en una cartera en el riesgo, ya que el riesgo de la unión de dos portafolios es menor que la suma del riesgo de cada portafolio.*

Monotonicidad: *Esto significa que a mayor rentabilidad debe corresponde mayor riesgo; así, cuando se considera que las pérdidas de dos portafolios A y B son X_A y X_B respectivamente y se supone que las pérdidas del portafolio A es menor que la pérdida del portafolio B luego el requerimiento de capital del portafolio A $\gamma(X_A)$ debe ser menor que el requerimiento de capital del portafolio B $\gamma(X_B)$.*

Homogeneidad: *Esto significa que si aumenta la posición en un portafolio, o en alguno de sus componentes, el riesgo debe incrementarse proporcionalmente.*

Invarianza traslacional: *Esto significa que si se invierte una cantidad adicional en el portafolio, y no se invierte prudentemente, entonces su riesgo se debe aumentar en esa cantidad proporcional; así, se considera que las pérdidas del portafolio se incrementa en x luego el capital requerido para cubrir las pérdidas del portafolio debe incrementarse en la misma proporción que aumentaron las pérdidas.*

A continuación se aplica la definición de medida coherente de riesgo a dos índices de riesgos siendo estos *el Valor en Riesgo* y el *Valor en Riesgo Condicional* de tal manera que se puede determinar cual medida es más adecuada para ser implementados en un sistema de gestión de riesgo.

E.1. Valor en Riesgo

El Valor en Riesgo (VaR) es el cuantil α para la variable de pérdida X definido para una medida de probabilidad \mathbb{P} y para algún nivel de confianza α ,

$$VaR_\alpha(X) = \inf \{x \geq 0 \mid \mathbb{P}[X \leq x] \geq \alpha\} \quad (\text{E.4})$$

y cumple las siguientes propiedades:

- *Monotonicidad*
- *Homogeneidad*
- *Invarianza traslacional*

Sin embargo, no cumple la propiedad de *subaditividad*, propiedad que es muy importante para la administración del riesgo ya que refleja la expectativa de que los riesgos usualmente se diversifican cuando se juntan, por lo tanto éste es requerimiento esencial para que cualquier medida de riesgo financiero sea considerada como una medida coherente de riesgo.

E.2. Valor en Riesgo Condicional

Es una medida complementaria al VaR que satisface todas las propiedades exigidas para ser una medida coherente de riesgo; además, es convexa y uniextremo, lo cual facilita la implementación de algoritmos de optimización y control, y se encuentra definida de la siguiente manera:

$$CVaR_\alpha = \min_k \left\{ k + \frac{1}{(1-\alpha)s} \sum_{j=1}^s (L_j(\mathbf{x}) - ML_\alpha(\mathbf{x}))^+ \right\} \quad (\text{E.5})$$

donde k corresponde a un valor inferior de pérdida que puede tener el activo financiero.

Así, el $CVaR_\alpha$ cuantifica las pérdidas que excede el VaR y actúa como una cota superior para el VaR.

Apéndice F

Índice de Herfindahl-Hirschman

Este índice que fue propuesto primero por Hirschman y luego por Herfindahl ha sido utilizado en forma creciente en los últimos años por los economistas industriales en el análisis de los modelos oligopolísticos de fijación de precios; este índice toma en cuenta todos los puntos de la curva de concentración y se calcula como la suma del cuadrado de las cuotas de mercado de las empresas en la industria, así:

$$HH = \sum_{i=1}^n \left(\frac{x_i}{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^n s_i^2$$

donde:

x_i = es la participación de la empresa i -ésima que conforma la industria, $i = 1, 2, \dots, n$

$$x = \sum_{i=1}^n x_i$$

n = número de empresas que conforman la industria

s_i = es la cuota de mercado de la i -ésima industria.

Al considerar el cuadrado de las cuotas de mercado, el índice concede más importancia a las empresas más grandes en la industria. Esto se puede verificar considerando fácilmente; por ejemplo, un mercado de cuatro empresas con unas cuotas de mercado de 0,4, 0,3, 0,2, y 0,1. Los cuadrados de las cuotas de mercado son 0,16, 0,09, 0,04 y 0,01, de modo que $HH=3$, y está claro que la empresa de mayor tamaño contribuye a esta suma en una mayor proporción.

El índice HH puede expresarse de forma ligeramente diferente con el fin de mostrar más claramente sus propiedades. Denotando el tamaño medio de la empresa como

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

y la varianza del tamaño de la empresa como

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$$

podemos definir una medida de la desigualdad de las cuotas de mercado de las empresas, independientemente de las unidades de medición como $c = \sigma/\bar{x}$ (conocido como coeficiente de variación del tamaño de a empresa). Puesto que

$$c^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{\bar{x}^2} - 1$$

reordenando términos puede verse fácilmente que

$$H = \frac{c^2 + 1}{n}$$

Por tanto, el índice HH depende tanto de la desigualdad de las cuotas de mercado (medidas a través de c^2) como del número de empresas n . Así también HH toma un valor máximo de 1 en el caso de monopolio (total concentración) y un valor mínimo de $(1/n)$ en el caso de multitud de empresas pequeñas de igual tamaño ($c^2 = 0, n \rightarrow \infty$). Por otro lado, si se considera el recíproco del índice, podemos superar parcialmente la limitación que supone desde un punto de vista intuitivo ya que el recíproco de HH es un número equivalente que corresponde a número de empresas de igual tamaño que darían lugar a ese mismo valor de HH. Así por ejemplo, un valor de HH= 0,018 para una industria determinada es aproximadamente equivalente a 56 empresas de igual tamaño trabajando en esa industria y dando lugar a ese valor de HH.

Se puede concluir entonces que la entrada al mercado de empresas de gran tamaño con relación a las ya existentes, aumentan el valor del índice HH.

Apéndice G

Información del incumplimiento empírico de un portafolio homogéneo

Año	Portafolio con calificación A		Portafolio con calificación B	
	Nro de créditos	Nro de no pago	Nro de créditos	Nro de no pago
1981	1070	0	322	2
1982	1099	2	341	15
1983	1122	1	342	10
1984	1181	2	371	12
1985	1216	0	420	18
1986	1337	2	533	30
1987	1334	0	687	19
1988	1349	0	760	30
1989	1400	2	753	34
1990	1447	2	694	56
1991	1496	3	590	65
1992	1661	0	525	30
1993	1823	0	562	13
1994	1916	1	717	15
1995	2144	1	832	29
1996	2336	0	897	16
1997	2551	2	1016	20
1998	2718	4	1334	49
1999	2790	4	1674	92
2000	2835	5	1782	104
2001	2929	6	1806	173
2002	3049	14	1726	158
2003	2998	3	1837	90
2004	3117	0	1955	37
2005	3264	1	2151	29

Cuadro G.1: Evolución histórica de los créditos otorgados y fallidos por calificación crediticia de una institución financiera ABC.

Apéndice H

Composición de un portafolio heterogéneo

Prestamo	Calificación	Severidad	Exposición	Rentabilidad
1	A	50%	100	10%
2	A	50%	100	10%
3	A	50%	100	10%
4	A	50%	100	10%
5	A	50%	100	10%
6	A	50%	100	10%
7	A	50%	100	10%
8	A	50%	100	10%
9	A	50%	100	10%
10	A	50%	100	10%
11	A	50%	100	10%
12	A	50%	100	10%
13	A	50%	100	10%
14	A	50%	100	10%
15	A	50%	100	10%
16	A	50%	100	10%
17	A	50%	100	10%
18	A	50%	100	10%
19	A	50%	100	10%
20	A	50%	100	10%
21	A	50%	100	10%
22	A	50%	100	10%
23	A	50%	100	10%
24	A	50%	100	10%
25	A	50%	100	10%
26	A	50%	100	10%
27	A	50%	100	10%
28	A	50%	100	10%
29	A	50%	100	10%
30	A	50%	100	10%

31	A	50%	100	10%
32	A	50%	100	10%
33	A	50%	100	10%
34	A	50%	100	10%
35	A	50%	100	10%
36	A	50%	100	10%
37	A	50%	100	10%
38	A	50%	100	10%
39	A	50%	100	10%
40	A	50%	100	10%
41	A	50%	100	10%
42	A	50%	100	10%
43	A	50%	100	10%
44	A	50%	100	10%
45	A	50%	100	10%
46	A	50%	100	10%
47	A	50%	100	10%
48	A	50%	100	10%
49	A	50%	100	10%
50	A	50%	100	10%
51	B	50%	100	30%
52	B	50%	100	30%
53	B	50%	100	30%
54	B	50%	100	30%
55	B	50%	100	30%
56	B	50%	100	30%
57	B	50%	100	30%
58	B	50%	100	30%
59	B	50%	100	30%
60	B	50%	100	30%
61	B	50%	100	30%
62	B	50%	100	30%
63	B	50%	100	30%
64	B	50%	100	30%
65	B	50%	100	30%
66	B	50%	100	30%
67	B	50%	100	30%
68	B	50%	100	30%
69	B	50%	100	30%
70	B	50%	100	30%
71	B	50%	100	30%
72	B	50%	100	30%
73	B	50%	100	30%
74	B	50%	100	30%
75	B	50%	100	30%
76	B	50%	100	30%
77	B	50%	100	30%
78	B	50%	100	30%

79	B	50%	100	30%
80	B	50%	100	30%
81	B	50%	100	30%
82	B	50%	100	30%
83	B	50%	100	30%
84	B	50%	100	30%
85	B	50%	100	30%
86	B	50%	100	30%
87	B	50%	100	30%
88	B	50%	100	30%
89	B	50%	100	30%
90	B	50%	100	30%
91	B	50%	100	30%
92	B	50%	100	30%
93	B	50%	100	30%
94	B	50%	100	30%
95	B	50%	100	30%
96	B	50%	100	30%
97	B	50%	100	30%
98	B	50%	100	30%
99	B	50%	100	30%
100	B	50%	100	30%

Cuadro H.1: Portafolio heterogéneo de 100 créditos con calificaciones crediticias de A y B.

Apéndice I

Métodos utilizados para calibrar un modelo de crédito

I.1. Identificación de perfiles crediticios

Uno de los pasos fundamentales para la construcción de modelos crediticios es segmentar al portafolio en grupos homogéneos, donde se supone que los créditos que pertenece a un mismo grupo crediticio presentan comportamientos similares. El anterior supuesto facilita el modelamiento de la dependencia entre el incumplimientos de los créditos; el procedimiento capaz de identificar grupos homogéneos en un portafolio de manera consistente es el árbol de clasificación y es un modelo de clasificación basado en árboles, y clasifica créditos en grupos homogéneos y se basa en valores de una variables independientes que en este caso se considera los días de mora de un crédito y las variables explicativas son la tasas de interés y el plazo del crédito, donde el método de crecimiento del árbol es el CHAID debido a que la variable dependiente es continua.

Nodo por Nodo						
Nodo	Nodo: n	Nodo: %	Ganancia: n	Ganancia (%)	Resp: %	Indice (%)
14	309	0.8	99	5.7	32	714.2
11	265	0.7	38	2.2	14.3	319.6
15	5865	15.1	475	27.2	8.1	180.5
13	88	0.2	4	0.2	4.5	101.3
16	18568	47.7	815	46.6	4.4	97.8
12	660	1.7	26	1.5	3.9	87.8
9	7563	19.4	246	14.1	3.3	72.5
2	4628	11.9	43	2.5	0.9	20.7
3	1018	2.6	2	0.1	0.2	4.4

Cuadro I.1: Análisis de los nodos terminales de un árbol de clasificación para identificar grupos homogéneos crediticios.

A partir del método CHAID inicialmente se identifica nueve grupos homogéneos (Cuadro I.1); sin embargo, existen grupos que tienen en promedio días en mora similares; así, *el*

primer grupo homogéneo está formado por los cuatro primeros grupos homogéneos del árbol ya que éstos acumulan el 16.8 % de los créditos del portafolio y el 35.2 % de los créditos incumplidos; *el segundo grupo homogéneo* corresponde al quinto grupo del árbol y tiene el 47.7 % de los créditos y el 46 % de incumplidos; finalmente el *tercer grupo homogéneo* esta formado por los últimos cuatro grupos del árbol y capturan el 36 % de información y el 18 % de incumplidos (Cuadro I.2).

Estadísticas acumuladas					
Nodo: n	Nodo: %	ganancia: n	ganancia (%)	Resp: %	Indice (%)
309	0.8	99	5.7	32	714.2
574	1.5	137	7.8	23.9	532
6439	16.5	612	35	9.5	211.9
6527	16.8	616	35.2	9.4	210.4
25095	64.4	1431	81.9	5.7	127.1
25755	66.1	1457	83.4	5.7	126.1
33318	85.5	1703	97.4	5.1	113.9
37946	97.4	1746	99.9	4.6	102.6
38964	100	1748	100	4.5	100

Cuadro I.2: Análisis acumulado de los nodos terminales de un árbol de clasificación para identificar grupos homogéneos crediticios.

I.2. Metodología de cosechas

En las instituciones financieras es necesario que el administrador de riesgo disponga de herramientas que le permitan entender el comportamiento crediticio de las operaciones de manera rápida y consistente, en este sentido, la *metodología de cosechas* es una de las herramientas más utilizadas por los administradores de riesgo, la misma que tiene múltiples aplicaciones por ejemplo puede ser usada para construir de índices de alerta temprada del deterioro de la cartera, medir la gestión de los operadores crediticios, identificar características de créditos incumplidos, entre otros. Para el presente estudio, se utiliza la metodología de cosechas para identificar el máximo número de días que debe esperar la institución financiera para considerar un crédito como incumplido, para lo cual se tiene que realizar los siguientes pasos:

- a) *Agrupar los créditos del portafolio según su calidad crediticia*; en cada mes se agrupa los créditos del portafolio vigente en grupos homogéneos disjuntos $P_{i=\{1,2,\dots,8\}}$, los mismos que tienen las siguientes características:
1. P_1 : Créditos que no se han en retrasado en pago de las cuotas pactadas.
 2. P_2 : Créditos que tienen un retraso máximo 15 días.
 3. P_3 : Créditos cuyos días de retraso se encuentran entre 16 y 30 días.
 4. P_4 : Créditos cuyos días de retraso se encuentran entre 31 y 60 días.

5. P_5 : Créditos cuyos días de retraso se encuentran entre 61 y 90 días.
 6. P_6 : Créditos cuyos días de retraso se encuentran entre 91 y 120 días.
 7. P_7 : Créditos cuyos días de retraso se encuentran entre 121 y 180 días.
 8. P_8 : Créditos cuyos días de retraso sobrepasan los 180 días.
- b) *Definir los estados de los créditos*; por medio de los grupos homogéneos se define los estados del proceso estocástico $Q_{j=\{1,2,3,4\}}$, mismos que se describen a continuación:
1. Q_1 : El crédito se mantiene en el mismo grupo crediticio.
 2. Q_2 : El crédito mejora la calidad crediticia.
 3. Q_3 : El crédito empeora la calidad crediticia.
 4. Q_4 : El crédito es vendido.
- c) *Calcular la matriz de transición*; se define la matriz de transición $\mathbf{P} = (p_{ij})$, $1 \leq i \leq k$, $1 \leq j \leq k'$, donde k son los ocho clases crediticia que puede tener un crédito y k' son los tres estados que puede tener un crédito; así, p_{ij} corresponde a la proporción de los créditos que estando en el *estado* i pasan al *estado* j en un intervalo de tiempo, en este caso el intervalo de tiempo es considerado seis meses ya que permite medir el deterioro de la cartera en el mediano plazo.
- d) *Identificar el umbral del incumplimiento*; en cada grupo homogéneo crediticio se compara la proporción de créditos que mejorar su calidad crediticia (Q_2) con los que empeoran su calidad crediticia (Q_3); y, en el grupo donde se observe que Q_2 crece más rápido que Q_3 se puede afirmar que en este grupo se encuentra el número máximo de días mora.