

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESCUELA DE POSGRADO EN INGENIERÍA Y CIENCIAS

**APLICACIÓN DEL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD AL DISEÑO DE
ESTRUCTURAS DE ACERO.**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MÁSTER (MSc) EN
INGENIERÍA**

AUTOR: ING. LUCIO FERNANDO SÁNCHEZ SARMIENTO

e-mail: luciosanchezs@gmail.com

DIRECTOR: ING. MSc. ROBERTO ARELLANO BUENO

e-mail: roarebue@uio.satnet.net

Quito, Febrero 2009

DECLARACIÓN

Yo Lucio Fernando Sánchez Sarmiento, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Ing. Lucio Sánchez Sarmiento

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Lucio Fernando Sánchez Sarmiento, bajo mi supervisión.

Ing. MSc. Roberto Arellano Bueno

DIRECTOR DE PROYECTO

DEDICATORIA

A mi esposa.

A Lucio y Alicia, por el apoyo incondicional.

A mi hermano, José Andrés

CONTENIDO

DECLARACIÓN	II
CERTIFICACIÓN	III
DEDICATORIA.....	IV
CONTENIDO	V
RESUMEN	VII
PRESENTACIÓN.....	IX
CAPÍTULO 1. REVISIÓN DE LA TEORÍA CLÁSICA DE ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS.....	1
1.1 INTRODUCCIÓN	1
1.2 INESTABILIDAD DEL EQUILIBRO EN ELEMENTOS EN COMPRESIÓN.....	6
1.2.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE VIGAS – COLUMNAS.....	12
CAPÍTULO 2. SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD EN BARRAS USANDO MÉTODOS DE ENERGÍA	15
2.1 INTRODUCCIÓN	15
2.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES.....	16
2.2.1 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRO EN ELEMENTOS TIPO BARRA ..	16
2.2.2 PRINCIPIO DE TRABAJOS VIRTUALES (P.T.V.)	17
2.3 PLANTEAMIENTO ENERGÉTICO DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD.....	19
2.3.1 SISTEMA DISCRETO DE UN GRADO DE LIBERTAD (1 G.D.L.) ...	19
2.3.2 SISTEMA DISCRETO DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD	26
2.3.3 LINEALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE EQUILIBRIO.	31
2.3.4 SISTEMAS CONTINUOS.....	32
2.3.5 SOLUCIÓN DE PROBLEMA DE ESTABILIDAD.....	37
CAPÍTULO 3. SOLUCIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD USANDO ELEMENTOS FINITOS	46
3.1 INTRODUCCIÓN	46
3.2 NIVELES DE ANÁLISIS.....	47
3.3 FUNCIONES DE FORMA.....	48

3.4	MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA PARA BARRAS CON DEFORMACIONES EN EL PLANO	52
3.4.1	DEFORMACIÓN AXIAL ÚNICAMENTE	53
3.4.2	ACOPLAMIENTO DE ESFUERZOS AXIALES Y FLEXURALES.....	58
3.5	MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA PARA BARRAS EN TRES DIMENSIONES.....	61
3.5.1	ACOPLAMIENTO DE ESFUERZOS AXIALES Y TORSIONALES... 61	
3.5.2	MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA CON DEFORMACIONES EN TRES DIMENSIONES	64
3.5.3	CÁLCULO DE CARGAS CRÍTICAS.....	67
CAPÍTULO 4. APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS DE ACERO		71
4.1	APLICACIÓN 1.	71
4.2	APLICACIÓN 2.	78
4.3	APLICACIÓN 3.	94
4.4	APLICACIÓN 4.	102
CAPÍTULO 5. ESTABILIDAD DE MARCOS PLANOS SEGÚN LA ESPECIFICACIÓN ANSI/AISC 360-05.....		109
5.1	INTRODUCCIÓN	109
5.2	ESTABILIDAD DE MARCOS EN CONDICIONES IDEALES.....	109
5.3	ESTABILIDAD DE MARCOS CON IMPERFECCIONES INICIALES....	114
5.4	ENFOQUE DE ANSI/AISC 360-05.....	116
5.4.1	MÉTODOS DE ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN.....	117
5.4.1.1	Análisis General de Segundo Orden Elástico.....	117
5.4.1.2	Análisis de Segundo Orden por amplificación del Análisis de Primer Orden.....	118
5.4.2	MÉTODO DE LONGITUD EFECTIVA.....	121
5.4.2.1	Coeficiente de Longitud Efectiva	122
5.4.3	MÉTODO DE ANÁLISIS DIRECTO.....	127
5.5	APLICACIÓN	129
CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....		157
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS		160

RESUMEN

La última versión de la Normativa ANSI/AISC 360-05, especifica que la estabilidad de las estructuras debe ser verificada de manera global, así como de manera individual en todos los miembros. Este último requisito se cumple en el diseño convencional de las estructuras de acero, pero el primero no es de directa aplicación. Se requiere entonces una metodología general para estudiar la estabilidad global de los sistemas estructurales de cualquier configuración. En el presente trabajo se desarrolla una metodología para el análisis de estabilidad de estructuras desde un enfoque energético, que permita un tratamiento matricial del problema, lo más cercano posible al análisis matricial convencional de estructuras, tanto en dos y tres dimensiones.

La formulación planteada permite realizar un análisis elástico de segundo orden que obtiene la carga crítica de pandeo global de la estructura; con esta carga (o sistema de cargas) es posible encontrar el esfuerzo al que está sometido cada miembro estructural en el instante en que ocurre el pandeo global. Obviamente conocido tal esfuerzo se obtiene de manera directa el factor de longitud efectiva K de cada barra. Esto último permitió demostrar que el factor K , aunque las condiciones de apoyo se mantengan constantes, es muy variable según la ubicación y orientación del miembro dentro un sistema estructural particular; es decir, no es constante.

Adicionalmente, la precisión de un nuevo método de análisis incluido en ANSI/AISC 360-05 para estudiar la estabilidad global de estructuras planas, denominado Método de Análisis Directo, es evaluada respecto al análisis elástico de segundo orden planteado en este trabajo.

ABSTRACT

The last version of ANSI/AISC 360-05 standard, says that the stability of structures must be verified as a whole, as well as individual means at all members. The last requirement is accomplish at a conventional steel structural design, but the first is not a direct application. So, a methodology to study the global stability of structural systems of any configuration is required. The present work develops a methodology for stability structural analysis from an energetic point of view that facilitates a matrix solution closely to conventional matrix structural analysis, in two as three dimensions.

The suggest methodology allows to make an elastic second order analysis that gets the structure's global buckling critical load; with this load (or system of loads) it's possible to find the member's stress in the moment that global buckling takes place. Obviously, when this stress is known, the effective long factor K may be calculated in each member. This allowed to demonstrate that K factor, when the restraint's condition are constants, it is quite variable with the position and orientation of member within a particular structural system; that is, not constant.

Additionally, the new analysis method's precision incorporated in ANSI/AISC 360-05 to study the global stability of planar frames, named Direct Analysis Method, is evaluated in relation to elastic second order analysis proposed in this work.

PRESENTACIÓN

El diseño de estructuras de acero supone, adicional al manejo de las normas de diseño respectivas, un cabal conocimiento de las herramientas de análisis disponibles para predecir de manera adecuada el comportamiento de las estructuras de acero, a nivel local y global.

El siguiente trabajo presenta una metodología para el análisis de la estabilidad global de estructuras de acero, de manera que su aplicación sea factible a cualquier configuración estructural, siguiendo el formato convencional del análisis matricial de estructuras.

La intención del autor es colaborar con el entendimiento del análisis y diseño de estructuras de acero, que permita una más amplia gama de aplicaciones a los problemas de la ingeniería estructural en el Ecuador.

CAPÍTULO 1.

REVISIÓN DE LA TEORÍA CLÁSICA DE ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS.

1.1 INTRODUCCIÓN

DESARROLLO HISTÓRICO.

La fórmula de Euler, que aún se emplea para el cálculo de la carga crítica en rango elástico de columnas esbeltas, es una de las fórmulas más antiguas de la ingeniería. Su desarrollo, junto con las modificaciones introducidas para considerar el comportamiento no lineal, provee la base para una historia que se ha desarrollado en forma continua desde 1744.

Para su desarrollo se considera que inicialmente la columna es perfectamente recta y cargada con una acción, que previo al pandeo, coincide con el eje longitudinal del miembro.

En el caso del acero estructural se asume una relación esfuerzo-deformación lineal hasta alcanzar el esfuerzo de fluencia y luego el material (en promedio) se deforma plásticamente, sin aumento del esfuerzo hasta una deformación varias veces mayor la correspondiente al rango elástico.

Si el material de la columna no presenta un límite de fluencia definido, se asume que el esfuerzo es lineal con respecto a la deformación hasta el límite de proporcionalidad, para esfuerzos mayores la deformación aumenta con una relación continuamente creciente con respecto al esfuerzo.

En rango inelástico el módulo de elasticidad tangente es definido como la pendiente de la curva esfuerzo-deformación. Si se produce una disminución de la deformación, se supone que el esfuerzo disminuye con una pendiente igual a la de la zona lineal elástica.

La columna perfecta, en su función estructural de transmitir cargas de compresión de un punto de la estructura a otro, debería permanecer recta mientras se acorta bajo una carga creciente. Pero al alcanzar la carga crítica, si se introduce una imperfección la barra comienza a flejar. Si la columna fuera suficientemente esbelta para pandear elásticamente, no habría un incremento inicial de la carga al comenzar el proceso de pandeo. Sin embargo, si el mismo se iniciara en el rango inelástico, un leve incremento de carga acompañaría la iniciación del fenómeno.

PANDEO ELÁSTICO

En 1678 Robert Hooke proporcionó los elementos preliminares necesarios para el desarrollo de la teoría del pandeo elástico al establecer que el desplazamiento de un cuerpo elástico era proporcional a la carga que lo producía. Afirmó que esta relación podía ser aplicada a todos los cuerpos elásticos, sus hallazgos fueron hechos con base en varios experimentos.

El segundo paso lo dio Jacob Bernoulli quién estudió el descenso y la curvatura en una viga cantilever. Él aseguró, en 1705, sobre la base de la Ley de Hooke, que la curvatura en cualquier punto de una barra flejada era proporcional al momento resistente desarrollado en ese punto.

Leonard Euler (1707-1783) en el apéndice del libro que publicó en 1744 sobre cálculo variacional, presentó por primera vez la fórmula para columnas que hoy lleva su nombre (1).

La “carga de Euler” es la carga para la cual una columna esbelta y elástica puede entrar en una configuración de flexión por efecto de carga axial únicamente. En la época de Euler las columnas eran hechas de mampostería o madera, siendo este último material considerado por Euler como apropiado para aplicar su fórmula.

Euler dedujo su fórmula en la hipótesis de lo que él llamó “momento de rigidez” de la barra y que era igual a $\frac{E \cdot k^2}{\rho}$, donde $E \cdot k^2$ era una constante a determinar por vía experimental y ρ el radio de curvatura de la columna. El tenía sólo una idea

aproximada de la relación existente entre la forma de la sección y la constante $E \cdot k^2$ y en un escrito posterior, en el año 1759 decía que “el momento de rigidez parece ser proporcional al cuadrado, o quizás al cubo, del grosor de la pieza, por lo que, si la sección es circular, el momento de rigidez sería proporcional a la tercera o cuarta potencia del diámetro de la barra”. De esta manera comienza a intuir el concepto de momento de inercia de una sección, que no era conocido en esa época.

Euler escribió la fórmula para calcular “la fuerza necesaria para flejar la columna” como:

$$P_e = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot k^2}{L^2} \quad (1.1)$$

donde E es una propiedad resistente y k^2 una característica dimensional de la sección. A pesar de que él no tenía las bases para determinar E o k^2 en forma independiente, propuso determinar $E \cdot k^2$ en forma combinada, mediante el ensayo de una viga cantilever con una carga P en el extremo en donde se medía el desplazamiento Δ :

$$E \cdot k^2 = \frac{P \cdot L^3}{3\Delta} \quad (1.2)$$

La transición de la constante de Euler $E \cdot k^2$ al $E \cdot I$ actual requiere de la aplicación de la ley de Hooke junto con una adecuada evaluación de distribución de esfuerzos internos en un miembro flejado. Mariotte (1620-1684) realizó importantes ensayos sobre vigas en voladizo en el año 1680 y con base en los mismos fue el primero en reconocer que las fibras superiores se alargaban mientras que las inferiores se acortaban. Leibniz, en 1684, confirmó la validez de las conclusiones de Mariotte y recomendó la aplicación de la Ley de Hooke al problema. Parent fue el primero en deducir, en 1713, la correcta distribución de esfuerzos en una viga rectangular, pero su trabajo no fue reconocido por los investigadores de la época. Recién en 1783, 39 años después que Euler publicó su fórmula, Coulomb (1736-1806) aplicando la Ley de Hooke y las ecuaciones de equilibrio estático dedujo la expresión que relaciona el

momento flector con los esfuerzos normales que éste origina en las vigas. La deformación por corte fue despreciada por Coulomb, pero posteriormente Navier y St. Venant completaron la teoría de la flexión aplicando la teoría general de la elasticidad.

A pesar de que la fórmula de Euler es ahora aceptada en forma universal para el diseño de columnas esbeltas de acero, fué muy criticada a principios del siglo XIX porque falló en la predicción de la resistencia de miembros comprimidos construidos en mampostería o hierro fundido. Tuvieron que pasar 100 años desde que Euler publicara su trabajo, para que los materiales a los cuales es aplicable su fórmula pudieran usarse comercialmente en las estructuras. Esos materiales fueron inicialmente el hierro forjado y luego, alrededor de 1850, el acero estructural.

PANDEO INELÁSTICO

Si bien Euler desarrolló la teoría del pandeo elástico, él no limitó el campo de validez de su fórmula, demostrando así que la interpretación de los fenómenos inelásticos era muy superior a los conocimientos de la época. En una memoria del año 1757 escribió: "... todo parece indicar que el momento de rigidez $E \cdot k$ no está limitado a los cuerpos elásticos. La fórmula concierne a una fuerza (que origina un momento) por medio de la cual la pieza sufre un corrimiento y no tiene ninguna importancia si tal pieza, después de la flexión, requiere o no de una fuerza adicional para retomar su forma primitiva".

Los progresos hacia una mejor interpretación del pandeo en campo no lineal no se desarrollaron por muchos años, debido fundamentalmente a la falta de conocimiento de las relaciones esfuerzo-deformación y momento flector-curvatura en el rango inelástico.

En 1889, Considere realizó una serie de ensayos sobre 32 columnas y sugirió que si el pandeo ocurría cuando se ha sobrepasado el límite de proporcionalidad, se debía considerar un módulo de elasticidad efectivo E_{ef} , cuyo valor estaba comprendido entre el módulo inicial E y el módulo tangente E_t .

Independientemente de estos estudios, Engesser en el mismo año sugirió que la resistencia de las columnas podía calcularse utilizando el módulo tangente en la fórmula de Euler. Con este criterio, para una columna articulada el esfuerzo crítico era:

$$\sigma_t = \frac{\pi^2 \cdot E_t}{\left(\frac{l}{i}\right)^2} \quad (1.3)$$

Siendo i el radio de giro de la sección y l la longitud de la columna.

Seis años después, Jasinki, con base en los trabajos de Considere y Engesser, propuso utilizar un módulo de elasticidad reducido E_r , intermedio entre E y E_t , pero que dependía también de la forma de la sección. En 1910 Theodor Von Karman dedujo expresiones explícitas para las secciones rectangular y doble T.

El módulo reducido E_r se llamó también doble módulo y durante los 35 años posteriores al trabajo de Von Karman se entabló una continua controversia entre la conveniencia de usar la teoría del doble módulo o la del módulo tangente.

Desde el punto de vista de la teoría de la estabilidad de Euler el concepto del doble módulo era correcto, porque indicaba la carga para la cual una columna perfectamente recta y cargada en forma axial permanecería en equilibrio sin variación de carga ya sea en su posición de equilibrio o en su configuración de flexión.

En 1946, Shanley estableció que obviamente era posible que se iniciara la flexión de la columna con un aumento simultáneo de carga axial de acuerdo a la teoría del módulo tangente. Bastaría una imperfección infinitesimal para producir la flexión inicial y por lo tanto la carga de la fórmula del doble módulo nunca se alcanzaría.

Un año después, Shanley confirmó su teoría mediante ensayos de modelos consistentes en dos barras rígidas conectadas en el centro por material

inelásticamente deformable. De acuerdo a esas experiencias Von Karman refinó la teoría del módulo tangente escribiendo que: “La carga del módulo tangente es el menor valor de carga axial para el cual puede ocurrir la bifurcación de la posición de equilibrio, sin tener en cuenta si la transición a la bifurcación de flexión requiere un aumento de la carga axial o no.”

El estudio de la fórmula de la columna se ha desarrollado en forma continua desde el siglo XVIII. A pesar de ello aún es necesario revisar algunas de las facetas menos conocidas de este problema, en especial todo lo concerniente a la hipótesis de ‘perfección’ que no se cumple en las estructuras reales. En la práctica, las columnas nunca son perfectamente rectas y siempre presentan esfuerzos residuales que sólo pueden estimarse en forma aproximada. Además existen restricciones laterales y rotaciones difíciles de evaluar y que varían a lo largo de la vida de la estructura.

1.2 INESTABILIDAD DEL EQUILIBRO EN ELEMENTOS EN COMPRESIÓN

En el análisis de estabilidad de estructuras, las ecuaciones de equilibrio deben ser formuladas en la posición deformada, se emplea la llamada Teoría de Segundo Orden, a diferencia del análisis lineal elástico en el que las condiciones de equilibrio son planteadas en la configuración inicial no deformada. Por definición la determinación de las cargas críticas de una estructura se realiza con la Teoría de Segundo Orden. En el Capítulo 2 se desarrollarán de manera más amplia estos conceptos.

Problema de Estabilidad de Columnas.

Se tratará de manera general la estabilidad de miembros en flexión y posteriormente se estudiará como un caso particular la estabilidad de columnas ideales, luego se extenderán los conceptos a la solución de columnas con imperfecciones.

Teoría de Flexión. ⁽²⁾ ⁽³⁾

Inicialmente desarrollada por Bernoulli (1705), se basa en la suposición de algunas hipótesis que permiten no considerar ciertos efectos en una viga en flexión; las hipótesis son:

- Durante la flexión, las secciones transversales planas permanecen planas.
- Las secciones transversales permanecen normales al eje centroidal de la viga, incluso deformado.
- Las deformaciones por corte son despreciables.

Adicionalmente Navier introdujo ciertas hipótesis conocidas como hipótesis de Bernoulli-Navier, que suponen que la viga es suficientemente esbelta, tal que la deformación unitaria axial normal es $\varepsilon = -z/\rho$, donde z es la coordenada medida desde el centroide de la sección transversal y ρ es el radio de curvatura del eje centroidal deformado de la viga como se indica en la Figura 1.1. Esta hipótesis implica que el esfuerzo axial en la viga es: $\sigma = E \cdot \varepsilon = -E \cdot z/\rho$, donde E es el módulo de elasticidad del material.

Por definición, el momento flector es:

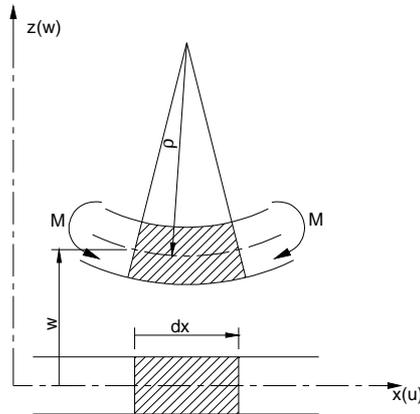
$$M = \int_A \sigma \cdot z \cdot dA \quad (1.4)$$

donde A es el área de la sección transversal; reemplazando las expresiones anteriores y asumiendo que E es constante, se tiene:

$$M = -\frac{E}{\rho} \int_A z^2 \cdot dA \quad (1.5)$$

donde el término $\int_A z^2 \cdot dA$ es el momento de inercia centroidal de la sección transversal I .

Figura 1.1. Viga en flexión bajo hipótesis Navier-Bernoulli.



Para deflexiones pequeñas, se puede usar la siguiente aproximación: $\frac{1}{\rho} \approx w''$; donde: $w'' = \frac{d^2w}{dx^2}$, es decir la segunda derivada de la deformación vertical respecto a la variable longitudinal.

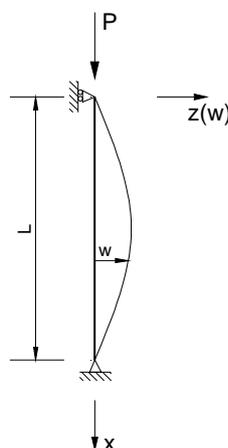
La ecuación (1.5) se puede entonces escribir como:

$$M = -E \cdot I \cdot w'' \quad (1.6)$$

Que es la ecuación diferencial de momento de la viga Bernoulli.

Se considera ahora el caso de la columna ideal de Euler, que consiste en una barra de longitud L que tiene sus extremos articulados, perfectamente recta y sometida a carga axial concéntrica.

Figura 1.2. Columna ideal de Euler.



Para la posición no deformada, el equilibrio de la columna está siempre garantizado para cualquier valor de la carga P . Cuando existe cierta deformación flexural de la barra y la carga se mantiene constante en valor y dirección, el momento generado en cualquier punto de la barra es $M = P \cdot w$, la ecuación diferencial de momento queda:

$$w'' + \frac{P}{E \cdot I} \cdot w = 0 \quad (1.7)$$

Esta es una ecuación diferencial ordinaria, denominando $k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$, la solución general de la ecuación (1.7) es de la forma:

$$w = A \cdot \sin(k \cdot x) + B \cdot \cos(k \cdot x) \quad (1.8)$$

Las condiciones de borde proporcionan los valores de las constantes de integración, tal que en:

$$x = 0 \rightarrow w = 0$$

$$x = L \rightarrow w = 0$$

reemplazando se tiene:

$$B = 0$$

$$A \cdot \sin(k \cdot L) = 0$$

La solución es posible para:

$$P = 0: \text{solución trivial}$$

$$P > 0 \text{ solo si: } k \cdot L = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$$

Sustituyendo $k: \frac{P \cdot L^2}{E \cdot I} = \pi^2, 4\pi^2, 9\pi^2, \dots$, y generalizando:

$$P_{cr,n} = \frac{n^2 \cdot \pi^2}{L^2} \cdot E \cdot I : \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (1.9)$$

Los valores de $P_{cr,n}$ se denominan cargas críticas porque indican los valores de carga para los cuales la ecuación de equilibrio tiene solución. Se debe notar que en el valor de la carga crítica en cuanto al material sólo depende del módulo de elasticidad y no de su esfuerzo de fluencia.

La deformada $w(x)$ asociada a cada carga crítica se calcula reemplazando las soluciones en la ecuación:

$$w(x) = q_n \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \quad (1.10)$$

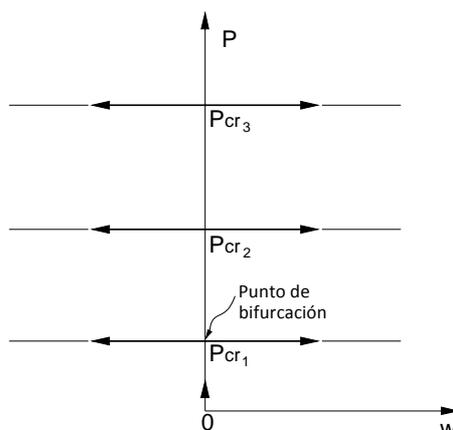
donde q_n representa las constantes arbitrarias que pueden tomar cualquier valor, por lo que la deformada sólo indica la configuración característica asociada a una carga crítica.

La menor carga crítica obtenida con $n = 1$ se denomina carga crítica de pandeo elástico o carga de Euler P_e .

$$P_e = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{L^2} \quad (1.11)$$

Esta forma de determinar la estabilidad de la columna es llamada Método del Equilibrio Adyacente (3), se alcanza un estado tal que cualquier pequeña variación en la carga provoca grandes deformaciones, es decir se alcanza la inestabilidad del equilibrio.

Si se grafica la solución que representa la ecuación (1.10) se observa que se alcanza un punto llamado de *bifurcación* en los puntos donde la ecuación de equilibrio tiene solución, este tipo de comportamiento se conoce como Pandeo por Bifurcación o Bifurcación del Equilibrio (4) y se caracteriza por cambiar repentinamente desde un patrón de deformación constante durante el proceso de carga a otro completamente diferente cuando se alcanza la carga crítica (1).

Figura 1.3. Bifurcación del Equilibrio

El esfuerzo crítico de pandeo elástico es:

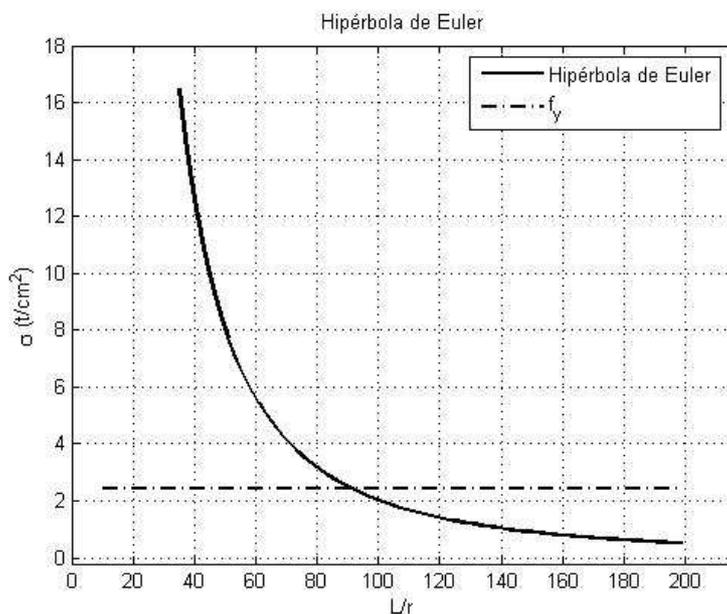
$$\sigma_e = \frac{P_e}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{A \cdot L^2} = \frac{\pi^2}{\left(\frac{L}{r}\right)^2} \quad (1.12)$$

donde $r = \sqrt{\frac{I}{A}}$, se denomina radio de giro y $\frac{L}{r}$ es un parámetro de esbeltez de la columna. Graficando el esfuerzo crítico de pandeo elástico en función de la esbeltez se tiene la siguiente gráfica conocida como Hipérbola de Euler.

En la Figura 1.4 se muestra dicha gráfica realizada con MATLAB, Version 7.0.0.19920 (Copyright 1984-2004, The MathWorks, Inc).

Se observa que aunque la ecuación del esfuerzo crítico de pandeo no depende del esfuerzo de fluencia del material, este si es un parámetro relevante cuando la esbeltez es lo suficientemente pequeña para que el esfuerzo se aproxime a este límite (que se indica con la línea horizontal de la Figura 1.4), en este caso el esfuerzo máximo dentro del comportamiento elástico es el esfuerzo de fluencia f_y . Posteriormente se discutirá la transición que se hace desde la hipérbola de Euler hasta el esfuerzo de fluencia.

Figura 1.4. Hipérbola de Euler para $E = 2048 \text{ t/cm}^2$ y $f_y = 2.54 \text{ t/cm}^2$

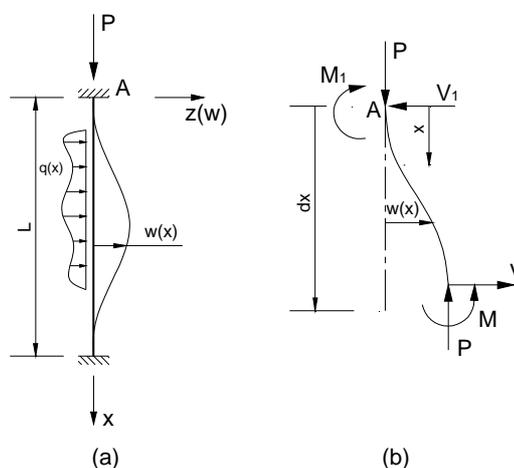


1.2.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL DE VIGAS – COLUMNAS.

El desarrollo hecho en la sección anterior es factible para problemas isostáticos, pero para resolver otros casos en donde la ecuación de momento no se puede obtener por simple equilibrio, es conveniente dar un enfoque más general del problema; para esto se emplea la denominada ecuación diferencial general de vigas-columnas (5) (3).

Se considera el elemento diferencial de viga-columna que se indica en la Figura 1.5.

Figura 1.5. Miembro viga-columna



Si se toma un elemento infinitesimal de la viga-columna ya deformada de longitud dx , como el mostrado en la Figura 1.5(b), y se plantea el equilibrio en un punto del centroide de tal miembro, se tiene:

$$(V + dV) - V + q(x) \cdot dx = 0 \quad (1.13)$$

$$(M + dM) - M + V \cdot dx + P \cdot dw - (q(x) \cdot dx) \left(\frac{dx}{2} \right) = 0 \quad (1.14)$$

Dividiendo por dx y considerando que $dx \rightarrow 0$ y $dw \rightarrow 0$, se tiene:

$$dV = V' = -q \quad (1.15)$$

$$dM + P \cdot dw = M' + P \cdot w' = -V \quad (1.16)$$

Estas expresiones representan las ecuaciones diferenciales de vigas-columnas en términos de momento y corte; derivando la segunda ecuación, reemplazando en la primera y sustituyendo la ecuación (1.6), queda:

$$(E \cdot I \cdot w''')' + (P \cdot w')' = q(x) \quad (1.17)$$

Expresión que se denomina ecuación diferencial general de vigas-columnas, ecuación de cuarto orden. El término $(P \cdot w')'$ es el que resulta al plantear el equilibrio en la posición deformada; retirando este término queda la ecuación de equilibrio de primer orden.

Se debe notar que la ecuación (1.17) es dependiente de dos cargas P y $q(x)$, y para tener una solución se requiere mantener constante la carga P , caso contrario se deberá linealizar de alguna manera aproximada la solución; una manera común de hacerlo es considerar que la flexión del miembro es lo suficientemente pequeña como para considerar constante la compresión en toda la sección transversal, situación que por obvias razones no proporciona buenas aproximaciones, a menos que la carga axial sea muy pequeña.

El caso más sencillo es de rigidez flexural EI y carga axial P constantes, la solución tiene dos partes:

La solución homogénea ($q = 0$) es de la forma $w = e^{\lambda \cdot x}$; derivando y sustituyendo en la ecuación(1.17), queda:

$$E \cdot I \cdot \lambda^4 + P \cdot \lambda^2 = 0 \quad (1.18)$$

Se adopta $k^2 = \frac{P}{E \cdot I}$, tal que $\lambda^2(\lambda^2 + k^2) = 0$. Esta ecuación tiene dos soluciones:

i) $\lambda = 0$: $P = 0$: solución trivial

ii) $\lambda > 0$: $\lambda = i \cdot k, -i \cdot k, 0, 0$

Los términos $\sin(kx)$ y $\cos(kx)$ son la combinación lineal de $e^{i \cdot k \cdot x}$; la solución no trivial es de la forma:

$$w(x) = A \cdot \sinh(kx) + B \cdot \cosh(kx) + C \cdot x + D \quad (1.19)$$

Para la solución general resta por agregar el término de solución particular, que se denomina $w_p(x)$, la cual depende de las condiciones de borde del problema. De esta forma la determinación de cargas críticas de vigas-columnas puede ser desarrollada para cualquier condición de apoyos de extremo. Adicionalmente se deberá considerar el caso en que $P < 0$, caso no muy común pero que matemáticamente tiene solución.

Aquí vale notar la primera restricción de la teoría clásica de solución del problema de estabilidad, pues no es posible obtener las cargas críticas de pandeo de vigas-columnas asociadas a cargas axiales y transversales no constantes. La literatura refiere que para resolver estos casos se utilicen métodos de elementos finitos o diferencias finitas (1)(2).

Cualquier caso particular de apoyos de extremo de vigas-columnas puede ser resuelto, comúnmente se trabaja con la carga crítica de pandeo de una columna biarticulada (columna patrón), y las variaciones debidas a otro tipo de restricciones es considerada con un coeficiente adimensional llamado **coeficiente de longitud efectiva K** , el cálculo de esos valores para distintos tipos de apoyos está desarrollado ampliamente en la literatura referente al tema (6) (7).

CAPÍTULO 2.

SOLUCIÓN DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD EN BARRAS USANDO MÉTODOS DE ENERGÍA

2.1 INTRODUCCIÓN

El fin de la resistencia en miembros estructurales se produce ya sea por la falla del material o por un estado de inestabilidad. En el primer caso se alcanza el límite de resistencia del material sin que dejen de ser válidas las ecuaciones de equilibrio planteadas en su solución y su comportamiento se estudia con un análisis no-lineal inherente al material. En el segundo, caso el fin de la resistencia se produce debido a que la geometría y cargas de la estructura llegan a un estado tal en que una pequeña variación en ellas produce grandes desplazamientos y su estudio se fundamenta en un análisis que considere la no-linealidad geométrica (efectos de segundo orden). Un análisis no-lineal completo debe considerar ambos casos.

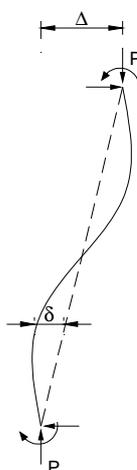
En un análisis lineal elástico se considera que el material trabaja a niveles por debajo del límite de proporcionalidad del material y las ecuaciones de equilibrio requeridas para el análisis estructural se plantean en la configuración inicial no deformada. Este análisis es válido cuando las deformaciones producidas por las cargas son relativamente pequeñas, ya que el planteamiento del equilibrio en las posiciones deformadas produce variaciones en el análisis, que pueden ser despreciadas.

Al considerar únicamente los efectos de no-linealidad geométrica se sigue considerando el material como elástico, pero se incluyen los efectos de las deformaciones y desplazamientos en el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio.

La no-linealidad geométrica puede tener varias fuentes, entre las principales se tienen: (8)

- Imperfecciones iniciales producidas por errores en la erección de un miembro estructural o imperfecciones en la fabricación del mismo.
- Efectos $P - \Delta$ que producen momentos adicionales de extremo debido a la excentricidad de las cargas gravitacionales, generados por los desplazamientos laterales de la estructura.
- Efectos $P - \delta$ que producen efectos adicionales debidos a la excentricidad de las cargas, generados por la deformación de un miembro estructural.

Figura 2.1. Efectos $P - \Delta$ y $P - \delta$, tomado de ANSI/AISC 360-05 (9)



El análisis lineal elástico es el que se usa convencionalmente en la práctica para fines de análisis y diseño estructural, y los efectos de no-linealidad se consideran de manera implícita en las disposiciones de diseño de las normas correspondientes.

2.2 CONCEPTOS FUNDAMENTALES

2.2.1 ESTABILIDAD DEL EQUILIBRO EN ELEMENTOS TIPO BARRA

Existen varias formas de abordar el problema de estabilidad de elementos tipo barra. Una forma es plantear el equilibrio entre acciones externas e internas que conducen a las Ecuaciones Generales de Equilibrio de Segundo Orden ⁽¹⁾, que se discutió en la sección 1.2.1. Otra es el planteamiento energético, específicamente basado en el planteamiento de la energía potencial del sistema. Como se verá más adelante este enfoque permite un tratamiento matricial del problema, y por lo

tanto de fácil implementación computacional para distintas condiciones de borde y estados de carga.

La estabilidad del equilibrio puede ser definida en tres estados: equilibrio estable, indiferente e inestable.

Figura 2.2. Estabilidad del equilibrio



- **Equilibrio Estable.-** Cuando para producir una perturbación al estado de equilibrio es necesario aplicar cierta cantidad de trabajo externo y la energía potencial del sistema será desarrollada, es decir, el sistema es capaz de desarrollar la energía necesaria para regresar a la posición de equilibrio.
- **Equilibrio Indiferente.-** Cuando para producir una perturbación al estado de equilibrio no es necesaria la aplicación de trabajo externo, y por tanto, para mantener el equilibrio ninguna energía potencial del sistema será desarrollada.
- **Equilibrio Inestable.-** Cuando cualquier perturbación a su estado de equilibrio produce una pérdida de la energía potencial del sistema. Luego se verá que la pérdida de energía potencial puede ser visualizada como una caída de la posición del punto de aplicación de la carga.

En la sección 2.3.1 se discute la aplicación de estos conceptos a sistemas estructurales.

2.2.2 PRINCIPIO DE TRABAJOS VIRTUALES (P.T.V.)

Para que se cumpla el equilibrio en un sistema estructural, el trabajo desarrollado por las fuerzas internas U debe igualar el trabajo exterior V . El P.T.V, expresa que para cualquier conjunto de desplazamientos virtuales aplicados a un sistema, el

trabajo virtual total δW es cero, es decir que el trabajo virtual externo δW_{ext} es igual al trabajo virtual interno δW_{int} (8).

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0 \quad (2.1)$$

La letra δ es un operador que define un trabajo (o desplazamiento) virtual.

El trabajo virtual interno se debe a la energía de deformación interna desarrollada por el sistema al aplicarle un desplazamiento virtual infinitesimal, y el trabajo virtual externo se debe al cambio en la energía potencial producida por la variación en la posición del punto de aplicación de las cargas externas, debida también al desplazamiento virtual aplicado.

Se define la energía potencial del sistema Π como la diferencia entre la energía (o trabajo) interna U y externa V .

$$\Pi = U - V \quad (2.2)$$

Para cumplir el equilibrio se tiene entonces:

$$\Pi = U - V = 0 \quad (2.3)$$

Y para el caso de desplazamientos virtuales:

$$\delta \Pi = 0 \quad (2.4)$$

El operador δ tiene las propiedades de un diferencial (3), entonces el equilibrio está garantizado si la derivada del potencial respecto a la posición es cero ($\frac{d\Pi}{dq} = 0$). Esta relación define matemáticamente la condición de equilibrio, pero no determina si el equilibrio es estable, indiferente o inestable. El equilibrio es estable si la curva de la energía potencial es cóncava hacia arriba, es decir la condición necesaria y suficiente es que la segunda derivada del potencial respecto a los grados de libertad del sistema sea positiva.

Resumiendo, para un sistema estructural de grados de libertad q , el sistema está en equilibrio si: (8)

$$\delta\Pi = \frac{\partial\Pi}{\partial q} = 0 \quad (2.5)$$

Y a su vez, el equilibrio es:

- estable si:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} > 0 \quad (2.6)$$

- indiferente si:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} = 0 \quad (2.7)$$

- inestable si:

$$\frac{\partial^2\Pi}{\partial q^2} < 0 \quad (2.8)$$

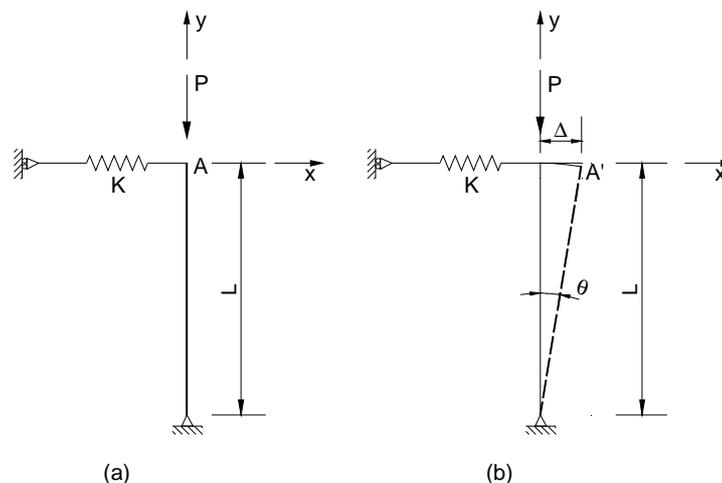
Se debe notar que se tienen tantas ecuaciones de equilibrio como grados de libertad q , necesarios para definir la posición del cuerpo, tenga el sistema; por esto, las derivadas son parciales.

2.3 PLANTEAMIENTO ENERGÉTICO DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD

2.3.1 SISTEMA DISCRETO DE UN GRADO DE LIBERTAD (1 G.D.L.)

Para ilustrar la teoría involucrada se desarrolla el siguiente ejemplo de un sistema sencillo.

Se considera el siguiente sistema estructural formado por una columna restringida contra desplazamiento lateral mediante un resorte de rigidez K , como se muestra en la Figura 2.3; se pretende determinar la carga crítica del sistema usando el método de energía descrito en la sección anterior.

Figura 2.3. Estructura de análisis

El sistema tiene un solo grado de libertad θ .

Se asume que las deformaciones son pequeñas, entonces el desplazamiento Δ es:

$$\Delta = L \cdot \sin \theta$$

El desplazamiento del punto A es:

$$\begin{aligned} \Delta_{x,A} &= \Delta \\ \Delta_{y,A} &= L \cdot (1 - \cos \theta) \end{aligned}$$

Trabajo de las fuerzas internas (energía de deformación):

$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot \Delta^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot L^2 \cdot \sin^2 \theta$$

Trabajo de las fuerzas externas (energía potencial):

$$V = P \cdot \Delta_{y,A} = P \cdot L - P \cdot L \cdot \cos \theta$$

Energía potencial del sistema:

$$\Pi = U - V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot L^2 \cdot \sin^2 \theta + P \cdot L \cdot \cos \theta - P \cdot L$$

El equilibrio se plantea según la ecuación (2.5):

$$\delta\Pi = \frac{d\Pi}{d\theta} = k \cdot L^2 \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta - P \cdot L \cdot \sin\theta = 0$$

La ecuación tiene 2 soluciones:

- i) Para $\theta = 0$
- ii) Para $\theta \neq 0$:

$$k \cdot L \cdot \cos\theta - P = 0$$

$$P = k \cdot L \cdot \cos\theta$$

$$\theta = \cos^{-1} \frac{P}{k \cdot L}$$

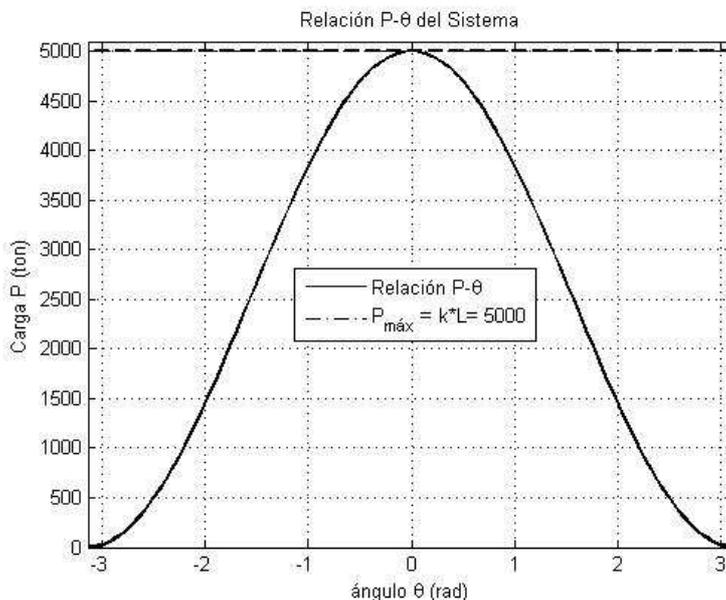
Como $-1.0 \leq \frac{P}{k \cdot L} \leq 1.0$, P sólo puede ser positivo (ya que interesa el caso de compresión) y k tampoco puede adoptar valores negativos, para que el sistema esté en equilibrio se debe cumplir entonces que $P \leq k \cdot L$. La carga máxima admisible en el sistema es $P = k \cdot L$, que es precisamente la carga crítica de pandeo.

La estabilidad del equilibrio está garantizada con la ecuación (2.6):

$$\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = -P \cdot L \cdot \cos\theta + k \cdot L^2 \cdot (\cos^2\theta - \sin^2\theta) > 0$$

Para visualizar gráficamente el problema se adoptan valores de $k = 10 \text{ t/cm}$ y $L = 500 \text{ cm}$, con ellos la máxima carga posible para que el sistema esté en equilibrio es $P = k \cdot L = 5000 \cdot \text{t}$. A partir de estos datos y con las expresiones encontradas, se elaboran curvas en MATLAB que corroboran los conceptos expuestos.

En la Figura 2.4 se observa la relación de la carga P y el ángulo θ ; la máxima carga que soporta el sistema se produce cuando el ángulo $\theta = 0$. A medida que el ángulo aumenta la carga crítica del sistema disminuye; esta es una manera sencilla de evaluar la influencia de la falta de aplome en columnas.

Figura 2.4. Relación $P - \theta$ de sistema

Se debe tener presente que el valor de la carga máxima admisible fue determinado al igualar el potencial del sistema a cero, conforme la ecuación (2.5).

En la Figura 2.5 se ha adoptado un 10% de la carga crítica de 5000 t y se grafica la energía total del sistema. Con la carga aplicada igual al 10% de la máxima carga crítica (500 t) hay un rango amplio del ángulo θ de aplicación de la carga en el que el equilibrio es estable. En relación a la Figura 2.2, claramente en este rango el equilibrio es estable, pues cualquiera sea la perturbación de la posición de equilibrio del sistema dentro del rango, el sistema es capaz de regresar a dicha posición.

Si para este mismo caso, se grafica la segunda derivada del potencial respecto a los grados de libertad del sistema, esto es $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}$, la estabilidad del equilibrio puede ser visualizada, como se muestra en la Figura 2.6.

Como se mencionó antes, el equilibrio es estable cuando $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} > 0$. En la Figura 2.6 hay un amplio rango que cumple este criterio. Las partes izquierda y derecha de la gráfica tienen esa forma debido a que los ángulos correspondientes provocan que la columna esté en tracción.

En la Figura 2.7 se muestra la gráfica de energía del sistema pero obtenida para cuando la carga crítica $P = k \cdot L = 5000t$ es aplicada. Como se observó en la Figura 2.4, la carga crítica máxima se producía con $\theta = 0 \text{ rad}$. Para este ángulo, en la Figura 2.7 claramente la situación del equilibrio es indiferente, esto es, que una pequeña perturbación en el estado de equilibrio lleva a la pérdida de la estabilidad, como se explicó en la Figura 2.2(c).

Figura 2.5. Energía del sistema con el 10% de la carga crítica

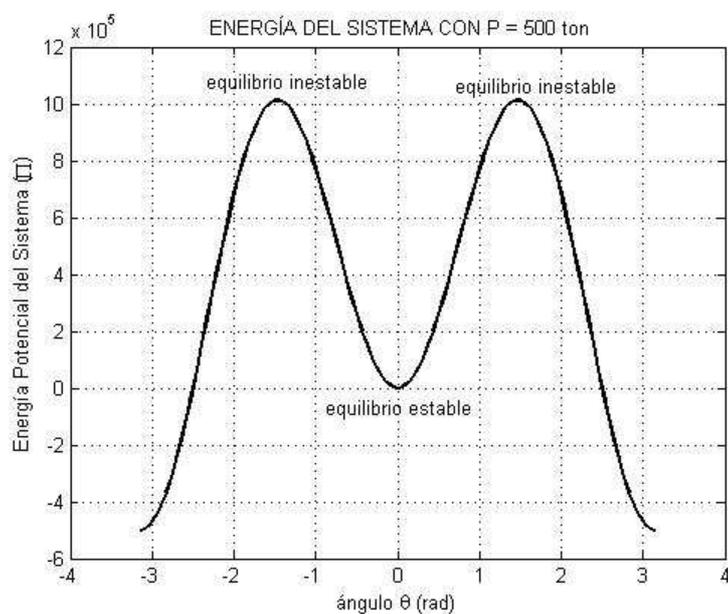
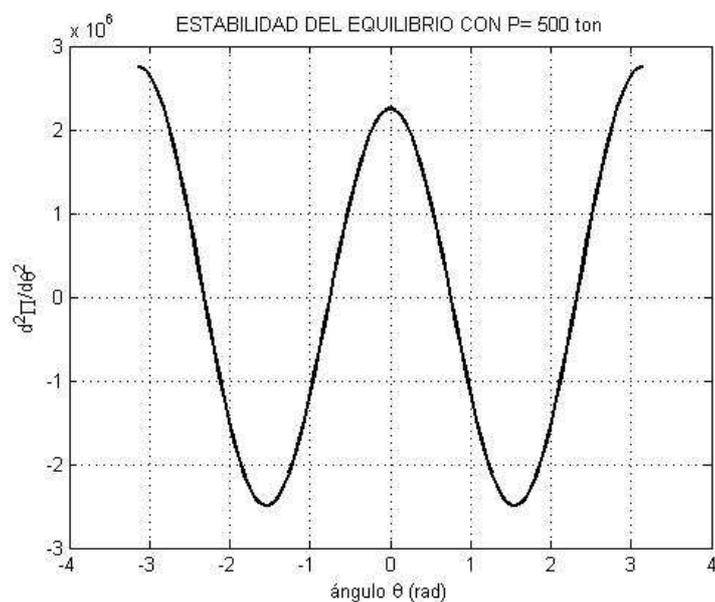


Figura 2.6. Estabilidad del equilibrio con el 10% de la carga crítica



En la Figura 2.8 se grafica la segunda derivada del potencial, esto es $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2}$ para cuando la carga crítica es aplicada en el sistema estructural. La carga crítica que genera la inestabilidad que ocurre en $\theta = 0 \text{ rad}$, está asociada al punto $\frac{d^2\Pi}{d\theta^2} = 0$, expresión que define el estado de equilibrio indiferente, conforme la ecuación (2.7).

Si se coloca una carga mayor a la carga máxima calculada, por ejemplo 5500 t, la energía del sistema y la estabilidad del equilibrio son como se ven en las Figura 2.9 y Figura 2.10.

Es importante recordar que aunque para el caso en que se aplica una carga mayor a P_{cr} , la ecuación (2.5) sí se cumple. Son las ecuaciones (2.6) a (2.8) las que definen el estado del equilibrio; en este caso, inestable.

Figura 2.7. Energía del sistema cuando la carga crítica es aplicada

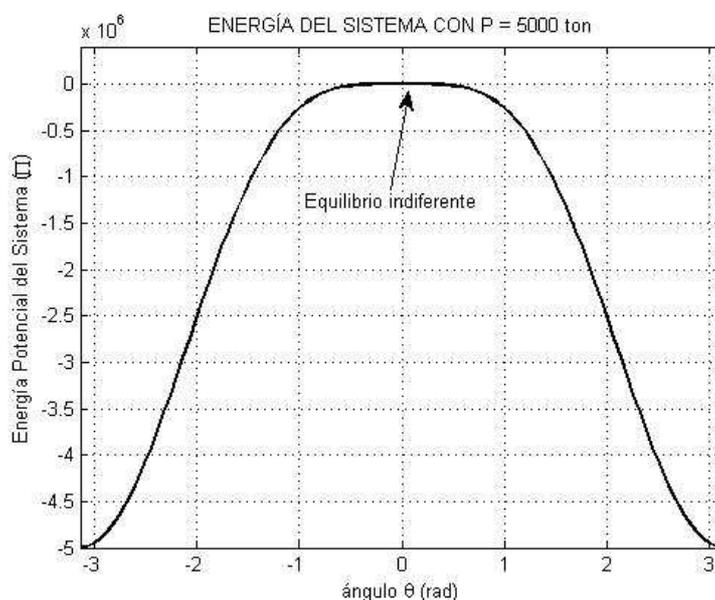


Figura 2.8. Estabilidad del equilibrio cuando la carga crítica es aplicada

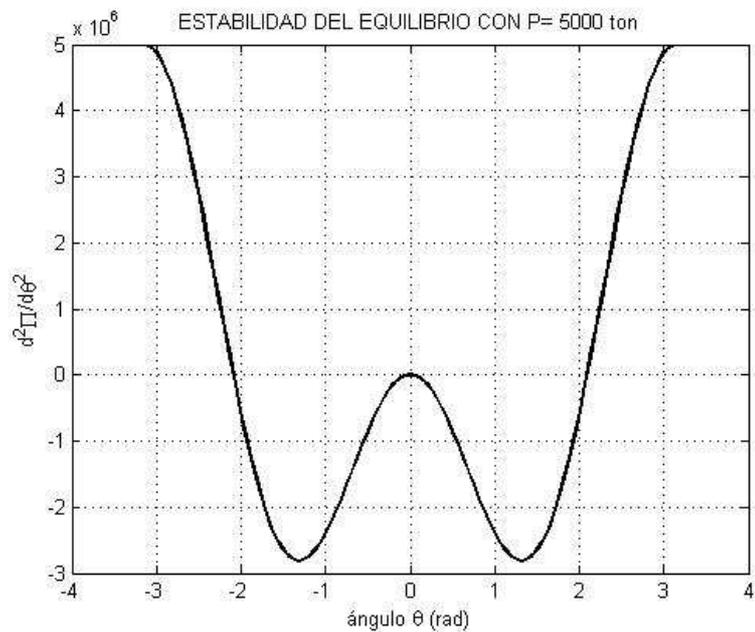
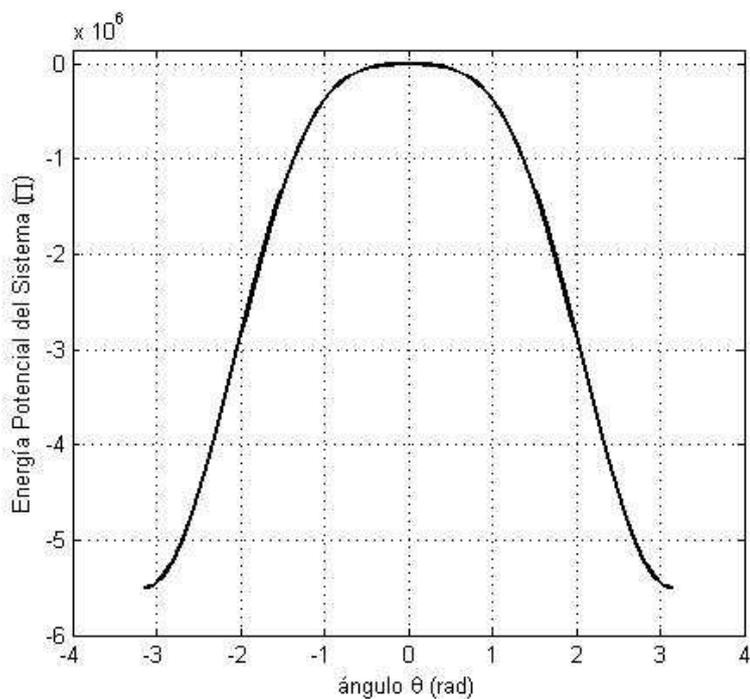


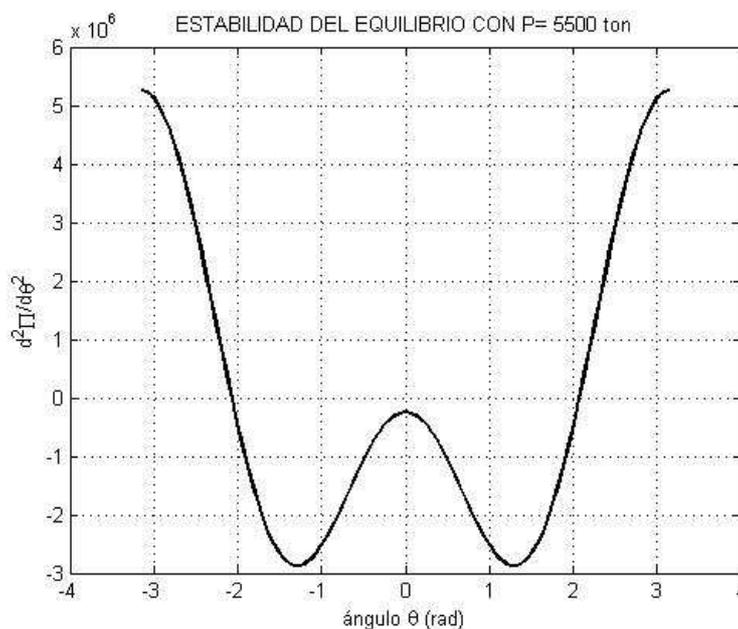
Figura 2.9. Energía del sistema cuando una carga mayor a la crítica es aplicada



Resumiendo, la carga máxima para que el sistema esté en equilibrio $P = k \cdot L$ se denomina carga crítica, y es un estado tal en que cualquier cambio en cargas o geometría produce grandes desplazamientos, es decir se está en un estado de

equilibrio indiferente en el que una pequeña perturbación del sistema causa la inestabilidad del sistema.

Figura 2.10. Estabilidad del equilibrio cuando una carga mayor a la crítica es aplicada



2.3.2 SISTEMA DISCRETO DE VARIOS GRADOS DE LIBERTAD

Cuando ya se tienen problemas de varios grados de libertad, las operaciones a realizar se pueden ordenar de manera que su tratamiento sea en forma matricial. Para ello es necesario definir previamente algunos conceptos.

Se debe notar que como se trata de un problema de varios G.D.L. las derivadas son ahora parciales respecto a cada uno de los grados de libertad del sistema, obteniendo tantas ecuaciones de equilibrio (conforme la ecuación (2.5)) como G.D.L. tenga el sistema. Para un manejo más generalizado de los procedimientos es necesario definir previamente dos operadores matemáticos.

JACOBIANO (J).

Si se tiene una función f referida a un conjunto de n variables que son arregladas en un vector $\{X\}$, tal que $\{X\} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}$, el Jacobiano J se define como un

vector de orden n que contiene las primeras derivadas parciales de f respecto a todas las variables contenidas en $\{X\}$. De manera que el elemento i del Jacobiano contiene la primera derivada parcial de la función f respecto a la i -ésima variable de $\{X\}$, como se indica a continuación (4):

$$\begin{aligned} \text{función: } & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \{X\} &= \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\} \end{aligned}$$

El Jacobiano de f respecto a $\{X\}$ es:

$$J_{f,\{X\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1} & \frac{\partial f}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

HECIANO (H).

Si se tiene una función f referida a un conjunto de n variables que son arregladas en un vector $\{X\}$, tal que $\{X\} = \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\}$, el Heciano H de la función se define como una matriz de orden $n \times n$ que contiene todas las posibles combinaciones de las segundas derivadas parciales de f respecto a $\{X\}$. De manera que el elemento i, j del Heciano contiene la derivada parcial de la función f respecto a la i -ésima y j -ésima variables, como se indica a continuación (4):

$$\begin{aligned} \text{función: } & f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ \{X\} &= \{x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n\} \end{aligned}$$

El Heciano de f respecto a $\{X\}$ es:

$$H_{f,\{X\}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

El Heciano es simétrico por definición.

Para el caso del problema de estabilidad por planteamiento energético, la función f referida es el potencial de energía Π y las derivadas parciales se calculan respecto a los grados de libertad $\{q\}$, de manera que las ecuaciones de la sección 2.2.2 se pueden escribir como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q} = 0 \rightarrow J_{\Pi, \{q\}} = \{0\} \quad (2.11)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} > 0 \rightarrow \|H_{\Pi, \{q\}}\| > 0 \quad (2.12)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} = 0 \rightarrow \|H_{\Pi, \{q\}}\| = 0 \quad (2.13)$$

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial q^2} < 0 \rightarrow \|H_{\Pi, \{q\}}\| < 0 \quad (2.14)$$

La función **Jacobiano** está incluida en MATLAB. La función **Heciano** se puede calcular como el doble Jacobiano de la función, por lo que en adelante se usarán estas funciones de MATLAB para los cálculos requeridos.

Usando los conceptos desarrollados y con base en las ecuaciones (2.5) a (2.8), el planteamiento energético del equilibrio y estabilidad de estructuras de varios G.D.L. se resume de la siguiente manera:

Equilibrio: el equilibrio de un sistema está garantizado si el **Jacobiano** del potencial Π respecto a los G.D.L. $\{q\}$ del sistema es cero:

$$J_{\Pi, \{q\}} = \{0\} \quad (2.15)$$

Estabilidad: la estabilidad de un sistema está definida por el determinante del **Heciano** del potencial Π respecto a los G.D.L. $\{q\}$, de la siguiente manera:

- Equilibrio estable:

$$\|H_{\Pi, \{q\}}\| > 0 \quad (2.16)$$

- Equilibrio indiferente:

$$\|H_{\Pi,\{q\}}\| = 0 \quad (2.17)$$

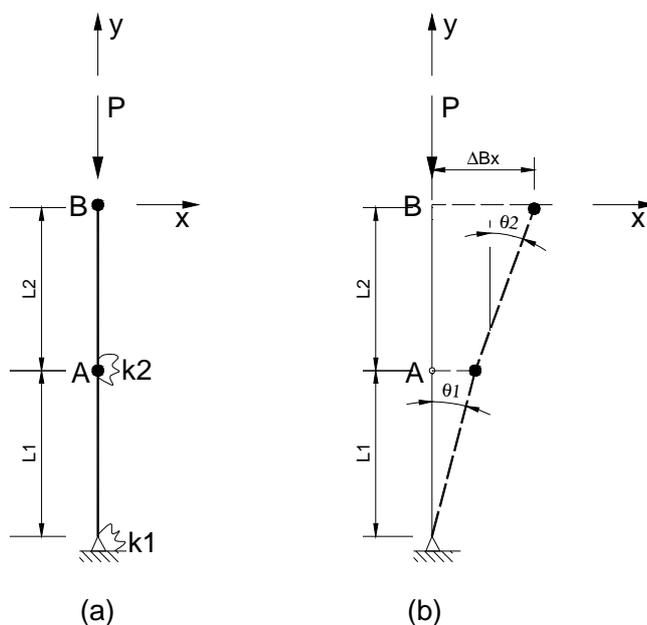
- Equilibrio inestable:

$$\|H_{\Pi,\{q\}}\| < 0 \quad (2.18)$$

En la sección 2.3.5 se justifica por otra vía la razón del determinante observado en estas expresiones.

Para ejemplificar los conceptos desarrollados, se considera el siguiente sistema estructural de 2 G.D.L, que consiste de una columna apoyada en la base con una rigidez rotacional k_1 en este punto y una rigidez rotacional en la unión de las columnas k_2 como se muestra en la Figura 2.11. En el extremo superior de la columna se aplica una carga vertical P . Se desea evaluar la estabilidad de este sistema.

Figura 2.11. Estructura a analizar



Los G.D.L. del sistema son: $[q] = [\theta_1 \ \theta_2]^T$

Los giros relativos de cada columna son: $\Delta_1 = \theta_1$ y $\Delta_2 = \theta_2 - \theta_1$

Los desplazamientos del punto B:

$$\Delta_{x,B} = L_1 \cdot \sin \theta_1 + L_2 \cdot \sin \theta_2$$

$$\Delta_{y,B} = L_1 \cdot (\cos \theta_1 - 1) + L_2 \cdot (\cos \theta_2 - 1)$$

Desde el punto de vista de la energía elástica, esta siempre aumenta al crecer la deformación, pero la energía potencial gravitatoria disminuye al bajar el punto de aplicación de la carga, es decir la inestabilidad del sistema se produce por una pérdida de la energía potencial del sistema.

Planteamiento de la Energía potencial del sistema:

$$\Pi = U - V = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \Delta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot \Delta_2^2 - (P \cdot \Delta_{y,B})$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot k_1 \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1)^2 - P \cdot [L_1 \cdot (\cos \theta_1 - 1) + L_2 \cdot (\cos \theta_2 - 1)]$$

Planteamiento del Equilibrio: según la ecuación (2.15), al derivar el potencial respecto a cada G.D.L., el equilibrio del sistema supone la obtención de un sistema de ecuaciones:

$$J_{\Pi,\{q\}} = \{0\}$$

$$i) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} = k_1 \cdot \theta_1 - k_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) + P \cdot L_1 \cdot \sin(\theta_1 - 1) = 0 \quad [1]$$

$$ii) \quad \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} = k_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) + P \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_2 - 1) = 0 \quad [2]$$

$$J_{\Pi, \{q\}} = \begin{bmatrix} k_1 \cdot \theta_1 - k_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) + P \cdot L_1 \cdot \sin(\theta_1 - 1) \\ k_2 \cdot (\theta_2 - \theta_1) + P \cdot L_2 \cdot \sin(\theta_2 - 1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Se obtiene un sistema no lineal de equilibrio, su solución puede suponer una solución 'exacta' a través de métodos numéricos o se puede plantear una linealización del problema.

2.3.3 LINEALIZACIÓN DE LA ECUACIÓN NO LINEAL DE EQUILIBRIO.

Para simplificar la solución de la ecuación no lineal del equilibrio que resulta al plantear el equilibrio energético, se puede adoptar una linealización de la función en torno a la posición no deformada. Más adelante se ilustrará con un ejemplo la precisión obtenida con esta simplificación respecto a la solución exacta.

Como se vió en la sección anterior, agrupando los G.D.L. del sistema en un vector $\{q\} = \{q_1 \ q_2 \ \dots \ q_n\}^t$, el equilibrio del sistema está dado por $\frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} = 0$, es decir el Jacobiano de Π respecto al vector $\{q\}$. Para simplificar la notación se denota esta condición con el vector $\{g_{(q)}\} = \frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}} = \{0\}$, esta es la ecuación matricial no lineal de equilibrio a resolver.

Si expandimos $\{g_{(q)}\}$ en serie de Taylor en torno a la posición no deformada $\{q_0\} = \{q\} = \{0\}$, se tiene: (10)

$$\begin{aligned} \{g_{(q)}\} \approx & \{g_{\{q\}}\} \Big|_{\{q_0\}} + \frac{\partial g}{\partial \{q\}} \Big|_{\{q_0\}} (\{q\} - \{q_0\}) + \\ & + \frac{1}{2!} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial \{q\} \partial \{q\}^T} \Big|_{\{q_0\}} (\{q\} - \{q_0\})^2 \dots = \{0\} \end{aligned} \quad (2.19)$$

El término $\frac{\partial g}{\partial \{q\}}$ es el **Heciano** de Π respecto a $\{q\}$ puesto que $g_{(q)} = \frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}}$. Si se trunca la serie hasta el segundo término, se obtiene la denominada aproximación de primer orden (puesto que se emplea hasta la primera derivada para hacer aproximación), o linealización de la función $\{g_{(q)}\}$:

$$\{g_{\{q\}}\}_{\{q_0\}} + \frac{\partial g}{\partial \{q\}} \Big|_{\{q_0\}} \cdot \{q\} \approx \{0\} \quad (2.20)$$

$$\{g_{(q)}\}_{\{q_0\}} + H_{\Pi} |_{\{q_0\}} \cdot \{q\} \approx \{0\} \quad (2.21)$$

en donde el subíndice $\{q_0\}$ indica que las funciones son evaluadas en la posición original no deformada $\{q\} = \{0\}$.

Como la función potencial es $\Pi = U - V$ (ecuación (2.2)), el término (i, j) del Heciano de la ecuación (2.21), queda definido así:

$$H_{\Pi(i,j)} = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\{q_0\}} \quad (2.22)$$

$$H_{\Pi(i,j)} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\{q_0\}} - \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \Big|_{\{q_0\}} = H_U |_{\{q_0\}} - H_V |_{\{q_0\}} \quad (2.23)$$

Hasta ahora se tiene un **Heciano** de la energía o trabajo interno U respecto a los G.D.L. del sistema y otro de la energía externa V . Más adelante se verá a qué corresponde cada uno de los términos encontrados.

2.3.4 SISTEMAS CONTINUOS.

Se han desarrollado expresiones para sistemas discretos, pero el planteamiento energético expuesto es igualmente válido para sistemas continuos, con la salvedad de que la energía interna de deformación no se obtiene con una expresión cerrada, sino con una integral. Los conceptos se ilustran con el siguiente ejemplo.

Se considera el sistema continuo mostrado en la Figura 2.12, que consiste en una columna empotrada en la base, de rigidez flexural EI y axialmente rígida, sometida a una carga axial P . Se desea evaluar la estabilidad del sistema.

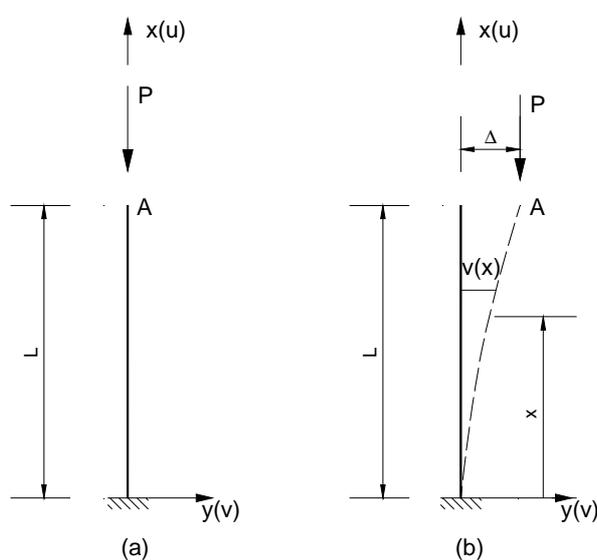
Con las condiciones de borde del problema es factible suponer que la deformada del sistema se adapta a una función del tipo sinusoidal:

$$v(x) = \Delta \cdot \left(1 - \cos \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot x\right)$$

El momento en cualquier sección es:

$$M_{(x)} = P \cdot (\Delta - v(x)) = P \cdot \Delta \cdot \cos \frac{\pi}{2 \cdot L} \cdot x$$

Figura 2.12. Sistema continuo a resolver



La energía interna es ahora una integral y está asociada a la energía de deformación flexural:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L M_{(x)} \cdot \phi_{(x)} \cdot d(x)$$

donde $\phi_{(x)}$ es la curvatura que puede ser expresada como $\phi_{(x)} = \frac{d^2 v(x)}{dx^2} = v''_{(x)}$ y

$M_{(x)} = E \cdot I \cdot v''_{(x)}$; reemplazando:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L E \cdot I \cdot (v''_{(x)})^2 \cdot d(x)$$

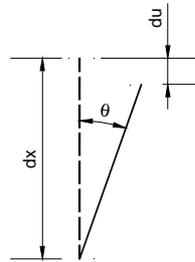
Resolviendo se llega a:

$$U = \frac{E \cdot I}{32 \cdot L^3} \cdot \pi^4 \cdot \Delta^2$$

La energía externa está asociada a una pérdida de energía potencial es decir a una disminución de la altura de aplicación de la carga que corresponde al desplazamiento vertical del punto A.

$$V = P \cdot \Delta_{y,B}$$

Si se analiza un elemento infinitesimal de la columna:



$$du = dx - dx \cdot \cos\theta = (1 - \cos\theta) \cdot dx$$

$$\Delta_{y,B} = \int_0^L du = \int_0^L (1 - \cos\theta) \cdot dx$$

En el campo de desplazamientos pequeños es válido asumir que $\cos\theta \approx 1 - \frac{\theta^2}{2}$, entonces $(1 - \cos\theta) \approx \frac{\theta^2}{2}$, y como θ es el giro de la sección en cada punto:

$\theta = \frac{dv(x)}{dx} = v'(x)$, al reemplazar se tiene:

$$\Delta_{y,B} = \int_0^L \frac{\theta^2}{2} dx = \int_0^L v'(x) \cdot dx = \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\Delta^2}{L} \cdot P$$

Al resolver, la energía externa queda: $V = P \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\Delta^2}{L}$

Planteamiento del potencial (ecuación (2.2)): $\Pi = U - V$

$$\Pi = \frac{L}{4 \cdot E \cdot I} \cdot P^2 \cdot \Delta^2 - P \cdot \frac{\pi^2}{16} \cdot \frac{\Delta^2}{L}$$

Planteamiento del equilibrio: $\frac{d\Pi}{d\Delta} = 0$, tiene 2 soluciones:

i) $P = 0$: solución trivial

ii) $P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}$

Planteamiento de la estabilidad: $\frac{d^2\Pi}{d\Delta^2}$

$$\frac{d^2\Pi}{d\Delta^2} = \frac{\pi^4 \cdot E \cdot I \cdot \Delta}{32 \cdot L^3} - P \cdot \frac{\pi^2 \cdot \Delta}{8 \cdot L}$$

El equilibrio es indiferente si:

$$\frac{d^2\Pi}{d\Delta^2} = 0$$

Resolviendo resulta:

$$P = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}$$

Esta expresión es la carga crítica del sistema P_{cr} , es decir en este punto la estructura es llevada a la inestabilidad sin aplicar trabajo externo alguno; la carga calculada coincide con la carga crítica de pandeo de Euler (3).

El equilibrio es estable si $\frac{d^2\Pi}{d\Delta^2} > 0$, condición que resulta si: $P < P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}$

El equilibrio es inestable si $\frac{d^2\Pi}{d\Delta^2} < 0$, condición que resulta si: $P > P_{cr} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}$

Discusión.- Al plantear la energía o trabajo interno resultó $U = \frac{E \cdot I}{32 \cdot L^3} \cdot \pi^4 \cdot \Delta^2$ y claramente se nota que el valor obtenido está asociado a la rigidez elástica de la columna analizada, ya que es inherente a las características mecánicas del sistema: inercia de la sección transversal, longitud de la barra y módulo de elasticidad del material; y es independiente de las cargas aplicadas. En tanto que, al plantear el trabajo externo se obtuvo $V = P \cdot \frac{\pi^2}{16 \cdot L} \cdot \Delta^2$, valor que es dependiente

de la carga aplicada al sistema, es decir, es variable en cada instante en que se estudie el equilibrio. Es importante notar que el grado de la variable del problema Δ , es el mismo en ambas expresiones U y V lo que permite la resta de sus coeficientes.

Lo discutido permite concluir que el potencial del sistema Π , es una rigidez efectiva del sistema estructural, que resulta de restar cierta cantidad al término de rigidez elástica; en otras palabras el trabajo externo (energía potencial gravitatoria) disminuye la rigidez inicial del sistema.

Esto explica los resultados obtenidos en el punto anterior (ecuación (2.23)), en el que se llegó a expresiones generales para el estudio del equilibrio y estabilidad de sistemas de varios G.D.L; la expresión obtenida para la evaluación de la estabilidad fue: $H_{ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$

Relacionando esta expresión con la discusión realizada, se tiene entonces que el primer término $\frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j}$ asociado al trabajo interno conduce a la matriz de rigidez elástica del sistema y el segundo término $\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}$ asociado al trabajo externo conduce a una matriz que resta término a término los valores de dicha matriz de rigidez elástica. La primera es la matriz de rigidez ampliamente conocida del análisis lineal elástico convencional y en adelante se la denominará **Matriz de Rigidez Elástica K_e** del sistema y la segunda es denominada **Matriz de Rigidez Geométrica K_g** o Matriz de Cargas ⁽⁸⁾ ⁽¹⁰⁾.

$$K_e = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} = H_U : \text{Heciano del trabajo interno} \quad (2.24)$$

$$K_g = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} = H_V : \text{Heciano del trabajo externo} \quad (2.25)$$

El problema de estabilidad puede finalmente ser explicado como un fenómeno físico que disminuye la rigidez del sistema, esta disminución depende del nivel de cargas o estado de esfuerzos del sistema y se debe a una pérdida de la energía

potencial del mismo; la inestabilidad se produce en el instante en que dicha pérdida de energía es de tal magnitud que la rigidez estructural se vuelve nula.

La rigidez efectiva del sistema es entonces (8) (10):

$$[K] = [K_e] - [K_g] \quad (2.26)$$

2.3.5 SOLUCIÓN DE PROBLEMA DE ESTABILIDAD.

De manera general, la energía potencial gravitatoria o trabajo externo en un sistema estructural de n G.D.L es: $V = \{r\}^T \cdot \{P\}$, en donde $\{r\}$ es un vector que contiene las deformaciones del sistema en los puntos de aplicación de la carga y $\{P\}$ es el vector de cargas; se puede escribir:

$$V = r_1 \cdot P_1 + r_2 \cdot P_2 + \dots + r_n \cdot P_n = \sum_{k=1}^n r_k \cdot P_k \quad (2.27)$$

en donde n es el número de G.D.L. del sistema.

El vector de cargas se puede escribir como: $\{P\} = \{P^*\} \cdot \{\hat{n}\}$, donde $\{P^*\}$ es el vector de magnitudes de las cargas y $\{\hat{n}\}$ son los cosenos directores correspondientes, entonces:

$$V = \{P^*\} \sum_{k=1}^n r_k \cdot \hat{n}_k \quad (2.28)$$

Reemplazando estas relaciones en la ecuación (2.23):

$$H_{\Pi ij} = \frac{\partial^2 U}{\partial q_i \partial q_j} - \{P^*\} \sum_{k=1}^n \hat{n}_k \cdot \frac{\partial^2 r_k}{\partial q_i \partial q_j} \quad (2.29)$$

Con base en la ecuación (2.26), la expresión del Heciano del potencial en formato matricial se puede escribir como:

$$[H_{\Pi}] = [K_e] - \{P^*\}[\hat{K}_g] \quad (2.30)$$

en donde $[\widehat{K}_g]$ se refiere a la matriz de rigidez geométrica obtenida para un sistema de cargas unitario o patrón $\{P^*\}$.

Retomando la expresión (2.21), que representaba la linealización de la ecuación no lineal de equilibrio o aproximación de primer orden en torno a la posición no deformada, en que $\{g_{(q)}\}|_{\{q_0\}} = \frac{\partial \Pi}{\partial \{q\}}|_{\{q_0\}}$ se definió como el Jacobiano de la función potencial Π respecto a $\{q\}$ evaluado en $\{q_0\} = \{0\}$, y $H_{\Pi}|_{\{q_0\}} = \left(\frac{\partial g}{\partial \{q\}}\right) = \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \{q_0\}^2}$ como el Heciano de Π respecto a $\{q\}$ evaluado en $\{q_0\}$. La expresión igualada a cero indica que se está evaluando el equilibrio.

Si no hay energía interna almacenada, al evaluar la función $g_{(q)}$ en la posición no deformada, se tiene $\{g_{(q)}\}|_{\{q_0\}} = \{0\}$ y la ecuación (2.21) queda:

$$H_{\Pi}|_{\{q_0\}} \cdot \{q\} \approx \{0\} \quad (2.31)$$

Reemplazando la ecuación (2.30):

$$([K_e] - \{P^*\}[\widehat{K}_g])|_{\{q_0\}} \cdot \{q\} \approx \{0\} \quad (2.32)$$

El subíndice $\{q_0\}$ indica que con esta aproximación, las matrices son obtenidas en la posición inicial no deformada.

$$([K_e] - \{P^*\} \cdot [\widehat{K}_g]) \cdot \{q\} \approx \{0\} \quad (2.33)$$

Esta expresión representa un problema matemático de Valores y Vectores Propios. Para que exista solución el determinante debe ser cero.

$$\| [K_e] - \{P^*\} \cdot [\widehat{K}_g] \| = 0 \quad (2.34)$$

Al resolver el problema se obtienen los valores en magnitud de las cargas $\{P^*\}$, y reemplazando estos en la ecuación (2.33) se obtienen valores de los desplazamientos de los G.D.L. $\{q\}$, que representan la forma que tiene el sistema en el instante de la inestabilidad. Las cargas $\{P^*\}$ calculadas representan las

cargas críticas de pandeo y los vectores $\{q\}$ correspondientes representan las **formas de pandeo asociadas**.

El problema de estabilidad está siempre relacionado a un solo estado de cargas. Al resolver un problema particular, las distintas cargas de pandeo calculadas sólo cambian en magnitud pero no en dirección.

Los valores $\{P^*\}$ obtenidos en la solución son factores adimensionales que multiplican al vector de cargas $\{P\}$ usado en el análisis, normalmente el vector de cargas del análisis sigue un patrón unitario.

De esta manera quedan validadas las expresiones (2.16) a (2.18), que indicaban que la estabilidad de un sistema está definida por el determinante del Heciano del potencial Π respecto a los G.D.L. $\{q\}$ de la siguiente manera:

- Si $\|H_{\Pi,\{q\}}\| > 0$: El equilibrio es estable
- Si $\|H_{\Pi,\{q\}}\| = 0$: El equilibrio es indiferente y define las cargas críticas de pandeo
- Si $\|H_{\Pi,\{q\}}\| < 0$: El equilibrio es inestable.

PROBLEMA DE APLICACIÓN

Una vez revisados los conceptos de la teoría de estabilidad de estructuras con un enfoque energético, es de interés comparar los resultados del análisis de no linealidad geométrica con el análisis lineal elástico y evaluar también la precisión obtenida al usar la aproximación de primer orden desarrollada en la sección 2.3.3 para solución de la ecuación no lineal de equilibrio respecto a la solución exacta de la misma.

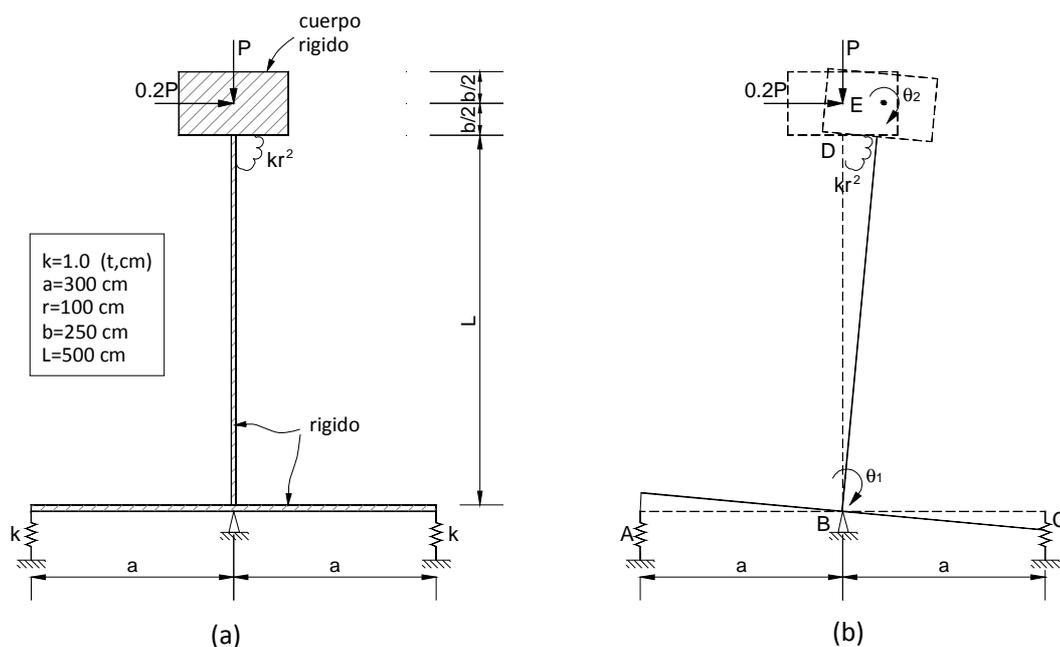
Se tiene un sistema estructural de dos barras rígidas que soporta un cuerpo rígido, los extremos de la viga tienen una rigidez vertical k y la unión de la columna con el cuerpo rígido tiene una rigidez rotacional kr^2 , las demás características se indican en la Figura 2.13. Se pide lo siguiente:

1. Calcular la carga crítica P_{cr} usando una aproximación de primer orden.
2. Calcular los desplazamientos con $P = P_{cr}/2$ usando tres métodos:
 - a. Análisis lineal elástico.
 - b. Análisis de no-linealidad geométrica con aproximación de primer orden.
 - c. Análisis de no-linealidad geométrica resolviendo de forma exacta la ecuación de equilibrio.
3. Comparar los resultados obtenidos en 2.

El sistema tiene 2 G.D.L. como se ve en la Figura 2.13(b), agrupándolos en forma

$$\text{matricial: } \{q\} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Figura 2.13. Estructura a analizar



Parte 1.

La aproximación de primer orden de la ecuación de equilibrio energético está dada por la ecuación (2.21).

$$\{g(q)\}_{\{q_0\}} + H_{\{q_0\}} \cdot \{q\} \approx \{0\}$$

$$\{g_{(q)}\}|_{\{q_0\}} + H|_{\{q_0\}}\{q\} \approx \left. \frac{d\Pi}{d\{q\}} \right|_{\{q_0\}} + \left. \frac{d^2\Pi}{d\{q\}^2} \right|_{\{q_0\}} \cdot \{q\} \approx \{0\}$$

Como se mencionó antes, el subíndice $\{q_0\}$ indica que las funciones son evaluadas en la posición no deformada. Resolviendo para las condiciones del problema:

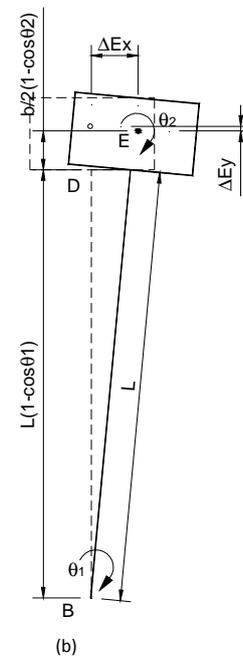
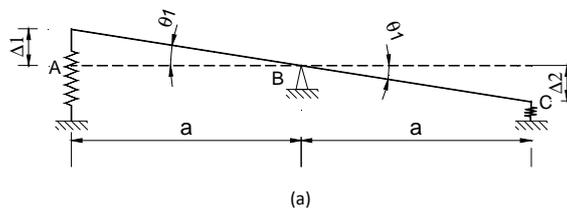
$$\left. \frac{d\Pi}{d\{q\}} \right|_{\{q_0\}} + \left. \frac{d^2\Pi}{d\{q\}^2} \right|_{\{q_0\}} \{q\} = \begin{bmatrix} \frac{d\Pi}{d\theta_1} \\ \frac{d\Pi}{d\theta_2} \end{bmatrix} \Big|_{\{q\}=\{0\}} + \begin{bmatrix} \frac{d^2\Pi}{d\theta_1^2} & \frac{d^2\Pi}{d\theta_1 d\theta_2} \\ \frac{d^2\Pi}{d\theta_2 d\theta_1} & \frac{d^2\Pi}{d\theta_2^2} \end{bmatrix} \Big|_{\{q\}=\{0\}} \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix}$$

Función potencial: $\Pi = U - V$

Trabajo interno: es la energía de deformación elástica

$$U = \sum_{i=1}^3 \frac{1}{2} \cdot k_i \cdot \Delta_i^2 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot a^2 \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot a^2 \cdot \theta_2^2 + \frac{1}{2} \cdot kr^2 \cdot (\theta_1 - \theta_2)^2$$

$$U = k \cdot a^2 \cdot \theta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot kr^2 \cdot (\theta_1 - \theta_2)^2$$



Trabajo Externo: es la energía potencial del sistema

$$V = 0.2 \cdot P \cdot \Delta E_x + P \cdot \Delta E_y$$

$$\Delta E_x = L \cdot \sin\theta_1 + \frac{b}{2} \cdot \sin\theta_2$$

$$\Delta E_y = L \cdot (1 - \cos\theta_1) + \frac{b}{2} \cdot (1 - \cos\theta_2)$$

Matrices de Rigidez

Matriz de Rigidez Elástica: ecuación (2.24)

$$[K_e] = \frac{\partial^2 U}{\partial \{q\} \partial \{q\}^T} \Big|_{\{q_0\}} = H_U: \text{Heciano del trabajo interno}$$

Resolviendo en MATLAB:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} \frac{d^2 U}{d\theta_1^2} & \frac{d^2 U}{d\theta_1 d\theta_2} \\ \frac{d^2 U}{d\theta_2 d\theta_1} & \frac{d^2 U}{d\theta_2^2} \end{bmatrix}_{\{q_0\}} = \begin{bmatrix} (2 \cdot a^2 + r^2) \cdot k & -r^2 \cdot k \\ -r^2 \cdot k & r^2 \cdot k \end{bmatrix}$$

Matriz de Rigidez Geométrica: ecuación (2.25)

$$[K_g] = \frac{\partial^2 V}{\partial \{q\} \partial \{q\}^T} \Big|_{\{q_0\}} = H_V: \text{Heciano del trabajo externo}$$

Resolviendo en MATLAB:

$$[K_g] = \begin{bmatrix} \frac{d^2 V}{d\theta_1^2} & \frac{d^2 V}{d\theta_1 d\theta_2} \\ \frac{d^2 V}{d\theta_2 d\theta_1} & \frac{d^2 V}{d\theta_2^2} \end{bmatrix}_{\{q_0\}}$$

$$[K_g] = \{P\} \cdot \begin{bmatrix} (-0.2\sin\theta_1 + \cos\theta_1)L & 0 \\ 0 & (-0.1\sin\theta_2 + 0.5\cos\theta_2)b \end{bmatrix}_{\{q\}=\{0\}}$$

Evaluando en $\{q\} = \{0\}$: $\theta_1 = \theta_2 = 0$

$$[K_g] = \{P\} \cdot \begin{bmatrix} L & 0 \\ 0 & \frac{b}{2} \end{bmatrix}$$

Se debe notar que la matriz de rigidez geométrica no siempre es invertible, como en este caso.

Matriz de Rigidez Total o Efectiva: ecuación (2.26)

$$[K] = [K_e] - [K_g]$$

Cargas críticas: Se determinan en el estado de equilibrio indiferente, es decir cuando el determinante del Heciano de Π respecto a los G.D.L. $\{q\}$ es igual a cero (ecuación (2.34)).

$$\| [K_e] - \{P^*\} \cdot [K_g] \| = 0$$

Resolviendo y reemplazando los datos del problema se tiene:

$$\{P^*\} = \begin{Bmatrix} 74.76 \\ 385.24 \end{Bmatrix}$$

Interesa el menor valor de los factores de $\{P^*\}$, entonces la carga crítica es:

$$\{P_{cr}\} = 74.76 \begin{Bmatrix} P \\ 0.2P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 74.76 \\ 14.95 \end{Bmatrix} \cdot t$$

Parte 2.

Se pide calcular los desplazamientos usando $P = \frac{P_{cr}}{2} = \frac{74.76}{2} = 37.38 t$ por varios métodos.

a) Análisis lineal elástico.

$$[K_e] \cdot \{q\} = \{P_o\}$$

donde $\{P_o\}$ es el vector de cargas correspondientes a los G.D.L:

$$\{P_o\} = \begin{bmatrix} 0.2 \cdot P \cdot L \\ 0.2 \cdot P \cdot \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.2 \cdot 37.38 \cdot L \\ 0.2 \cdot 37.38 \cdot \frac{b}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3738.0 \\ 934.5 \end{bmatrix} t \cdot cm$$

y $[K_e]$ es la matriz de rigidez elástica antes calculada:

$$[K_e] = \begin{bmatrix} 1.9 & -0.1 \\ -0.1 & 0.1 \end{bmatrix} \cdot 10^5$$

Resolviendo se tiene:

$$\{q\} = [K_e]^{-1} \cdot \{P_o\} = \begin{bmatrix} 0.026 \\ 0.119 \end{bmatrix} rad$$

b) Análisis de no-linealidad geométrica con aproximación de primer orden

Para evitar recalcular la matriz de rigidez geométrica correspondiente a $P = \frac{P_{cr}}{2} = 37.38 t$ se puede separar el vector de cargas $\{P\}$ de la expresión de la matriz de rigidez geométrica y expresar la solución como:

$$([K_e] - P \cdot [K_g])\{q\} = \{P_o\}$$

Los términos son los indicados antes, resolviendo se tiene:

$$\{q\} = \left([K_e] - \frac{P_{cr}}{2} \cdot [K_g] \right)^{-1} \cdot \{P_o\} = \begin{bmatrix} 0.036 \\ 0.249 \end{bmatrix} \cdot rad$$

c) Solución exacta

La ecuación no lineal de equilibrio es $\frac{d\Pi}{d\{q\}} = \{0\}$; en las secciones anteriores se usó una aproximación de primer orden para resolver la ecuación (o sistemas de ecuaciones). La solución exacta del sistema se puede encontrar usando MATLAB y resulta:

$$\{q\} = \begin{bmatrix} 0.0355 \\ 0.2354 \end{bmatrix} \cdot rad$$

Parte 3.

Se hace una comparación de los errores porcentuales en la estimación de los desplazamientos calculados en la parte 2. La solución del literal 2.c se considera como la verdadera y en función de esta se harán las comparaciones.

Caso 2.a. Análisis lineal elástico

$$\frac{q}{q_{verdadero}} = \begin{bmatrix} 0.73 \\ 0.51 \end{bmatrix}; \text{ ERROR: } \begin{bmatrix} 27\% \\ 49\% \end{bmatrix}$$

Caso 2.b. Análisis no-lineal con aproximación de primer orden:

$$\frac{q}{q_{verdadero}} = \begin{bmatrix} 1.013 \\ 1.032 \end{bmatrix}; \text{ ERROR: } \begin{bmatrix} 1.3\% \\ 3.2\% \end{bmatrix}$$

Se observa que en problemas donde se evalúa el comportamiento de un sistema ante cargas elevadas, el análisis lineal elástico predice de muy mala manera los desplazamientos (y por ende los esfuerzos), las cargas de la parte 2 del problema correspondieron a la mitad de la carga crítica que es un valor que podría considerarse común en un diseño convencional.

CAPÍTULO 3.

SOLUCIÓN MATRICIAL DEL PROBLEMA DE ESTABILIDAD USANDO ELEMENTOS FINITOS

3.1 INTRODUCCIÓN

En las secciones anteriores se discutieron las bases teóricas del problema de estabilidad en cuanto a las formas en que se puede presentar, los métodos analíticos para su solución y su posibilidad de ocurrencia, todo desde un enfoque energético. Aunque este enfoque es válido en cuanto a la representación física del problema, sólo es aplicable en sistemas estructurales sencillos; por esto es necesario enfocar el problema de manera que su tratamiento matemático sea sistemático y fácil de implementar computacionalmente para enfrentar la solución de problemas más complejos de la ingeniería estructural.

En esta sección se desarrolla un método matricial de rigidez para la solución de la no-linealidad geométrica de sistemas estructurales planos y espaciales, es decir para el cálculo de las cargas críticas y formas de pandeo. Las deducciones de las matrices requeridas se hacen usando el principio de trabajo virtual (P.T.V.) descrito en la sección 2.2.2 y adoptando funciones de forma según las características del miembro considerado, como se describe en la siguiente sección.

Como se estudió en el capítulo anterior, un análisis de no-linealidad geométrica o de estabilidad involucra el cálculo de una matriz de rigidez elástica K_e , que es característica del sistema estructural e independiente de las cargas aplicadas, y otra matriz de rigidez geométrica K_g que es característica de las cargas aplicadas al sistema. La matriz de rigidez total o efectiva es $[K] = [K_e] - [K_g]$.

La matriz de rigidez elástica se calcula de manera convencional y su obtención se estudia en cualquier texto de Análisis Estructural, por lo que en esta sección se estudiará únicamente el cálculo de las matrices de rigidez geométrica.

3.2 NIVELES DE ANÁLISIS.

Se deben distinguir dos niveles de análisis de no-linealidad geométrica ⁽⁸⁾:

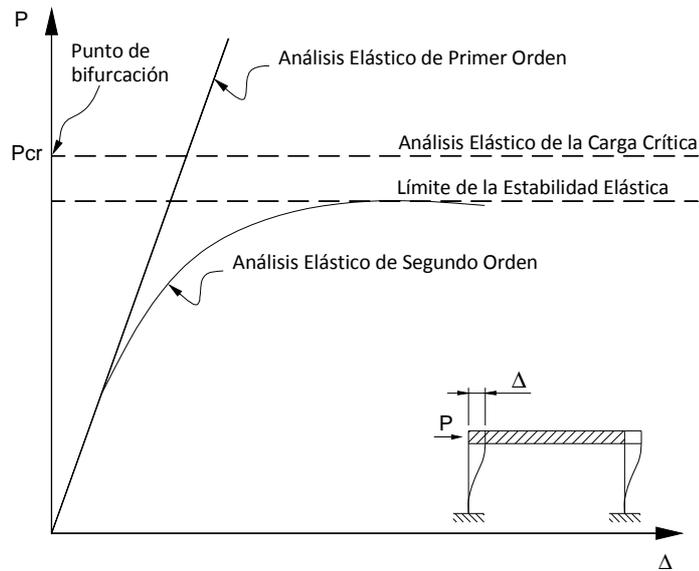
1. **Análisis Elástico de la Carga Crítica.-** Este tiene como objeto el encontrar las cargas críticas de pandeo y formas de pandeo de una estructura, sin considerar la posición deformada para el cálculo de las matrices de rigidez elásticas del problema, pero sí se considera el estado de esfuerzos en los miembros provocados por las cargas para el cálculo de las matrices de rigidez geométricas. La matriz de rigidez elástica permanece constante y la geométrica es calculada según el estado de esfuerzos de los miembros estructurales para el cual se quiere resolver el problema, por tanto también es calculada una sola vez en la solución del problema.

En este análisis no es factible determinar la historia de comportamiento no-lineal de la estructura, como se muestra en la Figura 3.1. Este análisis permite calcular las deformaciones considerando los efectos $P - \Delta$, pero únicamente obtiene el estado final de esfuerzos y deformaciones.

2. **Análisis Elástico de Segundo Orden.-** El segundo análisis posible es un análisis incremental en carga o deformación ⁽¹⁰⁾, que considera la posición deformada en cada instante para la determinación de las matrices de rigidez elásticas y geométricas; ninguna de las dos matrices permanecen constantes durante el proceso de cálculo y se recalculan a medida que la estructura se va deformando al incrementar la carga, permitiendo de esta manera estudiar la influencia de los efectos $P - \Delta$ en toda la historia de aplicación de carga. El valor máximo alcanzado con este análisis se encuentra por debajo de la carga crítica calculada con el primer nivel de análisis (Figura 3.1).

La precisión de los resultados en este análisis depende de los intervalos en que se subdivide la carga y de la discretización de los miembros del sistema estructural considerado, como se discute en la sección 3.4.2.

Figura 3.1. Tipos de análisis de no linealidad geométrica



En la sección 2.3.3 se hizo una linealización de la ecuación no lineal de equilibrio; el uso de esta simplificación se basa en que el incremento de deformaciones generadas durante la aplicación de cada paso de carga es pequeño, tal que los términos de segundo o mayor orden pueden ser despreciados sin perder precisión en el análisis (10).

Para el tratamiento matemático del problema se requiere el conocimiento de ciertos conceptos relacionados con el método de elementos finitos, uno fundamental es el de Funciones de Forma (11) (10).

3.3 FUNCIONES DE FORMA.

Las funciones de forma definen el campo de desplazamientos a lo largo de un miembro estructural a partir de los desplazamientos de extremo del mismo, cumpliendo las condiciones de borde impuestas.

A continuación se deducen las funciones de forma de una barra plana de 6 G.D.L, que en adelante serán usadas según las condiciones particulares del problema analizado.

Figura 3.2. Elemento plano genérico

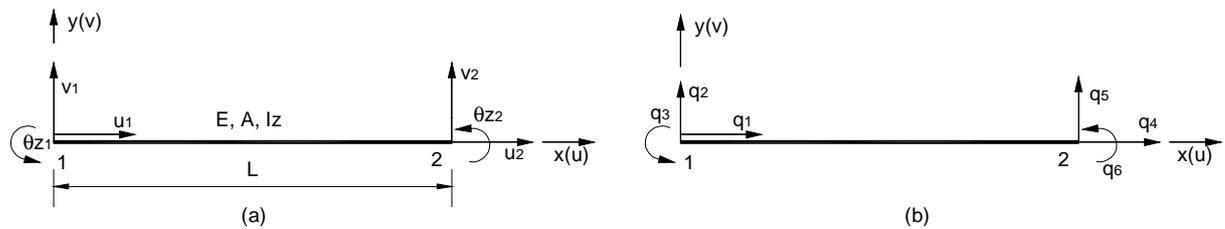
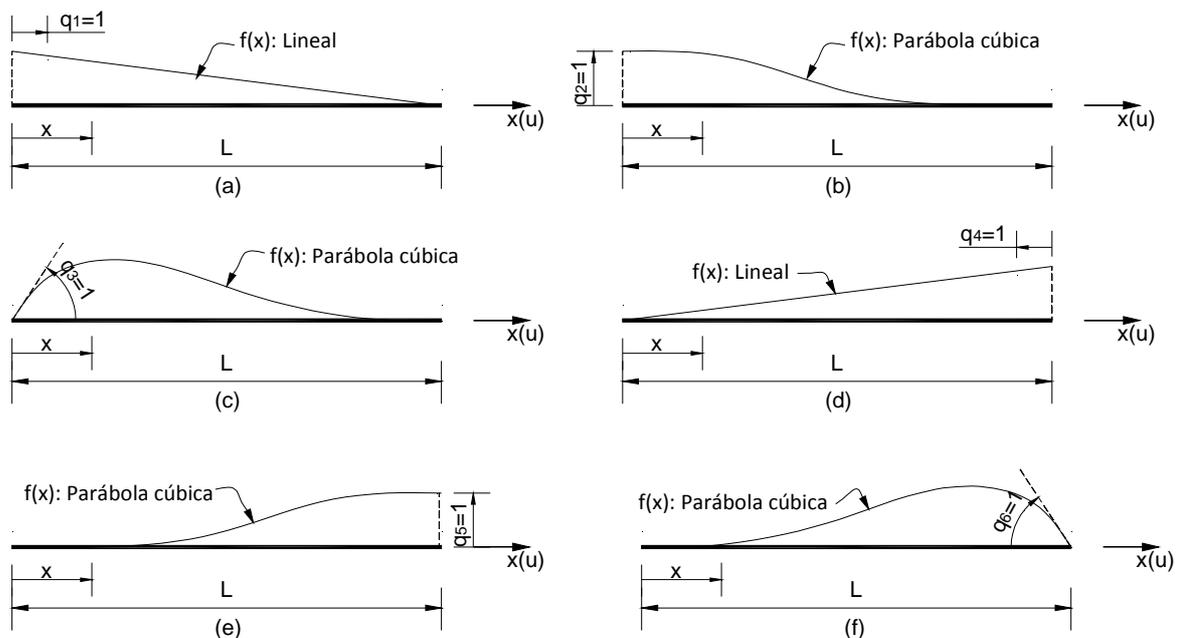


Figura 3.3 Deformaciones unitarias en cada G.D.L.



Si se aplica una deformación unitaria en el G.D.L. q_1 , mientras los restantes son nulos, las deformaciones axiales en cualquier punto de la barra son como se muestran en la Figura 3.3(a). La deformada adopta una función lineal y las condiciones de borde llevan a la siguiente ecuación de la función:

$$f(x) = N_{u_1} = -\frac{1}{L} \cdot x + 1 \tag{3.1}$$

Como se supone linealidad de la relación esfuerzo deformación del material, si la deformación en el G.D.L. q_1 no es unitaria, las deformaciones a lo largo de la barra pueden ser expresadas como:

$$u_{1(x)} = N_{u_1} \cdot q_1 \quad (3.2)$$

donde N_{u_1} es la función de forma asociada al desplazamiento del G.D.L. q_1 .

Si se aplica una deformación unitaria en el G.D.L. q_2 , mientras los restantes son nulos, se tiene la configuración deformada mostrada en la Figura 3.3(b). La deformada tiene doble curvatura por lo que su función es una curva parabólica de tercer orden, cuya ecuación tiene la forma:

$$f(x) = A \cdot x^3 + B \cdot x^2 + C \cdot x + D \quad (3.3)$$

$$\text{Para } x = 0: y = 1.0 : \quad A \cdot (0)^3 + B \cdot (0)^2 + C \cdot (0) + D = 1.0 : \quad D = 1.0$$

$$\text{Para } x = L: y = 0 : \quad A \cdot (L)^3 + B \cdot (L)^2 + C \cdot (L) + D = 0$$

$$\text{Para } x = 0: y' = 0 : \quad 3 \cdot A \cdot (0)^2 + 2 \cdot B \cdot (0) + C \cdot (0) + 0 = 0: \quad C = 0$$

$$\text{Para } x = L: y' = 0 : \quad 3 \cdot A \cdot (L)^2 + 2 \cdot B \cdot (L) + 0 = 0$$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$$f(x) = N_{v_1} = \frac{2}{L^3} \cdot x^3 - \frac{3}{L^2} \cdot x^2 + 1 \quad (3.4)$$

Si la deformación en el G.D.L. q_2 no es unitaria, las deformaciones perpendiculares a la barra pueden ser expresadas como:

$$v_{1(x)} = N_{v_1} \cdot q_2 \quad (3.5)$$

donde N_{v_1} es la función de forma asociada al desplazamiento del G.D.L. q_2 .

Si se aplica una deformación unitaria en el G.D.L. q_3 , mientras los restantes son nulos, se tiene la configuración deformada mostrada en la Figura 3.3(c). La deformada tiene doble curvatura por lo que su función es también una curva parabólica como la ecuación (3.3). Las condiciones de borde imponen:

$$\text{Para } x = 0: y = 0: \quad A \cdot (0)^3 + B \cdot (0)^2 + C \cdot (0) + D = 0 : \quad D = 0$$

$$\text{Para } x = L: y = 0 : \quad A \cdot (L)^3 + B \cdot (L)^2 + C \cdot (L) + D = 0$$

$$\text{Para } x = 0: y' = 1.0 : \quad 3 \cdot A \cdot (0)^2 + 2 \cdot B \cdot (0) + C = 1.0: \quad C = 1$$

$$\text{Para } x = L: y' = 0 : \quad 3 \cdot A \cdot (L)^2 + 2 \cdot B \cdot (L) + 0 = 0$$

Resolviendo el sistema se tiene que:

$$f(x) = N_{\theta z_1} = \frac{1}{L^2} \cdot x^3 - \frac{2}{L} \cdot x^2 + x \quad (3.6)$$

Si la deformación en el G.D.L. q_3 no es unitaria, las deformaciones perpendiculares a la barra pueden ser expresadas como:

$$\theta_{z_1(x)} = N_{\theta z_1} \cdot q_3 \quad (3.7)$$

donde $N_{\theta z_1}$ es la función de forma asociada al desplazamiento del G.D.L. q_3 .

Si se aplica el mismo procedimiento a los restantes G.D.L, las funciones de forma asociadas a estos G.D.L. son:

$$N_{u_1} = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.8)$$

$$N_{v_1} = 1 - 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.9)$$

$$N_{\theta z_1} = x \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (3.10)$$

$$N_{u_2} = \frac{x}{L} \quad (3.11)$$

$$N_{v_2} = 3 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (3.12)$$

$$N_{\theta_{z_2}} = -\frac{x^2}{L} \cdot \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (3.13)$$

Para las operaciones matriciales, las funciones de forma se agrupan de la siguiente manera:

Para deformaciones axiales:

$$[N_u] = [N_{u_1} \quad 0 \quad 0 \quad N_{u_2} \quad 0 \quad 0] \quad (3.14)$$

Como el efecto corte y flexión está acoplado, para deformaciones transversales a la barra y contenidas en el plano de aplicación de las cargas, el vector de funciones de forma es:

$$[N_v] = [0 \quad N_{v_1} \quad N_{\theta_1} \quad 0 \quad N_{v_2} \quad N_{\theta_2}] \quad (3.15)$$

A estas expresiones se las conoce como vectores de funciones de forma de una barra plana.

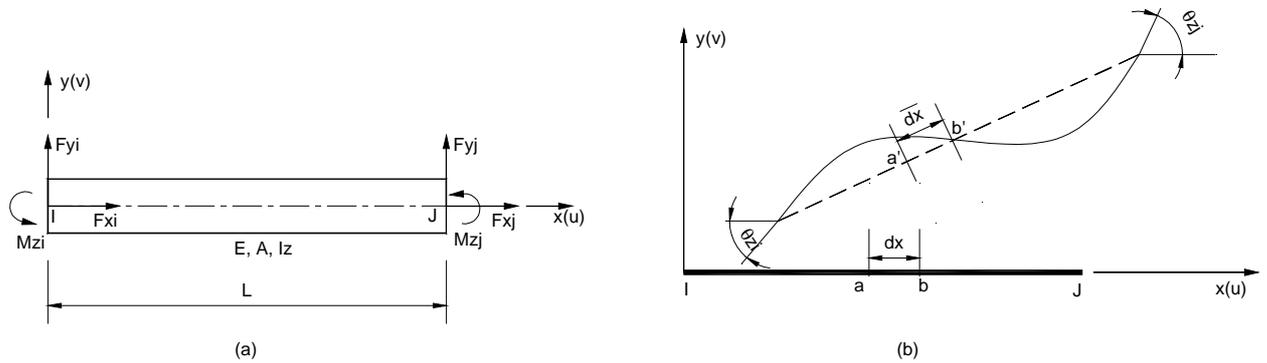
De manera general, el campo de desplazamiento de una barra en el plano se puede definir como:

$$D_{(x)} = N_{u_1} \cdot q_1 + N_{v_1} \cdot q_2 + N_{\theta_1} \cdot q_3 + N_{u_2} \cdot q_4 + N_{v_2} \cdot q_5 + N_{\theta_2} \cdot q_6 \quad (3.16)$$

3.4 MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA PARA BARRAS CON DEFORMACIONES EN EL PLANO

Se considera un elemento prismático de sección transversal constante con doble simetría sujeto a fuerza axial y flexión alrededor del eje z , como se muestra en la Figura 3.4.

Figura 3.4. Elemento prismático considerado con 6 G.D.L.



Una vez aplicadas las cargas, el miembro toma la configuración de la Figura 3.4(b).

3.4.1 DEFORMACIÓN AXIAL UNICAMENTE

Si inicialmente se analiza solamente el comportamiento axial, es decir el elemento permanece recto, sin ser sometido a flexión; un elemento infinitesimal de la viga toma la configuración mostrada en la Figura 3.5.

Las nuevas coordenadas del elemento infinitesimal permiten conocer la longitud del elemento deformado:

$$\|a'b'\| = \left[1 + 2 \cdot \frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right]^{1/2} \cdot dx \quad (3.17)$$

Luego, la deformación se define como:

$$\frac{\text{Largo final}}{\text{Largo inicial}} = \frac{\overline{dx}}{dx} = \frac{\|a'b'\|}{\|ab\|} = [1 + d_{ab}]^{1/2} \quad (3.18)$$

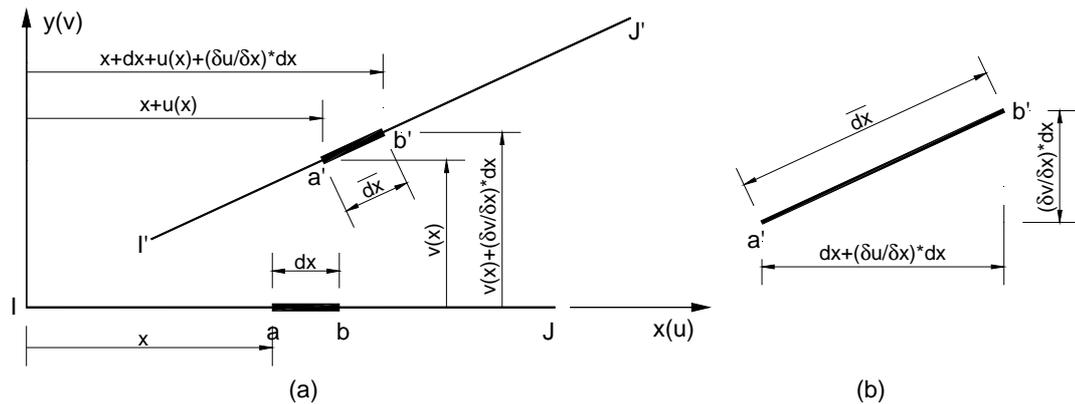
donde:

$$d_{ab} = 2 \cdot \frac{du}{dx} + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \quad (3.19)$$

Este término es altamente no-lineal; expandiendo la expresión en serie de Taylor y truncando términos de orden mayor a dos, se tiene:

$$\frac{\overline{dx}}{dx} \approx 1 + \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.20)$$

Figura 3.5. Configuración deformada considerando que el eje de la viga permanece recto



Se debe notar que en esta expresión ya participa la deformación vertical dv ; el término $\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]$ se conoce como **Deformación de Green**. Esta es otra diferencia del análisis de no-linealidad geométrica, pues a diferencia del análisis lineal elástico en el que la deformación axial unitaria de un elemento plano sólo depende de su deformación longitudinal, ahora este término ya es dependiente también de la deformación transversal.

La deformación unitaria es:

$$e_{fin} = \frac{\overline{dx} - dx}{dx} = \frac{\overline{dx}}{dx} - 1 \quad (3.21)$$

$$e_{fin} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.22)$$

e_{fin} se denomina deformación unitaria finita, ya que proviene de un truncamiento de la expansión de la serie.

En el análisis lineal elástico la deformación unitaria es $e = \frac{du}{dx}$. Ahora se ve que este valor es en realidad una aproximación, considerando la deformación de

Green: $\frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right]$ se tiene su valor exacto o casi exacto ya que se truncó términos de alto orden.

Si se aplica el principio de trabajos virtuales en la configuración inicial, el trabajo interno asociado a la deformación unitaria e_{fin} es:

$$dW_{int} = \int_V \sigma_x \cdot \delta e_{fin} \cdot dV \quad (3.23)$$

donde σ_x es el esfuerzo axial en el elemento, δe_{fin} un desplazamiento virtual y dV un diferencial del volumen que se puede escribir como $dV = A \cdot dx$. El operador virtual δ tiene propiedades de un diferencial (sección 2.2.2) y por tanto es intercambiable con otros términos similares; reemplazando queda:

$$dW_{int} = \int_0^L \sigma_x \cdot \frac{d\delta u}{dx} \cdot A \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \sigma_x \cdot \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \cdot A \cdot dx \quad (3.24)$$

Se emplea la relación esfuerzo-deformación lineal: $\sigma_x = E \cdot e = E \cdot \frac{du}{dx}$, en donde E es el módulo de elasticidad. Reemplazando σ_x en el primer término solamente, puesto que el segundo término es altamente no lineal (luego se verá que en este término se concentra la no-linealidad del problema), se tiene:

$$dW_{int} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \sigma_x \cdot A \cdot \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx \quad (3.25)$$

En el segundo término se identifica la relación $N_o = \sigma_x \cdot A$, que es la fuerza axial.

$$dW_{int} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot N_o \cdot \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx \quad (3.26)$$

Resolviendo el término $\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 = 2 \cdot \left(\frac{d\delta u}{dx} \cdot \frac{\delta u}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \cdot \frac{\delta v}{dx} \right)$, y recordando que el primer término asociado a las propiedades de rigidez, conduce a la matriz de rigidez elástica (por contener los términos de rigidez $E \cdot A$), y el segundo

término, asociado a las cargas (por contener N_o) conduce a la matriz de rigidez geométrica (10).

$$dW_{int} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx + N_o \cdot \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} \cdot \frac{\delta u}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \cdot \frac{\delta v}{dx} \right) \cdot dx \quad (3.27)$$

$$dW_{int} = dW_{int-elást.} + dW_{int-geom.} \quad (3.28)$$

Específicamente el primer término conduce a la matriz de rigidez elástica lineal de un elemento en compresión (8), por lo que sólo se enfoca ahora en resolver el segundo término: $N_o \cdot \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} \cdot \frac{\delta u}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \cdot \frac{\delta v}{dx} \right) \cdot dx$

Usando el concepto de funciones de forma descrito en la sección 3.3, se sabe que:

$$\{u_{(x)}\} = \{N_{u_{(x)}}\} \cdot \{q\} \quad (3.29)$$

$$\{v_{(x)}\} = \{N_{v_{(x)}}\} \cdot \{q\} \quad (3.30)$$

y sus derivadas:

$$\{u_{(x)}\}' = \{N'_{u_{(x)}}\} \cdot \{q\} \quad (3.31)$$

$$\{v_{(x)}\}' = \{N'_{v_{(x)}}\} \cdot \{q\} \quad (3.32)$$

donde:

$u_{(x)}$: Campo de desplazamientos a lo largo de la barra

$v_{(x)}$: Campo de desplazamientos perpendiculares a la barra

$N_{u_{(x)}}$: Vector de funciones de forma asociado a los desplazamientos a lo largo de la barra

$N_{v_{(x)}}$: Vector de funciones de forma asociado a los desplazamientos perpendiculares a la barra

$\{q\}$: Vector de desplazamientos nodales de extremo de la barra:

$$\{q\} = [u_1 \quad v_1 \quad u_2 \quad v_2]^T$$

N_o : Fuerza axial en el elemento calculada en la posición inicial.

Reemplazando estas expresiones y haciendo los arreglos necesarios para mantener la consistencia de las operaciones matriciales, la expresión del trabajo asociado al segundo término queda:

$$dW_{int-geom.} = \{q\}^T \cdot N_o \cdot \int_0^L \left[\{N'_{u(x)}\}^T \cdot \{N'_{u(x)}\} + \{N'_{v(x)}\}^T \cdot \{N'_{v(x)}\} \right] \cdot dx \cdot \{q\} \quad (3.33)$$

Planteando el trabajo externo se demuestra que los términos que definen la matriz de rigidez geométrica son:

$$[K_g] = N_o \cdot \int_0^L \left[\{N'_{u(x)}\}^T \cdot \{N'_{u(x)}\} + \{N'_{v(x)}\}^T \cdot \{N'_{v(x)}\} \right] \cdot dx \quad (3.34)$$

En este caso particular, en que sólo se han considerado los esfuerzos axiales, las funciones de forma necesarias para resolver la integral son:

$$[N_u] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & 0 & \frac{x}{L} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$[N_v] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{L-x}{L} & 0 & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

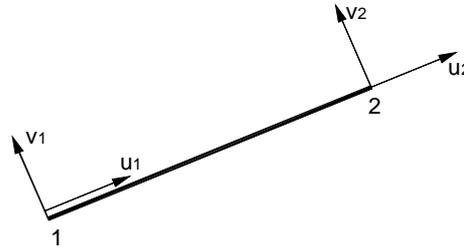
Resolviendo las operaciones usando MATLAB se calcula la matriz de rigidez geométrica:

$$[K_g] = \frac{N_o}{L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Esta matriz está asociada a los desplazamientos indicados en la Figura 3.6.

Para el caso en que existan esfuerzos axiales y flexurales, ya no es aplicable esta expresión pues hay que considerar la combinación de estos esfuerzos para tener una expresión completa.

Figura 3.6. G.D.L. a los que está referida la ecuación (3.37)



3.4.2 ACOPLAMIENTO DE ESFUERZOS AXIALES Y FLEXURALES.

Para incluir los efectos de flexión en la matriz de rigidez geométrica deducida, se debe considerar la deformación producida por la flexión (Figura 3.4(b)), a través de la incorporación de la rotación en la deformación unitaria antes definida (8); tal que $e_{\theta} = y \cdot \phi(x)$, donde e_{θ} es la deformación unitaria longitudinal debida a la flexión, $\phi(x) = \frac{d^2v}{dx^2}$ es la curvatura e y es la coordenada vertical de un punto de la sección transversal. La deformación unitaria queda:

$$e_{fin} = \frac{du}{dx} - y \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.38)$$

El trabajo virtual interno es:

$$dW_{int} = \int_0^L \sigma_x \cdot \frac{d\delta u}{dx} \cdot A \cdot dx + \int_0^L \sigma_x \cdot y \cdot \left(\frac{d^2v}{dx^2} \right) \cdot A \cdot dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^L \sigma_x \cdot \left[\delta \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 \right] \cdot A \cdot dx \quad (3.39)$$

Se sabe que el esfuerzo axial es: $\sigma_x = -\frac{y \cdot M_z}{I_z}$, y el momento de inercia es

$I_z = \int_A y^2 \cdot dA$; usando la relación esfuerzo-deformación elástica, se tiene:

$$dW_{int} = \int_0^L \frac{d\delta u}{dx} \cdot E \cdot A \cdot \frac{du}{dx} \cdot dx + \int_0^L \frac{d\delta v}{dx} \cdot E \cdot I_z \cdot \frac{dv}{dx} \cdot dx + N_o \cdot \int_0^L \left(\frac{d\delta u}{dx} \cdot \frac{\delta u}{dx} + \frac{d\delta v}{dx} \cdot \frac{\delta v}{dx} \right) \cdot dx \quad (3.40)$$

Como se hizo en la sección anterior, al usar el concepto de funciones de forma, la matriz de rigidez geométrica se calcula con la siguiente expresión:

$$[K_g] = N_o \cdot \int_0^L \left[\{N'_{u(x)}\}^T \cdot \{N'_{u(x)}\} + \{N'_{v(x)}\}^T \cdot \{N'_{v(x)}\} \right] \cdot dx \quad (3.41)$$

En este caso, las funciones de forma requeridas son:

$$[N_u] = [N_{u_1} \quad 0 \quad 0 \quad N_{u_2} \quad 0 \quad 0] \quad (3.42)$$

$$[N_v] = [0 \quad N_{v_1} \quad N_{\theta_1} \quad 0 \quad N_{v_2} \quad N_{\theta_2}] \quad (3.43)$$

Los valores de N_{u_1} , N_{u_2} , N_{v_1} , N_{v_2} , N_{θ_1} y N_{θ_2} se dedujeron en la sección 3.3.

Al resolver las operaciones de la ecuación (3.41) usando MATLAB, se obtiene la matriz de rigidez geométrica de elementos planos:

$$[K_g] = \frac{N_o}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & \frac{2L^2}{15} & & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

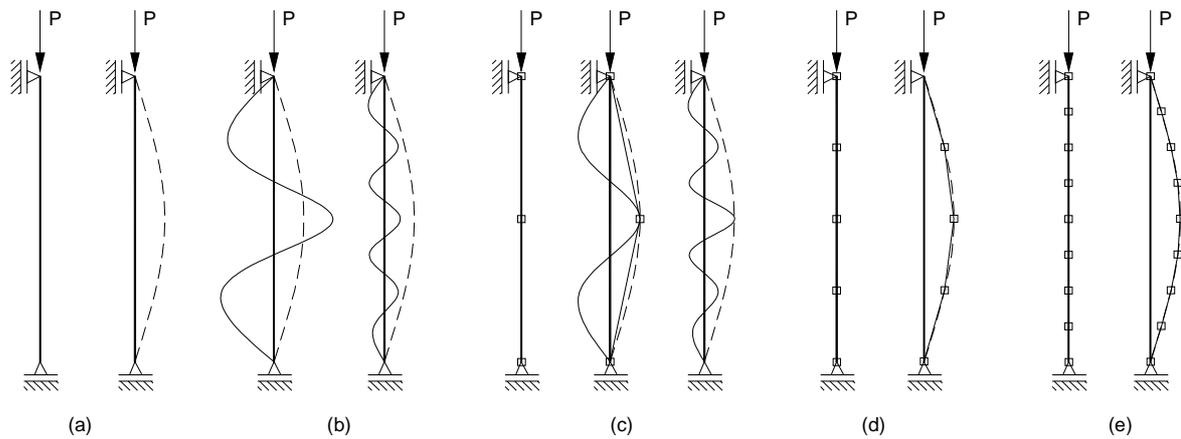
Esta matriz ya está completa, pues considera deformaciones axiales y flexurales, es la matriz a usar en problemas bidimensionales de barras prismáticas, siempre y cuando las deformaciones por inestabilidad estén contenidas en el plano de carga; en caso contrario se debe usar la matriz descrita en la sección 3.5.2.

Discretización de miembros estructurales

Las expresiones deducidas en esta sección parten de considerar un elemento infinitesimal dx de eje recto (Figura 3.4). Esto supone que para estudiar el

problema de estabilidad es necesario discretizar las barras para considerar el hecho de que cerca al estado de inestabilidad, estas han sufrido deformaciones importantes y que el eje de cada miembro completo ya no es recto. Al dividirlo en elementos más pequeños ya es posible representar este efecto, como se muestra esquemáticamente en la Figura 3.7.

Figura 3.7. Representación gráfica de la necesidad de discretizar los miembros estructurales



En la Figura 3.7, en (a) se muestra con línea punteada la columna con la forma continua del pandeo crítico real. En (b) se muestra la columna sin ninguna discretización interior y sólo se conoce la condición de deformación en los puntos extremos y cualquier forma puede adoptarse a esta descripción, y por ende no es posible representar la inestabilidad del sistema. En (c) se muestra la columna con una discretización interior y sólo es posible condicionar el punto medio de la deformada lateral y de la misma forma varias curvas pueden cumplir esta condición. En (d) con tres subdivisiones, la predicción de la forma de pandeo mejora consistentemente y conforme aumenta el número de discretizaciones del miembro la predicción de la forma de pandeo y por tanto su carga crítica de pandeo correspondiente es más cercana a la real. De todas maneras es importante reconocer que si no se subdivide el miembro es imposible representar la deformada progresiva al estudiar la estabilidad de un sistema.

Otra conclusión importante de la Figura 3.7 es que aunque se trate de un problema de esfuerzos axiales de compresión, el efecto de la inestabilidad sólo se puede representar al considerar el acoplamiento de los esfuerzos de compresión

y flexión, pues estos últimos aparecen como consecuencia de la inestabilidad debida a carga axial únicamente. Entonces aunque el problema trate de elementos en compresión axial, la ecuación (3.41) debe ser empleada.

3.5 MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA PARA BARRAS EN TRES DIMENSIONES

3.5.1 ACOPLAMIENTO DE ESFUERZOS AXIALES Y TORSIONALES.

En la sección 3.4.2 se desarrolló la matriz de rigidez geométrica para barras en el plano; específicamente su aplicación es válida cuando los efectos de inestabilidad (deformaciones de pandeo) ocurren en el plano donde están aplicadas las cargas. Pero en el caso de una barra horizontal en voladizo que tiene cargas verticales aplicadas en el plano de la barra, la inestabilidad se puede presentar por desplazamientos laterales contenidos en el plano perpendicular al de la barra, que no contiene las cargas, generando el denominado pandeo lateral por flexotorsión. Como las deformaciones que sufre la barra por inestabilidad ya no están contenidas en el mismo plano de barra, la ecuación (3.44) ya no es válida para calcular su matriz de rigidez geométrica aunque sea una barra con cargas en un solo plano (8).

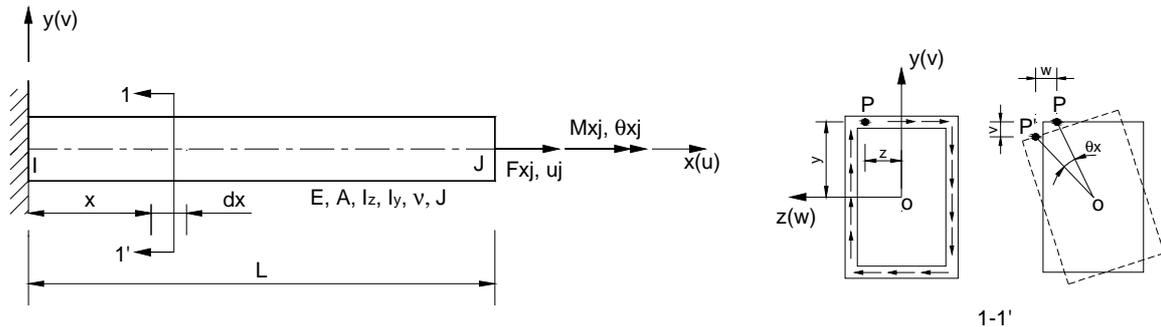
Se considera la viga prismática mostrada en la Figura 3.8 sujeta a una fuerza axial F_{xj} y momento torsor M_{xj} ; se muestran también una sección transversal a una distancia x del apoyo y un punto P en dicha sección. Para rotaciones pequeñas los desplazamientos del punto P se pueden escribir como:

$$v = -z \cdot \theta_x \quad \text{y} \quad w = y \cdot \theta_x \quad (3.45)$$

y sus derivadas:

$$\frac{dv}{dx} = -z \cdot \frac{d\theta_x}{dx} \quad \frac{dw}{dx} = y \cdot \frac{d\theta_x}{dx} \quad (3.46)$$

Figura 3.8. Viga en voladizo sujeta a torsión



Extendiendo la ecuación (3.38), la deformación de una fibra que contiene a P se puede aproximar a:

$$e_{fin} = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.47)$$

La **Deformación de Green** para problemas tridimensionales es entonces:

$$\left(\frac{du}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \quad (3.48)$$

La deformación geométrica asociada a los efectos de torsión es:

$$e_{fin,geom} = \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{dv}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dw}{dx} \right)^2 \right] \quad (3.49)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.46):

$$e_{fin,geom} = \frac{1}{2} \cdot \left[z^2 \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 + y^2 \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \right] = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \cdot [z^2 + y^2] \quad (3.50)$$

Se observa que en el último término se define el campo de rotación alrededor de x : $\theta_x(x)$, y claramente este no es constante a lo largo del elemento; entonces se prevé que si se quiere linealizar como se hizo en la sección 2.3.3, en la solución (adoptando como constante el campo de rotaciones) se deberá discretizar la barra para tomar en cuenta este efecto, aunque mas no sea en forma aproximada.

La deformación unitaria, considerando los efectos de no-linealidad geométrica, depende de la deformación axial, deformación perpendicular a la barra y contenida en el plano de cargas y deformaciones perpendiculares a este último; esta es una diferencia fundamental respecto al análisis lineal elástico.

Calculando el trabajo virtual asociado a la deformación $e_{fin,geom}$ queda:

$$\begin{aligned} dW_{int,geom} &= \int_{vol} \sigma_x \cdot \delta e_{fin,geom} \cdot dV \\ &= \frac{1}{2} \cdot \int_{vol} \sigma_x \cdot \delta \left[\left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \right] \cdot [z^2 + y^2] \cdot dV \end{aligned} \quad (3.51)$$

donde σ_x es el esfuerzo axial en el elemento y dV un diferencial del volumen que se puede escribir como $dV = A \cdot dx$.

El operador virtual δ tiene propiedades de un diferencial y por tanto es intercambiable con otros términos similares, el esfuerzo axial se puede escribir $\sigma_x = \frac{F_{xj}}{A}$ y el momento polar de inercia es $I_p = \int_A (z^2 + y^2) \cdot dA$; reemplazando queda:

$$dW_{int,geom} = \frac{1}{2} \cdot \frac{F_{xj} \cdot I_p}{A} \cdot \int_0^L \delta \left[\left(\frac{d\theta_x}{dx} \right)^2 \right] \cdot dx \quad (3.52)$$

Se discutió antes que el planteamiento del trabajo interno conduce a la matriz de rigidez; en este caso específico en que el trabajo se planteó respecto a la deformación geométrica unitaria al resolver la última ecuación, se encuentra la matriz de rigidez geométrica K_g .

Usando el concepto de funciones de forma, si se asume una variación lineal para el término $\theta_x(x)$, la función de forma de la rotación alrededor del eje x de una barra de eje recto es:

$$[\theta_x(x)] = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & \frac{L-x}{L} \\ \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_i \\ \theta_j \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

$$\int_0^L \left[\frac{d[\theta_x(x)]}{dx} \right] \cdot \left[\frac{d[\theta_x(x)]}{dx} \right]^T \cdot dx \quad (3.54)$$

Resolviendo se tiene:

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{L} & -\frac{2}{L} \\ \frac{2}{L} & \frac{2}{L} \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

La matriz de rigidez geométrica queda entonces:

$$[K_g] = \frac{F_{xj} \cdot I_p}{A \cdot L} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \theta_i \\ \theta_j \end{matrix} \quad (3.56)$$

Ecuación que demuestra el acoplamiento entre momento torsor y fuerza axial.

3.5.2 MATRIZ DE RIGIDEZ GEOMÉTRICA CON DEFORMACIONES EN TRES DIMENSIONES

Hasta ahora se ha estudiado la matriz de rigidez geométrica de barras en el plano, con deformación por inestabilidad contenida en el mismo plano de aplicación de las cargas, en la que se reconoció el acoplamiento entre esfuerzos axiales y flexurales en el análisis de la estabilidad. También se estudió el caso de barras sometidas a torsión pura en donde se demostró el acoplamiento entre esfuerzos de torsión y axiales.

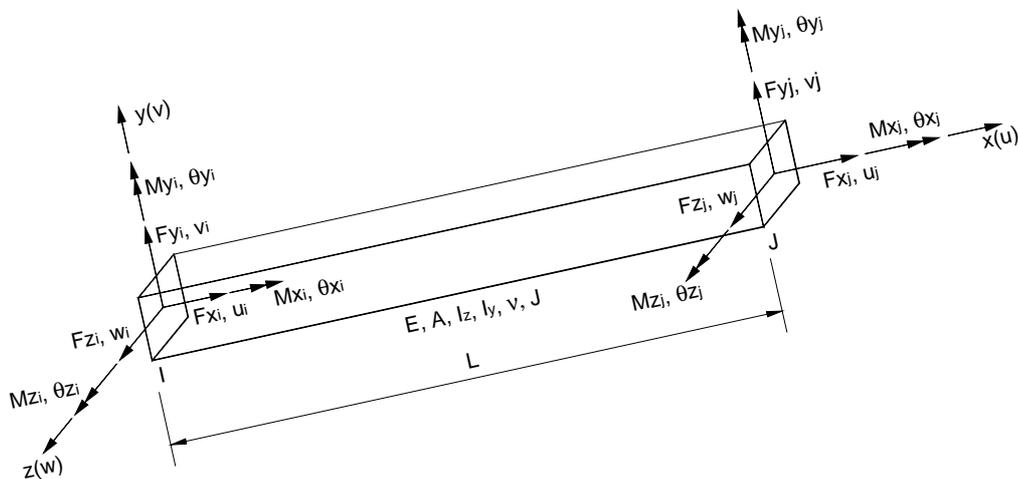
Queda claro entonces que a diferencia del análisis lineal en que las cargas axiales sólo producen esfuerzos axiales, en el análisis de no linealidad geométrica, los esfuerzos axiales están acoplados con los flexurales y torsionales. Esto explica el por qué con este análisis es posible predecir la inestabilidad de miembros sometidos a carga axial únicamente (8).

Se pretende ahora generalizar las matrices de rigidez geométrica al caso donde las deformaciones por inestabilidad de una barra pueden ocurrir en cualquier

dirección; es decir una matriz de rigidez que considere 12 G.D.L como se indica en la Figura 3.9, pero con cargas contenidas en un solo plano.

El análisis matricial de estructuras en tres dimensiones sigue la misma metodología del análisis bidimensional de elementos con 6 G.D.L. por barra, por lo que una vez calculada la matriz de rigidez geométrica de cada barra el procedimiento es similar. Lógicamente una matriz de rigidez elástica de 12 G.D.L. de cada barra deberá acompañar a la matriz de rigidez geométrica del mismo orden.

Figura 3.9. Elemento barra en el espacio con 12 G.D.L.



En la sección 3.4.2 ya se dedujo la matriz de rigidez geométrica de una barra flexionada alrededor del eje z , esta es la misma para el caso de flexión alrededor del eje y ; en la ecuación (3.56) se dedujeron los términos asociados a la torsión, entonces. Con las modificaciones de los signos respectivos, es posible ensamblar la matriz de rigidez geométrica de una barra con deformaciones espaciales y cargas contenidas en un mismo plano.

$$[k_g] = \frac{F_{xj}}{L} \cdot$$

	u_i	v_i	w_i	θ_{xi}	θ_{yi}	θ_{zi}	u_i	v_j	w_j	θ_{xj}	θ_{yj}	θ_{zj}
1	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0
	$\frac{6}{5}$	0	0	0	0	$\frac{L}{10}$	0	$-\frac{6}{5}$	0	0	0	$-\frac{L}{10}$
		$\frac{6}{5}$	0	$-\frac{L}{10}$	0	0	0	0	$-\frac{6}{5}$	0	$-\frac{L}{10}$	0
			$\frac{I_p}{A}$	0	0	0	0	0	0	$-\frac{I_p}{A}$		0
				$\frac{2L^2}{15}$	0	0	0	0	$\frac{L}{10}$	0	$-\frac{L^2}{30}$	0
					$\frac{2L^2}{15}$	0	0	$-\frac{L}{10}$	0	0	0	$-\frac{L^2}{30}$
							1	0	0	0	0	0
								$\frac{6}{5}$	0	0	0	$-\frac{L}{10}$
		Sim.							$\frac{6}{5}$	0	$\frac{L}{10}$	0
										$\frac{I_p}{A}$	0	0
											$\frac{2L^2}{15}$	0
												$\frac{2L^2}{15}$

(3.57)

donde F_{xj} es el esfuerzo axial calculado con el patrón de cargas definido. Esta matriz es aplicable a casos de barras con cargas contenidas en un plano principal de la misma, pero considera las deformaciones tridimensionales que pueden ocurrir en la inestabilidad.

Para un análisis tridimensional completo, en el que las acciones pueden ser todas las indicadas en la Figura 3.9, la matriz de rigidez geométrica es la siguiente (10):

$$[k_g] =$$

u_i	v_i	w_i	θ_{xi}	θ_{yi}	θ_{zi}	u_i	v_j	w_j	θ_{xj}	θ_{yj}	θ_{zj}
$\frac{F_{xj}}{L}$	0	0	0	0	0	$-\frac{F_{xj}}{L}$	0	0	0	0	0
	$\frac{6F_{xj}}{5L}$	0	$\frac{M_{yi}}{L}$	$\frac{M_{xj}}{L}$	$\frac{F_{xj}}{10}$	0	$-\frac{6F_{xj}}{5L}$	0	$\frac{M_{yj}}{L}$	$-\frac{M_{xj}}{L}$	$\frac{F_{xj}}{10}$
		$\frac{6F_{xj}}{5L}$	$\frac{M_{zi}}{L}$	$-\frac{F_{xj}}{10}$	$\frac{M_{xj}}{L}$	0	0	$-\frac{6F_{xj}}{5L}$	$\frac{M_{zj}}{L}$	$-\frac{F_{xj}}{10}$	$-\frac{M_{xj}}{L}$
			$\frac{F_{xj}I_p}{AL}$	$\frac{-2M_{zi} + M_{zj}}{6}$	$\frac{2M_{yi} - M_{yj}}{6}$	0	$-\frac{M_{yi}}{L}$	$-\frac{M_{zi}}{L}$	$-\frac{F_{xj}I_p}{AL}$	$\frac{-M_{zi} - M_{zj}}{6}$	$\frac{M_{yi} + M_{yj}}{6}$
				$\frac{2F_{xj}L}{15}$	0	0	$-\frac{M_{xj}}{L}$	$\frac{F_{xj}}{10}$	$\frac{-M_{zi} - M_{zj}}{6}$	$-\frac{F_{xj}L}{30}$	$\frac{M_{xj}}{2}$
					$\frac{F_{xj}L}{15}$	0	$-\frac{F_{xj}}{10}$	$-\frac{M_{xj}}{L}$	$\frac{M_{yi} + M_{yj}}{6}$	$-\frac{M_{xj}}{2}$	$-\frac{F_{xj}L}{30}$
						$\frac{F_{xj}}{L}$	0	0	0	0	0
							$\frac{6F_{xj}}{5L}$	0	$-\frac{M_{yj}}{L}$	$\frac{M_{xj}}{L}$	$-\frac{F_{xj}}{10}$
		Sim.						$\frac{6F_{xj}}{5L}$	$-\frac{M_{zj}}{L}$	$\frac{F_{xj}}{10}$	$\frac{M_{xj}}{L}$
									$\frac{F_{xj}I_p}{AL}$	$\frac{M_{zi} - 2M_{zj}}{6}$	$\frac{M_{yi} - 2M_{yj}}{6}$
										$\frac{2F_{xj}L}{15}$	0
											$\frac{2F_{xj}L}{15}$

(3.58)

3.5.3 CÁLCULO DE CARGAS CRÍTICAS.

Hasta ahora se ha resuelto la estabilidad de sistemas de uno y dos G.D.L y de sistemas continuos, lo que se pretende ahora es extender los conceptos estudiados para resolver problemas de múltiples G.D.L, como marcos planos o tridimensionales. La forma de abordar el problema es análoga al análisis matricial convencional de estructuras. De manera simplificada el procedimiento es como sigue:

1. Cinemática.- se definen los G.D.L. del problema y se calculan las matrices de transformación que trasladan el estado tensional y deformacional referidos a coordenadas de elemento, a las coordenadas globales o generales.

2. Acción-Deformación.- Se plantea la relación esfuerzo-deformación a nivel de miembros; conocidas las deformaciones de los extremos de un elemento y sus esfuerzos asociados es posible encontrar su relación a través de: $\{S\} = [k] \cdot \{v\}$, donde $\{S\}$ es el vector de acciones en el elemento, $\{v\}$ son los desplazamientos de extremo de la barra en coordenadas locales y $[k]$ su matriz de rigidez. Esta relación permite encontrar las matrices de rigidez locales de cada elemento.
3. Equilibrio.- Plantea la relación entre acciones externas impuestas a la estructura y el estado deformacional de la misma: $\{F\} = [K] \cdot \{q\}$, donde $[K]$ es la matriz de rigidez del sistema, $\{q\}$ el vector desplazamientos de los G.D.L. y $\{F\}$ las acciones nodales impuestas en coordenadas globales.

En la ecuación (2.26) se determinó que la matriz de rigidez de la estructura puede ser expresada en términos de una matriz de rigidez elástica K_e , que es característica de la estructura y no depende de su estado tensional, y otra matriz de rigidez geométrica K_g que es dependiente de las cargas aplicadas a la estructura. La primera matriz es la que convencionalmente se calcula en el análisis lineal elástico y el cálculo de la segunda fue deducida en la sección 3.4.2 para problemas en el plano y 3.5.2 para problemas en tres dimensiones.

La relación que define la rigidez efectiva del sistema es:

$$[K] = [K_e] - [K_g] \quad (3.59)$$

El problema de estabilidad conduce a:

$$([K_e] - \{P\} \cdot [K_g]) \cdot \{q\} = \{0\} \quad (3.60)$$

que es un problema de valores y vectores propios:

$$\| [K_e] - \{P\} \cdot [K_g] \| = 0 \quad (3.61)$$

cuya solución proporciona los factores de las cargas críticas de pandeo $\{P\}$ y las formas modales $\{q\}$. La matriz $[K_g]$ para el caso de estructuras planas es dependiente de los esfuerzos axiales en los elementos provenientes de un estado

de cargas o patrón de cargas específico para cada análisis de estabilidad (ecuación (2.34)). Las cargas críticas se obtienen al multiplicar los valores de $\{P\}$ resultantes de la solución del problema de valores propios por las cargas con las que se calculó $[\hat{K}_g]$.

Para estandarizar el procedimiento, la ecuación (2.34) se expresa como:

$$\| [K_e] - \{P\} \cdot [\hat{K}_g] \| = 0 \quad (3.62)$$

donde $[\hat{K}_g]$ es calculada con un patrón de cargas unitario $\{P_{unit}\}$ y cada valor resultante de $\{P\}$ es un multiplicador de todo el vector de cargas de dicho patrón. Para problemas de varios G.D.L. la carga crítica de pandeo no es un valor único, sino un vector de cargas nodales, que aplicado simultáneamente causa la inestabilidad del sistema.

Procedimiento General.

En función al desarrollo hasta ahora expuesto, se presenta el algoritmo para la solución del problema de estabilidad de estructuras de múltiples G.D.L., tanto planas como espaciales.

1. Calcular la matriz de rigidez elástica local de todos los miembros de la estructura: $[k_e^i]$, (el superíndice i indica que se calcula la matriz para cada miembro del sistema y el subíndice e indica que se tratan de matrices de rigidez elástica).
2. Calcular las matrices de transformación cinemática para cada barra: $[T^i]$
3. Calcular las matrices de rigidez elástica de los miembros en coordenadas globales, usando la transformación cinemática: $[K_e^i] = [T^i]^T \cdot [k_e^i] \cdot [T^i]$
4. Ensamblar las matrices calculadas en (3) según los G.D.L. de extremo de cada barra, para así calcular la matriz de rigidez elástica total de la estructura $[K_e]$
5. Si existen cargas en los miembros, se las deben trasladar a cargas nodales equivalentes, agregar las cargas nodales directas y ensamblar un vector de cargas en coordenadas globales $\{P_{unit}\}$; estas cargas serán consideradas

como un patrón de cargas unitarias (aunque no necesariamente tengan valores unitarios).

6. Calcular los desplazamientos nodales $\{q\}$ de los G.D.L. resolviendo el sistema: $\{q\} = [K_e]^{-1} \cdot \{P_{unit}\}$.
7. Calcular los esfuerzos axiales correspondientes en cada barra $\{N_o^i\}$.
8. Calcular la matriz de rigidez geométrica local de cada barra $[k_g^i]$ usando la ecuación (3.44) para problemas donde la inestabilidad está contenida en el plano, o (3.58) para el caso de tres dimensiones.
9. Calcular las matrices de rigidez geométrica en coordenadas globales siguiendo el mismo procedimiento de las matrices elásticas, esto es:
 $[\hat{K}_g^i] = [T^i]^T \cdot [k_g^i] \cdot [T^i]$; las matrices de transformación cinemática son las mismas.
10. Ensamblar las matrices calculadas como se hizo en (4) para obtener la matriz de rigidez geométrica total $[\hat{K}_g]$.
11. Una vez determinadas $[K_e]$ y $[\hat{K}_g]$ se resuelve el problema de valores y vectores propios $\| [K_e] - \{P\} \cdot [\hat{K}_g] \| = 0$ para calcular $\{P\}$ y $\{q\}$, conforme la ecuación (3.62). Los valores de $\{P\}$ no son propiamente valores de la carga crítica, sino factores.
12. Las cargas de pandeo se obtienen al multiplicar cada valor de $\{P\}$ por el vector de cargas nodales $\{P_{unit}\}$, es decir hay un vector de cargas, proporcional al vector de cargas con que se calculó $[\hat{K}_g]$ por cada valor de $\{P\}$. La carga crítica se obtiene al multiplicar el mínimo valor de $\{P\}$ por $\{P_{unit}\}$.

CAPÍTULO 4.

APLICACIÓN AL ANÁLISIS DE ESTABILIDAD DE ESTRUCTURAS DE ACERO

4.1 APLICACIÓN 1.

Este problema ya fue resuelto en la sección 2.3.4 tratándolo como un sistema continuo; ahora se pretende resolverlo con otro patrón de cargas que no sería posible resolver con el proceso convencional de la carga crítica de pandeo general de Euler.

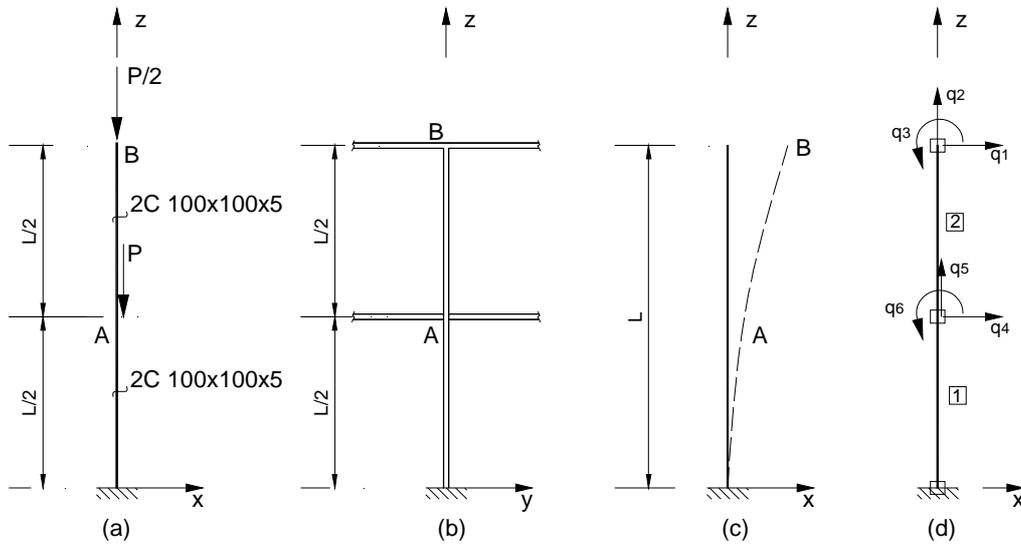
Se trata de obtener la carga crítica de pandeo general en el plano xz de una columna empotrada en la base que recibe descargas de vigas a media altura y en el extremo superior en el plano yz , como se muestra en la Figura 4.1. La columna es un perfil de lámina delgada doblado en frío de sección tubular 2C 100x100x5.

Las propiedades del perfil son:

Área: $A =$	18.36 cm^2
Longitud: $L =$	400 cm
Inercia: $I_x = I_y =$	270.65 cm^4
Módulo Elasticidad: $E =$	2078 t/cm^2

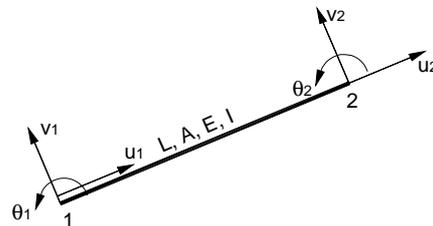
Se asume que la sección transversal del perfil es totalmente efectiva y por tanto el pandeo local está descartado.

Como se discutió en la sección 3.4.2, la precisión de los resultados depende de la discretización que se haga de los miembros del sistema estructural. Se empieza resolviendo el problema con una subdivisión de la columna, se tiene entonces 6 G.D.L. como se indica en la Figura 4.1(d).

Figura 4.1. Estructura de análisis

Las unidades en la solución son t, cm .

La rigidez elástica de cada columna, en coordenadas locales es: (8)

Figura 4.2. G.D.L locales de una barra genérica de marco plano.

$$[k_e]_{1,2} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ \text{sim} & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

$$[k_e]_{1,2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 190.76 & 0 & 0 & -190.76 & 0 & 0 \\ 0 & 0.84362 & 84.362 & 0 & -0.84362 & 84.362 \\ 0 & 84.362 & 11248 & 0 & -84.362 & 5624.1 \\ -190.76 & 0 & 0 & 190.76 & 0 & 0 \\ 0 & -0.84362 & -84.362 & 0 & 0.84362 & -84.362 \\ 0 & 84.362 & 5624.1 & 0 & -84.362 & 11248 \end{array} \end{array}$$

Se calculan las matrices de rigidez en coordenadas globales.

$$[K_e]_{1,2} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 0.84362 & 0 & -84.362 & -0.84362 & 0 & -84.362 \\ 0 & 190.76 & 0 & 0 & -190.76 & 0 \\ -84.362 & 0 & 11248 & 84.362 & 0 & 5624.1 \\ -0.84362 & 0 & 84.362 & 0.84362 & 0 & 84.362 \\ 0 & -190.76 & 0 & 0 & 190.76 & 0 \\ -84.362 & 0 & 5624.1 & 84.362 & 0 & 11248 \end{array} \end{array}$$

Se ensamblan las matrices $[K_e]$ en función de los G.D.L. de cada barra para tener la matriz de rigidez elástica total del sistema, que resulta:

$$[K_e] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1.6872 & 0 & 0 & -0.84362 & 0 & -84.362 \\ 0 & 381.52 & 0 & 0 & -190.76 & 0 \\ 0 & 0 & 22496 & 84.362 & 0 & 5624.1 \\ -0.84362 & 0 & 84.362 & 0.84362 & 0 & 84.362 \\ 0 & -190.76 & 0 & 0 & 190.76 & 0 \\ -84.362 & 0 & 5624.1 & 84.362 & 0 & 11248 \end{array} \end{array}$$

Se calculan las deformaciones de los G.D.L. con un vector patrón de cargas:

$$\{P_{unit}\} = [0 \quad -1/2 \quad 0 \quad 0 \quad -1 \quad 0]^T; \text{ resolviendo el sistema:}$$

$$\{q\} = [K_e]^{-1} \cdot \{P_{unit}\} = \begin{bmatrix} 0 \\ -0.0105 \\ 0 \\ 0 \\ -0.0079 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Con estas deformaciones se calculan las fuerzas axiales en cada columna discretizada:

$$\text{Barra 1: } N_{o,1} = 1.5 t$$

$$\text{Barra 2: } N_{o,2} = 0.5 t$$

La matriz de rigidez geométrica de cada elemento se calcula con la ecuación (3.37):

$$[K_g] = \frac{N_o}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ & & & 1 & 0 & 0 \\ & \text{sim} & & & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ & & & & & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix}$$

Reemplazando se tiene:

$$[\hat{k}_g]_1 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 0.0075 & 0 & 0 & -0.0075 & 0 & 0 \\ 0 & 0.009 & 0.15 & 0 & -0.009 & 0.15 \\ 0 & 0.15 & 40 & 0 & -0.15 & -10 \\ -0.0075 & 0 & 0 & 0.0075 & 0 & 0 \\ 0 & -0.009 & -0.15 & 0 & 0.009 & -0.15 \\ 0 & 0.15 & -10 & 0 & -0.15 & 40 \end{array} \end{array}$$

$$[\hat{k}_g]_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 0.0025 & 0 & 0 & -0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & 0.003 & 0.05 & 0 & -0.003 & 0.05 \\ 0 & 0.05 & 13.333 & 0 & -0.05 & -3.3333 \\ -0.0025 & 0 & 0 & 0.0025 & 0 & 0 \\ 0 & -0.003 & -0.05 & 0 & 0.003 & -0.05 \\ 0 & 0.05 & -3.3333 & 0 & -0.05 & 13.333 \end{array} \end{array}$$

Se calculan las matrices $[\hat{k}_g]$ en coordenadas globales y se ensambla tal como se hizo para la matriz de rigidez elástica, haciendo las operaciones queda:

$$[K_g] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{array}{cccccc} 0.012 & 0 & 0.1 & -0.003 & 0 & -0.05 \\ 0 & 0.01 & 0 & 0 & -0.0025 & 0 \\ 0.1 & 0 & 53.333 & 0.05 & 0 & -3.3333 \\ -0.003 & 0 & 0.05 & 0.003 & 0 & 0.05 \\ 0 & -0.0025 & 0 & 0 & 0.0025 & 0 \\ -0.05 & 0 & -3.3333 & 0.05 & 0 & 13.333 \end{array} \end{array}$$

Resolviendo el problema de valores y vectores propios (ecuación (3.62)) se obtienen las cargas y formas de pandeo:

$$\| [K_e] - \{P\} \cdot [\hat{K}_g] \| = 0$$

$\{P\} =$	12.371	modo 1
	81.458	modo 2
	316.04	modo 3
	1077	modo 4
	25435	modo 5
	76304	modo 6

Las cargas críticas de pandeo se obtienen al multiplicar el menor factor calculado en $\{P\}$, o sea 12.371, por el patrón de cargas $\{P_{unit}\}$ aplicado, es decir:

$\{P_{cr}\} =$	0.00	GDL
	-6.19 t	1
	0.00	2
	0.00	3
	-12.37 t	4
	0.00	5
	6	

Las formas de pandeo asociadas son:

$\{q\} =$	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5	modo 6	GDL
	21.605	3.7511	2.54	3.2397	0	0	1
	0	0	0	0	11.547	-20	2
	-0.079	-0.1	-0.11	0.2326	0	0	3
	6.9894	-7.967	2.0424	-0.575	0	0	4
	0	0	0	0	11.547	0	5
	-0.062	0.0122	0.1106	0.0659	0	0	6

Resolviendo para la columna discretizada con dos puntos intermedios se tiene:

$P_{min} = 12.3458 t$, por tanto la carga crítica de pandeo es el vector:

$\{P_{cr}\} =$	0.00	GDL
	-6.17	1
	0.00	2
	0.00	3
	-12.35	4
	0.00	5
	6	

Se codifica la solución del problema en MATLAB, de manera que los resultados del problema al modificar las subdivisiones de la columna se generan automáticamente. Así se puede hacer la siguiente tabla:

Tabla 4.1. Factor de carga crítica según número de subdivisiones

Nro. de subdivisiones de las columnas	Factor de Carga Crítica de pandeo P_{\min}
1	12.3714
3	12.3458
5	12.3445
7	12.3442
15	12.3441
50	12.3441

Elaborado: Lucio Sánchez S.

Se observa que con una subdivisión de la columna se obtiene un valor con una precisión bastante buena.

Se debe notar que este ejemplo no es posible resolverlo usando la carga crítica de Euler, pues su expresión $P_e = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{4 \cdot L^2}$ es deducida considerando una única carga en el extremo superior de la columna.

Formas de pandeo:

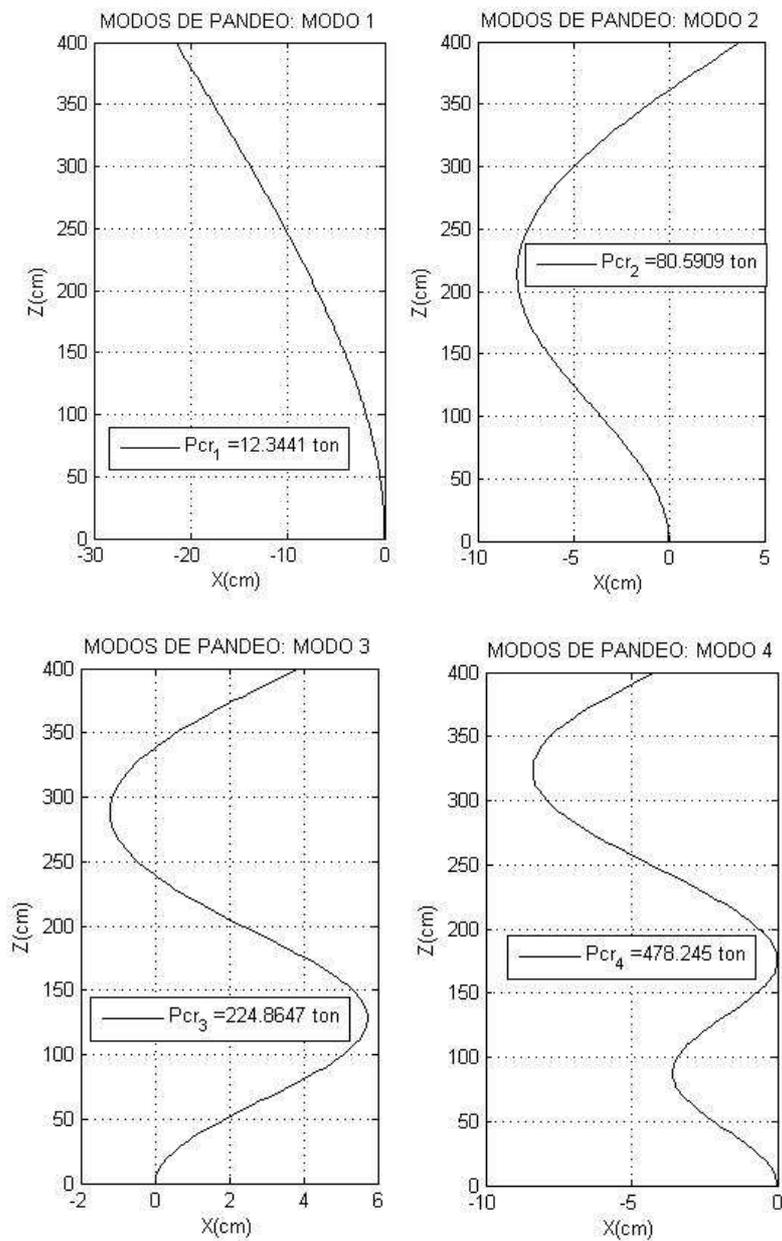
Una vez que se tienen las cargas críticas y sus formas de pandeo asociadas, se pueden graficar las deformadas de cada modo de pandeo. Se requiere usar el concepto de funciones de forma visto en la sección 3.3, pues las formas de pandeo proporcionan los valores relativos de deformación en cada G.D.L. de la estructura. Para graficar la deformada se requiere evaluar la deformación en varios puntos interiores de cada barra a partir de las deformaciones nodales.

Las posiciones finales de los nodos que proporcionan las formas de pandeo se encuentran en coordenadas globales de la estructura. Es necesario regresar a coordenadas locales para allí hacer la evaluación de la deformación en puntos interiores de las barras a través de las funciones de forma; luego nuevamente regresar a coordenadas globales para graficar la deformada total de la estructura.

Este procedimiento se implementó como función *.m* de MATLAB, se realizaron 10 discretizaciones para evaluar la deformación en puntos interiores de cada barra. A continuación se muestran las deformadas asociadas a las cuatro primeras cargas de pandeo.

Como ya se mencionó antes, las formas de pandeo indican valores de desplazamiento nodal relativo.

Figura 4.3. Formas de pandeo y factores de carga crítica

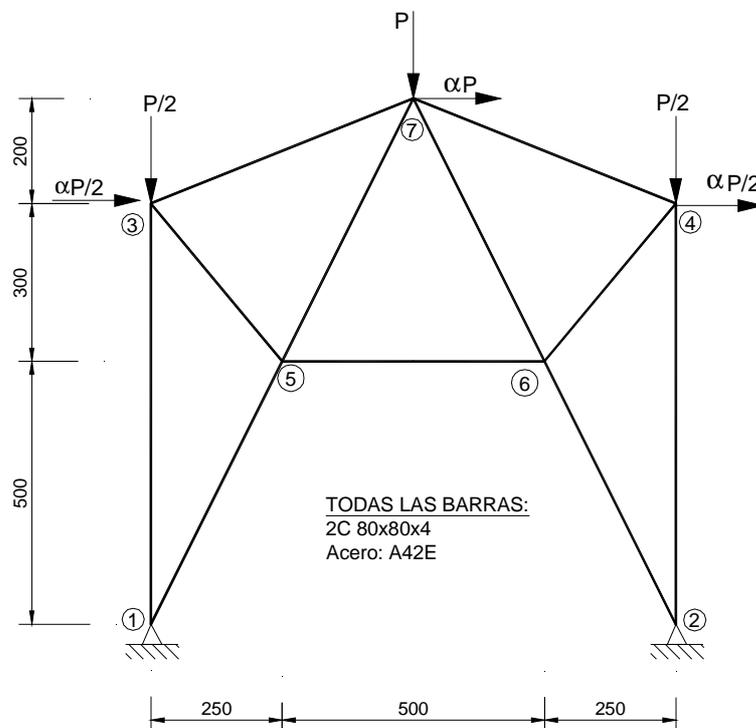


4.2 APLICACIÓN 2.

Se trata de calcular la resistencia nominal en compresión de la barra 1-5 del marco rígido que soporta el sistema de cargas mostrado en la Figura 4.4, usando la Norma AISI correspondiente ⁽¹²⁾. Se pide evaluar la resistencia y especificar el factor de longitud efectiva asociado a dicha resistencia para los siguientes casos:

- $\alpha=0$
- $\alpha=1/10$

Figura 4.4. Estructura a analizar



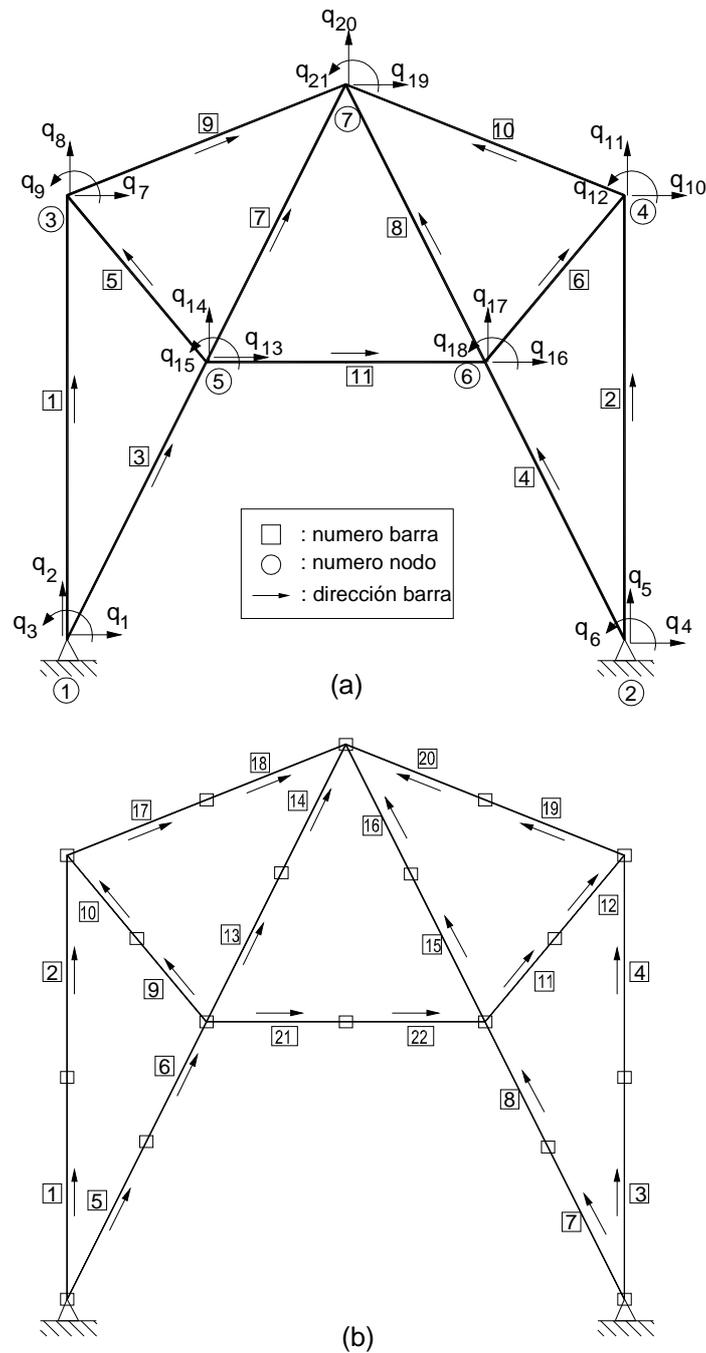
Las propiedades geométricas del perfil 2C 80x80x4:

Area: $A_g=$	11.75cm^2
Inercia: $I_x= I_y=$	110.81 cm^4
Radio de giro: $r_x= r_y =$	3.07cm

Las propiedades del acero A42E:

Módulo Elasticidad: $E=$	2078 t/cm^2
Esfuerzo de fluencia: $F_y=$	2.40 t/cm^2

Figura 4.5. Modelo estructural



Para evaluar la resistencia de la estructura se requiere calcular la resistencia de cada miembro. El procedimiento convencional para marcos planos es

calcular el coeficiente de longitud efectiva K usando los nomogramas de Jackson y Moreland (13) (6) (7) (14). Estos requieren el cálculo de un parámetro de esbeltez G para cada extremo de los miembros; el método más usado de cálculo de este parámetro es:

$$G = \frac{\sum \left(\frac{E \cdot I}{L} \right)_{col}}{\sum \left(\frac{E \cdot I}{L} \right)_{vigas}} \quad (4.1)$$

Una vez conocidos los valores de G se calcula el valor de K para cada miembro directamente con los nomogramas y se determina el esfuerzo de pandeo elástico general con $F_e = \frac{\pi^2 \cdot E}{\left(\frac{K \cdot L}{r} \right)^2}$, se calcula el esfuerzo crítico F_{cr} y si es posible

la ocurrencia de pandeo local, se hace una reducción del área bruta de la sección transversal. Conocidos el esfuerzo crítico de pandeo y el área efectiva, se determina la resistencia de cada miembro.

Una característica básica que debe cumplir el sistema estructural para que este procedimiento sea válido es que sus vigas y columnas sean ortogonales en el plano; por esto no es posible la aplicación de dicho procedimiento. Entonces se debe resolver el problema de estabilidad de la estructura para calcular los esfuerzos de compresión en cada barra en el instante que ocurre el pandeo general de la estructura para los patrones de carga solicitados. Conocidos tales esfuerzos es posible encontrar el factor de longitud efectiva de cada barra, sin el uso de los nomogramas mencionados.

Las unidades empleadas en la solución son t , cm .

Parte a: $\alpha=0$

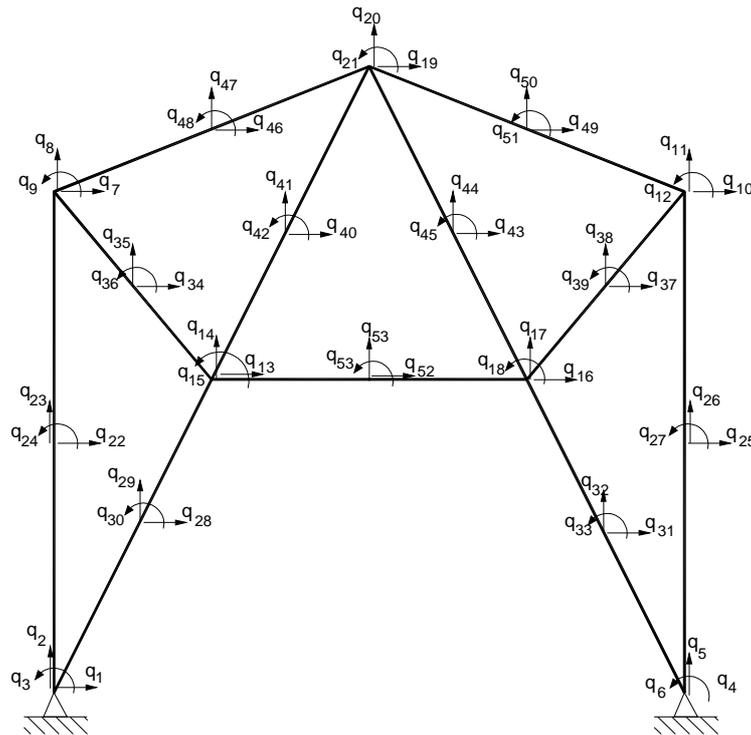
Matriz de Rigidez Elástica.

Inicialmente se considera una subdivisión para la discretización de las barras, como se muestra en la Figura 4.5(b). Los G.D.L. básicos se indican en la Figura 4.5(a) y todos los generados al subdividir los miembros se numeran

luego de estos con el fin de automatizar la subdivisión de miembros al programar la solución del problema.

En el caso de los miembros con una subdivisión interna, los G.D.L. son como se indican en la Figura 4.6.

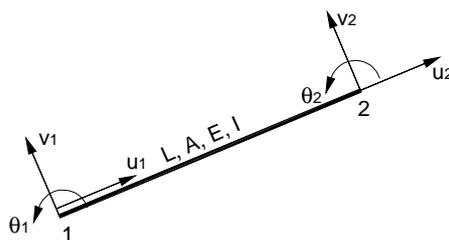
Figura 4.6. G.D.L. del sistema con una subdivisión de las barras.



La matriz de rigidez elástica de cada miembro referida a los G.D.L. locales que se indican en la Figura 4.7 son:

$$[k_e] = \begin{bmatrix} \frac{AE}{L} & 0 & 0 & -\frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{AE}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

Figura 4.7. G.D.L locales de una barra genérica de marco plano.



Para las barras 5, 6, 7, 8, 13, 14, 15 y 16 de la Figura 4.5(b), la matriz de rigidez elástica local es:

$$[k_e]_{5,6,7,8,13,14,15,16} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ 0.0874 & 0 & 0 & -0.0874 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0001 & 0.0177 & 0 & -0.0001 & 0.0177 \\ 0 & 0.0177 & 3.2953 & 0 & -0.0177 & 1.6476 \\ -0.0874 & 0 & 0 & 0.0874 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0001 & -0.0177 & 0 & 0.0001 & -0.0177 \\ 0 & 0.0177 & 1.6476 & 0 & -0.0177 & 3.2953 \end{array} \end{array} \times 10^3$$

Se calculan las matrices de rigidez en coordenadas globales y se ensamblan en función de sus G.D.L. para tener la matriz de rigidez elástica total.

$$[K_e] = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & \dots & 46 & 47 & 48 & 49 & 50 \\ 4 & 147.62 & 41 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 41 & 10440 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 129.7 & 30 & 29 & \dots & 31.22 & -7 & 0 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & 0 & 30 & 147.62 & -41 & \dots & -12.63 & -18 & 0 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & 29 & -41 & 10440 & \dots & 18 & 1710.4 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots \\ 46 & 0 & 0 & 31.22 & -12.63 & 18 & \dots & 25 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 47 & 0 & 0 & -7 & -18 & 1710.4 & \dots & 0 & 6841.4 & 0 & 0 & 0 \\ 48 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 195.33 & 0 & 0 \\ 49 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0.35368 & 0 \\ 50 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 7368.4 \end{array} \end{array}$$

Se deben calcular las fuerzas axiales N_0 , en cada barra con un vector de cargas nodales unitarias:

$$\{P_{unit}\}^T = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccccccc} 1 & 2 & \dots & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \dots & 19 & 20 & 21 & \dots & 49 & 50 \\ 0 & 0 & \dots & -1/2 & 0 & 0 & -1/2 & 0 & \dots & 0 & -1.0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array} \end{array}$$

Resolviendo el sistema $\{q\} = [K_e]^{-1} \cdot \{P_{unit}\}$, las deformaciones en cada G.D.L. son:

1	0
2	0
3	-0.06163
	...
20	-0.02806
{q}= 21	0.00000
22	-0.00144
	...
48	-0.33427
49	0.00213
50	-0.02244

Las fuerzas axiales en cada barra son:

barra	$N_o(t)$	barra	$N_o(t)$
1	0.5152	12	-0.0147
2	0.5152	13	0.5544
3	0.5152	14	0.5544
4	0.5152	15	0.5544
5	0.542	16	0.5544
6	0.542	17	0.0105
7	0.542	18	0.0105
8	0.542	19	0.0105
9	-0.0147	20	0.0105
10	-0.0147	21	-0.0151
11	-0.0147	22	-0.0151

La matriz de rigidez geométrica de cada barra (referida a los G.D.L. de la Figura 4.7), se calcula con la ecuación (3.44). Para los elementos 1, 2, 3 y 4 es:

$$[\hat{k}_g]_{1,2,3,4} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} u_1 & v_1 & \theta_1 & u_2 & v_2 & \theta_2 \\ \hline 0.00129 & 0 & 0 & -0.0013 & 0 & 0 \\ 0 & 0.00155 & 0.05152 & 0 & -0.0015 & 0.05152 \\ 0 & 0.05152 & 27.479 & 0 & -0.0515 & -6.8696 \\ \hline -0.0013 & 0 & 0 & 0.00129 & 0 & 0 \\ 0 & -0.0015 & -0.0515 & 0 & 0.00155 & -0.0515 \\ 0 & 0.05152 & -6.8696 & 0 & -0.0515 & 27.479 \end{array} \end{array}$$

Se repite el proceso para todas las barras, se calculan las matrices en coordenadas globales y se ensambla tal como se hizo para la matriz de rigidez elástica. Haciendo las operaciones, la matriz de rigidez geométrica global referida a los G.D.L. libres, queda:

$$[\hat{K}_g] =$$

	4	5	6	7	...	47	48	49	50
4	3.79E-03	1.55E-04	-1.00E-01	0	...	0	0	0	0
5	1.55E-04	3.30E-03	-2.42E-02	0	...	0	0	0	0
6	-1.00E-01	-2.42E-02	4.77E+01	0	...	0	0	0	0
7	0	0	0	1.50E-03	...	-3.88E-04	0	0	0
8	0	0	0	-1.01E-05	...	9.70E-04	0	0	0
...
46	0	0	0	-3.99E-05	...	0	0	0	0
47	0	0	0	2.68E-06	...	0	0	0	0
48	0	0	0	-3.88E-04	...	7.51E-01	0	0	0
49	0	0	0	0	...	0	7.98E-05	5.36E-06	0
50	0	0	0	0	...	0	5.36E-06	9.11E-05	0
51	0	0	0	0	...	0	0	0	7.51E-01
52	0	0	0	0	...	0	0	0	0
53	0	0	0	0	...	0	0	0	0
54	0	0	0	0	...	0	0	0	0

Resolviendo el problema de valores y vectores propios de la ecuación (3.62) se obtienen las cargas y formas de pandeo.

$$\{P\} =$$

modo 1	16,437
modo 2	16,559
modo 3	31,017
modo 4	31,577
modo 5	36,399
modo 6	46,771
modo 7	64,003
modo 8	64,074
modo 9	89,851
modo 10	96,164
modo 11	115,85
...	...

Las formas de pandeo asociadas son:

$$\{q\} =$$

GDL	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5	modo 6	modo 7	modo 8	...
1	0.0034	0.0035	-0.0039	0.0031	0.0042	-0.0028	-0.0052	-0.0053	...
2	0.0034	-0.0035	0.0039	0.0031	0.0042	0.0028	0.0052	-0.0053	...
3	-0.0024	0	-0.0002	-0.0005	-0.0034	0.0003	-0.0004	-0.0114	...
...
20	-0.0008	-0.0008	0.0031	-0.0023	-0.0035	0.0024	0.0142	0.0142	...
21	-1	1	0.8844	0.8424	0.4755	0.2506	0.0329	-0.0481	...
22	-0.0005	0.0001	0	0	-0.0003	0.0001	0.0004	-0.0016	...
...
48	-0.0031	0	0	-0.0007	-0.0031	0	0	-0.0123	...
49	0	-0.0648	0.4599	0	0	-0.2776	-0.2065	0	...
50	0.0002	0	0	0.0017	-0.0001	0	0	0.0008	...

El menor factor del vector $\{P\}$, 16.437, multiplicado por el vector de cargas patrón $\{P_{unit}\}^T$ proporciona el vector de carga crítica, que aplicado a la estructura provoca su pandeo general.

Realizando dos subdivisiones a las barras se tiene una carga crítica de pandeo: $P_{min} = 16.2840$.

Nuevamente se codifica la solución del problema en MATLAB de manera que los resultados del problema al variar el número de subdivisiones de las barras se generan automáticamente. Así se puede hacer la siguiente tabla:

Tabla 4.2. Factor de carga crítica según número de subdivisiones

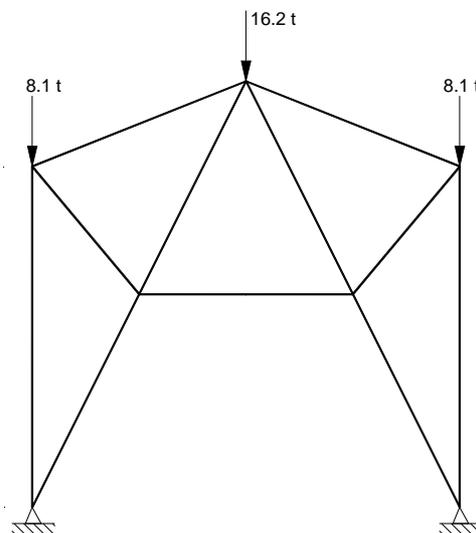
Nro. de subdivisiones de las barras	Mínimo factor de carga crítica de pandeo P_{min}
1	16.437 t
2	16.2840 t
3	16.2329 t
5	16.2110 t
10	16.2058 t
20	16.2052 t

Elaborado: Lucio Sánchez S.

Se adopta como factor de carga crítica $P_{min} = 16.2$. Es decir, para el patrón de cargas dado, el sistema es inestable con las siguientes cargas:

Figura 4.8. Cargas que provocan el pandeo de la estructura, para el patrón de cargas dado con

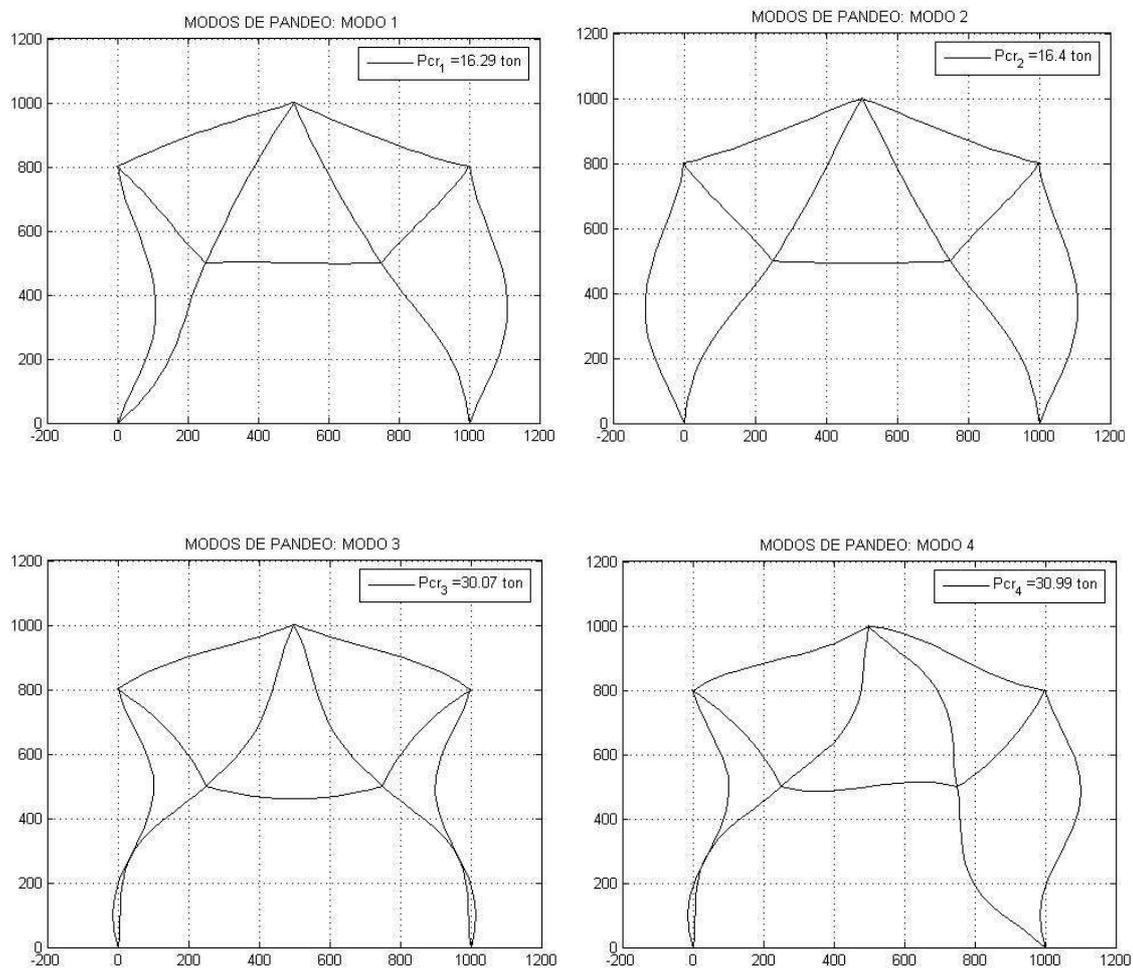
$$\alpha=0$$



Formas de pandeo:

Una vez que se tienen las cargas críticas y sus formas de pandeo asociadas, se pueden graficar las deformadas de cada modo, tal como se hizo en el ejemplo anterior, se requiere usar el concepto de funciones de forma. Se usó la misma función *.m* de MATLAB elaborada para graficar los modos de pandeo de la sección 4.1, se realizaron 5 discretizaciones por cada barra para evaluar la deformación en puntos interiores de cada barra. A continuación se muestran las deformadas asociadas a las cuatro primeras cargas de pandeo.

Figura 4.9. Formas de pandeo para $\alpha=0$



Queda por determinar el estado de esfuerzos de cada barra en el instante en que la estructura llega al pandeo; esto se hace resolviendo el sistema $\{q\} = [K]^{-1} \cdot \{P\}$ pero ahora $[K]$ es la matriz de rigidez total de la estructura cuando esta alcanza el pandeo y se calcula con: $[K] = ([K_e] - P_{min} \cdot [\hat{g}])$

donde $\{P\}$ es el vector de cargas que se puede expresar como: $\{P\} = P_{min} \cdot \{P_{unit}\}$, donde P_{min} es el menor valor de los factores calculados al resolver el problema de valores y vectores propios, es decir 16.2, y $\{q\}$ son los desplazamientos de los G.D.L. en el instante de la inestabilidad.

Una consideración importante es que la matriz $[K] = [K_e] - P_{min} \cdot [\hat{K}_g]$ es singular, es decir tiene determinante nulo puesto que la obtención de las cargas de pandeo es a partir de $\|[K_e] - \{P\} \cdot [\hat{K}_g]\| = 0$. Se debe usar entonces una variación pequeña del valor de P_{min} para que la matriz $[K]$ sea invertible. En la solución de este problema se usa: $[K] = ([K_e] - 0.999 \cdot P_{min} \cdot [\hat{K}_g])$

Resolviendo se tiene:

	GDL	
	7	-0.0042
	8	-0.0169
	9	0

	20	-0.0046
$\{q\} =$	21	0
	22	0.0005

	48	0
	49	-0.0031
	50	-0.0161

Con estas deformaciones, la fuerza axial en la barra 1-5 en el instante del pandeo de la estructura es: $N_{1-5} = 8.91t$.

Factor de longitud efectiva:

$$P_e = 8.91 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2078 \cdot 110.81}{(K \cdot 559.02)^2}$$

$$\mathbf{K = 0.903}$$

El esfuerzo correspondiente es $F_{e,1-5} = \frac{N_{1-5}}{A_{1-5}} = \frac{8.91}{11.75} = 0.7583 \frac{t}{cm^2}$

Se verifica si el pandeo del miembro ocurre en rango elástico o inelástico según la norma AISI (12):

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{2.4}{0.7583}} = 1.78 : \quad \text{AISI (C4 - 4)}$$

Como $\lambda_c > 1.5$: $F_n = \left(\frac{0.875}{\lambda_c^2}\right) \cdot F_y = \left(\frac{0.875}{1.78^2}\right) \cdot 2.4 = 0.6628 \frac{t}{cm^2} : \quad \text{AISI (C4 - 3)}$

Pandeo Local:

Almas y alas:

$$\frac{w}{t} = \frac{8.0 - 2 \cdot (2 \cdot 0.4)}{0.4} = 16.0$$

$$\lambda = \frac{1.052}{\sqrt{k}} \cdot \frac{w}{t} \cdot \sqrt{\frac{f}{E}} : \quad \text{AISI (B2.1 - 4)}$$

Para elementos rigidizados: $k=4.0$ y $f = F_n = 0.6628 \frac{t}{cm^2}$

$$\lambda = 0.15$$

Como $\lambda \leq 0.673$: la sección es totalmente efectiva y el área efectiva de la sección es:

$$A_e = A_g = 11.75 \text{ cm}^2$$

La resistencia nominal en compresión es:

$$P_n = A_e \cdot F_n = 11.75 \cdot 0.6628 : \quad \text{AISI (C4 - 1)}$$

$$\mathbf{P_n = 7.79 t}$$

Parte b: $\alpha=1/10$

La matriz de rigidez elástica del sistema es la misma calculada en la parte (a) pero la matriz de rigidez geométrica debe calcularse con el patrón de cargas correspondiente a $\alpha=1/10$

Se deben calcular los esfuerzos en cada barra N_o con el vector de cargas nodales 'patrón' que se indica:

$$\{P_{unit}\}^T = \begin{array}{cccccccccccccccccccc} & 1 & 2 & & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & & 19 & 20 & 21 & & 49 & 50 \\ \hline & 0 & 0 & \dots & 1/2\alpha & -1/2 & 0 & 1/2\alpha & -1/2 & \dots & \alpha & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema $\{q\} = [K_e]^{-1} \cdot \{P_{unit}\}$ se tiene:

GDL	
7	0.0202
8	-0.0175
9	-0.1302
	...
20	-0.0281
21	0.0562
22	0.0140
	...
48	-0.0282
49	0.0262
50	-0.0209

Las fuerzas axiales en cada barra son:

barra	N_o (t)
1	0.535
2	0.535
3	0.4954
4	0.4954
5	0.3185
6	0.3185
7	0.7654
8	0.7654

barra	N_o (t)
9	-0.015
10	-0.015
11	-0.015
12	-0.015
13	0.3312
14	0.3312
15	0.7776
16	0.7776

barra	N_o (t)
17	0.0641
18	0.0641
19	-0.043
20	-0.043
21	-0.015
22	-0.015

La matriz de rigidez geométrica de cada elemento se calcula con la ecuación (3.44), se pasan a coordenadas globales y se ensambla tal como se hizo en la parte (a). Haciendo las operaciones necesarias, la matriz de rigidez geométrica global referida a los G.D.L. libres queda:

	3	6	7	8	9	...	46	47	48	49	50
3	40.406	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0
6	0	54.9	0	0	0	...	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0.05	...	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0.0015	0.005	...	0	0	0	0	0
9	0	0	0.1	0.005	30.457	...					

46	0	0	0	0	0	...	-0	0	0	0	0
47	0	0	0	0	0	...	0	-3	0	0	0
48	0	0	0	0	0	...	0	0	-0.0001	0	0
49	0	0	0	0	0	...	0	0	0	-0.0001	0
50	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	-1.008

Resolviendo el problema de valores y vectores propios de la ecuación (3.62) se obtienen los factores de cargas y formas de pandeo:

modo 1	15.23
modo 2	17.09
modo 3	25.29
modo 4	30.66
modo 5	41.48
modo 6	56.48
modo 7	60.39
modo 8	76.85
modo 9	81.71
modo 10	96.90
modo 11	127.71
	...

Las formas de pandeo asociadas son:

GDL	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	modo 5	modo 6	modo 7	modo 8	...
1	0.0001	0.0029	-0.0004	-0	0	-0.0017	-0.0011	-0.0013	...
2	0.0042	-0.0002	0.0003	-0	0	0.0101	-0.0019	0.0009	...
3	-0.0015	-0.001	0.0003	0	-0	0.0069	-0.0011	0.0048	...

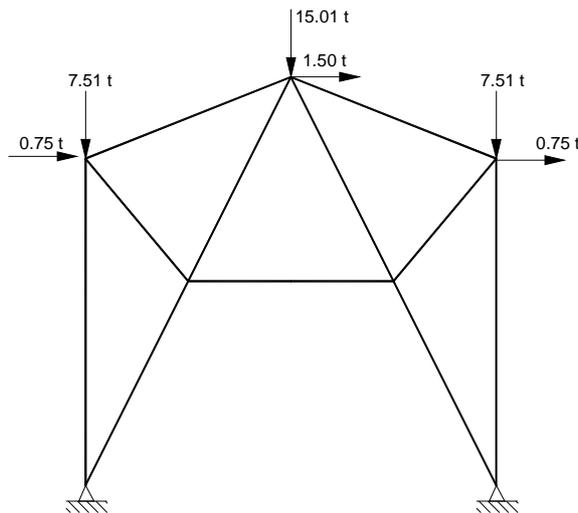
20	0	-0.0006	0.0003	0	-0	0.0034	0.0031	-0.0076	...
21	-1	0.0314	1	-1	0.1	0.5506	0.0187	0.1105	...
22	-0.0004	-0.0001	0.0001	0	-0	0.0013	-0.0003	0.0005	...

48	-0.0019	-0.0013	0.0004	0	-0	0.0071	-0.002	0.0048	...
49	0.0604	-0.0167	0.1998	-0	-0	-0.4461	-0.2224	-0.0449	...
50	0.0002	0.0001	0.0007	0	0	-0.0005	0.0003	-0.0011	...

El menor factor de carga crítica es $P_{min} = 15.23$

Realizando dos subdivisiones a las barras se tiene una carga crítica de pandeo $P_{min} = 15.05$ y con tres subdivisiones $P_{min} = 15.01$. Se adopta como factor de carga crítica de pandeo general elástico $P_{min} = 15.01$. Las cargas asociadas a este factor de pandeo son:

Figura 4.10. Cargas que provocan el pandeo de la estructura, para el patrón de cargas dado con $\alpha=1/10$



Queda por determinar el estado de esfuerzos de cada barra en el instante en que la estructura llega al pandeo, esto se hace resolviendo el sistema $\{q\} = [K]^{-1} \cdot \{P\}$, pero ahora $[K]$ es la matriz de rigidez total de la estructura: $[K] = ([K_e] - P_{min} \cdot [\hat{K}_g])$ y $\{P\}$ es el vector de cargas que se puede expresar como: $\{P\} = P_{min} \cdot \{P_{unit}\}$, donde P_{min} es el menor valor de los factores calculados al resolver el problema de valores y vectores propios, es decir 15.01, y $\{q\}$ son los desplazamientos de los G.D.L. en el instante de la inestabilidad.

Igual que en la parte (a), la matriz $[K] = [K_e] - P_{min} \cdot [\hat{K}_g]$ es singular, se debe usar entonces una variación pequeña del valor de P_{min} para que la matriz $[K]$ sea invertible. Los desplazamientos en el instante de inestabilidad se calculan con:

$$\{q\} = [K]^{-1} \cdot \{P\}$$

$$[K] = ([K_e] - 0.999 \cdot P_{min} \cdot [\hat{K}_g])$$

$$\{P\} = P_{min} \cdot \{P_{unit}\}$$

Resolviendo se tiene:

GDL	
7	0.364
8	-0.2794
9	0.0057
	...
20	-0.4246
{q} = 21	-0.0144
22	1.5351
	...
48	0.0004
49	16.681
50	8.2623

La fuerza axial en la barra 1-5 en el instante del pandeo de la estructura es:

$$N_{1-5} = 7.43t$$

Se puede calcular el factor de longitud efectiva K :

$$P_e = 7.43 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2078 \cdot 110.81}{(K \cdot 559.02)^2}$$

$$\mathbf{K = 0.989}$$

El esfuerzo correspondiente es $F_{e,1-5} = \frac{N_{1-5}}{A_{1-5}} = \frac{7.43}{11.75} = 0.6323 \frac{t}{cm^2}$

Se verifica si el pandeo del miembro ocurre en rango elástico o inelástico según la norma AISI (12):

$$\lambda_c = \sqrt{\frac{F_y}{F_e}} = \sqrt{\frac{2.4}{0.6323}} = 1.95 : \quad \text{AIS I (C4 - 4)}$$

Como $\lambda_c > 1.5$: $F_n = \left(\frac{0.875}{\lambda_c^2}\right) \cdot F_y$: AIS I (C4 - 3)

$$F_n = \left(\frac{0.875}{1.95^2}\right) \cdot 2.4 = 0.5523 \frac{t}{cm^2}$$

Pandeo Local: de lo calculado en (a) queda descartado.

$$A_e = A_g = 11.75 \text{ cm}^2$$

La resistencia nominal en compresión es:

$$P_n = A_e \cdot F_n = 11.75 \cdot 0.5523 : \quad \text{AISI (C4 - 1)}$$

$$\mathbf{P_n = 6.49 t}$$

Una conclusión importante en este punto es reconocer que el factor de longitud efectiva K es dependiente del nivel de esfuerzos al que está sometido el miembro estructural.

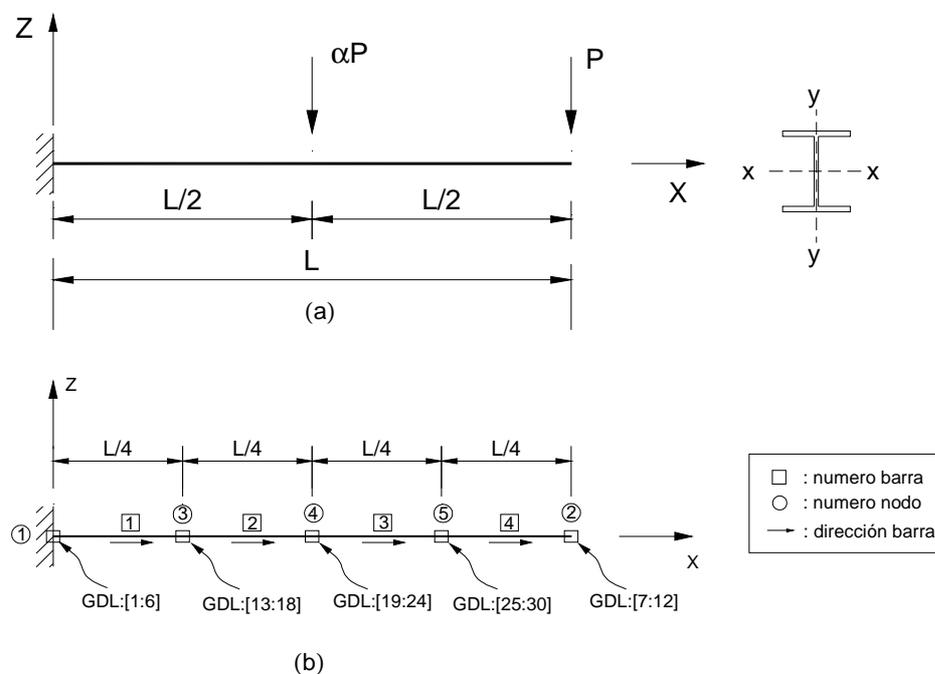
El factor α considerado en la parte (b) trata de modelar el efecto de la falta de aplome en la estructura, entonces se puede concluir que el factor K también es dependiente de esta característica de fabricación o erección de la estructura.

4.3 APLICACIÓN 3.

Se trata de calcular la carga crítica de pandeo de una viga en voladizo de 300 cm de longitud de sección W10x49 de acero A36 para el patrón de cargas indicado en la Figura 4.11. Se quiere además graficar los primeros cuatro modos de pandeo. Se pide analizar para:

- $\alpha=0$
- $\alpha=1/2$

Figura 4.11. Estructura a analizar



Para la solución se usan unidades t, cm .

Parte a: $\alpha=0$

Matriz de Rigidez Elástica.

La solución se hace considerando tres subdivisiones de la viga para su discretización, como se indica en la Figura 4.11(b), también se indican los G.D.L. generados, números de nodos y barras.

Para todos los miembros la matriz de rigidez elástica en coordenadas locales referida a la Figura 4.7 es:

	u_i	v_i	w_i	θ_{xi}	θ_{yi}	θ_{zi}	u_j	v_j	w_j	θ_{xj}	θ_{yj}	θ_{zj}	
[k_e]=	0.0025	0	0	0	0	0	-0.0025	0	0	0	0	0	$\times 10^6$
	0	0.0007	0	0	0	0.0247	0	-0.0007	0	0	0	0.0247	
	0	0	0.0002	0	-0.0085	0	0	0	-0.0002	0	-0.0085	0	
	0	0	0	0.0006	0	0	0	0	0	-0.0006	0	0	
	0	0	-0.0085	0	0.4236	0	0	0	0.0085	0	0.2118	0	
	0	0.0247	0	0	0	1.2336	0	-0.0247	0	0	0	0.6168	
	-0.0025	0	0	0	0	0	0.0025	0	0	0	0	0	
	0	-0.0007	0	0	0	-0.0247	0	0.0007	0	0	0	-0.0247	
	0	0	-0.0002	0	0.0085	0	0	0	0.0002	0	0.0085	0	
	0	0	0	-0.0006	0	0	0	0	0	0.0006	0	0	
	0	0	-0.0085	0	0.2118	0	0	0	0.0085	0	0.4236	0	
	0	0.0247	0	0	0	0.6168	0	-0.0247	0	0	0	1.2336	

Se pasan las matrices de rigidez a coordenadas globales y se ensamblan para tener la matriz de rigidez elástica; por motivos de espacio solo se muestran algunos valores de la matriz.

	7	8	9	10	11	...	20	21	22	23	24	
[K_e]=	0.00506	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	$\times 10^6$
	0	0.00132	0	0	0	...	0	0	0	0	0	
	0	0	0.00045	0	0	...	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0.00121	0	...	0	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0.84719	...						
	
	0	0	0	0	0	...	0.0013	0	0	0	0	
	0	0	0	0	0	...	0	0.0005	0	0	0	
	0	0	0	0	0	...	0	0	0.0012	0	0	
	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0.8472	0	
	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	2.4672	

Se deben calcular los esfuerzos en cada barra con un vector de cargas nodales unitarias o patrón:

$$\{P_{unit}\}^T = \begin{matrix} & 1 & 2 & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Se calculan las matrices de rigidez geométricas en coordenadas locales y globales de todas las barras y se ensamblan tal como se hizo para la matriz de rigidez elástica. Haciendo las operaciones necesarias, la matriz de rigidez geométrica global es:

	7	8	9	10	11	12		25	26	27	28	29	30
7	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	1	0	0
10	0	0	0	0	-12.5	0	...	0	0	0	0	12.5	0
11	0	0	0	-12.5	0	0	...	0	0	0	12.5	0	0
12	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
		
25	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
26	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0
27	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	-2	0	0
28	0	0	1	0	12.5	0	...	0	0	-2	0	-25	0
29	0	0	0	12.5	0	0	...	0	0	0	-25	0	0
30	0	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0	0	0

Resolviendo el problema de valores y vectores propios se obtienen los factores de las cargas y formas de pandeo: $\| [K_e] - \{P\} \cdot [\hat{K}_g] \| = 0$

{P} =	modo 1	27.20
	modo 2	77.24
	modo 3	164.05
	modo 4	778.60

El mínimo valor de {P} multiplicado por $\{P_{unit}\}$ da el vector de carga crítica.

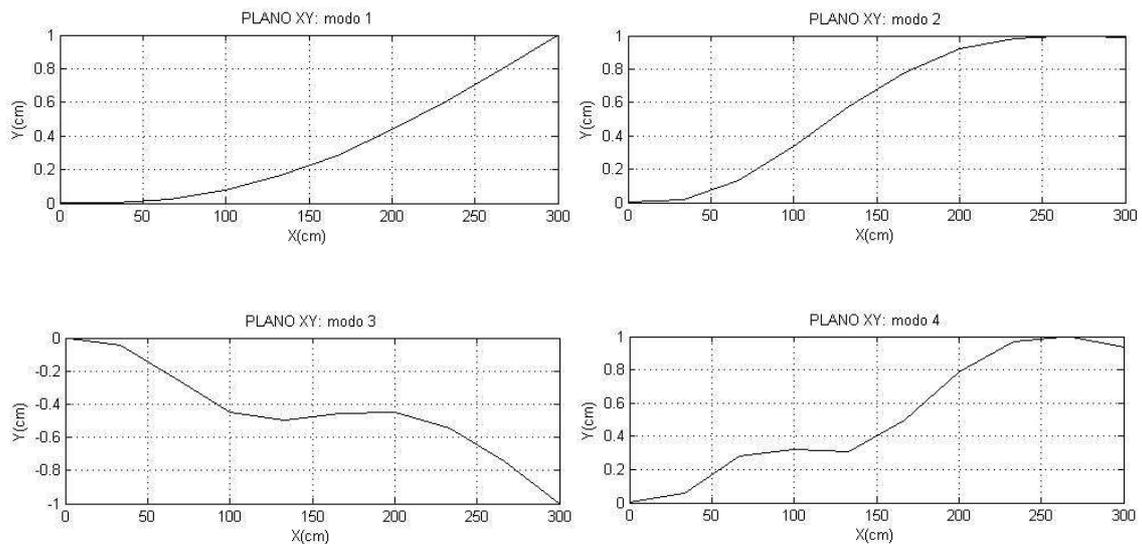
Las formas de pandeo asociadas son:

GDL	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	...
7	0	0	0	0	...
8	0	0	0	0	...
9	-1	0.962	1	0.302	...
10	-0.065	-0.102	0.353	-1	...
11	0.006	0.001	-0.019	0.041	...
12	0	0	0	0	...
13	0	0	0	0	...
14	0	0	0	0	...
15	-0.033	0.141	0.235	0.085	...
16	-0.04	0.059	0.046	0.004	...
17	0.001	-0.005	-0.009	-0.003	...
18	0	0	0	0	...
19	0	0	0	0	...
20	0	0	0	0	...
21	-0.217	0.692	0.686	0.121	...
22	-0.06	-0.044	-0.163	-0.02	...
23	0.004	-0.007	0.006	0.007	...
24	0	0	0	0	...
25	0	0	0	0	...
26	0	0	0	0	...
27	-0.563	1	0.046	0.377	...
28	-0.065	-0.097	0.291	0.12	...
29	0.005	-0.001	-8E-04	-0.028	...
30	0	0	0	0	...

$\{q\} =$

Las gráficas de los cuatro modos de pandeo son:

Figura 4.12. Formas de pandeo para $\alpha=0$



Parte b: $\alpha=1/2$

La matriz de rigidez elástica del sistema es la misma calculada en la parte (a) pero la matriz de rigidez geométrica se debe calcular con las cargas correspondientes a $\alpha=1/2$.

Se deben calcular los esfuerzos en cada barra con el siguiente patrón de cargas:

$$\{P_{unit}\}^T = \begin{array}{cccccccccccccccc} & 1 & 2 & & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & & 20 & 21 & 22 & 23 & 24 \\ \{P_{unit}\}^T = & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Resolviendo el sistema $\{q\} = [K_e]^{-1} \cdot \{P_{unit}\}$ se tiene:

	GDL		GDL	
{q} =	7	0	19	0
	8	0	20	0
	9	-1.31	21	-0.425
	10	0	22	0
	11	0.006	23	0.005
	12	0	24	0
	13	0	25	0
	14	0	26	0
	15	-0.12	27	-0.841
	16	0	28	0
	17	0.003	29	0.006
	18	0	30	0

Los esfuerzos en cada barra son:

	u_i	v_i	w_i	θ_{xi}	θ_{yi}	θ_{zi}	u_j	v_j	w_j	θ_{xj}	θ_{yj}	θ_{zj}
barra 1	0	0	1.5	0	-375	0	0	0	-1.5	0	263	0
barra 2	0	0	1.5	0	-263	0	0	0	-1.5	0	150	0
barra 3	0	0	1	0	-150	0	0	0	-1	0	75	0
barra 4	0	0	1	0	-75	0	0	0	-1	0	0	0

Se calculan las matrices de rigidez geométrica en coordenadas globales para cada barra y se ensamblan para calcular la matriz de rigidez geométrica global.

$$[K_g] =$$

	10	11	16	17	18	...	27	28	29	30
10	0	-12,5	0	0	0	...	0	0	12,5	0
11	-12,5	0	0	0	0	...	0	12,5	0	0
12	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0
14	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0
15	0	0	-7	0	0	...	0	0	0	0
16	0	0	0	-37,5	0	...	0	0	0	0
17	0	0	-37,5	0	0	...	0	0	0	0
18	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0
						...				
27	0	0	0	0	0	...	0	-2	0	0
28	0	12,5	0	0	0	...	-2	0	-25	0
29	12,5	0	0	0	0	...	0	-25	0	0
30	0	0	0	0	0	...	0	0	0	0

Resolviendo el problema de valores y vectores propios se obtienen los factores de cargas y formas de pandeo

$$\{P\} =$$

modo 1	25.08
modo 2	70.81
modo 3	159.80
modo 4	777.53
...	...

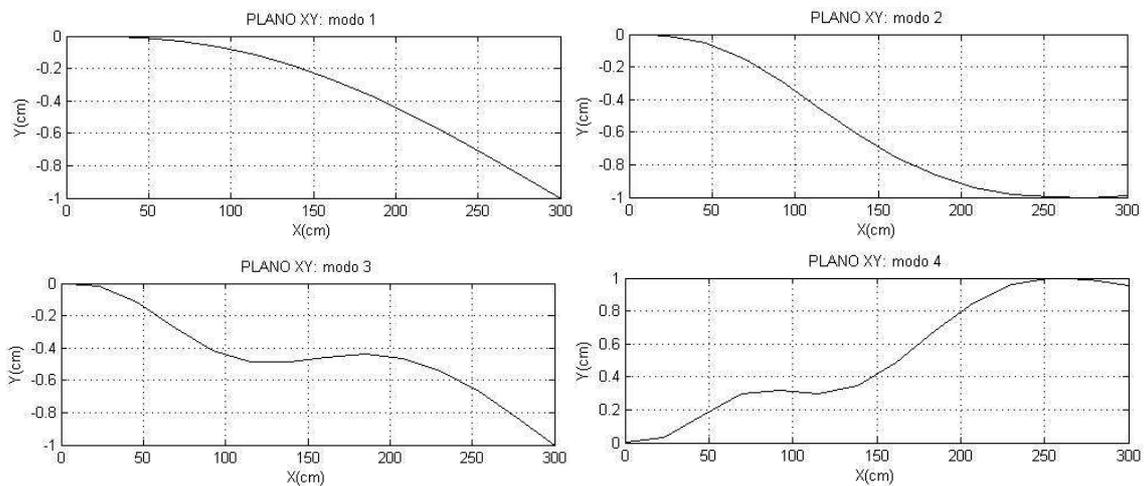
Las formas de pandeo asociadas son:

$$\{q\} =$$

	modo 1	modo 2	modo 3	modo 4	...
7	0	0	0	0	...
8	0	0	0	0	...
9	1	0.8461	1	-0.314	...
10	0.0614	-0.125	0.4504	1	...
11	-0.006	0.0031	-0.023	-0.041	...
12	0	0	0	0	...
13	0	0	0	0	...
14	0	0	0	0	...
15	0.0373	0.1627	0.2736	-0.085	...
16	0.0395	0.0611	0.0455	-0.003	...
17	-0.001	-0.006	-0.01	0.0032	...
18	0	0	0	0	...
19	0	0	0	0	...
20	0	0	0	0	...
21	0.2323	0.7512	0.6952	-0.103	...
22	0.057	-0.064	-0.194	0.0182	...
23	-0.004	-0.007	0.0094	-0.007	...
24	0	0	0	0	...
25	0	0	0	0	...
26	0	0	0	0	...
27	0.5761	1	-0.169	-0.377	...
28	0.0611	-0.121	0.3757	-0.12	...
29	-0.005	0	-7E-04	0.0286	...
30	0	0	0	0	...

Las cuatro primeras formas de pandeo son:

Figura 4.13. Formas de pandeo para $\alpha=1/2$



Para ambos casos (a) y (b), se observa que el segundo modo de pandeo tiene cierta restricción al giro alrededor del eje z en el extremo derecho. Esto quiere decir que si de alguna manera se restringe el giro alrededor de este eje en el extremo derecho de la estructura original, la carga crítica de pandeo sería la correspondiente al segundo modo, es decir existiría un incremento de la carga crítica de 27.2 t a 77.24 t, y de 25.08 t a 70.81 t en los ítems (a) y (b), respectivamente.

La restricción mencionada se conoce como arriostramiento, que en este caso sería contra el giro en el extremo derecho. Un arriostamiento completamente efectivo logra un cambio a un modo superior de pandeo, con el respectivo incremento en la carga crítica.

Entonces, metodología desarrollada también es útil en estudio de los arriostramientos, en cuanto a su posición y efectividad.

4.4 APLICACIÓN 4.

En el siguiente ejemplo se realiza la aplicación del análisis de estabilidad a una estructura común en nuestro medio, en la que, para su diseño se suele considerar un factor de longitud efectiva $K = 1.0$. Se tratará entonces de mostrar la validez de esta suposición y su dependencia con la pendiente de la cubierta que comúnmente soporta esta configuración estructural. Los perfiles usados en el ejemplo provienen de un pre- dimensionamiento de la estructura para las cargas y dimensiones iniciales indicadas. Se consideró la menor variabilidad en las dimensiones de las secciones transversales de los perfiles como variable adicional en este prediseño, como sucedería en la práctica corriente.

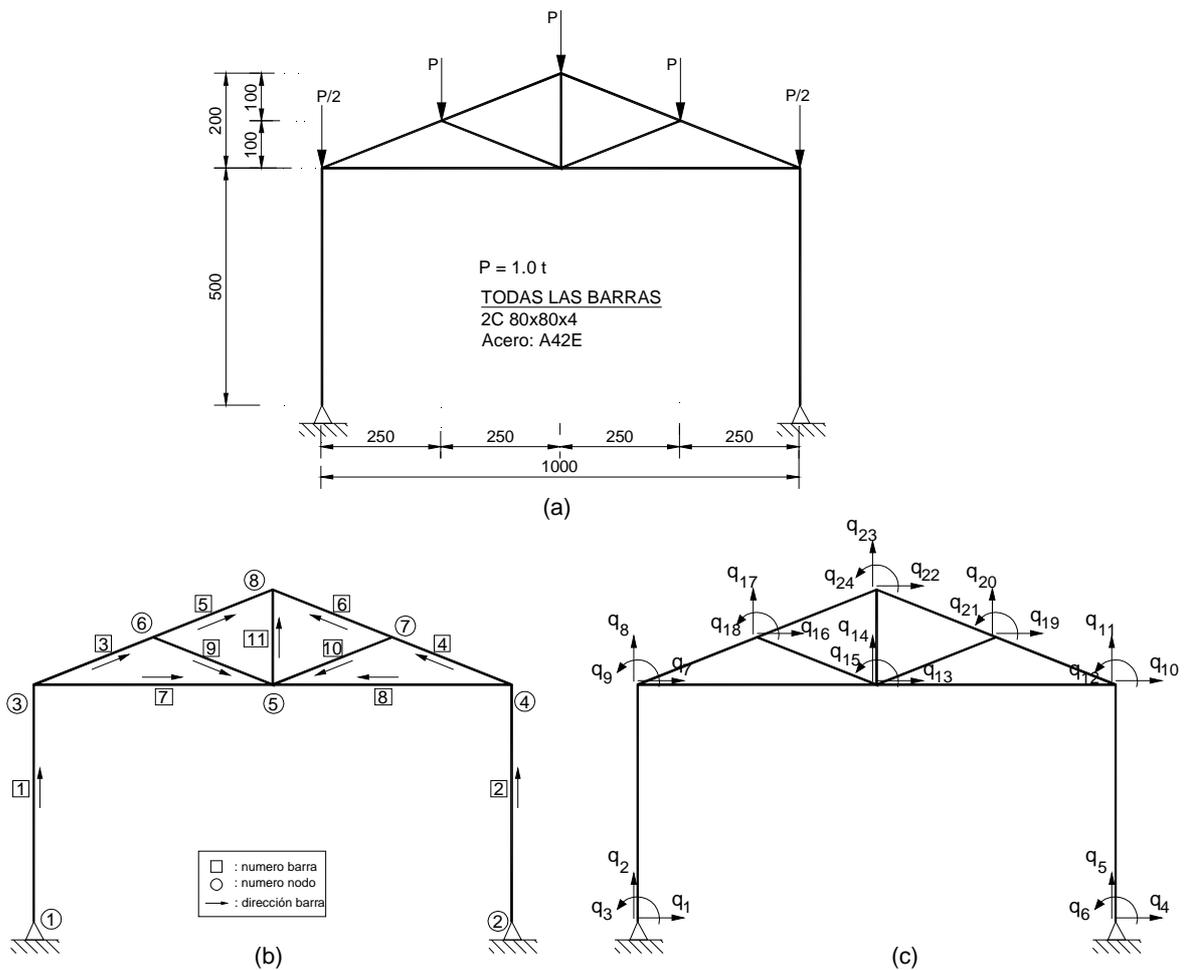
Se trata de calcular la carga crítica de pandeo y sus correspondientes coeficientes de longitud efectiva K de todas las barras comprimidas de la estructura mostrada en la Figura 4.14. Se asume que el pandeo de cada miembro en el plano perpendicular al marco está impedido.

Se pretende resolver para varias pendientes del cordón superior para estudiar la variabilidad del factor K de cada barra y la eficiencia de la estructuración (peso de la estructura) en función de la carga crítica de pandeo del sistema.

La estructura está formada por perfiles de lámina delgada doblados en frío, de acero A42E; para los cálculos se usará la Norma AISI correspondiente ⁽¹²⁾. Las uniones entre todas las barras se consideran como perfectamente rígidas en el análisis.

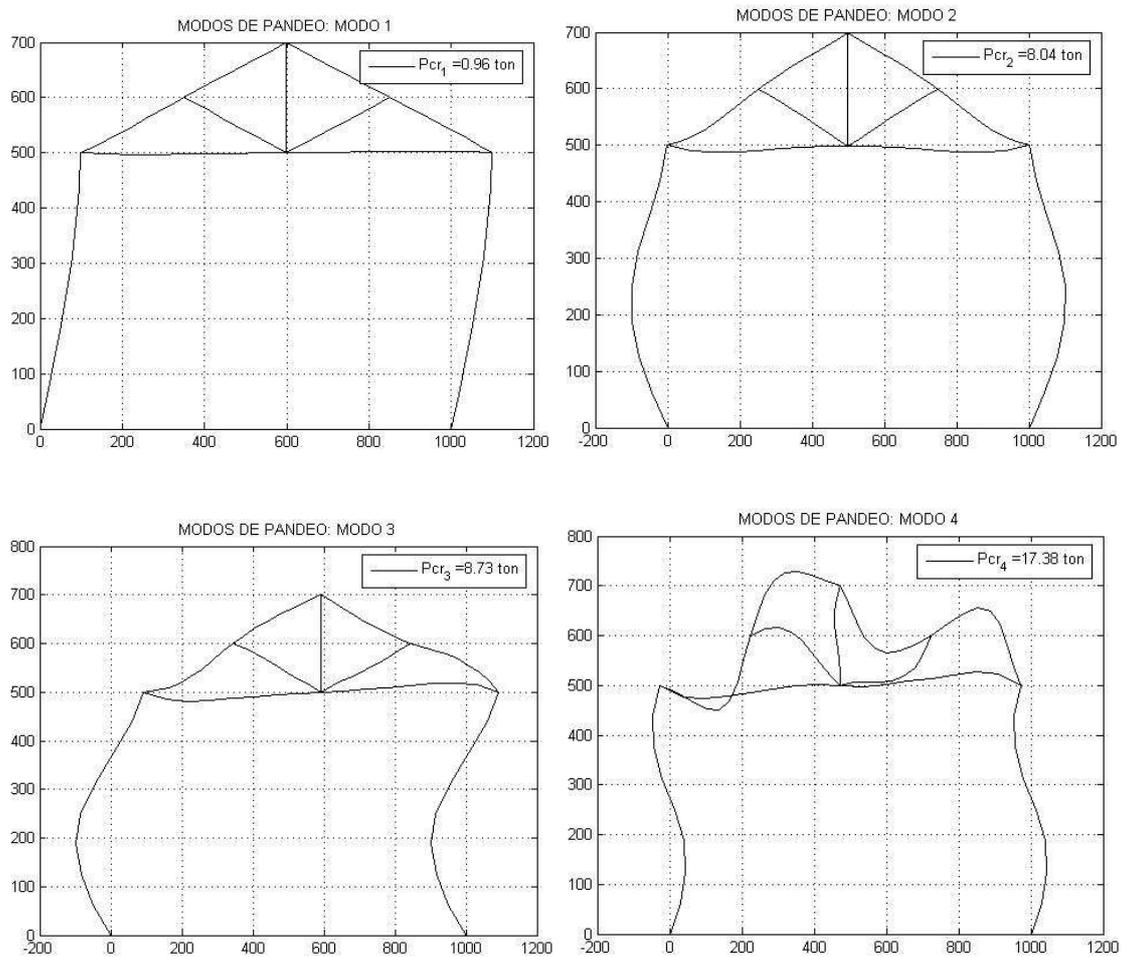
Se adoptará dos subdivisiones de cada barra para la solución del problema de estabilidad. La codificación de la solución se hace en MATLAB; la rutina principal es elaborada de manera que la numeración de nodos, barras y grados de libertad generados por la subdivisión de las barras continúe a partir de la secuencia mostrada en la Figura 4.14 (b) y (c).

Figura 4.14. Estructura a analizar y modelo estructural



Para la estructura de base (Figura 4.14) con dos subdivisiones por barra, los factores de pandeo y sus cuatro primeras formas correspondientes a un patrón de cargas unitario ($P = 1.0 t$ en la Figura 4.14 (a)) son:

modo	Factor P
1	0.96
2	8.04
3	8.73
4	17.38
5	18.72
6	28.48
7	31.43
8	34.15

Figura 4.15. Formas de pandeo para la estructura base

En la Figura 4.15 se observa que el primer modo de pandeo está asociado fundamentalmente al pandeo de las columnas, entonces la conclusión más obvia es que la carga crítica de pandeo global asociada a este modo sea muy parecida a la carga crítica de pandeo de las columnas. Esto se verifica a continuación.

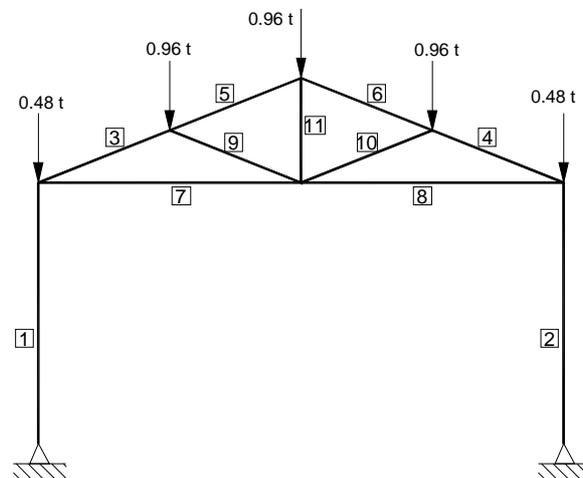
El set de cargas aplicado a la estructura que produce pandeo general se muestra en la Figura 4.16.

Con estas cargas, los esfuerzos axiales en cada barra son:

barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$N_o \text{ (t)}$ (+):compresión (-):tracción	1.90	1.90	3.79	3.79	2.55	2.55	-3.51	-3.51	1.23	1.23	-0.92

Es decir la compresión en las columnas cuando la estructura alcanza la inestabilidad es $N_o = 1.90 t$.

Figura 4.16. Cargas que provocan la inestabilidad del sistema de la estructura base



Ahora bien, si se desea calcular la resistencia nominal de una columna, se presenta la interrogante sobre qué valor de coeficiente de longitud efectiva K usar en el diseño, pues las características de la estructura no satisfacen las condiciones para la aplicación de los nomogramas de Jackson y Moreland. ⁽⁹⁾

Se determinó la carga en las columnas en el instante del pandeo, con esta carga se puede determinar el coeficiente de longitud efectiva verdadero:

$$\text{para la barra 1: } P_{n,1} = 1.90 = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot 2078 \cdot 110.81}{(K \cdot 500)^2}$$

$$K = 2.19$$

Si se repite el mismo procedimiento para todas las barras, se tiene:

barra	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
K	2.19	2.19	2.87	2.87	3.51	3.51	-	-	5.04	5.04	-

Una práctica común es asumir $K = 1$ en el diseño de los miembros en estructuras con esta configuración, por ejemplo, si para la barra 6 se evalúa la resistencia nominal con esta suposición, al aplicar AISI (1996), (C4.1-1), la carga nominal es $19.35 t$, valor que es más de siete veces la resistencia

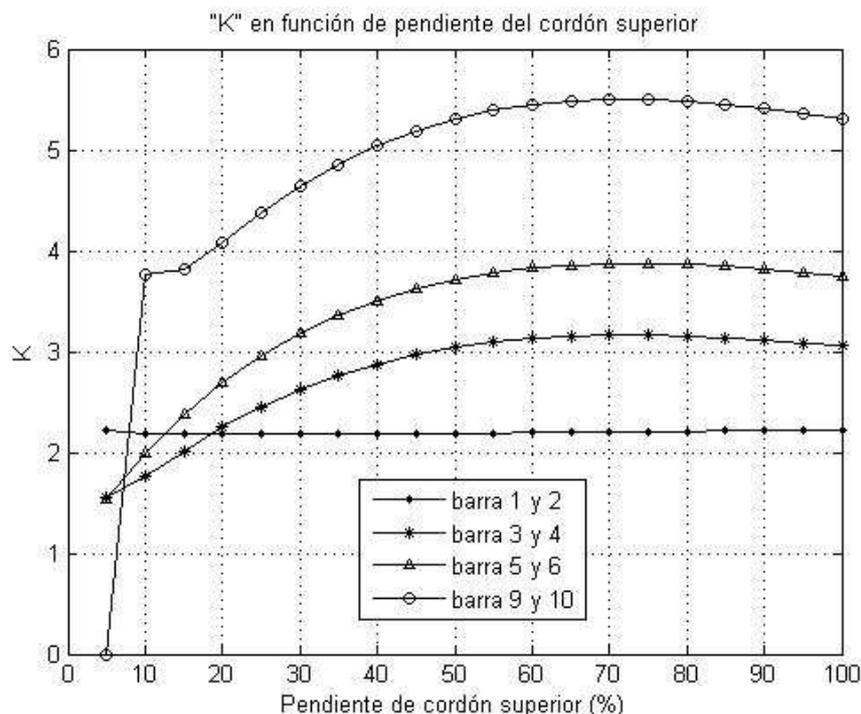
verdadera. De ahí la importancia de determinar de manera correcta los factores de longitud efectiva en el diseño.

Lo resuelto hasta ahora es únicamente para la estructura mostrada en la Figura 4.15 (pendiente de cordón superior de 40%). Ahora, se resolverá de manera similar para un conjunto de estructuras de características similares pero con la variación de la pendiente del cordón superior. El rango de variación abarcará desde 5% hasta 100% con un intervalo de 5%; es decir se resolverán 20 casos.

Se implementa una rutina en MATLAB para la solución, en todos los casos se mantienen los perfiles de la estructura base mostrada en la Figura 4.15(a). Se calculan la carga crítica de pandeo, los coeficientes de longitud efectiva de las barras comprimidas y el peso de la estructura, para cada caso.

En la Figura 4.17 se grafican los coeficientes de longitud efectiva K de algunos miembros en función de la pendiente del cordón superior. La porción recta de la curva correspondiente a las barras 9 y 10 tiene esa forma puesto que para pendientes del cordón superior menores a aproximadamente 10% las barras están sujetas a tracción.

Figura 4.17. Coeficiente de longitud efectiva en función de la pendiente del cordón superior

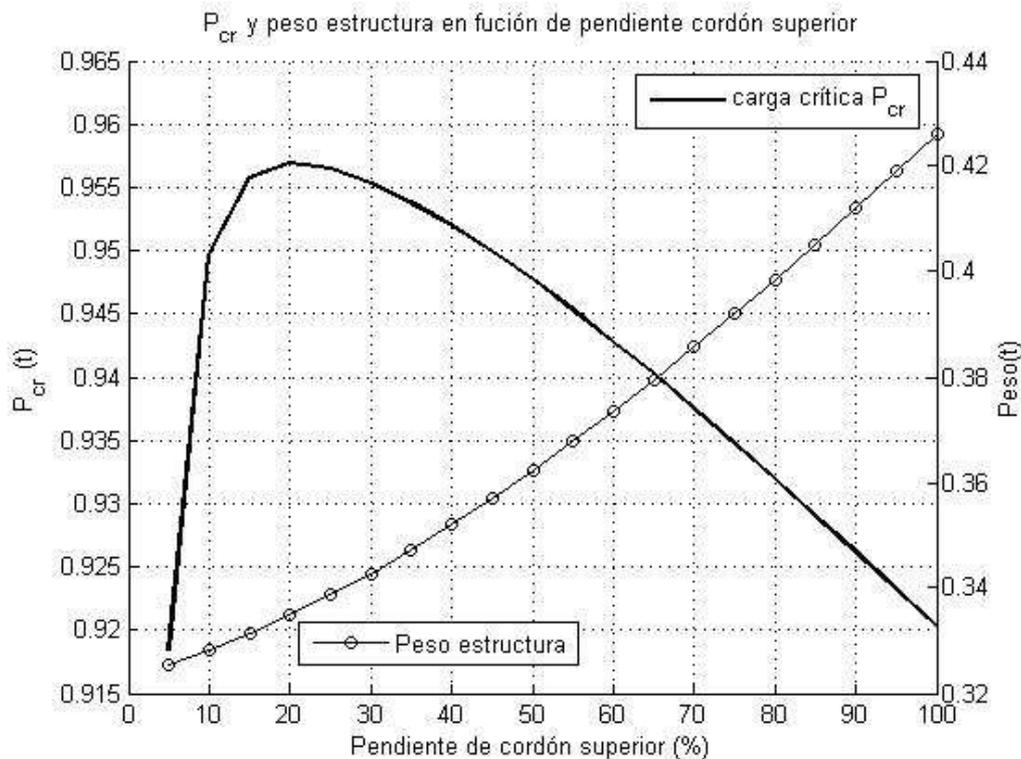


Se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- El coeficiente de longitud efectiva para las columnas (barras 1 y 2) de estructuras con este tipo de configuración es claramente independiente de la pendiente de la cubierta, y se puede adoptar como $K = 2.20$.
- En los cordones superiores (barras 3, 4, 5 y 6), para fines de diseño se puede tomar $K = 3.90$, cualquiera sea la pendiente de ellos.
- Para las diagonales (barras 9 y 10), K es muy variable con la pendiente del cordón superior, de manera conservadora se puede tomar $K = 5.5$ para evaluar su resistencia en caso de que estén sometidas a compresión.

En la Figura 4.18 se grafican las cargas críticas de pandeo y pesos de la estructura en función de la pendiente del cordón superior.

Figura 4.18. Carga crítica y peso de la estructura en función de la pendiente del cordón superior.



Se observa que el caso óptimo en cuanto a carga crítica y peso de la estructura ocurre con una pendiente de aproximadamente 20%, pues se obtiene la mayor carga crítica con menor peso.

CAPÍTULO 5.

ESTABILIDAD DE MARCOS PLANOS SEGÚN LA ESPECIFICACIÓN ANSI/AISC 360-05

5.1 INTRODUCCIÓN

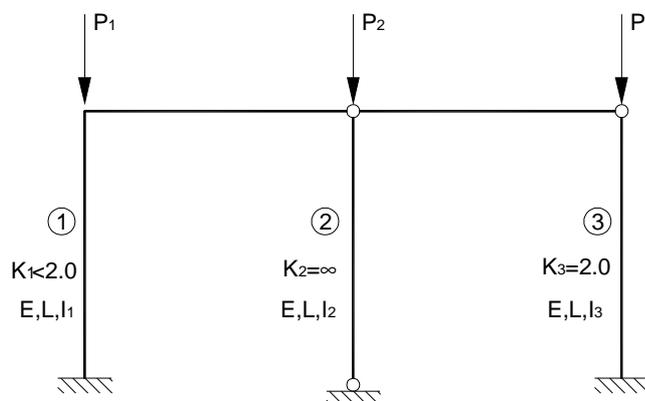
En este capítulo se estudiarán los efectos de la estabilidad en el diseño de estructuras de acero según la especificación ANSI/AISC 360-05 (9). Se tratará principalmente de sistemas de marcos de momento, en los que la rigidez lateral depende de la rigidez de las vigas, columnas y de las uniones entre ellas.

En marcos arriostrados el diseño puede realizarse de manera conservadora usando $K = 1.0$ en la evaluación de la resistencia de sus miembros; así que mas bien en los marcos de momento el estudio de la estabilidad es relevante, pues no hay un valor conservador del coeficiente de longitud efectiva que se podría usar, solo se sabe que $K > 1.0$ en estos tipos de estructuración.

5.2 ESTABILIDAD DE MARCOS EN CONDICIONES IDEALES

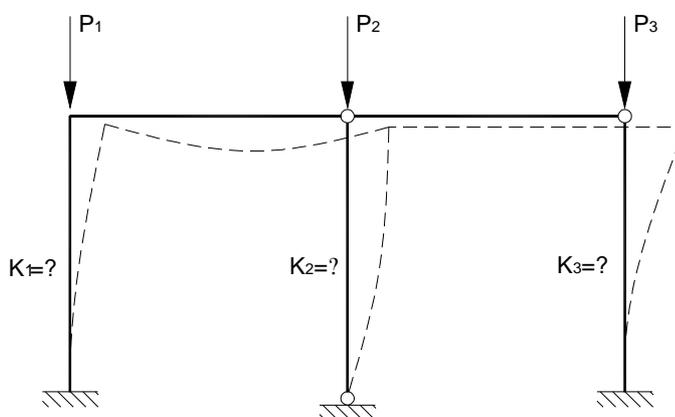
Se considera el marco mostrado en la Figura 5.1. Si las columnas actuaran solas, para la columna 3, se sabe el coeficiente de longitud efectiva es $K_3 = 2.0$ por ser una columna empotrada en la base y con extremo superior articulado. Para la columna 2, el coeficiente es $K_2 = \infty$ pues no es capaz de soportar carga axial alguna por si misma; y para la columna 1, lo único que se puede afirmar es que $K_1 < 2.0$, pues a diferencia de la columna 3, en el extremo superior tiene una unión rígida con la viga.

Figura 5.1. Marco de momento con columnas apoyadas, con valores de K si las columnas actuaran por separado



La columna 2 es bi-articulada (columna apoyada), para poder soportar carga axial esta se 'apoya' lateralmente en las columnas 1 y 3, a su vez estas dos columnas disminuyen su resistencia debido al apoyo lateral que deben proporcionar. Es decir no se conoce el factor de longitud efectiva de ninguna columna del marco (15).

Figura 5.2. Deformada del marco



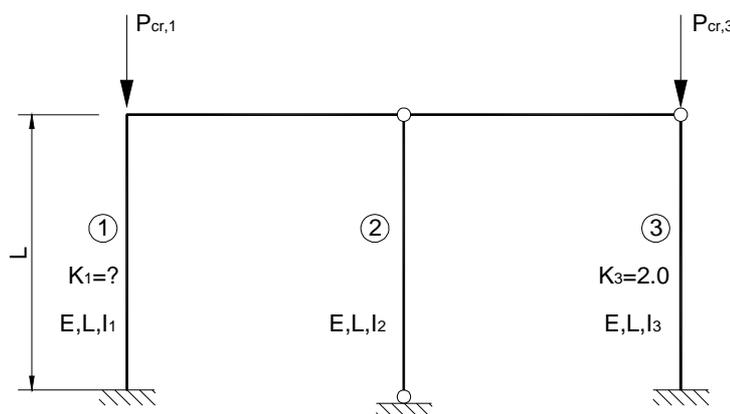
Ahora bien, para fines de diseño del marco se requiere conocer los valores específicos del coeficiente de longitud efectiva de todas las columnas para evaluar la resistencia nominal de cada una. Este es entonces el problema a resolver.

Si se supone que las cargas están aplicadas en las columnas 1 y 3 solamente (Figura 5.3), las cargas críticas de pandeo de cada una son:

$$P_{cr,1} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_1}{(K_1 \cdot L)^2} \quad (5.1)$$

$$P_{cr,3} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_3}{(K_3 \cdot L)^2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_3}{(2 \cdot L)^2} \quad (5.2)$$

Figura 5.3. Marco con cargas aplicadas en columnas 1 y 3 solamente



Asumiendo que el pandeo de cada columna ocurre simultáneamente en todas las columnas, los nomogramas de Jackson y Moreland pueden ser usados para determinar la carga crítica del sistema.

$$P_{cr,total} = P_{cr,1} + P_{cr,3} \quad (5.3)$$

$$P_{cr,total} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_1}{(K_1 \cdot L)^2} + \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_3}{(2 \cdot L)^2} \quad (5.4)$$

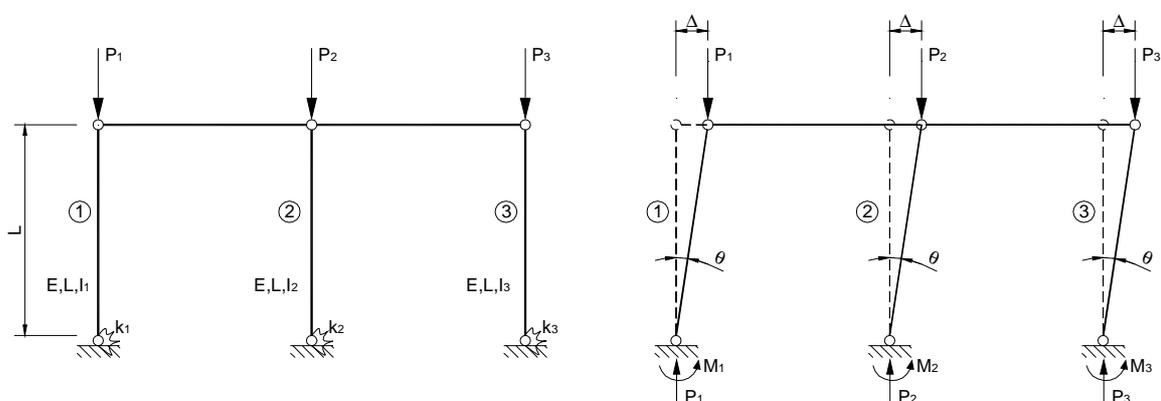
$$P_{cr,total} = \frac{\pi^2 \cdot E}{L^2} \cdot \left(\frac{I_1}{K_1^2} + \frac{I_3}{4} \right) \quad (5.5)$$

En este caso, puesto que no existe carga aplicada en la columna 2, el coeficiente de longitud efectiva K_1 puede ser calculado con el ábaco de Jackson y Moreland correspondiente (16) (17). Es decir la resistencia total del marco puede ser determinada, no así la resistencia individual de cada columna.

Si existieran cargas aplicadas en cada columna, la última expresión sigue siendo válida puesto que representa la suma de las resistencias ante carga axial de todas las columnas, pero no se conoce la resistencia de cada una.

Se analiza ahora el caso de columnas que no están perfectamente empotradas en la base. En el marco que se indica a continuación, la resistencia lateral es proporcionada por la rigidez rotacional de la base de las columnas.

Figura 5.4. Marco con columnas sin empotramiento perfecto



En la Figura 5.4, k_1 , k_2 y k_3 son las rigideces rotacionales de la base de cada columna, E el módulo de elasticidad del material, L la longitud de las columnas, I su inercia y M el momento generado por la rigidez rotacional de la base.

Asumiendo linealidad en la relación esfuerzo-deformación en los resortes y que se trata de deformaciones pequeñas, se puede escribir:

$$M_1 = k_1 \cdot \theta = k_1 \cdot \frac{\Delta}{L} \quad (5.6)$$

$$M_2 = k_2 \cdot \frac{\Delta}{L} \quad (5.7)$$

$$M_3 = k_3 \cdot \frac{\Delta}{L} \quad (5.8)$$

En la Figura 5.4(b) se muestra el equilibrio del marco cuando se deforma lateralmente una longitud Δ . El equilibrio exige:

$$M_1 + M_2 + M_3 = \Delta \cdot P_1 + \Delta \cdot P_2 + \Delta \cdot P_3 \quad (5.9)$$

$$\sum M_i = \sum \Delta \cdot P_i = \sum k_i \cdot \frac{\Delta}{L}$$

$$\Delta \cdot \left(\sum P_i - \sum \frac{k_i}{L} \right) = 0$$

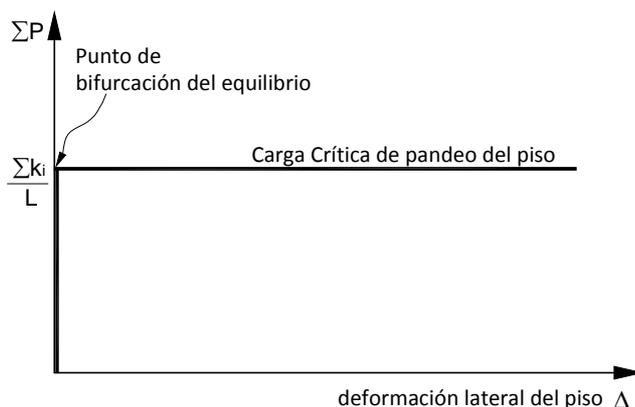
$$\sum P_i = \sum \frac{k_i}{L} \quad (5.10)$$

Entonces la carga crítica del piso es $P_{cr,piso} = \sum \frac{k_i}{L}$.

El término $\sum P_i$ es la suma de las cargas de todo el piso y $\sum \frac{k_i}{L}$ es una propiedad de la estructura. Vale recordar los conceptos desarrollados en el capítulo 2, en el se determinó que el problema de estabilidad representa un problema de valores y vectores propios de la forma, como se ve en la ecuación (2.34); en donde $[K_e]$ era la matriz de rigidez elástica y $[K_g]$ la matriz de rigidez geométrica. La primera es una propiedad de la estructura, independiente de las cargas y la segunda únicamente función del nivel de esfuerzos en los miembros del sistema. La analogía con las expresiones desarrolladas para el marco de la Figura 5.4 es inmediata.

La expresión $\sum P_i = \sum \frac{k_i}{L}$ no indica el valor de la carga máxima que se puede aplicar a cada columna, sólo proporciona el valor de la carga total nominal del piso. Así mismo la rigidez rotacional de la base de cada columna no es conocida, solo la rigidez total del marco. Se debe notar también que la resistencia máxima del marco y la rigidez lateral no dependen de la distribución de cargas, por tanto se podría colocar la carga total $P_1 + P_2 + P_3$ del piso en una sola columna y la carga crítica del marco y su rigidez lateral es la misma, pero siempre y cuando esta suma sea menor o igual a la carga crítica de pandeo de esa columna.

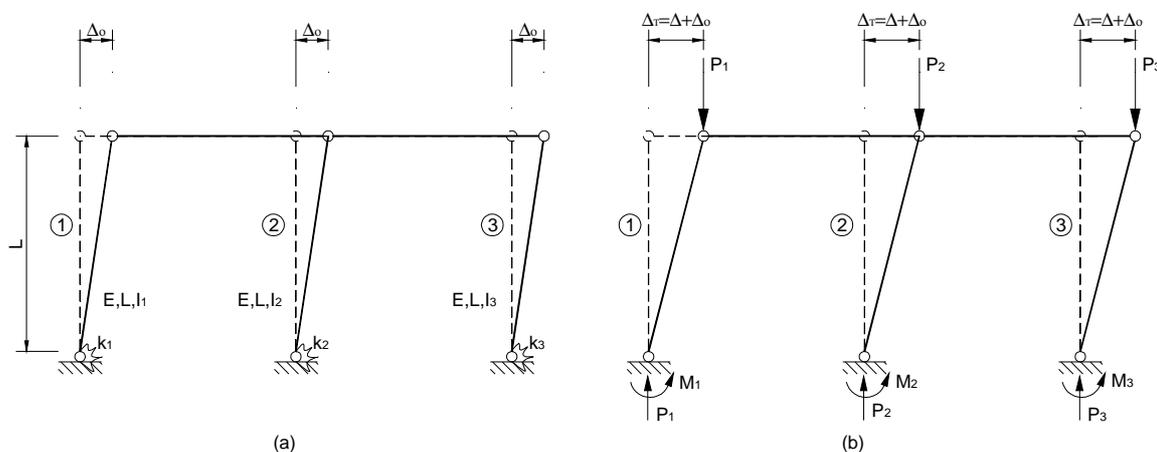
Figura 5.5. Carga-deformación lateral del marco de la Figura 5.4



5.3 ESTABILIDAD DE MARCOS CON IMPERFECCIONES INICIALES

Se considera el marco mostrado en la Figura 5.6, con una imperfección inicial Δ_o :

Figura 5.6. Marco plano con imperfecciones iniciales



En la Figura 5.6(a) se muestra el mismo marco del punto anterior pero con una falta de aplome inicial Δ_o de las columnas previo a la aplicación de las cargas. En la Figura 5.6(b) se muestran las reacciones generadas cuando las cargas axiales son aplicadas en las columnas hasta alcanzar la carga crítica de pandeo; en este instante la estructura tiene una deformación lateral Δ , entonces la deformación lateral total es $\Delta_T = \Delta_o + \Delta$.

El equilibrio en el marco impone:

$$\sum M_i = (\Delta_o + \Delta) \cdot \sum P_i = \Delta_T \cdot \sum P_i \quad (5.11)$$

El giro en cada resorte rotacional puede aproximarse a:

$$\theta = \frac{\Delta}{L} = \frac{\Delta_T - \Delta_o}{L} \quad (5.12)$$

Y el momento generado en cada resorte con esta deformación es:

$$M_i = \theta \cdot k_i = \frac{\Delta_T - \Delta_o}{L} \cdot k_i \quad (5.13)$$

Para todas las columnas del piso:

$$\sum M_i = \frac{\Delta_T - \Delta_o}{L} \cdot \sum k_i \quad (5.14)$$

$$\Delta_T \cdot \sum P_i = \frac{\Delta_T - \Delta_o}{L} \cdot \sum k_i \quad (5.15)$$

La carga crítica, definida como la máxima carga es entonces:

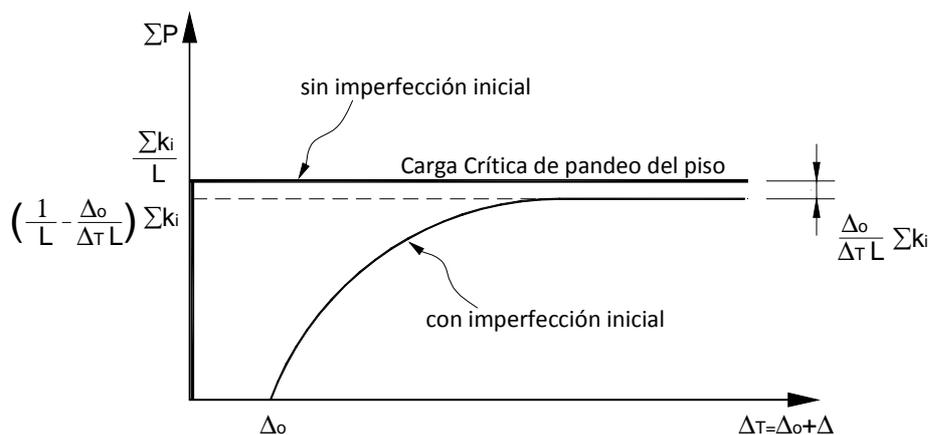
$$\sum P_i = \left(\frac{1}{L} - \frac{\Delta_o}{\Delta_T \cdot L} \right) \cdot \sum k_i \quad (5.16)$$

Despejando, la deformación lateral total se puede expresar como:

$$\Delta_T = \frac{\Delta_o}{1 - \frac{\sum P_i}{\sum k_i} \cdot \frac{1}{L}} \quad (5.17)$$

Se observa que cuando existe una falta de aplome inicial, hay un descenso en la carga crítica de pandeo del piso, para el marco considerado; este descenso es igual a $\left(\frac{\Delta_o}{\Delta_T \cdot L}\right) \sum k_i$, como se grafica en la Figura 5.7.

Figura 5.7. Curva carga-deformación del marco con y sin imperfecciones iniciales



De estos desarrollos se puede concluir lo siguiente:

- En sistemas de marcos planos en que existen columnas que no participan de la rigidez lateral pero que toman carga axial (columnas apoyadas), los nomogramas de Jackson y Moreland pueden ser usados para determinar la carga axial total nominal del piso completo, pero no para calcular la resistencia de cada columna del piso.
- Para fines de diseño, se requiere de algún método para conocer los verdaderos valores de los coeficientes de longitud efectiva de cada columna para evaluar su resistencia.

5.4 ENFOQUE DE ANSI/AISC 360-05.

ANSI/AISC 360-05 ⁽⁹⁾ define los requisitos de estabilidad sin importar cual sea el sistema estructural resistente. Los requerimientos son:

- La estabilidad debe ser analizada considerando la estructura como un todo. Adicionalmente la estabilidad de los miembros individuales debe ser también verificada.

- Tradicionalmente, los efectos de las inevitables imperfecciones geométricas, dentro de ciertas tolerancias tanto en fabricación como erección de los miembros, así como los esfuerzos residuales ya son incluidos en las expresiones para determinación de resistencia. Entonces el análisis estructural correspondiente bajo esta consideración debe usar la resistencia nominal y geometría teórica perfecta del sistema estructural. Esta metodología tradicional se conoce como **Método de Longitud Efectiva**, este método debe considerar también un **Análisis Elástico de Segundo Orden**.
- Otro método denominado **Método de Análisis Directo** es también permitido ⁽¹⁸⁾; en este se incluyen las imperfecciones geométricas nominales y los efectos de reducción de resistencia directamente en el análisis estructural.
- Ninguno de los dos métodos proveen por si mismos estabilidad a la estructura como un todo. Tanto ésta como la estabilidad de miembros individuales debe ser provista con una combinación de cálculos de resistencia requerida por el análisis estructural y la satisfacción de las disposiciones de diseño de miembros y conexiones de la especificación.
- La especificación también permite, para cálculos manuales el uso de un método de análisis elástico simplificado de primer orden, que considera cierta amplificación de los efectos de carga de un análisis de primer orden como aproximación al análisis de segundo orden.

5.4.1 MÉTODOS DE ANÁLISIS DE SEGUNDO ORDEN

5.4.1.1 Análisis General de Segundo Orden Elástico.

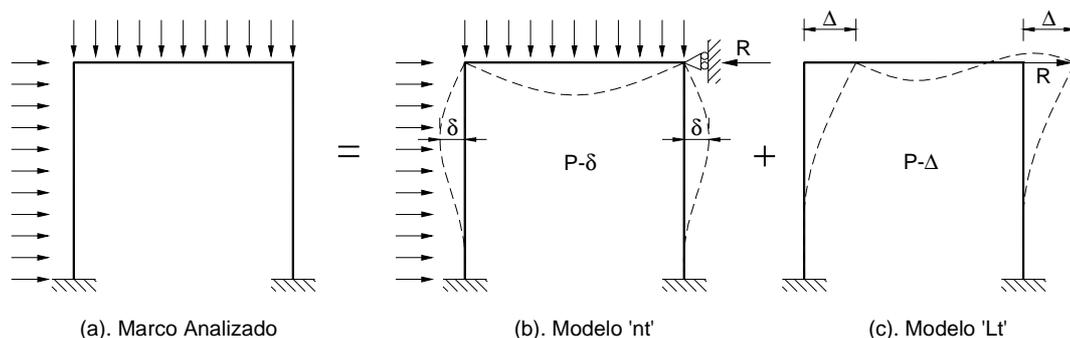
En este análisis el equilibrio de la estructura se estudia en la posición deformada; se trata de un problema de no linealidad geométrica. Existe un aumento de esfuerzos y deformaciones comparado con el análisis de primer orden. El análisis debe considerar desplazamientos relativos entre extremos de un elemento ($P - \Delta$) o excentricidades a lo largo del elemento ($P - \delta$) (Figura 2.1).

En los capítulos 2 y 3 se desarrolló la metodología de solución del análisis de no linealidad geométrica o de segundo orden.

5.4.1.2 Análisis de Segundo Orden por Amplificación del Análisis de Primer Orden

Este método define dos factores de amplificación B_1 y B_2 ; el primero trata de representar el efecto $P - \delta$ y el segundo el efecto $P - \Delta$ (9).

Figura 5.8. Descripción de análisis de segundo orden por amplificación del análisis de primer orden



En la Figura 5.8, el modelo 'nt' corresponde al análisis con las cargas de diseño de la estructura que considera que el marco no tiene desplazamiento lateral, representa el efecto $P - \delta$ es decir está asociado al factor B_1 . El modelo 'Lt' representa el modelo con desplazamiento lateral en el que se aplica como carga lateral la reacción R producida en el modelo 'nt' debida a la restricción contra desplazamiento lateral y está asociado al factor B_2 . El momento y carga axial de segundo orden requeridos se determinan con las siguientes expresiones:

$$M_r = B_1 \cdot M_{nt} + B_2 \cdot M_{lt} \quad \text{AISC (C2 - 1a)}$$

$$P_r = P_{nt} + B_2 \cdot P_{lt} \quad \text{AISC (C2 - 1b)}$$

en donde:

M_r y P_r : momentos y carga axial de segundo orden requeridos

M_{nt} , P_{nt} : momento y carga axial del modelo 'nt'

M_{lt} , P_{lt} : momento y carga axial del modelo 'Lt'

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - \alpha \cdot \frac{P_r}{P_{e1}}} \geq 1.0 \quad \text{AISC (C2 - 2)}$$

P_r : para miembros sometidos a carga axial, se puede tomar $P_r = P_{nt} + P_{lt}$

C_m : factor que considera la no uniformidad del momento flector en el miembro.

- (i) Para columnas que no están sometidas a carga lateral entre las restricciones contra desplazamiento lateral:

$$C_m = 0.6 - 0.4(M_1/M_2)$$

donde M_1 y M_2 son momentos del análisis de primer orden y son los menores y mayores momentos de los extremos de cada miembro, respectivamente.

- (ii) Para vigas columnas sometidas a cargas laterales entre las restricciones contra desplazamiento lateral, conservadoramente se puede tomar $C_m = 1.0$

P_{e1} : carga crítica de pandeo elástico en el plano de flexión analizado; como se trata del modelo 'nt', conservadoramente se toma el mayor valor del coeficiente de longitud efectiva para marcos sin desplazamiento lateral:
 $K = 1.0$

$$\alpha = 1.00 \text{ (LRFD)} \quad \alpha = 1.60 \text{ (ASD)}$$

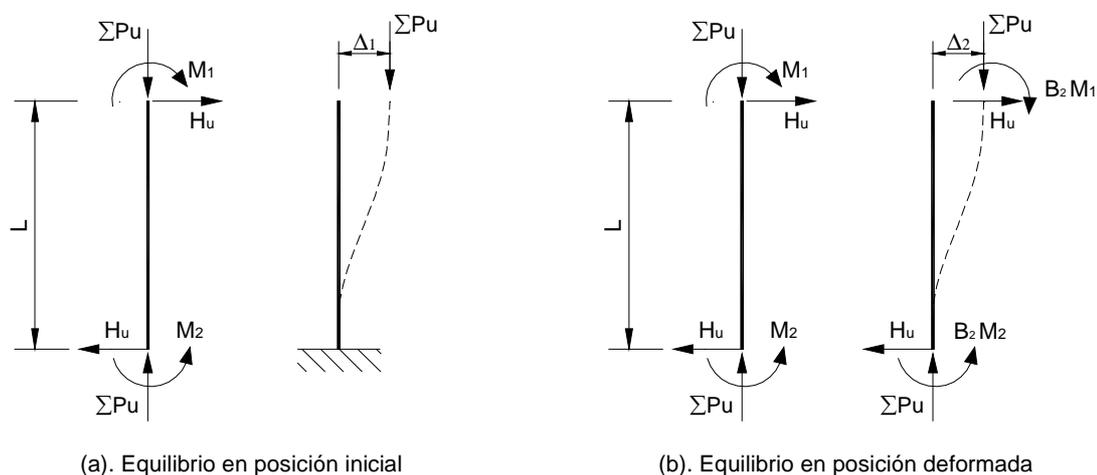
Si se considera una columna del marco de la Figura 5.8 y se supone que la viga del piso es infinitamente rígida flexural y axialmente, se tiene la columna mostrada en la Figura 5.9.

En la Figura 5.9(a), Δ_1 es el desplazamiento lateral entre extremos de la columna, calculado con un análisis de primer orden, H_u es el corte en el piso y $\sum P_u$ la sumatoria de las cargas verticales últimas del piso (se pueden sumar por la suposición de que es un marco de corte), el equilibrio en esta posición no deformada exige:

$$M_1 + M_2 = H_u \cdot L \quad (5.18)$$

donde M_1 y M_2 son los momentos en los extremos de la columna.

Figura 5.9.Columna del modelo 'lt'



En la Figura 5.9(b), Δ_2 es el desplazamiento lateral entre extremos de la columna de un análisis de segundo orden, los momentos de segundo orden son $B_2 \cdot M_1$ y $B_2 \cdot M_2$, donde B_2 es el factor de amplificación antes mencionado. El equilibrio en la posición deformada exige:

$$B_2 \cdot (M_1 + M_2) = H_u \cdot L + \sum P_u \cdot \Delta_2 \quad (5.19)$$

$$B_2 = \frac{H_u \cdot L + \sum P_u \cdot \Delta_2}{M_1 + M_2} \quad (5.20)$$

Se supone que las deformaciones se amplifican en la misma proporción en que se amplifican los esfuerzos, es decir se supone linealidad en la constitutiva del material. Con esto: $\Delta_2 = B_2 \cdot \Delta_1$ y reemplazando se tiene:

$$B_2 = \frac{H_u \cdot L + \sum P_u \cdot B_2 \cdot \Delta_1}{M_1 + M_2} \quad (5.21)$$

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{L} \cdot \frac{\Delta_1}{H_u}} \quad (5.22)$$

En esta expresión se identifica el término $\frac{H_u}{\Delta_1}$ que es la rigidez lateral del piso: K_{piso} ; reemplazando:

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{K_{piso} \cdot L}} \quad (5.23)$$

Considerando que en la sumatoria de las cargas del piso el término $K_{piso} \cdot L$ se puede escribir como la sumatoria de las cargas críticas de Euler que participan en la rigidez lateral (19):

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{\sum P_u}{\sum P_{e2}}} \quad (5.24)$$

en donde $\sum P_{e2}$ es la carga crítica de pandeo elástico del piso, considerando que es un marco con desplazamiento lateral.

Esta última expresión es la que consta en ANSI/AISC 360-05 (C2-3).

El enfoque de ANSI/AISC 360-05 para el análisis de estabilidad y diseño de marcos de acero se puede agrupar en dos métodos disponibles:

- Método de Longitud Efectiva
- Método de Análisis Directo

5.4.2 MÉTODO DE LONGITUD EFECTIVA

Este método tiene las siguientes características principales según la especificación ANSI/AISC 360-05 (9) (19):

- La estructura se analiza usando geometría y rigidez elástica nominales de los miembros estructurales.

- Las resistencias requeridas deben ser determinadas de un análisis de segundo orden.
- Las combinaciones de carga gravitacionales deben incluir una carga lateral mínima aplicada en cada nivel de la estructura de $0.002 \cdot Y_i$, donde Y_i es la carga gravitacional de diseño de cada piso; esto trata de representar que la estructura no es perfectamente vertical, que tiene una condición de no aplome de $L/500$.
- Para marcos de momento se debe diseñar usando un factor de longitud efectiva K o un **análisis de pandeo elástico**.
- El método es aplicable si la razón de desplazamiento lateral calculado con el análisis de segundo orden y el de primer orden es menor a 1.5; si esto no se cumple, se debe usar el Método de Análisis Directo descrito en el Apéndice 7 de ANSI/AISC 360-05 ⁽⁹⁾; se puede usar $B_2 = \Delta_2/\Delta_1$ para determinar esta razón.
- Se puede usar $K = 1.0$ si $B_2 = \Delta_2/\Delta_1 \leq 1.10$

En resumen, este método trata de calcular la resistencia nominal de cada miembro estructural a partir de la determinación del coeficiente de longitud efectiva K . Ya que un análisis de pandeo elástico proporciona la carga axial en cada miembro estructural y con ésta es posible calcular el coeficiente K , entonces con este método el problema se resume a calcular el **coeficiente de longitud efectiva**.

5.4.2.1 Coeficiente de Longitud Efectiva

Existen varios métodos para el cálculo del coeficiente de longitud efectiva, algunos de los más aceptados se mencionan a continuación:

(a) Nomogramas de Jackson y Moreland.

Es la metodología más usada pero su empleo está sujeto a ciertas hipótesis bajo las cuales es válido su uso; las principales son ⁽⁹⁾ ⁽³⁾ ⁽⁶⁾:

- Todos los miembros tienen sección transversal constante
- Todas las conexiones son rígidas
- Todas las columnas de un piso pandean simultáneamente
- No hay esfuerzos axiales importantes en las vigas.

Para el caso de los marcos analizados en las secciones 5.2 y 5.3, en los que algunas uniones viga-columna son uniones de corte y la rigidez lateral es proporcionada por ciertas uniones rígidas solamente, estas columnas no aportan rigidez lateral al sistema (**columnas apoyadas**) y más bien para soportar carga axial se apoyan en las columnas que sí proporcionan rigidez lateral, y a su vez estas últimas disminuyen su rigidez por el apoyo que deben dar a las primeras. Esto hace que dichos marcos no cumplan con las suposiciones mencionadas.

Para el caso de estos marcos de momento con **columnas apoyadas**, el coeficiente de longitud efectiva verdadero de cada miembro se denomina K_2 en ANSI/AISC 360-05.

(b) Método de Yura (1971) ⁽¹⁷⁾.

También denominado método de Pandeo de Piso, es válido para marcos de momento con **columnas apoyadas**. Se basa en verificar la estabilidad del piso completo usando los nomogramas de Jackson y Moreland, como se hizo en las secciones 5.2 y 5.3.

En este método se supone que la resistencia de cada columna es proporcional a la carga que toma cada columna respecto a la carga total del piso.

En la sección 5.2 y 5.3 se determinó que los nomogramas de Jackson y Moreland pueden usarse para determinar la resistencia del piso completo para el caso de marcos de momento con **columnas apoyadas**, pero no para determinar la resistencia de cada columna; entonces, usando la notación de ANSI/AISC 360-05, se debe cumplir para cada piso:

$$\sum P_r \leq \phi \sum P_{n2} \quad (5.25)$$

$$1 \leq \frac{\phi \sum P_{n2}}{\sum P_r} \quad (5.26)$$

donde $\sum P_r$ es la suma de las cargas últimas del piso y P_{n2} la carga crítica de pandeo de las columnas del piso que participan en la rigidez lateral calculada con los coeficientes de longitud efectiva de los nomogramas de Jackson y Moreland K_{n2} :

$$P_{n2} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K_{n2} \cdot L)^2} \quad (5.27)$$

Multiplicando ambos lados de la inecuación (5.26) por la carga crítica de la columna i del piso: $P_{cr,i} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_i}{(K_{2,i} \cdot L)^2}$, en donde $K_{2,i}$ es el coeficiente de longitud efectiva real de dicha columna, que es de interés determinar, se tiene:

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_i}{(K_{2,i} \cdot L)^2} \leq \frac{\phi \sum P_{n2}}{\sum P_r} \cdot P_{cr,i} \quad (5.28)$$

La aproximación en el método está en considerar que la resistencia requerida en cada columna es: $P_{r,i} = \phi P_{cr,i}$. Igualdad que no siempre es verdadera puesto que la carga crítica de pandeo no siempre está en el rango elástico. Con esta aproximación se tiene:

$$\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_i}{(K_{2,i} \cdot L)^2} \leq \frac{\sum P_{n2}}{\sum P_r} \cdot P_{r,i} \quad (5.29)$$

$$K_{2,i} \geq \sqrt{\frac{\sum P_r}{\sum P_{n2}} \cdot \frac{1}{P_{r,i}} \cdot \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_i}{L^2}} \quad (5.30)$$

Expresión similar a la ecuación ANSI/AISC 360-05 (C-C2-8), con la salvedad de que en la normativa se hace un control de valor mínimo para K_2 :

$$K_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I / L^2}{P_r} \cdot \frac{\sum P_r}{\sum \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(K_{n2} \cdot L)^2}}} \geq \frac{5}{8} \cdot K_{n2} \quad \text{AIS(C - C2 - 8)}$$

(c) Método de LeMesurier (1977).

Denominado también Método de Rigidez de Piso ⁽¹⁸⁾ (9), análogo al Método de Pandeo de Piso, se basa en el supuesto de que la rigidez lateral del piso completo puede ser determinada fácilmente y el problema se reduce a encontrar la distribución de tal rigidez en cada una de las columnas del piso. La expresión del Método está en la ecuación ANSI/AISC 360-05 (C-C2-5).

$$K_2 = \sqrt{\frac{\sum P_r}{(0.85 + 0.15 \cdot R_L) P_r} \cdot \frac{\pi^2 EI}{L^2} \cdot \frac{\Delta_H}{\sum HL}} \geq \sqrt{\frac{\pi^2 EI}{L^2} \frac{\Delta_H}{1.7HL}} \quad \text{AISC(C - C2 - 5)}$$

en donde:

K_2 : coeficiente de longitud efectiva real de cada columna que participa en la rigidez lateral

H y Δ_H : son el corte del piso y la deformación lateral asociada; respectivamente, con esto se evalúa la rigidez lateral del piso.

L : la altura del piso

P_r : resistencia requerida por la columna en estudio

E, I : módulo de elasticidad del material e inercia de la sección transversal, respectivamente, y

$$R_L = \frac{\sum P_r \text{ columnas apoyadas}}{\sum P_r \text{ todas las columnas del piso}}$$

(d) Análisis de No-Linealidad Geométrica. ⁽⁹⁾

Se trata de la aplicación de los conceptos desarrollados en los capítulos 2 y 3, en los que se estudió el análisis de no-linealidad geométrica para evaluar la estabilidad de sistemas estructurales y así determinar la carga o vector de cargas que produce pandeo elástico de la estructura completa; todo esto a partir de la evaluación de la matriz de rigidez elástica y geométrica. El pandeo global de la estructura permite conocer el estado tensional de cada miembro en el instante en que la carga crítica de pandeo es alcanzada bajo la aplicación de cierto patrón de cargas. Una vez conocidas las compresiones en cada miembro P_e , es posible determinar el factor de longitud efectiva asociado con la expresión:

$$K_2 = \sqrt{\frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{P_e \cdot L^2}} \quad (5.31)$$

Con esto queda determinado el factor de longitud efectiva de todos los miembros comprimidos del marco, independientemente de su configuración estructural.

Resumen del Método del Coeficiente de Longitud efectiva de ANSI/AISC 360-05

1. Resistencias requeridas: se puede emplear:
 - Análisis general de segundo orden (o no linealidad geométrica)
 - Análisis de Segundo Orden por amplificación del Análisis de Primer Orden (determinación de coeficientes B_1 y B_2)
2. Cargas: Para cargas gravitacionales, las combinaciones de carga deben incluir una carga lateral en cada nivel igual a $0.002Y_i$, en donde Y_i es el peso de cada nivel. Cuando existan cargas laterales de diseño, esta consideración no es necesaria.
3. Coeficientes de Longitud Efectiva: para el caso de marcos de momento con columnas apoyadas, K_2 puede ser determinado mediante:

- Análisis de pandeo elástico: es decir análisis de no linealidad geométrica de la estructura completa para la determinación de la carga en cada miembro en el instante del pandeo de la estructura.
 - Método de la Pandeo de Piso: también conocido como Método de Yura (1971)
 - Método de Rigidez de Piso: también conocido como Método de LeMesurier (1977)
4. Para las columnas apoyadas, estas deben ser verificadas para $K = 1.0$.

Validez: el método es válido si la relación entre desplazamiento lateral de entrepiso calculado con un análisis de segundo orden y el calculado con un análisis de primer orden es menor o igual a 1.5; si no se cumple esta condición se debe usar el Método de Análisis Directo.

5.4.3 MÉTODO DE ANÁLISIS DIRECTO.

El método está descrito en ANSI/AISC 360-05 Apéndice 7 ⁽⁹⁾ ⁽¹⁸⁾; es un método general, válido para cualquier relación entre desplazamientos calculados con análisis de segundo y primer orden.

El método tiene las siguientes características principales:

- Considera explícitamente efectos $P - \Delta$ y $P - \delta$ a través de un análisis de segundo orden (no linealidad geométrica).
- Considera las imperfecciones geométricas incluyéndolas directamente en el modelo de análisis a través de cargas laterales desestabilizadoras.
- Las inelasticidades del material se consideran mediante la reducción de las rigideces flexural y axial de los miembros.
- Si las resistencias requeridas se calculan con las consideraciones anteriores, las resistencias nominales se pueden determinar usando $K = 1.0$, es decir se elimina la necesidad de calcular el coeficiente de longitud efectiva.

Condiciones para su aplicación

1. Se requiere un riguroso análisis de segundo orden que tome en cuenta los efectos $P - \Delta$ y $P - \delta$. En la metodología del análisis de primer orden amplificado con los factores B_1 y B_2 se dan ciertas condiciones bajo las cuales su cálculo puede no ser válido. El uso de estos factores puede no siempre ser aplicado, esto es lo que trata de evitar la especificación al exigir un riguroso análisis de segundo orden. Empleando la metodología desarrollada en los capítulos anteriores, la validez del análisis de segundo orden está garantizada.
2. Se requiere la aplicación de cargas laterales en cada piso para tomar en cuenta las imperfecciones iniciales en la estructura u otras condiciones que pueden no estar explícitas en la estructura. La carga lateral a aplicar en cada piso es $0.002Y_i$, donde Y_i es el peso del piso; este valor está basado en una tolerancia de no aplome del marco de 1/500; si esta falta de aplome tiene un valor diferente, el coeficiente puede ser ajustado.
3. El análisis debe considerar una rigidez reducida:

- Rigidez axial: $EA^* = 0.8EA$ *AISC(A - 7 - 3)*

- Rigidez a flexión: $EI^* = 0.8\tau_b EI$ *AISC(A - 7 - 2)*

donde:

$$\tau_b = 1.0: \text{para } P_u/P_y \leq 0.5$$

$$\tau_b = 4[P_u/P_y (1 - P_u/P_y)]: \text{para } P_u/P_y > 0.5$$

Se puede usar $\tau_b = 1.0$ para todos los miembros si se agrega una carga lateral en cada piso de $0.001Y_i$ (adicional a la requerida en el ítem 2).

5.5 APLICACIÓN

Se desea verificar la resistencia de las columnas del marco mostrado en la Figura 5.10. En ella se indican las dimensiones entre ejes de vigas y columnas, la orientación de las columnas y los puntos de corte entre las vigas y columnas (se muestran como rótulas). Se debe verificar usando el método del coeficiente de longitud efectiva y el análisis directo descritos en ANSI/AISC 360-05 ⁽⁹⁾.

Para el método del coeficiente de longitud efectiva se pide calcular el coeficiente de longitud efectiva por dos métodos:

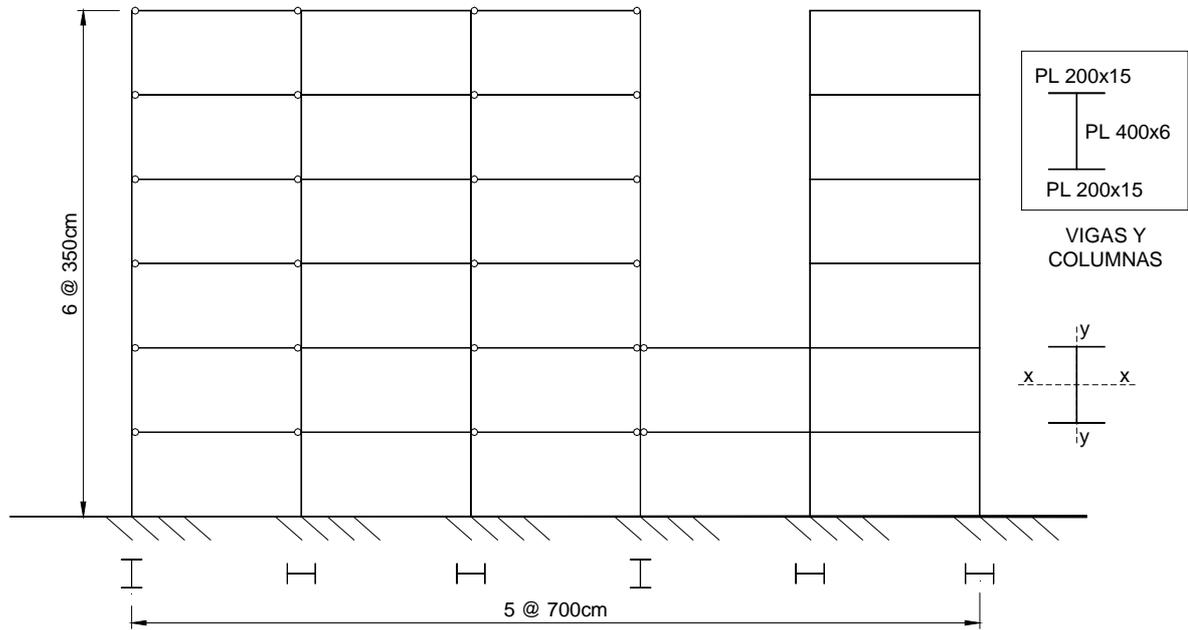
- (a) Análisis de no linealidad geométrica o pandeo elástico de la estructura completa; además graficar los cuatro primeros modos de pandeo.
- (b) Método de Pandeo de Piso o método de Yura.

Para el análisis de segundo orden se desea también comparar las solicitaciones obtenidas con el análisis de primer orden amplificado mediante los factores B_1 y B_2 con las solicitaciones obtenidas de un análisis de no linealidad geométrica.

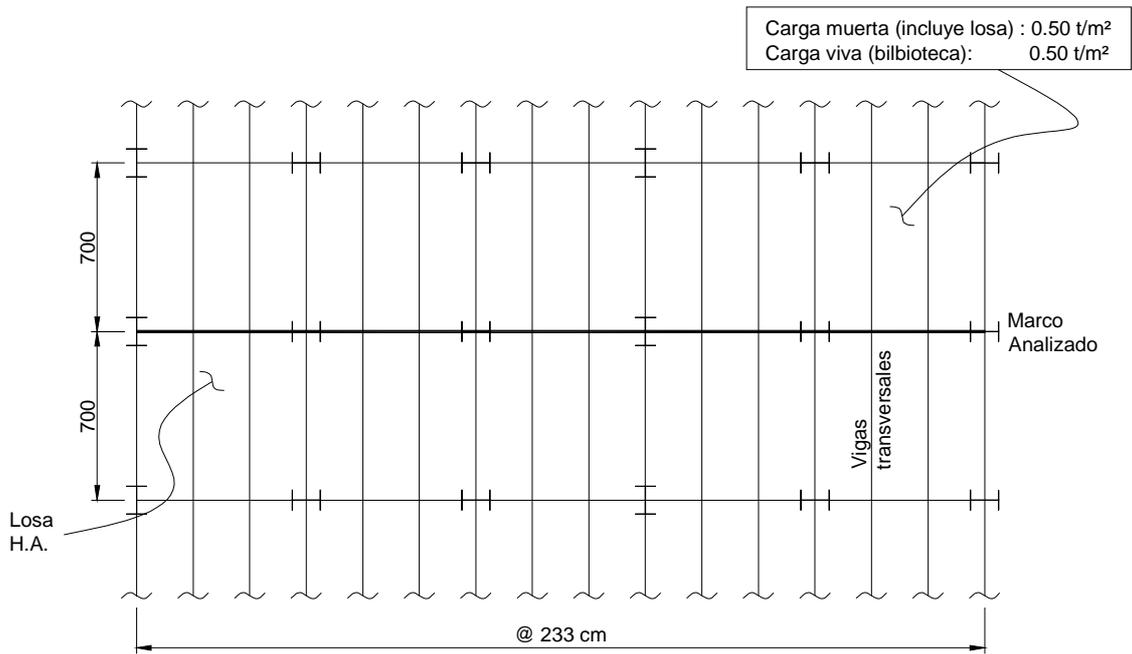
Modelo Estructural

El modelo estructural base es el que se indica en la Figura 5.11. La programación del análisis se realiza en MATLAB.

Figura 5.10. Estructura a analizar

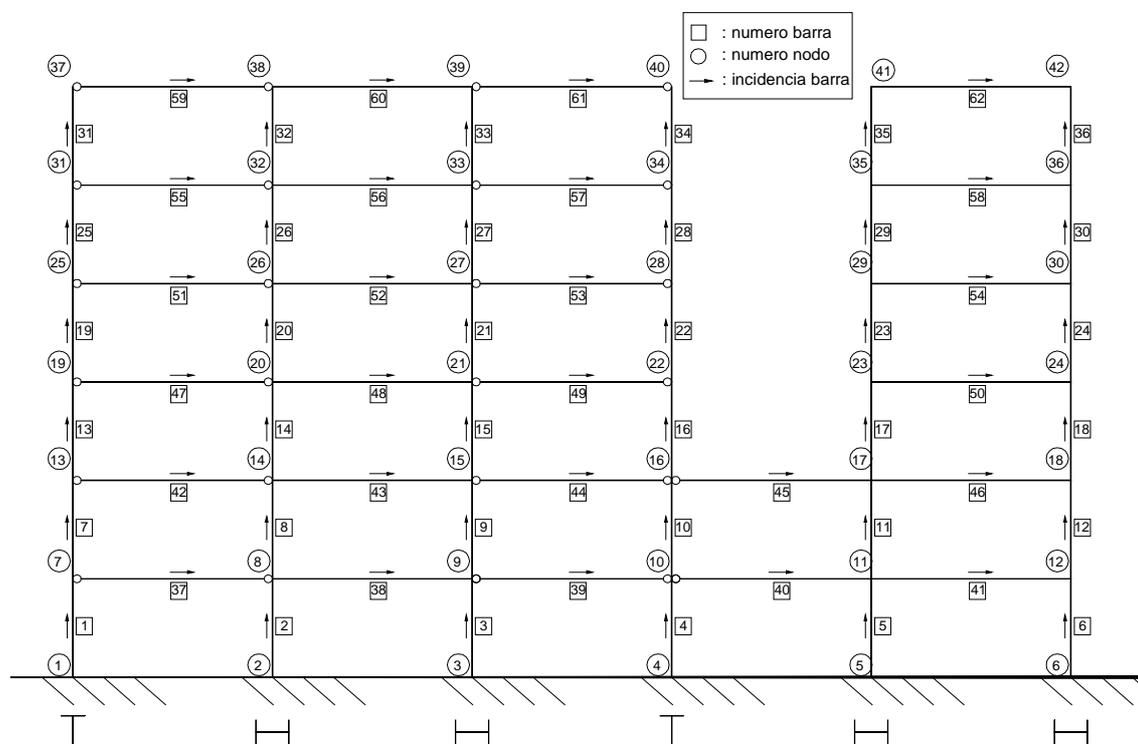


(a) Elevación de marco analizado

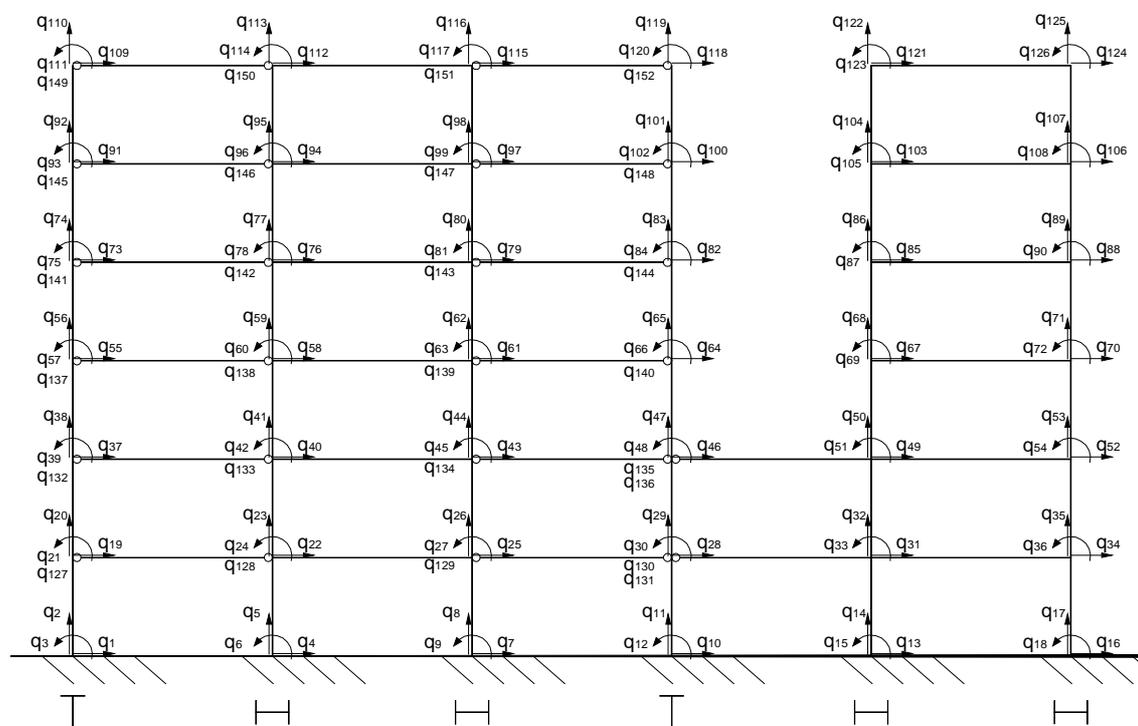


(b) Planta de piso

Figura 5.11. Modelo estructural: (a) numeración de nodos y barras; (b) G.D.L. del modelo



(a) numeración de barras, nodos e incidencias



(b) Grados de libertad

Parte 1.- Análisis de Segundo Orden

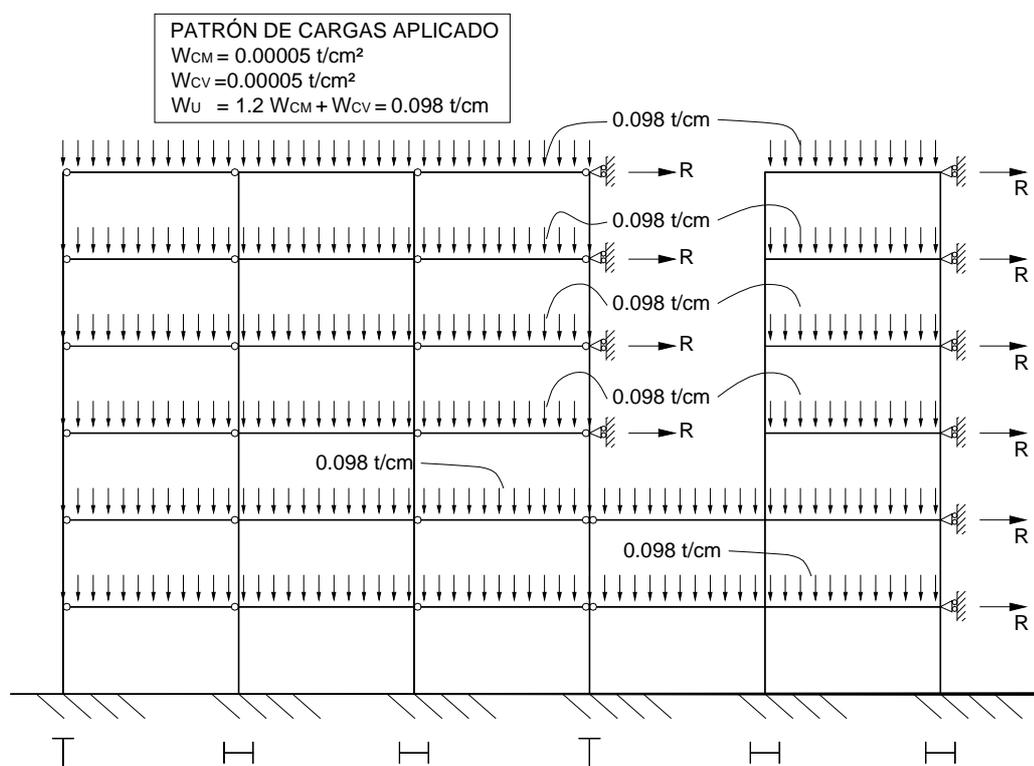
(a) Análisis de primer orden amplificado por los factores B_1 y B_2 .

Se siguen las expresiones dadas en ANSI/AISC 360-05 C2.1.b (9).

Modelo 'nt'

Se trata de realizar un análisis de primer orden del marco con carga gravitacional y restringido contra desplazamiento lateral para determinar el factor de amplificación B_1 , cuya expresión corresponde a ANSI/AISC 360-05 (C2-3). El modelo a analizar es el siguiente:

Figura 5.12. Modelo sin traslación lateral 'nt' con cargas gravitacionales



Los resultados del análisis y cálculos adicionales se indican a continuación:

columna	I (cm ⁴)	análisis primer orden comb: (1.2CM+1.6CV)			C _m	P _{e1} (t) (K=1); [AISC (C2-5)]	B ₁	B ₁ ≥ 1
		Pu (t)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)				
1	2000.72	205.8	-0.02	-0.01	0.45	329.3	1.19	1.19
2	29045.00	411.48	-7.89	-15.37	0.39	4780.8	0.43	1.00
3	29045.00	411.72	7.90	15.61	0.40	4780.8	0.44	1.00
4	2000.72	258.08	0.03	0.04	0.32	329.3	1.49	1.49
5	29045.00	291.81	2.72	5.14	0.39	4780.8	0.41	1.00
6	29045.00	204.71	6.99	13.97	0.40	4780.8	0.42	1.00
7	2000.72	171.5	0.01	-0.01	0.28	329.3	0.59	1.00
8	29045.00	342.83	-21.02	-19.44	0.23	4780.8	0.25	1.00
9	29045.00	343.17	20.43	18.61	0.24	4780.8	0.25	1.00
10	2000.72	197.76	-0.04	-0.05	0.26	329.3	0.66	1.00
11	29045.00	213.28	8.18	10.29	0.28	4780.8	0.30	1.00
12	29045.00	172.06	19.14	17.32	0.24	4780.8	0.25	1.00
13	2000.72	137.2	0.01	0.00	0.56	329.3	0.96	1.00
14	29045.00	274.23	-17.64	-18.00	0.21	4780.8	0.22	1.00
15	29045.00	274.57	18.46	18.57	0.20	4780.8	0.21	1.00
16	2000.72	137.2	0.05	0.03	0.37	329.3	0.64	1.00
17	29045.00	135.11	0.73	-12.10	0.58	4780.8	0.59	1.00
18	29045.00	139.29	17.16	18.83	0.24	4780.8	0.24	1.00
19	2000.72	102.9	0.00	0.03	0.59	329.3	0.86	1.00
20	29045.00	205.68	-18.77	-18.93	0.20	4780.8	0.21	1.00
21	29045.00	205.92	18.57	19.13	0.21	4780.8	0.22	1.00
22	2000.72	102.9	-0.03	-0.01	0.49	329.3	0.72	1.00
23	29045.00	101.65	-21.20	-18.77	0.25	4780.8	0.25	1.00
24	29045.00	104.15	20.35	20.21	0.20	4780.8	0.21	1.00
25	2000.72	68.6	-0.03	-0.06	0.40	329.3	0.51	1.00
26	29045.00	137.04	-17.96	-16.01	0.24	4780.8	0.25	1.00
27	29045.00	137.36	17.52	15.20	0.25	4780.8	0.26	1.00
28	2000.72	68.6	0.01	0.00	0.50	329.3	0.63	1.00
29	29045.00	67.683	-16.94	-15.39	0.24	4780.8	0.24	1.00
30	29045.00	69.517	17.85	15.64	0.25	4780.8	0.25	1.00
31	2000.72	34.3	0.06	0.00	0.60	329.3	0.67	1.00
32	29045.00	68.487	-21.67	-32.24	0.33	4780.8	0.34	1.00
33	29045.00	68.713	22.79	33.03	0.32	4780.8	0.33	1.00
34	2000.72	34.3	0.00	0.00	0.60	329.3	0.67	1.00
35	29045.00	33.854	-20.79	-31.09	0.33	4780.8	0.33	1.00
36	29045.00	34.746	23.82	34.21	0.32	4780.8	0.32	1.00

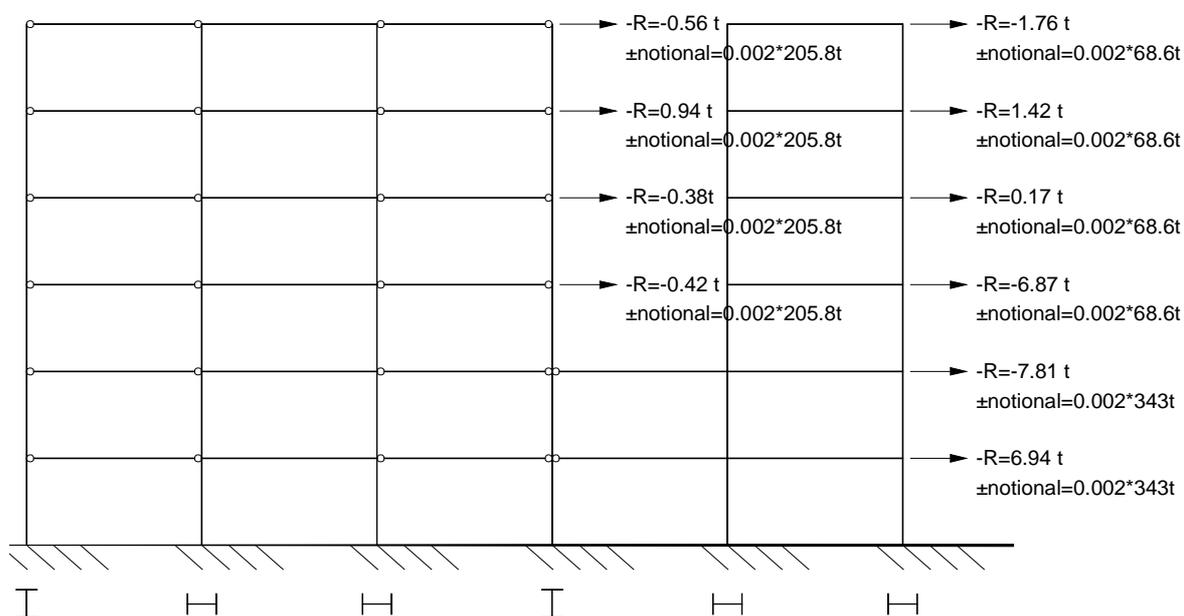
Modelo 'lt'

Se realiza un análisis de primer orden del marco sin carga gravitacional, únicamente con las cargas laterales provenientes de las reacciones de los apoyos contra desplazamiento lateral del modelo 'nt' y cargas laterales en cada piso de $0.002 Y_i$, donde Y_i es la carga gravitacional en el piso i ; estas

cargas deben ser aplicadas en ambas direcciones para determinar la situación mas desfavorable, la cual se asume está dada por la mayor carga axial de compresión en cada columna; los momentos deben ser correspondientes a este esfuerzo máximo.

El coeficiente B_2 se determina con la expresión dada en ANSI/AISC 360-05 (C2-3).

Figura 5.13. Modelo con traslación lateral ' t '



Los resultados del análisis y cálculos adicionales se indican a continuación:

Análisis primer orden; Reacciones de 'nt' ± '0.002Yi'													
		(reacciones de 'nt' - 0.002Yi)			(reacciones de 'nt' + 0.002Yi)			filtrado de compresiones máximas					
	columna	Pu (t) (+:comp) (-: tracción)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)	Pu (t) (+:comp) (-: tracción)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)	Pu (t)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)	K (AISC fig. C-C2.4)	Pe ₂ (t) [AISC (C2-6a)]	Σ Pe ₂ , piso
Piso 1	1	0.00	-150.34	12.681	0.00	82.118	8.61	0.00	-150.34	12.68	2	82.33	6631.4
	2	32.81	-2727.40	-901.43	-23.98	1424.9	585.86	32.81	-2727.40	-901.43	1.65	1756.04	
	3	-32.81	-2741.10	-912.71	23.98	1483.6	657.63	23.98	1483.60	657.63	1.65	1756.04	
	4	3.53	-153.22	10.353	-1.34	95.336	24.93	3.53	-153.22	10.35	2	82.33	
	5	20.16	-2972.40	-1311.9	-6.95	1721.4	933.44	20.16	-2972.40	-1311.90	1.45	2273.88	
	6	-23.69	-2729.80	-819.48	8.29	1729.2	826.62	8.29	1729.20	826.62	2.65	680.79	
Piso 2	7	0.00	-12.68	-2.6647	0.00	-8.614	-38.46	0.00	-12.68	-2.66	3	36.59	5526.3
	8	25.26	-1741.50	-1535.6	-20.61	595.06	205.51	25.26	-1741.50	-1535.60	2	1195.21	
	9	-25.26	-1731.40	-1526.9	20.61	516.76	122.35	20.61	516.76	122.35	2	1195.21	
	10	1.73	-10.35	-0.71945	-0.49	-24.933	-55.78	1.73	-10.35	-0.72	3	36.59	
	11	14.49	-2496.40	-2572	-4.24	878.39	1217.90	14.49	-2496.40	-2572.00	1.6	1867.51	
	12	-16.22	-1856.10	-1939	4.73	447.33	887.40	4.73	447.33	887.40	2	1195.21	
Piso 3-i	13	0.00	2.66	-18.688	0.00	38.461	8.07	0.00	38.46	8.07	3	36.59	2463.60
	14	17.04	-1340.60	-1588.8	-15.74	1501.1	1182.80	17.04	-1340.60	-1588.80	2	1195.21	
	15	-17.04	-1349.80	-1595.3	15.74	1580.1	1231.10	15.74	1580.10	1231.10	2	1195.21	
	16	0.00	0.72	-19.895	0.00	55.775	17.70	0.00	55.78	17.70	3	36.59	
Piso 3-d	17	9.23	-1026.40	-1460.6	-2.88	-230.8	-35.17	9.23	-1026.40	-1460.60	1.6	1867.51	3062.72
	18	-9.23	-570.38	-1325.2	2.88	-236.57	-38.43	2.88	-236.57	-38.43	2	1195.21	
Piso 4-i	19	0.00	18.69	-19.037	0.00	-8.0747	15.34	0.00	18.69	-19.04	3	36.59	2463.60
	20	10.03	-866.00	-1296.4	-9.58	969.99	1214.60	10.03	-866.00	-1296.40	2	1195.21	
	21	-10.03	-861.27	-1297.7	9.58	932.96	1202.90	9.58	932.96	1202.90	2	1195.21	
	22	0.00	19.90	-19.354	0.00	-17.695	12.33	0.00	-17.70	12.33	3	36.59	
Piso 4-d	23	4.86	-88.61	-605.1	-1.90	375.77	305.35	4.86	-88.61	-605.10	2	1195.21	2390.42
	24	-4.86	-185.00	-619.7	1.90	384.76	316.91	1.90	384.76	316.91	2	1195.21	

Análisis primer orden; Reacciones de 'nt' ± '0.002Yi'													
		(reacciones de 'nt' - 0.002Yi)			(reacciones de 'nt' + 0.002Yi)			filtrado de compresiones máximas					
	columna	Pu (t) (+:comp) (-: tracción)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)	Pu (t) (+:comp) (-: tracción)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)	Pu (t)	Mu _{inf} (t*m)	Mu _{sup} (t*m)	K (AISC fig. C-C2.4)	Pe ₂ (t) [AISC (C2-6a)]	Σ Pe ₂ , piso
Piso 5-i	25	0.00	19.04	-19.924	0.00	-15.339	24.15	0.00	-15.34	24.15	3	36.59	2463.60
	26	4.95	-480.01	-897.92	-4.59	530.12	956.99	4.95	-480.01	-897.92	2	1195.21	
	27	-4.95	-477.46	-892.89	4.59	540.52	963.77	4.59	540.52	963.77	2	1195.21	
	28	0.00	19.35	-19	0.00	-12.326	25.70	0.00	19.35	-19.00	3	36.59	
Piso 5-d	29	2.56	-195.86	-354.34	-0.64	133.96	288.51	2.56	-195.86	-354.34	2	1195.21	2390.42
	30	-2.56	-183.15	-344.79	0.64	126.86	293.32	0.64	126.86	293.32	2	1195.21	
Piso 6-i	31	0.00	19.92	-9.95E-14	0.00	-24.153	0.00	0.00	19.92	0.00	3	36.59	3024.31
	32	1.71	-238.22	-596.03	-1.47	135.65	515.80	1.71	-238.22	-596.03	1.8	1475.57	
	33	-1.71	-243.26	-597.72	1.47	129.32	513.99	1.47	129.32	513.99	1.8	1475.57	
Piso 6-d	34	0.00	19.00	-2.26E-12	0.00	-25.704	0.00	0.00	19.00	0.00	3	36.59	2951.13
	35	0.98	-199.73	-341.58	-0.07	-88.868	25.81	0.98	-199.73	-341.58	1.8	1475.57	
	36	-0.98	-209.58	-345.06	0.07	-95.19	22.70	0.07	-95.19	22.70	1.8	1475.57	

PISO	Σ P _{nt}	Σ Pe ₂	B ₂
1	343	6631.4	1.05
2	343	5526.3	1.07
3i	205.8	2463.60	1.09
3d	68.6	3062.72	1.02
4i	205.8	2463.60	1.09
4d	68.6	2390.42	1.03
5i	205.8	2463.60	1.09
5d	68.6	2390.42	1.03
6i	205.8	3024.31	1.07
6d	68.6	2951.13	1.02

En la tabla anterior, $\sum P_{nt}$ es la carga vertical del piso.

Resistencias requeridas amplificadas [AISC (C2-1a) (C2-1b)]

	columna	MODELO 'nt'			MODELO 'lt'			B ₁	B ₂	RESISTENCIAS REQUERIDAS AMPLIFICADAS [AISC (C2-1a) (C2-1b)]			
		Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)			Pu	Mu _{inf}	Mu _{sup}	Mu _{columna}
Piso 1	1	205.80	-0.02	-0.01	0.00	-1.50	0.13	1.19	1.05	205.80	-1.61	0.13	1.61
	2	411.48	-7.89	-15.37	32.81	-27.27	-9.01	1.00	1.05	446.08	-36.65	-24.88	36.65
	3	411.72	7.90	15.61	23.98	14.84	6.58	1.00	1.05	437.01	23.54	22.55	23.54
	4	258.08	0.03	0.04	3.53	-1.53	0.10	1.49	1.05	261.80	-1.57	0.17	1.57
	5	291.81	2.72	5.14	20.16	-29.72	-13.12	1.00	1.05	313.07	-28.63	-8.69	28.63
	6	204.71	6.99	13.97	8.29	17.29	8.27	1.00	1.05	213.45	25.22	22.69	25.22
Piso 2	7	171.50	0.01	-0.01	0.00	-0.13	-0.03	1.00	1.07	171.50	-0.13	-0.04	0.13
	8	342.83	-21.02	-19.44	25.26	-17.42	-15.36	1.00	1.07	369.76	-39.59	-35.81	39.59
	9	343.17	20.43	18.61	20.61	5.17	1.22	1.00	1.07	365.15	25.94	19.91	25.94
	10	197.76	-0.04	-0.05	1.73	-0.10	-0.01	1.00	1.07	199.60	-0.15	-0.06	0.15
	11	213.28	8.18	10.29	14.49	-24.96	-25.72	1.00	1.07	228.73	-18.44	-17.13	18.44
	12	172.06	19.14	17.32	4.73	4.47	8.87	1.00	1.07	177.10	23.91	26.78	26.78
Piso 3-A	13	137.20	0.01	0.00	0.00	0.38	0.08	1.00	1.09	137.20	0.43	0.09	0.43
	14	274.23	-17.64	-18.00	17.04	-13.41	-15.89	1.00	1.09	292.82	-32.26	-35.34	35.34
	15	274.57	18.46	18.57	15.74	15.80	12.31	1.00	1.09	291.75	35.70	32.00	35.70
	16	137.20	0.05	0.03	0.00	0.56	0.18	1.00	1.09	137.20	0.66	0.22	0.66
Piso 3-B	17	135.11	0.73	-12.10	9.23	-10.26	-14.61	1.00	1.02	144.55	-9.77	-27.04	27.04
	18	139.29	17.16	18.83	2.88	-2.37	-0.38	1.00	1.02	142.24	14.74	18.43	18.43
Piso 4-A	19	102.90	0.00	0.03	0.00	0.19	-0.19	1.00	1.09	102.90	0.20	-0.18	0.20
	20	205.68	-18.77	-18.93	10.03	-8.66	-12.96	1.00	1.09	216.62	-28.22	-33.07	33.07
	21	205.92	18.57	19.13	9.58	9.33	12.03	1.00	1.09	216.37	28.75	32.25	32.25
	22	102.90	-0.03	-0.01	0.00	-0.18	0.12	1.00	1.09	102.90	-0.22	0.13	0.22

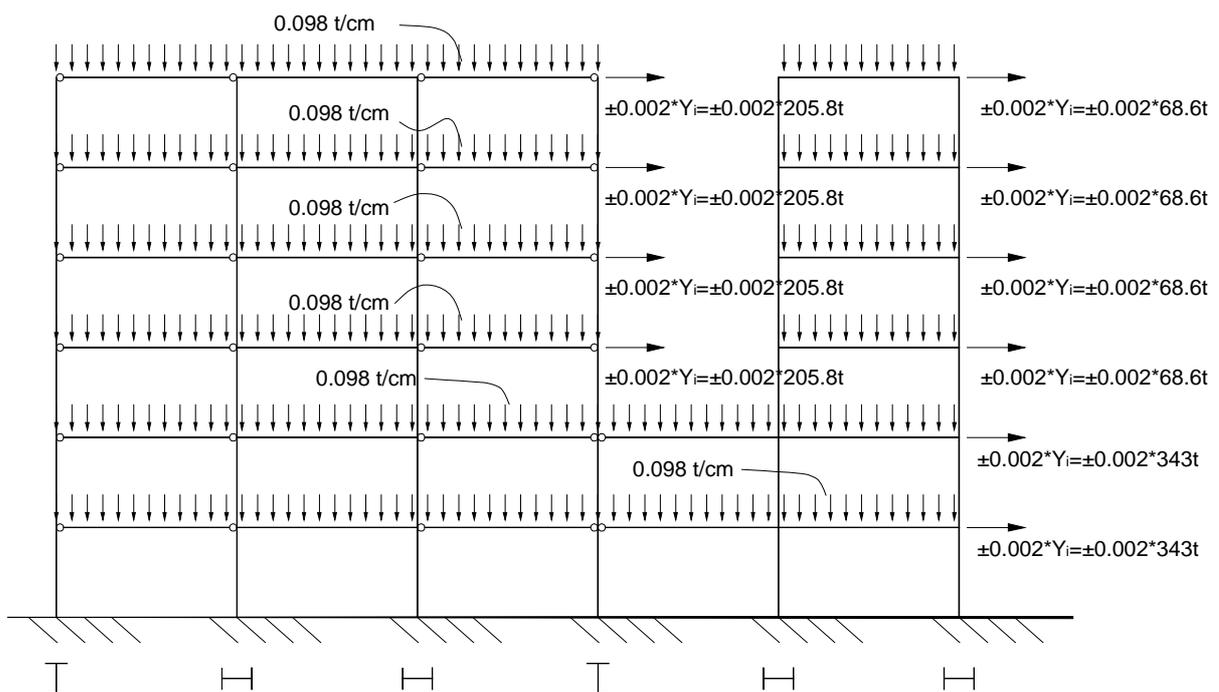
	columna	MODELO 'nt'			MODELO 'lt'			B ₁	B ₂	RESISTENCIAS REQUERIDAS AMPLIFICADAS [AISC (C2-1a) (C2-1b)]			
		Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)			Pu	Mu _{inf}	Mu _{sup}	Mu _{columna}
		Piso 4-B	23	101.65	-21.20	-18.77	4.86			-0.89	-6.05	1.00	1.03
	24	104.15	20.35	20.21	1.90	3.85	3.17	1.00	1.09	106.22	24.54	23.66	24.54
Piso 5-A	25	68.60	-0.03	-0.06	0.00	-0.15	0.24	1.00	1.09	68.60	-0.20	0.21	0.21
	26	137.04	-17.96	-16.01	4.95	-4.80	-8.98	1.00	1.09	142.44	-23.20	-25.81	25.81
	27	137.36	17.52	15.20	4.59	5.41	9.64	1.00	1.09	142.37	23.42	25.72	25.72
Piso 5-B	28	68.60	0.01	0.00	0.00	0.19	-0.19	1.00	1.09	68.60	0.22	-0.21	0.22
	29	67.68	-16.94	-15.39	2.56	-1.96	-3.54	1.00	1.03	70.32	-18.95	-19.03	19.03
Piso 6-A	30	69.52	17.85	15.64	0.64	1.27	2.93	1.00	1.03	70.17	19.16	18.66	19.16
	31	34.30	0.06	0.00	0.00	0.20	0.00	1.00	1.07	34.30	0.27	0.00	0.27
Piso 6-B	32	68.49	-21.67	-32.24	1.71	-2.38	-5.96	1.00	1.07	70.32	-24.23	-38.64	38.64
	33	68.71	22.79	33.03	1.47	1.29	5.14	1.00	1.07	70.29	24.18	38.54	38.54
	34	34.30	0.00	0.00	0.00	0.19	0.00	1.00	1.07	34.30	0.20	0.00	0.20
Piso 6-B	35	33.85	-20.79	-31.09	0.98	-2.00	-3.42	1.00	1.02	34.86	-22.84	-34.58	34.58
	36	34.75	23.82	34.21	0.07	-0.95	0.23	1.00	1.02	34.82	22.85	34.44	34.44

(b) análisis de segundo orden mediante análisis de no linealidad geométrica.

Se realiza el análisis de no linealidad geométrica tal como fue descrito en el capítulo 2 y 3. El análisis se codificó en MATLAB, por el orden de las matrices de rigidez involucradas en el cálculo estas no se indican, pero el procedimiento es similar al seguido en las secciones 4.2 y 4.4.

Según ANSI/AISC 360-05 Comm. C2.1 (9), el modelo debe considerar cargas horizontales en cada piso de $0.002 Y_i$, tal como en el caso anterior. El modelo a analizar es el siguiente:

Figura 5.14. Modelo a analizar con no linealidad geométrica o análisis de pandeo elástico.



Una vez que se realiza el primer análisis lineal (análogo al de la Parte 1 (a) pero con las cargas indicadas en la Figura 5.14), en que la matriz de rigidez del sistema es $K = K_e$, se obtienen los esfuerzos axiales necesarios para determinar la matriz de rigidez geométrica \hat{K}_g (matriz asociada al patrón de cargas de la Figura 5.14); con ésta se recalcula la matriz de rigidez efectiva de la estructura: $K = K_e - \hat{K}_g$.

Conocida la matriz de rigidez efectiva K y las cargas nodales correspondientes a la Figura 5.14, se determinan los desplazamientos correspondientes al análisis de segundo orden, de no linealidad geométrica, y lógicamente el estado de esfuerzos en cada elemento puede ser calculado.

En la siguiente tabla se indican las cargas axiales y momentos en cada columna para cada dirección de aplicación de las cargas $0.002 Y_i$; el caso que gobierna la resistencia requerida en cuanto a la dirección de aplicación de las cargas laterales se asume está dado por la mayor carga axial en cada columna. Los resultados se muestran en la siguiente tabla.

columna	+0.002 Y _i			-0.002 Y _i			Resistencias Requeridas			
	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Mu _{columna}
1	205.55	0.71	0.10	205.55	-1.34	0.04	205.55	-1.34	0.04	1.34
2	386.64	6.20	-9.36	443.11	-34.61	-24.14	443.11	-34.61	-24.14	34.61
3	434.57	22.42	21.93	378.10	-19.15	6.34	434.57	22.42	21.93	22.42
4	256.36	0.85	0.29	261.21	-1.28	0.03	261.21	-1.28	0.03	1.28
5	284.39	19.74	14.38	311.39	-26.66	-7.95	311.39	-26.66	-7.95	26.66
6	212.73	24.11	22.12	180.83	-20.13	5.71	212.73	24.11	22.12	24.11
7	171.33	-0.08	-0.35	171.33	-0.12	-0.05	171.33	-0.12	-0.05	0.12
8	321.62	-14.98	-17.23	367.28	-37.99	-34.44	367.28	-37.99	-34.44	37.99
9	363.00	25.30	19.66	317.34	3.14	3.34	363.00	25.30	19.66	25.30
10	197.05	-0.27	-0.54	199.26	-0.16	-0.07	199.26	-0.16	-0.07	0.16
11	208.79	16.86	22.31	227.47	-16.64	-15.29	227.47	-16.64	-15.29	16.64
12	176.60	23.49	26.05	155.69	0.59	-2.03	176.60	23.49	26.05	26.05
13	137.09	0.36	0.08	137.09	0.04	-0.17	137.09	0.04	-0.17	0.17
14	258.10	-2.66	-6.15	290.76	-30.76	-33.57	290.76	-30.76	-33.57	33.57
15	289.82	33.94	30.62	257.15	4.97	2.65	289.82	33.94	30.62	33.94
16	137.09	0.56	0.20	137.09	0.06	-0.15	137.09	0.06	-0.15	0.15
17	132.13	-1.59	-12.40	144.21	-9.52	-26.57	144.21	-9.52	-26.57	26.57
18	142.05	14.75	18.36	129.97	11.41	5.57	142.05	14.75	18.36	18.36
19	102.84	-0.07	0.17	102.84	0.17	-0.14	102.84	0.17	-0.14	0.17
20	195.88	-9.03	-6.78	215.43	-27.27	-31.67	215.43	-27.27	-31.67	31.67
21	215.22	27.73	30.95	195.68	9.91	6.16	215.22	27.73	30.95	30.95
22	102.84	-0.18	0.10	102.84	0.15	-0.18	102.84	0.15	-0.18	0.18
23	99.69	-17.40	-15.68	106.44	-22.03	-24.75	106.44	-22.03	-24.75	24.75
24	105.99	24.13	23.31	99.24	18.44	13.98	105.99	24.13	23.31	24.13
25	68.57	-0.17	0.17	68.57	0.15	-0.24	68.57	0.15	-0.24	0.24
26	132.35	-12.61	-6.44	141.88	-22.68	-24.88	141.88	-22.68	-24.88	24.88

columna	+0.002 Y_i			-0.002 Y_i			Resistencias Requeridas			
	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Pu (t)	Mu _{inf} (tm)	Mu _{sup} (tm)	Mu _{columna}
27	141.83	22.85	24.74	132.30	12.70	6.27	141.83	22.85	24.74	24.74
28	68.57	-0.11	0.25	68.57	0.19	-0.18	68.57	0.19	-0.18	0.19
29	67.02	-15.57	-12.48	70.22	-18.86	-18.89	70.22	-18.86	-18.89	18.89
30	70.13	19.09	18.54	66.93	15.99	12.18	70.13	19.09	18.54	19.09
31	34.29	-0.18	0.00	34.29	0.25	0.00	34.29	0.25	0.00	0.25
32	66.99	-20.29	-27.04	70.16	-24.02	-38.12	70.16	-24.02	-38.12	38.12
33	70.16	24.05	38.09	66.98	20.32	27.00	70.16	24.05	38.09	38.09
34	34.29	-0.25	0.00	34.29	0.18	0.00	34.29	0.18	0.00	0.18
35	33.78	-21.66	-30.80	34.83	-22.77	-34.47	34.83	-22.77	-34.47	34.47
36	34.81	22.85	34.41	33.76	21.71	30.73	34.81	22.85	34.41	34.41

Para efectos comparativos se indican las resistencias requeridas con un análisis de primer orden, con el análisis de primer orden amplificado y las obtenidas de un análisis de no linealidad geométrica.

columna	RESISTENCIAS REQUERIDAS					
	Análisis 1er. Orden		Análisis 1er. Orden amplificado con B_1 y B_2		Análisis de no linealidad geométrica	
	Pu (t)	Mu (tm)	Pu (t)	Mu (tm)	Pu (t)	Mu (tm)
1	205.80	0.36	205.80	1.61	205.55	1.34
2	415.89	16.95	446.08	36.65	443.11	34.61
3	407.31	14.34	437.01	23.54	434.57	22.42
4	259.18	0.26	261.80	1.57	261.21	1.28
5	298.42	3.53	313.07	28.63	311.39	26.66
6	197.01	14.01	213.45	25.22	212.73	24.11
7	171.50	0.21	171.50	0.13	171.33	0.12
8	345.15	26.75	369.76	39.59	367.28	37.99
9	340.85	14.36	365.15	25.94	363.00	25.30
10	198.38	0.33	199.60	0.15	199.26	0.16
11	218.41	3.52	228.73	18.44	227.47	16.64
12	166.31	12.10	177.10	26.78	176.60	26.05
13	137.20	0.21	137.20	0.43	137.09	0.17
14	274.87	20.03	292.82	35.34	290.76	33.57
15	273.93	19.61	291.75	35.70	289.82	33.94
16	137.20	0.33	137.20	0.66	137.09	0.15
17	138.28	19.58	144.55	27.04	144.21	26.57
18	136.12	13.13	142.24	18.43	142.05	18.36
19	102.90	0.05	102.90	0.20	102.84	0.17
20	205.90	19.34	216.62	33.07	215.43	31.67
21	205.70	18.93	216.37	32.25	215.22	30.95
22	102.90	0.04	102.90	0.22	102.84	0.18
23	103.13	20.27	106.65	25.00	106.44	24.75
24	102.67	21.35	106.22	24.54	105.99	24.13
25	68.60	0.04	68.60	0.21	68.57	0.24
26	137.22	17.71	142.44	25.81	141.88	24.88
27	137.18	17.84	142.37	25.72	141.83	24.74
28	68.60	0.04	68.60	0.22	68.57	0.19
29	68.65	17.24	70.32	19.03	70.22	18.89
30	68.55	17.57	70.17	19.16	70.13	19.09
31	34.30	0.04	34.30	0.27	34.29	0.25
32	68.61	32.64	70.32	38.64	70.16	38.12
33	68.60	32.61	70.29	38.54	70.16	38.09
34	34.30	0.04	34.30	0.20	34.29	0.18
35	34.31	32.67	34.86	34.58	34.83	34.47
36	34.29	32.60	34.82	34.44	34.81	34.41

Para los cálculos posteriores se adoptan como solicitaciones últimas las obtenidas con el análisis de no linealidad geométrica

Parte 2.- Evaluación de Resistencia de las Columnas

2.1 Método de Longitud Efectiva

(a) Análisis de no-linealidad geométrica

Se trata de una continuación del análisis de no linealidad geométrica realizado en el ítem anterior.

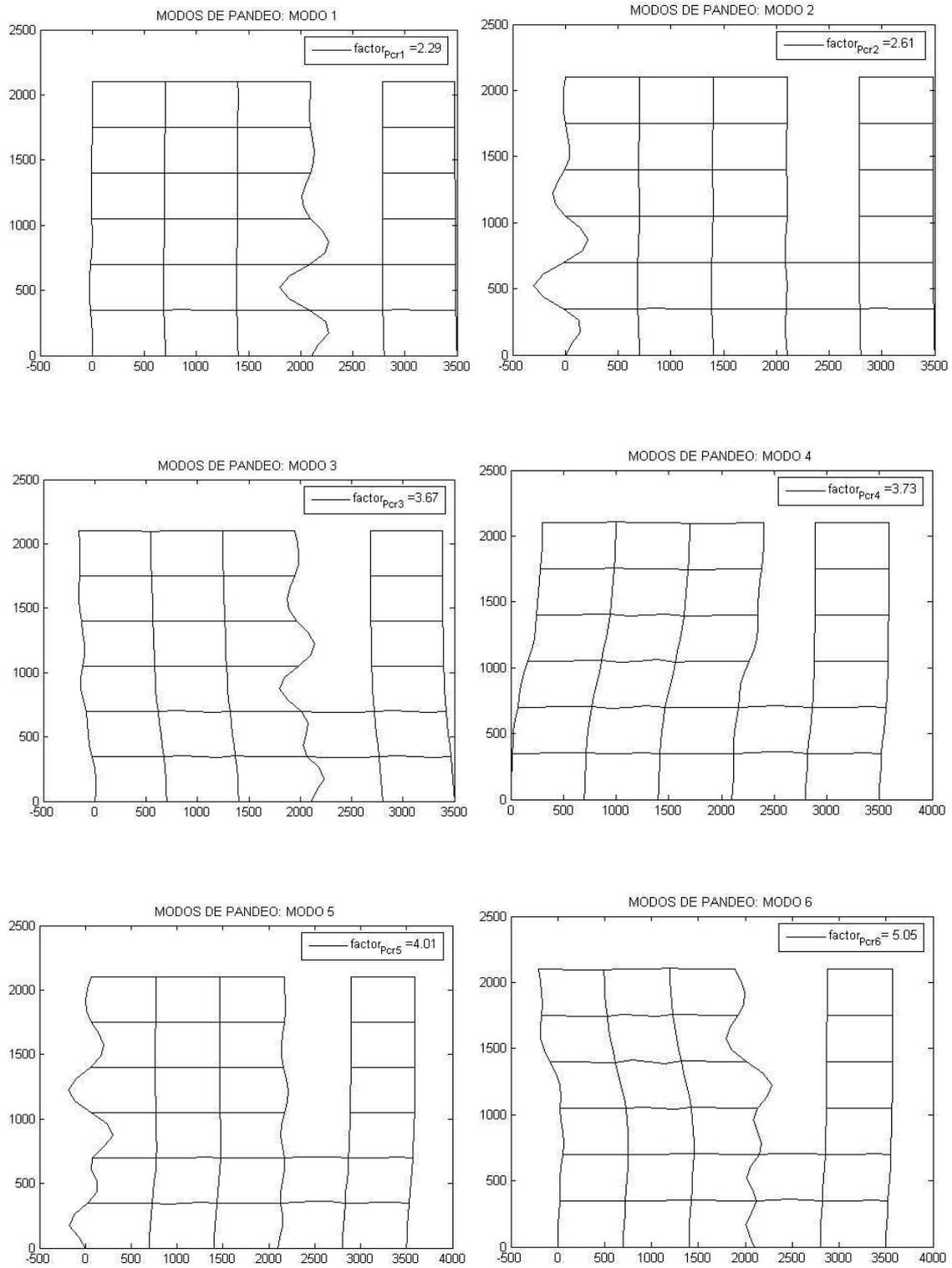
Cargas críticas y modos de pandeo

Tal como se discutió en el capítulo 3 (ecuación (3.62)), las cargas críticas de pandeo se obtienen al resolver el problema de valores propios $\| [K_e] - \{P\} \cdot [\hat{K}_g] \| = 0$. Los valores calculados se refieren al multiplicador del patrón de cargas aplicado $\{P_{unit}\}$; el patrón de cargas aplicado es el mostrado en la Figura 5.14. Resolviendo se tiene:

Modo	{P}
1	2.29
2	2.61
3	3.67
4	3.73
5	4.01
6	5.05
...	...

La carga crítica de pandeo global de la estructura es 2.29 veces el patrón de cargas $\{P_{unit}\}$. Los seis primeros modos de pandeo se muestran en la Figura 5.15

Figura 5.15. Seis primeros modos de pandeo obtenidos del análisis de no linealidad geométrica



Los esfuerzos axiales en cada barra asociados a la carga crítica de pandeo global de la estructura se calculan con la matriz de rigidez geométrica correspondiente a la carga crítica de pandeo, esto es:

$$[K_g^*] = P_{min} \cdot [\hat{K}_g]$$

en donde:

$[K_g^*]$: es la matriz de rigidez geométrica correspondiente a la carga crítica de pandeo o estado de inestabilidad.

$[\hat{K}_g]$: es la matriz de rigidez geométrica correspondiente al patrón de cargas de la , $\{P_{unit}\}$.

P_{min} : es el factor que al multiplicar por el patrón de cargas produce la inestabilidad del sistema; en este caso resultó 2.29.

$$[K_g^*] = 2.29 \cdot [\hat{K}_g]$$

La matriz de rigidez efectiva del sistema es:

$$[K^*] = [K_e] - [K_g^*]$$

en donde $[K_e]$ es la matriz de rigidez elástica del sistema que es constante en el cálculo.

Se debe notar que la expresión antes indicada produce exactamente la indeterminación matemática del problema (singularidad de la matriz $[K_g^*]$); entonces para efectos de cálculo se debe colocar un factor que multiplica a $P_{min} = 0.29$ tan cercano a la unidad como sea posible para que la matriz sea invertible, en la solución se usó 0.9999.

Conocida la matriz de rigidez efectiva de la estructura, se encuentran los desplazamientos $\{q\}$ asociados al vector de cargas: $\{P_{cr}\} = 2.29 \cdot \{P_{unit}\}$.

$$\{q\} = [K^*]^{-1} \cdot \{P_{cr}\}$$

Es decir, $\{q\}$ son los desplazamientos nodales del análisis de no linealidad geométrica, que consideran ya los efectos $P - \Delta$ y $P - \delta$.

Conocidos los desplazamientos nodales, se calculan los esfuerzos en cada miembro, a continuación se indican las cargas axiales de las columnas, asociadas al instante en que la estructura alcanza el pandeo global.

columna	carga axial (t)
1	472.08
2	888.09
3	997.89
4	588.77
5	653.18
6	488.51
7	393.48
8	738.7
9	833.59
10	452.54
11	479.52
12	405.57
13	314.84
14	592.8
15	665.55
16	314.84
17	303.45
18	326.24

columna	carga axial (t)
19	236.18
20	449.88
21	494.26
22	236.18
23	228.95
24	243.41
25	157.48
26	303.96
27	325.73
28	157.48
29	153.92
30	161.05
31	78.76
32	153.85
33	161.12
34	78.76
35	77.57
36	79.94

Conocidas las cargas axiales en cada columna en el instante de inestabilidad, se pueden calcular los factores de longitud efectiva asociados, como se indica en la siguiente tabla. La resistencia en cada columna es evaluada considerando los efectos de interacción, conforme ANSI-AISC 360-05 H1-2⁽⁹⁾.

		Análisis con no linealidad geométrica; usando $[K]=[K_e]-P_{min}[K_g]$ comb:(1.2CM+1.6CV)									Análisis con no linealidad geométrica; usando $[K]=[K_e]-[K_g]$ comb:(1.2CM+1.6CV)		
	columna	axial en pandeo (1.2CM+1.6CV) (t)	K	Fe (kg/cm ²)	Fcr (kg/cm ²)	Pn (t)	Mn (t.m)	Pu (t)	Mu (t*m)	Interacción AISC H1-2	< 1 ?		
Piso 1	1	472.08	0.84	5620	2208	185.49	7.06	205.55	1.34	1.35	no pasa		
	2	888.09	2.32	10573	2426	203.81	36.34	443.11	34.61	3.68	no pasa		
	3	997.89	2.19	11880	2455	206.22	36.34	434.57	22.42	2.95	no pasa		
	4	588.77	0.75	7009	2298	193.03	7.06	261.21	1.28	1.63	no pasa		
	5	653.18	2.71	7776	2335	196.12	36.34	311.39	26.66	2.53	no pasa		
	6	488.51	3.13	5816	2223	186.75	36.34	212.73	24.11	1.88	no pasa		
Piso 2	7	393.48	0.91	4684	2121	178.18	7.06	171.33	0.12	1.13	no pasa		
	8	738.70	2.54	8794	2374	199.45	36.34	367.28	37.99	3.52	no pasa		
	9	833.59	2.39	9924	2409	202.39	36.34	363.00	25.30	2.71	no pasa		
	10	452.54	0.85	5387	2189	183.88	7.06	199.26	0.16	1.28	no pasa		
	11	479.52	3.16	5709	2215	186.07	36.34	227.47	16.64	1.70	no pasa		
	12	405.57	3.43	4828	2137	179.47	36.34	176.60	26.05	1.79	no pasa		
Piso 3-i	13	314.84	1.02	3748	1997	167.76	7.06	137.09	0.17	0.96	OK		
	14	592.80	2.84	7057	2300	193.24	36.34	290.76	33.57	2.82	no pasa		
	15	665.55	2.68	7923	2341	196.65	36.34	289.82	33.94	2.81	no pasa		
	16	314.84	1.02	3748	1997	167.76	7.06	137.09	0.15	0.96	OK		
Piso 3-d	17	303.45	3.97	3613	1975	165.88	36.34	144.21	26.57	1.68	no pasa		
	18	326.24	3.83	3884	2018	169.54	36.34	142.05	18.36	1.30	no pasa		
Piso 4-i	19	236.18	1.18	2812	1806	151.74	7.06	102.84	0.17	0.80	OK		
	20	449.88	3.26	5356	2186	183.66	36.34	215.43	31.67	2.32	no pasa		
	21	494.26	3.11	5884	2228	187.17	36.34	215.22	30.95	2.25	no pasa		
	22	236.18	1.18	2812	1806	151.74	7.06	102.84	0.18	0.80	OK		
Piso 4-d	23	228.95	4.57	2726	1784	149.82	36.34	106.44	24.75	1.41	no pasa		
	24	243.41	4.43	2898	1828	153.56	36.34	105.99	24.13	1.36	no pasa		

		Análisis con no linealidad geométrica; usando [K]=[Ke]-P _{min} [Kg] comb:(1.2CM+1.6CV)									Análisis con no linealidad geométrica; usando [K]=[Ke]- [Kg] comb:(1.2CM+1.6CV)		
	columna	axial en pandeo (1.2CM+1.6CV) (t)	K	Fe (kg/cm ²)	Fcr (kg/cm ²)	Pn (t)	Mn (t.m)	Pu (t)	Mu (t*m)	Interacción AISC H1-2	< 1 ?		
Piso 5-i	25	157.48	1.45	1875	1478	124.12	7.06	68.57	0.24	0.65	OK		
	26	303.96	3.97	3619	1976	165.96	36.34	141.88	24.88	1.58	no pasa		
	27	325.73	3.83	3878	2017	169.46	36.34	141.83	24.74	1.56	no pasa		
	28	157.48	1.45	1875	1478	124.12	7.06	68.57	0.19	0.65	OK		
Piso 5-d	29	153.92	5.57	1832	1457	122.41	36.34	70.22	18.89	1.01	no pasa		
	30	161.05	5.45	1917	1498	125.79	36.34	70.13	19.09	1.00	OK		
Piso 6-i	31	78.76	2.04	938	822	69.07	7.06	34.29	0.25	0.59	OK		
	32	153.85	5.57	1832	1457	122.37	36.34	70.16	38.12	2.03	no pasa		
	33	161.12	5.45	1918	1498	125.83	36.34	70.16	38.09	2.01	no pasa		
	34	78.76	2.04	938	822	69.07	7.06	34.29	0.18	0.58	OK		
Piso 6-d	35	77.57	7.85	924	810	68.03	36.34	34.83	34.47	1.71	no pasa		
	36	79.94	7.73	952	835	70.11	36.34	34.81	34.41	1.69	no pasa		

(b) Método de Pandeo de Piso o método de Yura

El cálculo se basa en lo desarrollado en la sección 5.4.2.1, literal b; la expresión del método se encuentra en ANSI/AISC 360-05 (C-C2-8). Se debe recordar que para columnas apoyadas, la especificación indica que se debe usar $K_2 = 1.0$.

Análisis con no linealidad geométrica con $[K]=[K_e]-[K_g]$
comb:(1.2CM+1.6CV)

PISO	columna	Pu (t)	Mu (t.m)	Pu piso (t)	K [fig. (C-C2.4)]	P _{n2} (usando K)	K ₂ [AISC(C-C2-8)]	Fe (kg/cm ²)	F _{cr} (kg/cm ²)	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción [AISC H1-2]	< 1 ?
Piso 1	1	205.55	1.34	1868.56	2	82.33	1.00	3920	2024	170	7.06	1.47	no pasa
	2	443.11	34.61		1.65	1756.04	1.74	18721	2542	214	36.34	3.56	no pasa
	3	434.57	22.42		1.65	1756.04	1.76	18360	2539	213	36.34	2.87	no pasa
	4	261.21	1.28		2	82.33	1.00	3920	2024	170	7.06	1.85	no pasa
	5	311.39	26.66		1.45	2273.88	2.08	13156	2478	208	36.34	2.42	no pasa
	6	212.73	24.11		2.65	680.79	2.52	8988	2381	200	36.34	1.80	no pasa
					Σ=	6631.42							
Piso 2	7	171.33	0.12	1504.94	3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	1.19	no pasa
	8	367.28	37.99		2	1195.21	1.88	16056	2516	211	36.34	3.39	no pasa
	9	363.00	25.30		2	1195.21	1.89	15869	2514	211	36.34	2.62	no pasa
	10	199.26	0.16		3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	1.38	no pasa
	11	227.47	16.64		1.6	1867.51	2.39	9944	2410	202	36.34	1.58	no pasa
	12	176.60	26.05		2	1195.21	2.72	7720	2332	196	36.34	1.70	no pasa
					Σ=	5526.32							
Piso 3-i	13	137.09	0.17	854.76	3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.95	OK
	14	290.76	33.57		2	1195.21	2.39	9977	2411	203	36.34	2.74	no pasa
	15	289.82	33.94		2	1195.21	2.39	9944	2410	202	36.34	2.76	no pasa
	16	137.09	0.15		3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.95	OK
					Σ=	2463.60							
Piso 3-d	17	290.76	33.57	580.58	1.6	1867.51	1.77	18260	2538	213	36.34	2.66	no pasa
	18	289.82	33.94		2	1195.21	1.77	18201	2537	213	36.34	2.68	no pasa
					Σ=	3062.72							
Piso 4-i	19	137.09	0.15	526.19	3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.95	OK
	20	144.21	26.57		2	1195.21	2.73	7641	2329	196	36.34	1.53	no pasa
	21	142.05	18.36		2	1195.21	2.66	8038	2346	197	36.34	1.16	no pasa
	22	102.84	0.17		3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.71	OK

Análisis con no linealidad geométrica con $[K]=[K_e]-[K_g]$ comb:(1.2CM+1.6CV)													
PISO	columna	Pu	Mu	Pu piso	K	P _{n2}	K ₂	Fe	Fcr	Pn	Mn	Interacción	< 1 ?
		(t)	(t.m)		(t)	[fig. (C-C2.4)]	(usando K)	[AISC(C-C2-8)]	(kg/cm ²)	(kg/cm ²)	(t)	(t*m)	[AISC H1-2]
Piso 4-d	23	215.43	31.67	430.65	2	1195.21	2.00	14236	2494	209	36.34	2.15	no pasa
	24	215.22	30.95		2	1195.21	2.00	14222	2494	209	36.34	2.10	no pasa
					Σ=	2463.60							
Piso 5-i	25	102.84	0.18	383.84	3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.71	OK
	26	106.44	24.75		2	1195.21	2.65	8133	2350	197	36.34	1.21	no pasa
	27	105.99	24.13		2	1195.21	2.65	8098	2348	197	36.34	1.18	no pasa
	28	68.57	0.24		3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.48	OK
					Σ=	2463.60							
Piso 5-d	29	70.22	18.89	140.34	2	1195.21	2.00	14238	2494	209	36.34	0.73	OK
	30	70.13	19.09		2	1195.21	2.00	14219	2494	209	36.34	0.73	OK
					Σ=	2390.42							
Piso 6-i	31	34.29	0.25	208.91	3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.24	OK
	32	70.16	38.12		1.8	1475.57	2.17	12092	2459	207	36.34	1.76	no pasa
	33	70.16	38.09		1.8	1475.57	2.17	12091	2459	207	36.34	1.76	no pasa
	34	34.29	0.18		3	36.59	1.00	3920	2024	170	7.06	0.24	OK
					Σ=	3024.31							
Piso 6-d	35	34.83	34.47	69.64	1.8	1475.57	1.42	28106	2594	218	36.34	1.30	no pasa
	36	34.81	34.41		1.8	1475.57	1.42	28106	2594	218	36.34	1.29	no pasa
					Σ=	5902.26							

(c) Método de Análisis Directo

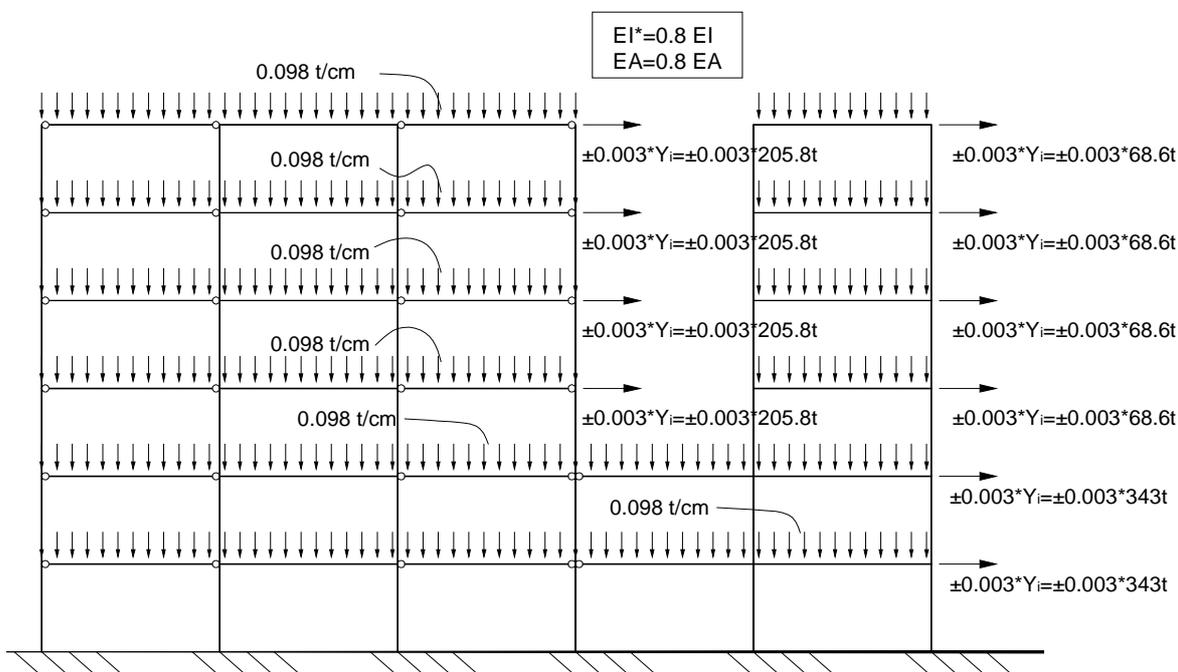
El modelo de análisis debe considerar cargas laterales en cada piso de $0.002 \cdot Y_i$, y las secciones de vigas y columnas reducidas como se indica en ANSI/AISC 360-05 ⁽⁹⁾.

- Rigidez axial: $EA^* = 0.8EA$ *AISC(A - 7 - 2).*
- Rigidez a flexión: $EI^* = 0.8\tau_b EI$ *AISC(A - 7 - 3).*

La norma referida permite considerar $\tau_b = 1.00$ si se agrega una carga lateral en cada piso de $0.001 \cdot Y_i$; esta alternativa fue adoptada en el análisis.

El modelo a usar es el siguiente:

Figura 5.16. Modelo a analizar para usar el Método de Análisis Directo de ANSI/AISC 360-05 ⁽⁹⁾



A continuación se resumen los cálculos realizados:

Análisis con no linealidad
geométrica; usando $[K]=[K_e]-[K_g]$.
Inercias reducidas según
AISC (A-7-2, A-7-3).
Combinación: (1.2CM+1.6CV)

columna	K	Pe (t)	Fcr (kg/cm ²)	Pn (t)	Mn (t*m)	Mu (t*m)	Pu (t)	Interacción AISC H1-2	< 1 ?
1	1.00	329.3	2024	170	7.06	205.49	2.05	1.53	no pasa
2	1.00	4780.8	2647	222	36.34	456.88	4.57	2.44	no pasa
3	1.00	4780.8	2647	222	36.34	448.36	4.48	2.39	no pasa
4	1.00	329.3	2024	170	7.06	262.32	2.62	1.99	no pasa
5	1.00	4780.8	2647	222	36.34	317.99	3.18	1.69	no pasa
6	1.00	4780.8	2647	222	36.34	220.62	2.21	1.17	no pasa
7	1.00	329.3	2024	170	7.06	171.29	1.71	1.26	no pasa
8	1.00	4780.8	2647	222	36.34	378.45	3.78	2.02	no pasa
9	1.00	4780.8	2647	222	36.34	374.19	3.74	1.99	no pasa
10	1.00	329.3	2024	170	7.06	199.75	2.00	1.48	no pasa
11	1.00	4780.8	2647	222	36.34	232.06	2.32	1.23	no pasa
12	1.00	4780.8	2647	222	36.34	181.78	1.82	0.96	OK
13	1.00	329.3	2024	170	7.06	137.06	1.37	1.00	OK
14	1.00	4780.8	2647	222	36.34	298.78	2.99	1.59	no pasa
15	1.00	4780.8	2647	222	36.34	297.84	2.98	1.58	no pasa
16	1.00	329.3	2024	170	7.06	137.06	1.37	1.00	OK
17	1.00	4780.8	2647	222	36.34	147.20	1.47	0.78	OK
18	1.00	4780.8	2647	222	36.34	145.04	1.45	0.77	OK
19	1.00	329.3	2024	170	7.06	102.82	1.03	0.74	OK
20	1.00	4780.8	2647	222	36.34	220.24	2.20	1.17	no pasa
21	1.00	4780.8	2647	222	36.34	220.04	2.20	1.17	no pasa
22	1.00	329.3	2024	170	7.06	102.82	1.03	0.74	OK

Análisis con no linealidad
geométrica; usando $[K]=[K_e]-[K_g]$.
Inercias reducidas según
AISC (A-7-2, A-7-3).
Combinación: (1.2CM+1.6CV)

columna	K	Pe (t)	Fcr (kg/cm ²)	Pn (t)	Mn (t*m)	Mu (t*m)	Pu (t)	Interacción AISC H1-2	< 1 ?
23	1.00	4780.8	2647	222	36.34	108.11	1.08	0.57	OK
24	1.00	4780.8	2647	222	36.34	107.66	1.08	0.57	OK
25	1.00	329.3	2024	170	7.06	68.57	0.69	0.49	OK
26	1.00	4780.8	2647	222	36.34	144.23	1.44	0.77	OK
27	1.00	4780.8	2647	222	36.34	144.18	1.44	0.76	OK
28	1.00	329.3	2024	170	7.06	68.57	0.69	0.49	OK
29	1.00	4780.8	2647	222	36.34	71.01	0.71	0.38	OK
30	1.00	4780.8	2647	222	36.34	70.92	0.71	0.38	OK
31	1.00	329.3	2024	170	7.06	34.29	0.34	0.24	OK
32	1.00	4780.8	2647	222	36.34	70.95	0.71	0.38	OK
33	1.00	4780.8	2647	222	36.34	70.94	0.71	0.38	OK
34	1.00	329.3	2024	170	7.06	34.29	0.34	0.24	OK
35	1.00	4780.8	2647	222	36.34	35.09	0.35	0.19	OK
36	1.00	4780.8	2647	222	36.34	35.07	0.36	0.19	OK

RESUMEN DE REVISIÓN DE RESISTENCIA DE COLUMNAS POR TODOS LOS MÉTODOS

	Col.	Solicitaciones con Análisis de no linealidad geométrica (1.2CM+1.6CV)		ANÁLISIS DE ESTABILIDAD O PANDEO ELÁSTICO				MÉTODO DE PANDEO DE PISO O MÉTODO DE YURA				MÉTODO DE ANÁLISIS DIRECTO					
		Pu (t)	Mu (t*m)	K	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción AISC H1-2	K ₂	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción AISC H1-2	Pu (t)	Mu (t*m)	K	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción AISC H1-2
Piso 1	1	205.6	1.34	0.84	157.7	7.06	1.35	1.00	170.0	7.06	1.47	205.49	2.05	1.00	144.5	7.06	1.53
	2	443.1	34.61	2.32	173.2	36.34	3.68	1.74	213.5	36.34	3.56	456.88	4.57	1.00	189.0	36.34	2.44
	3	434.6	22.42	2.19	175.3	36.34	2.95	1.76	213.3	36.34	2.87	448.36	4.48	1.00	189.0	36.34	2.39
	4	261.2	1.28	0.75	164.1	7.06	1.63	1.00	170.0	7.06	1.85	262.32	2.62	1.00	144.5	7.06	1.99
	5	311.4	26.66	2.71	166.7	36.34	2.53	2.08	208.1	36.34	2.42	317.99	3.18	1.00	189.0	36.34	1.69
	6	212.7	24.11	3.13	158.7	36.34	1.88	2.52	200.0	36.34	1.80	220.62	2.21	1.00	189.0	36.34	1.17
Piso 2	7	171.3	0.12	0.91	151.5	7.06	1.13	1.00	0.0	7.06	1.19	171.29	1.71	1.00	144.5	7.06	1.26
	8	367.3	37.99	2.54	169.5	36.34	3.52	1.88	170.0	36.34	3.39	378.45	3.78	1.00	189.0	36.34	2.02
	9	363.0	25.30	2.39	172.0	36.34	2.71	1.89	211.4	36.34	2.62	374.19	3.74	1.00	189.0	36.34	1.99
	10	199.3	0.16	0.85	156.3	7.06	1.28	1.00	211.2	7.06	1.38	199.75	2.00	1.00	144.5	7.06	1.48
	11	227.5	16.64	3.16	158.2	36.34	1.70	2.39	170.0	36.34	1.58	232.06	2.32	1.00	189.0	36.34	1.23
	12	176.6	26.05	3.43	152.5	36.34	1.79	2.72	202.4	36.34	1.70	181.78	1.82	1.00	189.0	36.34	0.96
Piso 3-i	13	137.1	0.17	1.02	142.6	7.06	0.96	1.00	195.9	7.06	0.95	137.06	1.37	1.00	144.5	7.06	1.00
	14	290.8	33.57	2.84	164.3	36.34	2.82	2.39	0.0	36.34	2.74	298.78	2.99	1.00	189.0	36.34	1.59
	15	289.8	33.94	2.68	167.2	36.34	2.81	2.39	170.0	36.34	2.76	297.84	2.98	1.00	189.0	36.34	1.58
	16	137.1	0.15	1.02	142.6	7.06	0.96	1.00	202.5	7.06	0.95	137.06	1.37	1.00	144.5	7.06	1.00
Piso 3-d	17	144.2	26.57	3.97	141.0	36.34	1.68	1.77	202.4	36.34	2.66	147.20	1.47	1.00	189.0	36.34	0.78
	18	142.1	18.36	3.83	144.1	36.34	1.30	1.77	170.0	36.34	2.68	145.04	1.45	1.00	189.0	36.34	0.77
Piso 4-i	19	102.8	0.17	1.18	129.0	7.06	0.80	1.00	0.0	7.06	0.95	102.82	1.03	1.00	144.5	7.06	0.74
	20	215.4	31.67	3.26	156.1	36.34	2.32	2.73	213.2	36.34	1.53	220.24	2.20	1.00	189.0	36.34	1.17
	21	215.2	30.95	3.11	159.1	36.34	2.25	2.66	213.1	36.34	1.16	220.04	2.20	1.00	189.0	36.34	1.17
	22	102.8	0.18	1.18	129.0	7.06	0.80	1.00	0.0	7.06	0.71	102.82	1.03	1.00	144.5	7.06	0.74

	Solicitaciones con Análisis de no linealidad geométrica (1.2CM+1.6CV)			ANÁLISIS DE ESTABILIDAD O PANDEO ELÁSTICO				MÉTODO DE PANDEO DE PISO O MÉTODO DE YURA				MÉTODO DE ANÁLISIS DIRECTO					
	Col.	Pu (t)	Mu (t*m)	K	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción AISC H1-2	K ₂	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción AISC H1-2	Pu (t)	Mu (t*m)	K	Pn (t)	Mn (t*m)	Interacción AISC H1-2
Piso 4-d	23	106.4	24.75	4.57	127.3	36.34	1.41	2.00	170.0	36.34	2.15	108.11	1.08	1.00	189.0	36.34	0.57
	24	106.0	24.13	4.43	130.5	36.34	1.36	2.00	195.6	36.34	2.10	107.66	1.08	1.00	189.0	36.34	0.57
Piso 5-i	25	68.6	0.24	1.45	105.5	7.06	0.65	1.00	197.1	7.06	0.71	68.57	0.69	1.00	144.5	7.06	0.49
	26	141.9	24.88	3.97	141.1	36.34	1.58	2.65	170.0	36.34	1.21	144.23	1.44	1.00	189.0	36.34	0.77
	27	141.8	24.74	3.83	144.0	36.34	1.56	2.65	0.0	36.34	1.18	144.18	1.44	1.00	189.0	36.34	0.76
	28	68.6	0.19	1.45	105.5	7.06	0.65	1.00	209.5	7.06	0.48	68.57	0.69	1.00	144.5	7.06	0.49
Piso 5-d	29	70.2	18.89	5.57	104.0	36.34	1.01	2.00	209.5	36.34	0.73	71.01	0.71	1.00	189.0	36.34	0.38
	30	70.1	19.09	5.45	106.9	36.34	1.00	2.00	0.0	36.34	0.73	70.92	0.71	1.00	189.0	36.34	0.38
Piso 6-i	31	34.3	0.25	2.04	58.7	7.06	0.59	1.00	170.0	7.06	0.24	34.29	0.34	1.00	144.5	7.06	0.24
	32	70.2	38.12	5.57	104.0	36.34	2.03	2.17	197.4	36.34	1.76	70.95	0.71	1.00	189.0	36.34	0.38
	33	70.2	38.09	5.45	107.0	36.34	2.01	2.17	197.3	36.34	1.76	70.94	0.71	1.00	189.0	36.34	0.38
	34	34.3	0.18	2.04	58.7	7.06	0.58	1.00	170.0	7.06	0.24	34.29	0.34	1.00	144.5	7.06	0.24
Piso 6-d	35	34.8	34.47	7.85	57.8	36.34	1.71	1.42	0.0	36.34	1.30	35.09	0.35	1.00	189.0	36.34	0.19
	36	34.8	34.41	7.73	59.6	36.34	1.69	1.42	209.5	36.34	1.29	35.07	0.36	1.00	189.0	36.34	0.19

CAPÍTULO 6.

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Con base en el trabajo desarrollado, se pueden mencionar las siguientes conclusiones:

- Se realizó una revisión de los conceptos involucrados en el estudio de estabilidad por métodos de energía; con ellos se llegó a una formulación matricial del problema, aplicable a cualquier tipo de estructuración, en dos y tres dimensiones.
- El estudio de la estabilidad se sustenta en un análisis de no linealidad geométrica; este, a diferencia del análisis de no linealidad del material, que es más complejo en su formulación debido a los modelos que representan el comportamiento no lineal del material, es de sencilla aplicación.
- Se realizó la aplicación de las teorías desarrolladas en varios ejemplos de diseño o verificación de estructuras, tanto de perfiles de acero laminados en caliente, como de perfiles de lámina delgada doblados en frío; en estos ejemplos quedó claramente demostrado que las expresiones contenidas en las especificaciones respectivas, son aplicables a problemas sencillos del diseño estructural; pero para aplicaciones más complejas y no poco comunes, es necesaria una completa comprensión de la teoría de estabilidad de estructuras para afrontar la solución de este tipo de problemas.
- En el Capítulo 5 se discutió el análisis de estabilidad según el enfoque de ANSI/AISC 360-05; se analizaron las distintas alternativas que proporciona la especificación para realizar el estudio de estabilidad de estructuras de perfiles de acero laminados en caliente; una de estas alternativas es el denominado Análisis de Pandeo Elástico o Análisis de Carga Crítica, este es precisamente el análisis desarrollado en el presente trabajo. Entonces, en la sección 5.5 fue posible la comparación de los resultados obtenidos

con este método (que se considera como “exacto”), versus otros métodos aproximados aceptados por la norma. De notoria importancia fue la comprobación de los resultados obtenidos con un nuevo método incorporado en el Apéndice 7 de la última versión de ANSI/AISC 360-05, denominado Método de Análisis Directo; este método llama la atención, puesto que cualquiera sea la configuración estructural, si se siguen las recomendaciones para su aplicación es posible realizar el análisis estructural considerando $K = 1.0$ para todos los miembros. También fue posible la comparación de los resultados del análisis de primer orden amplificados con los coeficientes B_1 y B_2 , con los obtenidos mediante un análisis de segundo orden o de no linealidad geométrica.

- La aplicación matricial del problema de estabilidad aquí desarrollada, se encuentra ya implementada en varios programas computacionales comerciales de análisis y diseño estructural; por ejemplo en SAP 2000 (Copirigth 1976-2006 Computers and Structures, Inc), en sus últimas versiones ya incorpora el análisis de pandeo elástico como una opción de los tipos de análisis posibles a realizar. Los resultados de los análisis desarrollados en los ejemplos de este trabajo fueron comparados con los proporcionados por dicho programa, los resultados fueron similares.

Las recomendaciones que puede emitir el autor son las siguientes:

- Incluir en los programas ya existentes de análisis estructural matricial de nivel académico, el análisis de no linealidad geométrica; pues con el formato matricial aquí expuesto esta es una labor relativamente sencilla, pero que permitirá un mejor entendimiento del problema de estabilidad en estructuras.
- El estudio de estabilidad de estructuras es mucho más complejo e interesante que el expuesto en las expresiones de las especificaciones correspondientes; entonces es necesario incluir en la formación del ingeniero estructural un curso completo de estabilidad de estructuras.
- En el presente trabajo no se estudió la incorporación de los efectos de la torsión de segundo orden o torsión no uniforme en las matrices de rigidez elástica y geométrica, necesarias para el análisis de estabilidad; por lo que

se recomienda continuar este trabajo realizando la incorporación de tal efecto. De manera simplificada, un procedimiento es incluir dos G.D.L. adicionales en la barra genérica de 12 G.D.L. (Figura 3.9), que representen la rotación alrededor del eje y ; esto permitirá la representación de forma aproximada del alabeo que se presenta en la torsión no uniforme.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. **USAMI, T., ITOH, Y., [ed.].** *Stability and Ductility of Steel Structures*. 1st. edition. Oxford : Elsevier Science, 1998.
2. **NARAYANAN, R., [ed.].** *Steel Framed Structures: Stability and Strength*. 1st. edition. s.l. : Elsevier Applied Science Publishers Ltd., 1985.
3. **GALAMBOS, T.V.** *Guide to Stability Design Criteria for Metal Structures*. 5th Edition. New York, N.Y.,U.S.A : John Wiley & Sons, 1998.
4. **BAZANT, Z.P.** *Stability of Structures*. 1st. Edition. Mineola,N.Y, U.S.A : Dover Publications, 2003.
5. **DUBINA, D., IVÁNYI, M., [ed.].** *Stability and Ductility of Steel Structures*. 1st. edition. Oxford : Elsevier Science, 1999.
6. **VINNAKOTA, S.** *Estructuras de Acero: Comportamiento y LRFD*. 1ra. edición. México DF : McGraw Hill Interamericana, 2006.
7. **SALMON, CH.G., JOHNSON, J.E.** *Steel Structures Design and Behavior*. 4th. edition. New York, N.Y. : Harper Collins College Publishers, 1996.
8. **Mc GUIRE, W., GALLAGUER R., ZIEMIAN R.** *Matrix Structural Analysis*. 2nd. edition. New York, NY, U.S.A. : John Wiley & Sons, 2000.
9. **AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, (AISC).** *Specification for Structural Steel Buildings, and Commentary, ANSI/AISC 360-05*. Chicago, IL, USA : s.n., March 2005.
10. **YANG, Y.B., KUO, S.R.** *Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures*. 1st. Edition. Englewood Cliffs, N.J, U.S.A. : Prentice Hall, 1994.
11. **BATHE, K.J.** *Finite Element Procedures*. s.l. : Prentice Hall, 1995.

12. **AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE, (AISI).** *Specification for the Design of Cold-Formed Steel Structural Members, and Commentary.* Washinton D.C, U.S.A. : s.n., 1996 Edition, 1st. Printing. June 1997.
13. **BROCKENBROUGH, R.L.,MERRITT,F.S.** *Structural Steel Designer's Handbook.* 3th. edition. s.l. : Mc Graw Hill, 1999.
14. **YU, W.W.** *Cold-Formed Steel Design.* 2th. Edition. New York, NY, U.S.A. : John Wiley & Sons, 1991.
15. **CHEONG-SIAT-MOY, F.** "*K-Factor Paradox*". s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 1986. págs. 1747-1760. Vol. 112.
16. **YURA, J.** *Discussion of "K-Factor Paradox"*. s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 1988. págs. 2144-2146. Vol. 114.
17. **DE BUEN, O.** "*Column Design in Steel Frames under Gravity Loads*". s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 1992. págs. 2928-2935. Vol. 118.
18. **SUROVEK-MALECK, A.E., WHITE D.W.** *Alternative Approaches for Elastic Analysis and Design of Steel Frames.* s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 2004. Vol. 130.
19. **HU, KUO-KUANG.** "*Effective Length Factor for Restrained Beam-Column*". s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 1986. págs. 241-256. Vol. 112.
20. **LI, G-Q., LI, J-J.** *Advanced Analysis and Design of Steel Frames.* Chichester : John Wiley & Sons, 2007.
21. **CRISFIELD, M.A.** *Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures, Essentials.* N.Y., U.S.A : John Wiley & Sons, 1998.
22. **Aristizabal-Ochoa, D.** "*Slenderness K Factor for Leaning Columns*". s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 1994. págs. 2977-2991. Vol. 120.
23. **YURA, J.** "*Fundamentals of Steel Bracing*". s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE, 2001. págs. 11-26. first quarter.

24. **LeMESURRIER, W.T.** *"A practical Method of Second Order Analysis, Part 2-Rigid Frames"*. s.l. : Journal of Structural Engineering, ASCE. págs. 49-67. Vol. 12.
25. *Steel Frame Stability: Out-of-Plane Efects*. **Mc GUIRE, W.,ZIEMIAN,R.D.** 2000. 1st. International Conference on Structural Stability and Dinamics.
26. **AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, (AISC).** *Design Examples Vesion 13.0*. Chicago, IL, USA : s.n., 2005.