

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

**COMPARACIÓN DEL MÉTODO DE DENAVIT-HARTENBERG
ESTÁNDAR CON EL MODIFICADO EN LA MODELACIÓN DE LA
ROBÓTICA**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MÁSTER (MSc)
EN DISEÑO PRODUCCIÓN Y AUTOMATIZACIÓN**

MARIO GERMÁN GRANJA RAMÍREZ
mario.granja@epn.edu.ec

DIRECTOR: ING. ÁLVARO GONZALO AGUINAGA BARRAGAN. Ph.D.
alvaro.aguinaga@epn.edu.ec

Quito, Agosto 2014

DECLARACIÓN

Yo Mario Germán Granja Ramírez, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Ing. Mario Granja Ramírez

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por el Ingeniero Mario Granja Ramírez, bajo mi supervisión.

Ing. Álvaro Aguinaga B. Ph.D.
DIRECTOR DE PROYECTO

AGRADECIMIENTOS

Al Ing. Alvaro Aguinaga B. Ph.D., por ser el mentor del presente proyecto de investigación, por su aporte académico, por su conducción brillante y paciente, y sobre todo por sus cualidades personales y profesionales.

Al Ing. Jorge Escobar MSc., y al Ing. Ricardo Soto MSc., por su decidido apoyo académico, imprescindibles para la realización de la presente investigación.

Gracias a todos

DEDICATORIA

A mi esposa Adely
y a mis hijos: Mario, Victoria, e Isabel.

INDICE DE CONTENIDO

CAPITULO I INTRODUCCIÓN	1
CAPITULO II MECANISMOS, GRADOS DE LIBERTAD GDL	5
2.1 MECANISMOS, ESLABONES Y ARTICULACIONES.....	5
2.1.1 MECANISMOS EN EL PLANO Y ESPACIO.....	7
2.1.2 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE MECANISMOS.....	7
2.1.3 ESLABONES, SISTEMAS DE COORDENADAS (FRAMES) Y CADENAS CINEMÁTICAS	8
2.1.4 ESQUEMA DEL MECANISMO	8
2.1.5 ARTICULACIONES, PARES SUPERIORES, PARES INFERIORES	9
2.2 GRADOS DE LIBERTAD DE UN ESLABON, GDL.....	10
2.2.1 GRADOS DE LIBERTAD DE UN ESLABON EN EL PLANO	10
2.2.2 GRADOS DE LIBERTAD DE UN ESLABON EN EL ESPACIO	11
2.2.3 RESTRICCIONES CINEMÁTICAS	11
2.2.4 CUERPOS RÍGIDOS RESTRINGIDOS	15
2.2.5 GRADOS DE LIBERTAD, MECANISMOS EN EL PLANO	16
CAPITULO III SISTEMA DE CORDENADAS, POSICION Y ORIENTACION	21
3.1 ASIGNACION DE SISTEMAS DE COORDENADAS A UN ESLABON	21
3.2 POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO	21
3.2.1 MATRIZ DE ROTACIÓN EN EL PLANO	21
3.2.2 MATRIZ DE TRASLACIÓN EN EL PLANO	23
3.2.3 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS, MATRICES COMPUESTAS	24
3.3 POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DE UN PUNTO EN EL ESPACIO	33
3.3.1 MATRIZ DE ROTACIÓN EN EL ESPACIO	33
3.3.2 MATRIZ DE TRASLACIÓN EN EL ESPACIO	36
CAPITULO IV CINEMATICA DIRECTA: DENAVIT – HARTENBERG	41
4.1 CADENAS CINEMÁTICAS	41
4.2 REPRESENTACIÓN DENAVIT HARTENBERG.....	45
4.2.1 EXISTENCIA Y CUESTIONES DE UNICIDAD	47
4.2.2 ASIGNACIÓN DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS.....	50

4.2.3 RESUMEN	55
4.3 EJEMPLOS.....	56
4.3.2 ROBOT CILÍNDRICO DE TRES ESLABONES	59
4.3.3 MUÑECA ESFÉRICA.....	61
4.3.4 MANIPULADOR CILÍNDRICO CON LA MUÑECA ESFÉRICA	62
4.3.5 MANIPULADOR STANFORD	64
4.3.6 MANIPULADOR SCARA	67
CAPITULO V	70
COMPARACION DEL METODO DE DENAVIT HARTENBERG ESTÁNDAR CON EL MODIFICADO Y MOVIMIENTO GENERAL CONTINUO	70
5.1 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS EN UN MECANISMO PLANAR.....	70
5.1.1 MÉTODO DENAVIT - HARTENBERG ESTÁNDAR.....	70
5.1.2 MÉTODO DENAVIT - HARTENBERG MODIFICADO.....	72
5.1.3 MÉTODO MOVIMIENTO GENERAL CONTINUO.....	74
5.2 COMPARACION DE LOS METODOS EN UN MECANISMO ESPACIAL.....	76
5.2.1 MÉTODO DENAVIT & HARTENBERG ESTÁNDAR.....	76
5.2.2 MÉTODO DENAVIT & HARTENBERG MODIFICADO.....	79
5.2.3 METODO MOVIMIENTO GENERAL CONTINUO.....	81
CAPITULO VI	83
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	83
6.1 CONCLUSIONES	83
6.2 RECOMENDACIONES	88
BIBLIOGRAFIA.....	89

INDICE DE FIGURAS

Figura 1.1 Sistemas de coordenadas continuas	3
Figura 2.1 Sección transversal de un cilindro de potencia de un motor diésel.....	6
Figura 2.2 Esquema del mecanismo.....	7
Figura 2.3 Esquema del mecanismo	8
Figura 2.4 Par de revolución.....	9
Figura 2.5 Par prismático	10
Figura 2.6 Pares superiores.....	10
Figura 2.7 Grados de libertad de un eslabón en el plano.....	11
Figura 2.8 Grados de libertad de un eslabón en el espacio.....	11
Figura 2.9 Articulación de revolución en el plano (par, R).....	12
Figura 2.10 Articulación prismática en el plano (par, P)	12
Figura 2.11 Par esférico (par, G).....	13
Figura 2.12 Par plano (par, F)	13
Figura 2.13 Par cilíndrico (par, C).....	13
Figura 2.14 Par de revolución (par, R)	14
Figura 2.15 Par prismático (par, P).....	14
Figura 2.16 Par tornillo (par, S)	15
Figura 2.17 Restricción de movimientos en el plano de un eslabón debido a las articulaciones	16
Figura 2.18 Grados de libertad perdidos en las articulaciones en el plano.....	17
Figura 2.19 Mecanismo de apertura y cierre	18
Figura 2.20 Camión volqueta.....	18
Figura 2.21 Cálculo de los grados de libertad	19
Figura 3.1 Asignación de los sistemas de coordenadas al eslabón fijo y móvil	22
Figura 3.2 Asignación de sistemas de coordenadas a los eslabones	23
Figura 3.3 Asignación de sistemas de coordenadas sobre el eslabón i , DH standard.....	25
Figura 3.4 Sistemas de coordenadas pasando la articulación i , DH modificado.....	¡Error!
Marcador no definido.	
Figura 3.5 Sistemas de coordenadas siguiendo la secuencia de movimientos.	32
Figura 3.6 Sistemas de coordenadas fijo $o_0x_0y_0z_0$, y móvil o, u, v, w	34
Figura 3.7 Rotación del sistema o, u, v, w alrededor de x, α , de y, ϕ , de z, θ	35
Figura 3.8 Asignación de sistemas de coordenadas a los eslabones	37
Figura 4.1 Asignación de los sistemas de coordenadas al manipulador tipo codo.....	¡Error!
Marcador no definido.	
Figura 2 4.2 Sistema de coordenadas que satisfacen los supuestos DH1 y DH2	¡Error!
Marcador no definido.	
Figura 4.3 Sentido positivo para α_i y θ_i	50
Figura 4.4 Sistema de coordenadas Denavit-Hartenberg estándar y modificado	52
Figura 4.5 Asignación del sistema de coordenadas de la herramienta.	54

Figura 4.6 Manipulador planar de dos eslabones. El sentido de todos los ejes z apunta hacia afuera de la página, y no se muestran en la figura.....	57
Figura 4.7 Manipulador cilíndrico tres eslabones.	59
Figura 4.8 Asignación de los sistemas de coordenadas muñeca esférica.....	61
Figura 4.9 Robot cilíndrico con muñeca esférica.....	¡Error! Marcador no definido.
Figura 4.10 Asignación del sistema de coordenadas DH en el manipulador Stanford.....	65
Figura 4.11 Asignación del sistema de coordenadas del manipulador SCARA.	68
Figura 5.1 Sistemas de coordenadas sobre cada eslabón del mecanismo.....	70
Figura 5.2 Sistemas de coordenadas sobre cada articulación del mecanismo.....	¡Error! Marcador no definido.
Figura 5.3 Sistemas de coordenadas continuos.....	75
Figura 5.4 Asignación de los sistemas de coordenadas Denavit & Hartenberg estándar.	77
Figura 5.5 Asignación sistemas de coordenadas Denavit & Hartenberg modificado	79
Figura 5.6 Sistemas de coordenadas en el robot SCARA, siguiendo la secuencia de movimientos.	82
Figura 6.1 Asignación de sistemas de coordenadas sobre los eslabones.....	85
Figura 6.2 Asignación de coordenadas sobre las articulaciones.....	86
Figura 6.3 Sistemas de coordenadas continuos.....	87

RESUMEN

El propósito de la presente investigación es comparar los métodos de Denavit-Hartenberg estándar y el modificado, y a través de ello precisar el principio fundamental en que se apoya el método matricial de la robótica, cuyo enunciado es planteado en la siguiente hipótesis: si los movimientos realizados a un sistema de coordenadas son referidos al sistema de coordenadas móviles, entonces el producto de las matrices en la misma secuencia nos permite determinar la matriz resultante del mecanismo, más conocida como matriz de transformación homogénea, ${}^{i-1}A_i$, la misma que nos permite cambiar de base entre dos sistemas consecutivos, entre el sistema de coordenadas i con el sistema de coordenadas $i - 1$.

Esta matriz según el convenio de Denavit-Hartenberg estándar es el resultado de cuatro transformaciones, una rotación y traslación en el eje z, y luego una traslación y rotación en el eje x, este grupo de cuatro movimientos se escriben en una fila de la tabla de parámetros D-H, a su vez multiplicando a estas matrices de transformación se puede determinar la matriz de transformación homogénea del robot manipulador.

$$H = {}^0T_n = {}^0A_1 {}^1A_2 \dots {}^{n-1}A_n$$

Utilizando la matriz H se puede encontrar la ecuación matricial que relaciona las coordenadas del sistema fijo $o_0x_0y_0z_0$ con las coordenadas del ultimo sistema móvil $o_nx_ny_nz_n$, viene dado por

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = H \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \\ 1 \end{bmatrix}$$

Finalmente se plantea un método alternativo para generar la matriz del brazo H, que le vamos a llamar Movimiento General continuo, y que se desarrolla en esta tesis.

PRESENTACION

La presente investigación está estructurada en seis capítulos que se sintetizan a continuación, En el capítulo 1 se realiza una introducción sobre el tema y la hipótesis planteada en esta tesis.

En el capítulo 2, se hace un repaso rápido sobre mecanismos, eslabones y articulaciones, así como el cálculo de los grados de libertad de un mecanismo o lo que es lo mismo el número de variables independientes o de actuadores que se requieren para el funcionamiento del mismo.

En el capítulo 3, se asigna el sistema de coordenadas fijas, y los sistemas de coordenadas móviles y se destaca la importancia que tiene la secuencia de los movimientos que se realizan con el sistema móvil,

En el capítulo 4 se analiza el método de Denavit-Hartenberg estándar para asignar los sistemas de coordenadas sobre los eslabones de un mecanismo, la elaboración de las tablas de parámetros y la demostración de la fórmula de la matriz de transformación homogénea A_i .

En el capítulo 5, se presenta el método Denavit-Hartenberg modificado para asignar los sistemas de coordenadas sobre las articulaciones de un mecanismo, la elaboración de la tabla de parámetros con una secuencia de movimientos diferente a la tabla estándar, así como la fórmula de la matriz de transformación homogénea, A_i .

En el capítulo 6, se presentan las conclusiones y recomendaciones, siendo una de las más importantes la que demuestra la hipótesis planteada en esta tesis, si los movimientos son realizados con respecto al último sistema de coordenadas móviles, entonces el producto de matrices debe ser en la misma secuencia de los movimientos. Utilizando este concepto se llega a plantear el modelo Movimiento General continuo, donde se numera a los sistemas de coordenadas móviles de manera continua desde el sistema de coordenadas fijo hasta el sistema de coordenadas de efector final o herramienta de trabajo.

CAPITULO I

INTRODUCCIÓN

El propósito fundamental de la presente investigación es comparar los métodos matriciales que utiliza la robótica para determinar las ecuaciones del movimiento en un mecanismo constituido por cadenas cinemáticas abiertas que tiene un eslabón fijo o bastidor, este mecanismo se le conoce en robótica como robot manipulador, en estos brazos articulados es fundamental determinar las ecuaciones que relacionan las coordenadas del ultimo sistema de coordenadas del efector final denotado como sistema $o_n x_n y_n z_n$, con las coordenadas del sistema de coordenadas fijo o bastidor $o_0 x_0 y_0 z_0$.

En la presente tesis se plantea la hipótesis: si los movimientos realizados al sistema de coordenadas móvil siguiendo la cadena cinemática son con respecto al último sistema de coordenadas, entonces el producto de las matrices en la misma secuencia nos dará la matriz resultante del mecanismo, esta matriz nos permite escribir las ecuaciones del movimiento.

Conocidas estas ecuaciones del movimiento se puede conocer la posición, velocidad y aceleración, en otras palabras el estudio de la cinemática directa e inversa del mecanismo estaría resuelto, para la modelación es imprescindible determinar primero estas ecuaciones.

La cinemática de manipuladores implica el estudio de la geometría y las propiedades del movimiento basadas en el tiempo, y en particular cómo los diversos eslabones se mueven uno con respecto al otro en el tiempo.

Los robots manipuladores se componen de eslabones conectados por articulaciones en una cadena cinemática. Las articulaciones son típicamente rotatorias (de revolución) o lineales (prismáticas). Una articulación rotatoria es como una bisagra y permite la rotación relativa entre dos eslabones. Una articulación prismática permite un movimiento relativo lineal entre dos eslabones. Se usa la convención (R) para la

representación de articulaciones de revolución y (P) para las articulaciones prismáticas.

En el capítulo 2, se detallan algunos conceptos sobre mecanismos, eslabones, articulaciones y grados de libertad, es de relevancia conocer los grados de libertad pues nos permite determinar el número de variables independientes del mecanismo o lo que es lo mismo el número de actuadores que se requieren para el funcionamiento del mismo, en robótica estas variables independientes se les conoce como variables angulares y deben estar conformando la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg, a estas se les remarca con un asterisco, los grados de libertad GDL se calculan utilizando la fórmulas de Grübler o de Kutzbach.

En el capítulo 3, se presenta el cómo asignar el sistema de coordenadas fijo, y los sistemas de coordenadas móviles y se destaca la importancia que tiene la secuencia de los movimientos que se realizan con el sistema móvil, aquí también se demuestran las matrices de rotación, y de traslación en el plano y el espacio, un movimiento del mundo físico es remplazado por una matriz en el mundo virtual de la modelación, también se demuestra la composición de varios movimientos realizados a los sistemas de coordenadas móviles con respecto al último sistema móvil, en este caso se puede multiplicar las matrices en la misma secuencia de los movimientos, postmultiplicación matricial.

En el capítulo 4 se formaliza el método de Denavit-Hartenberg estándar para asignar los sistemas de coordenadas sobre los eslabones de un mecanismo, la elaboración de las tablas de parámetros y la demostración de la fórmula de la matriz de transformación homogénea A_i , que nos permiten transformar coordenadas entre dos sistemas contiguos

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

también se demuestra la fórmula de la matriz del resultante del brazo:

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \dots \dots A_n(q_n).$$

En el capítulo 5, se presenta el método Denavit-Hartenberg modificado para asignar los sistemas de coordenadas sobre las articulaciones de un mecanismo, la elaboración de la tabla de parámetros con una secuencia de movimientos diferente a la tabla estándar, así como la fórmula de la matriz de transformación homogénea, A_i .

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el capítulo 6, se presentan las conclusiones y recomendaciones, siendo una de las más importantes la que demuestra la hipótesis planteada inicialmente en esta tesis, si los movimientos son realizados con respecto al último sistema de coordenadas móviles, entonces el producto de matrices debe ser en la misma secuencia de los movimientos. Utilizando este concepto se llega a plantear el

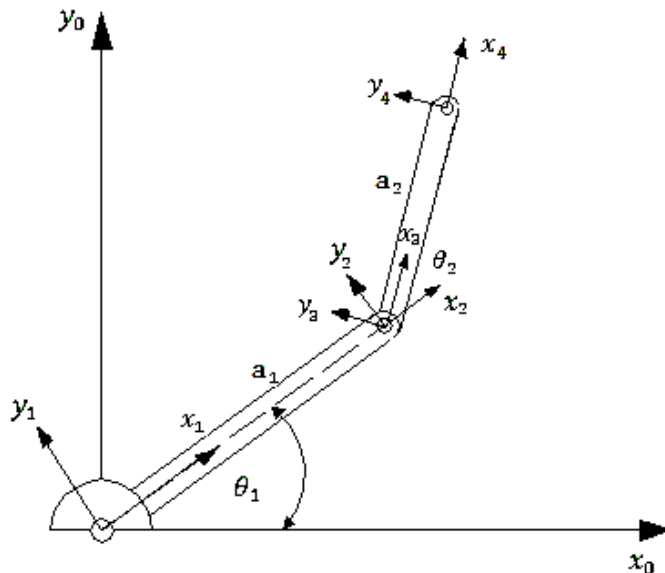


Figura 1.1 Sistemas de coordenadas continuas

modelo Movimiento General continuo, donde se numera a los sistemas de coordenadas móviles de manera continua desde el sistema de coordenadas fijo hasta el sistema de coordenadas de efector final o herramienta de trabajo, como se puede ver en la figura 1.1.

La secuencia de movimientos del sistema de coordenadas móviles es

$$H = R_{z,\theta_1} \cdot T_{x,a_1} \cdot R_{z,\theta_2} \cdot T_{x,a_2}$$

Y la matriz resultante de transformación homogénea del brazo es H , esta matriz nos permite plantear las ecuaciones del movimiento entre el sistema 4, con el sistema 0, nótese que se consigue sin considerar tramos o filas que representan eslabones en Denavit-Hartenberg estándar, y a las articulaciones en la tabla de Denavit-Hartenberg modificada, además de las secuencias de movimientos que difieren en estos otros dos métodos.

$$H = {}^0T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ z_4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

CAPITULO II

MECANISMOS, GRADOS DE LIBERTAD GDL

2.1 MECANISMOS, ESLABONES Y ARTICULACIONES [22]

Mecanismo: los procesos físicos o químicos fundamentales implicados o responsables de una acción, reacción u otro fenómeno natural.

Máquina: un ensamblaje de partes que transmiten fuerzas, movimiento y energía de una manera predeterminada.

Maquina simple: cualquiera de los varios mecanismos elementales que tienen elementos de los cuales todas las máquinas están compuestas. En esta categoría se incluyen palanca, volante y eje, polea, plano inclinado, cuña y tornillo.

La palabra mecanismo tiene muchos significados. En cinemática, un mecanismo es un medio de transmisión, control, o restricción del movimiento relativo. Los movimientos que están operados eléctricamente, magnéticamente, o neumáticamente se excluyen del concepto de mecanismo. El tema central de los mecanismos es eslabones conectados entre sí a través de articulaciones.

Una máquina es una combinación de eslabones (cuerpos rígidos), formados y conectados que se mueven con movimientos relativos definidos y transmiten fuerza desde la fuente de poder a la resistencia que hay que superar. Una máquina tiene dos funciones: transmisión de movimiento relativo definido y transmisión de fuerza. Estas funciones requieren resistencia y rigidez para transmitir las fuerzas.

El término mecanismo se aplica a la combinación de cuerpos geométricos que constituyen una máquina o parte de una máquina. Por tanto, un mecanismo puede

ser definido como una combinación de eslabones y articulaciones, de manera que se mueven con movimientos relativos definidos uno con respecto al otro.

Aunque no existe un cuerpo verdaderamente rígido, muchos componentes de ingeniería son rígidos debido a que sus deformaciones y distorsiones son insignificantes en comparación con sus movimientos relativos.

La similitud entre las máquinas y mecanismos es que

- Los dos son combinaciones de eslabones-cuerpos rígidos
- El movimiento relativo entre eslabones son definidos.

La diferencia entre la máquina y el mecanismo es que las máquinas transforman la energía para realizar un trabajo, mientras que los mecanismos no necesariamente realizan esta función. El término maquinaria generalmente significa máquinas y mecanismos. La figura 2.1 muestra una imagen de la parte principal de un motor diésel. El mecanismo de sus partes cilindro-biela-manivela es un mecanismo de corredera-manivela, como se muestra en la figura 2.2.

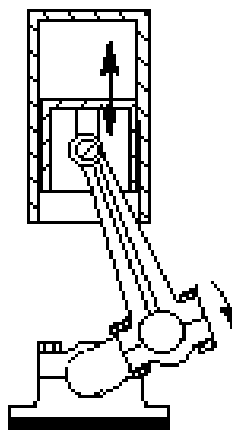


Figura 2.1 Sección transversal de un cilindro de potencia de un motor diésel.

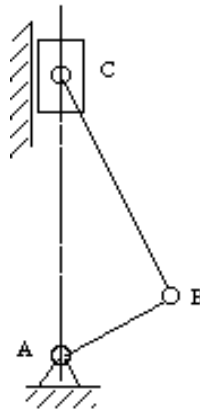


Figura 2.2 Esquema del mecanismo.

2.1.1 MECANISMOS PLANOS ESFÉRICOS Y ESPACIALES [14]

Los mecanismos se pueden dividir en mecanismos planos, esféricos y espaciales, de acuerdo con el movimiento relativo de los cuerpos rígidos. En un mecanismo en el plano, todos los movimientos relativos de los cuerpos rígidos están en un plano o en planos paralelos; en los mecanismos esféricos los eslabones se mueven en esferas concéntricas. Si hay cualquier movimiento relativo que no está en el mismo plano o en planos paralelos, el mecanismo se denomina mecanismo espacial. En otras palabras, los mecanismos en el plano son esencialmente en dos dimensiones, mientras que los mecanismos espaciales son en tres dimensiones.

2.1.2 CINEMÁTICA Y DINÁMICA DE MECANISMOS

La cinemática de mecanismos tiene que ver con el movimiento de las partes sin considerar los factores que influyen y afectan el movimiento (fuerza y masa). Por tanto, la cinemática se ocupa de los conceptos fundamentales del espacio y el tiempo, la velocidad y la aceleración derivadas de ésta.

Cinética trata de la acción de las fuerzas sobre los cuerpos. Aquí es donde los efectos de la gravedad entran en juego.

Dinámica es la combinación de la cinemática y la cinética.

Dinámica de mecanismos se refiere a las fuerzas que actúan sobre las partes, fuerzas balanceadas y no balanceadas ambas, teniendo en cuenta las masas y las aceleraciones de las partes, así como las fuerzas externas.

2.1.3 ESLABONES, SISTEMAS DE COORDENADAS (FRAMES) Y CADENAS CINEMÁTICAS

Un eslabón se define como un cuerpo rígido que tiene dos o más elementos de emparejamiento que lo conectan a otros cuerpos con el propósito de transmitir fuerza o movimiento.

En cada máquina, al menos un eslabón, o bien ocupa una posición fija relativa a la tierra o lleva a la máquina como un todo junto con ella durante el movimiento. Este eslabón es el marco de referencia (bastidor) de la máquina y se llama el eslabón fijo.

La combinación de eslabones y articulaciones sin un eslabón fijo no es un mecanismo, sino una cadena cinemática.

2.1.4 ESQUEMA DEL MECANISMO

Para el propósito de análisis cinemático, un mecanismo puede ser representado en forma abreviada, o esqueleto, forma llamada el esquema esqueleto del mecanismo. El esquema esqueleto da toda la información geométrica necesaria para determinar los movimientos relativos de los eslabones.

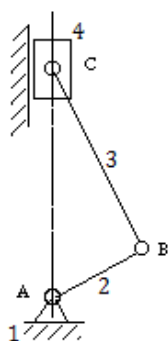


Figura 2.3 Esquema del mecanismo

En la figura 2.3, el esquema del mecanismo ha sido dibujado para mostrar el motor de la figura 2.1. Este esqueleto contiene toda la información necesaria para determinar los movimientos relativos de los principales eslabones, es decir, la longitud AB de la manivela; la longitud BC de la varilla de conexión o biela; La ubicación del eje del cojinete principal A; y la trayectoria AC del punto C, que representa el eje pin-muñeca.

2.1.5 ARTICULACIONES, PARES SUPERIORES, PARES INFERIORES

Una articulación o par es una junta entre las superficies de dos eslabones (cuerpos rígidos) que los mantiene en contacto y con movimiento relativo. Por ejemplo, en la figura 2.4, una puerta articulada al marco con bisagras hace una articulación o par de revolución (articulación de pasador), lo que permite que la puerta gire alrededor de su eje.

En la figura 2.4b y c muestran los esquemas de una articulación de revolución. La figura 2.4b se usa cuando ambos eslabones unidos por el par pueden girar mientras que en la figura 2.4c se utiliza cuando un eslabón es fijo.

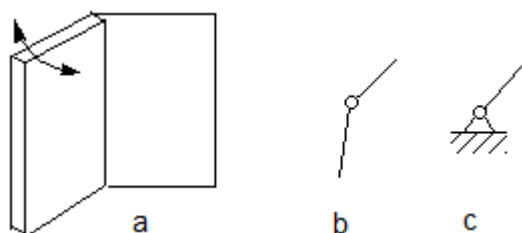


Figura 2.4 Par de revolución

En la figura 2.5a una hoja de la ventana puede ser trasladada relativa al marco. Este tipo de movimiento relativo se llama par prismático. Su esquema esqueleto se muestran en b, mientras que en c y d son utilizados cuando un eslabón es fijo.

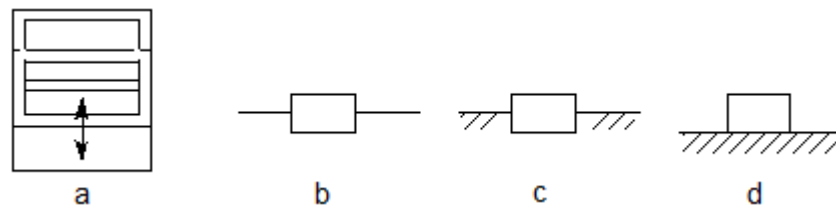


Figura 2.5 Par prismático

En los mecanismos generalmente, hay dos tipos de pares, inferiores y superiores. La diferencia es el tipo de contacto que tienen entre los dos cuerpos del par. Si la zona de contacto entre eslabones es una superficie se llaman pares inferiores, en el mecanismo planar (2D), hay dos subcategorías de pares inferiores, pares de revolución y pares prismáticos, como se muestra en las Figuras 2.4 y 2.5, respectivamente. Existen pares de eslabones cuya zona de contacto es un línea o un punto a estos se les llama pares superiores. La figura 2.6 muestra algunos ejemplos de pares superiores de mecanismos conformados de cuerpos rígidos y pares superiores.

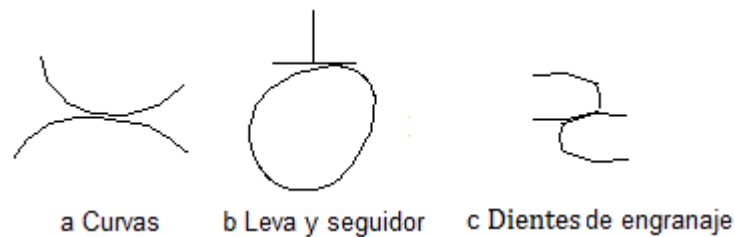


Figura 2.6 Pares superiores

2.2 GRADOS DE LIBERTAD DE UN ESLABON, GDL

2.2.1 GRADOS DE LIBERTAD DE UN ESLABON EN EL PLANO

Los grados de libertad (GDL) de un eslabón o cuerpo rígido se definen como el número de movimientos independientes que tiene. La Figura 2.7 muestra los 3 GDL de un eslabón libre en el plano. Para determinar los GDL de este eslabón debemos considerar cuántos movimientos independientes tiene. En el plano de dos

dimensiones como es la pantalla de la computadora, hay 3 GDL. El eslabón puede ser trasladado a lo largo del eje x, trasladado a lo largo del eje y, y girar alrededor del eje perpendicular al plano xy.

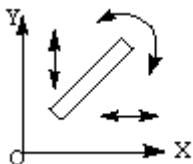


Figura 2.7 Grados de libertad de un eslabón en el plano

2.2.2 GRADOS DE LIBERTAD DE UN ESLABON EN EL ESPACIO

Un eslabón libre es un cuerpo rígido sin restricciones, en el espacio, tiene seis grados de libertad: tres movimientos de traslación a lo largo de los ejes X, Y y Z y tres movimientos de rotación alrededor de X, Y y Z, respectivamente, ver figura 2.8.

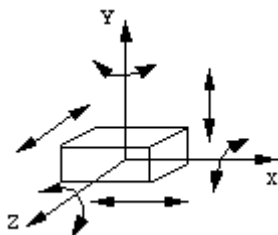


Figura 2.8 Grados de libertad de un eslabón en el espacio

2.2.3 RESTRICCIONES CINEMÁTICAS

Dos o más eslabones o cuerpos rígidos en el espacio se denominan colectivamente un sistema de cuerpos rígidos. Podemos impedir el movimiento de estos cuerpos rígidos independientes con restricciones cinemáticas. Restricciones cinemáticas son las limitaciones entre los cuerpos rígidos que dan lugar a la disminución de los grados de libertad del sistema de cuerpo rígido.

El término pares cinemáticos en realidad se refiere a las restricciones cinemáticas entre los cuerpos rígidos. Los pares cinemáticos se dividen en pares inferiores y pares superiores, dependiendo de cómo los dos cuerpos están en contacto.

2.2.3.1 Pares inferiores en mecanismos en el plano

Hay dos tipos de pares inferiores en mecanismos en el plano: pares de revolución y pares prismáticos, ver figura 2.9 y figura 2.10.

Un cuerpo rígido en un plano sólo tiene tres movimientos independientes, dos de traslación y uno de rotación, al introducir ya sea un par de revolución o un par prismático entre dos cuerpos rígidos se pierde dos grados de libertad.

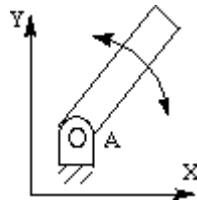


Figura 2.9 Articulación de revolución en el plano (par, R)

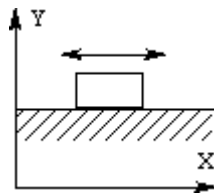


Figura 2.10 Articulación prismática en el plano (par, P)

2.2.3.2 Pares inferiores en mecanismos espaciales

Hay seis tipos de pares inferiores en la categoría de mecanismos espaciales. Los tipos son: par esférico, par plano, par cilíndrico, par de revolución, par prismático, y par tornillo, como se muestra desde la figura 2.11 hasta la figura 2.16.



Figura 2.11 Par esférico (par, G)

Un par esférico mantiene dos centros esféricos juntos. Dos cuerpos rígidos conectados por esta restricción serán capaces de girar relativamente alrededor de los ejes x , y , z , pero no habrá traslación relativa a lo largo de cualquiera de estos ejes. Por lo tanto, en un par esférico se pierde tres grados de libertad en el mecanismo espacial. $GDL = 3$.

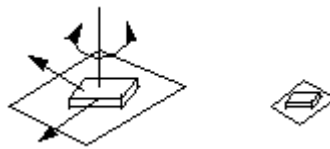


Figura 2.12 Par plano (par, F)

Un par plano mantiene las superficies de dos cuerpos rígidos juntos. Para visualizarlo, imagina un libro que estaba sobre una mesa donde se puede mover en cualquier dirección excepto fuera de la mesa. Dos cuerpos rígidos conectados por este tipo de par tendrán dos movimientos de traslación independientes en el plano, y un movimiento de rotación alrededor del eje que es perpendicular al plano. Por lo tanto, un par plano pierde tres grados de libertad en el mecanismo espacial. En nuestro ejemplo, el libro no sería capaz de levantar de la mesa o girar alrededor de los dos ejes tangentes de la mesa. $GDL = 3$.

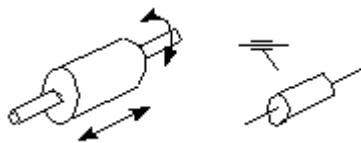


Figura 2.13 Par cilíndrico (par, C)

Un par cilíndrico mantiene dos ejes de dos cuerpos rígidos alineados. Dos cuerpos rígidos que forman parte de este tipo de sistema tendrán un movimiento de traslación independiente a lo largo del eje y un movimiento de rotación relativa alrededor del eje. Por lo tanto, un par cilíndrico pierde cuatro grados de libertad en un mecanismo espacial y le queda $GDL = 2$.

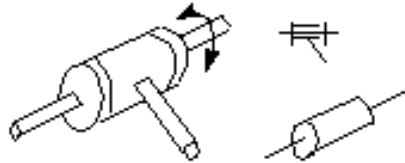


Figura 2.14 Par de revolución (par, R)

Un par de revolución mantiene los ejes de dos cuerpos rígidos juntos. Dos cuerpos rígidos restringidos por un par de revolución tienen un movimiento de rotación independiente alrededor de su eje común. Por lo tanto, un par de revolución pierde cinco grados de libertad en el mecanismo espacial. $GDL = 1$.

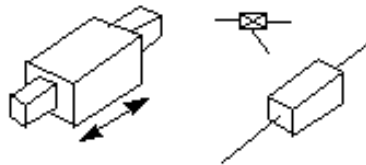


Figura 2.15 Par prismático (par, P)

Un par prismático mantiene dos ejes de dos cuerpos rígidos alineados y no permite la rotación relativa. Dos cuerpos rígidos limitados por este tipo de restricción serán capaces de tener un movimiento de traslación independiente a lo largo del eje. Por lo tanto, un par prismático pierde cinco grados de libertad en el mecanismo espacial. $GDL = 1$.

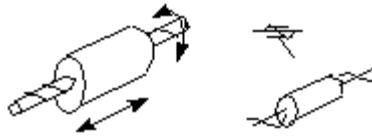


Figura 2.16 Par tornillo (par, S)

El par tornillo mantiene dos ejes de dos cuerpos rígidos alineados y permite un movimiento de tornillo relativo. Dos cuerpos restringidos por un par tornillo el movimiento es compuesto por un movimiento de traslación a lo largo del eje y de un movimiento de rotación alrededor del eje correspondiente. Por lo tanto, un par tornillo pierde cinco grados de libertad en el mecanismo espacial.

2.2.4 CUERPOS RÍGIDOS RESTRINGIDOS

Cuerpos rígidos y restricciones cinemáticas son los componentes básicos de los mecanismos. Un sistema de cuerpo rígido restringido puede ser una cadena cinemática, un mecanismo, una estructura, o ninguno de ellos. La influencia de las restricciones cinemáticas en el movimiento de los cuerpos rígidos tiene dos aspectos intrínsecos, que son los aspectos geométricos y físicos. En otras palabras, podemos analizar el movimiento de los cuerpos rígidos restringidos de sus relaciones geométricas usando la Segunda Ley de Newton.

Un mecanismo es un sistema de cuerpo rígido restringido en el que uno de los cuerpos es fijo llamado bastidor. Los grados de libertad son importantes cuando se considera un sistema de cuerpo rígido restringido en un mecanismo. Es menos importante cuando el sistema es una estructura o cuando no tiene movimiento definido.

El cálculo de los grados de libertad de un sistema de cuerpo rígido es sencillo. Cualquier cuerpo rígido sin restricciones tiene seis grados de libertad en el espacio y tres grados de libertad en el plano. La adición de restricciones cinemáticas entre los

cuerpos rígidos disminuirá correspondientemente los grados de libertad del sistema de cuerpo rígido.

2.2.5 GRADOS DE LIBERTAD, MECANISMOS EN EL PLANO

2.2.5.1 Ecuación de Grübler [14]

La definición de los grados de libertad de un mecanismo es el número de movimientos relativos independientes entre los cuerpos rígidos. Por ejemplo, la Figura 2.17 muestra varios casos de un cuerpo rígido restringido por diferentes tipos de pares

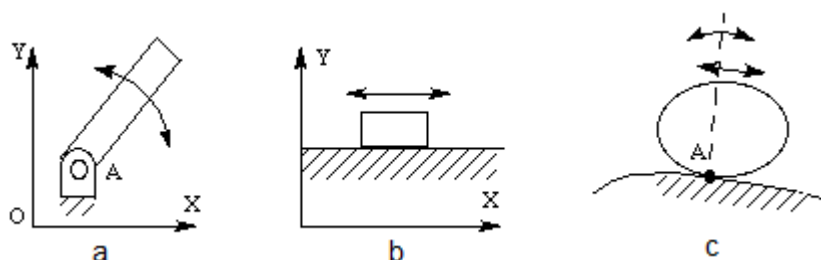


Figura 2.17 Restricción de movimientos en el plano de un eslabón debido a las articulaciones

En la figura 2.17a, el eslabón está restringido por una articulación de revolución que permite solamente el movimiento de rotación alrededor de un eje. Tiene un grado de libertad, girando alrededor del punto A. Los dos grados de libertad perdidos son movimientos de traslación a lo largo de los ejes X e Y. La única forma en que el eslabón se puede mover es girando alrededor del punto fijo A.

En la figura 2.17b, el eslabón está restringido por una articulación prismática que permite solamente el movimiento de traslación. En el plano, tiene un grado de libertad, traslación a lo largo del eje x. En este ejemplo, el cuerpo ha perdido la capacidad de rotar sobre cualquier eje, y no se puede mover a lo largo del eje y.

En la figura 2.17c, un cuerpo rígido está restringido por un par superior. Cuenta con dos grados de libertad: traslación a lo largo de la superficie curva y rotación alrededor del punto de contacto instantáneo.

En general, un eslabón libre en el plano tiene tres grados de libertad. Los pares cinemáticos son restricciones sobre los cuerpos rígidos que reducen los grados de libertad de un mecanismo. En la figura 2.18 muestra los tres tipos de articulaciones en mecanismos planares. Estos pares reducen el número de grados de libertad. Si creamos un par inferior (Figura 2.18a, b), los grados de libertad perdidos es 2. Del mismo modo, si creamos un par superior (figura 2.18c), los grados de libertad perdidos es 1.

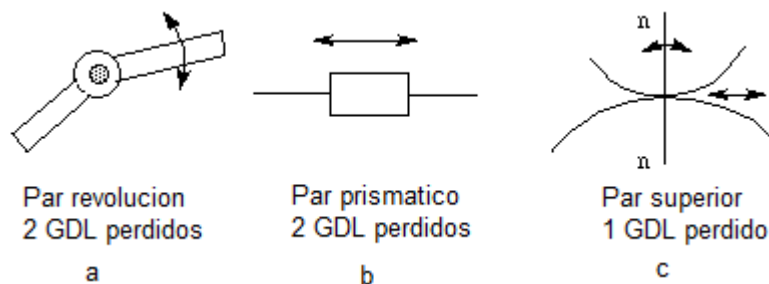


Figura 2.18 Grados de libertad perdidos en las articulaciones en el plano

Por lo tanto, podemos escribir la siguiente ecuación:

$$GDL = 3(n - 1) - 2j_1 - j_2 \quad (2.1)$$

donde :

GDL = total de grados de libertad en el mecanismo

n = número de eslabones (incluyendo el eslabón fijo)

j_1 = número de pares inferiores (un grado de libertad)

j_2 = número de pares superiores (dos grados de libertad)

Esta ecuación también se conoce como ecuación de Grübler, una aplicación se muestra en la figura 2.19a. El esquema del mecanismo de apertura y de cierre se muestra en la figura 2.19b. Vamos a calcular los grados de libertad.

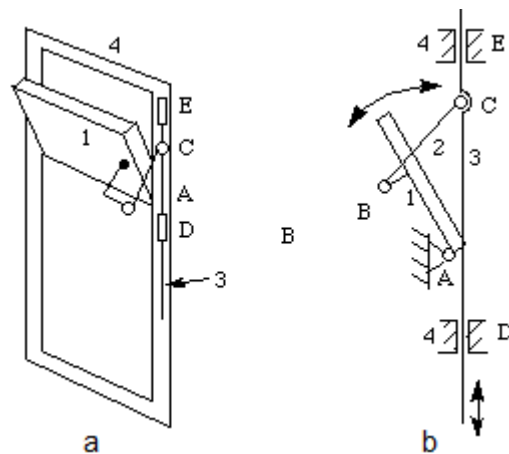


Figura 2.19 Mecanismo de apertura y cierre

$n = 4$ (eslabones 1,2,3 y el marco 4), $j_1 = 4$ (en A, B, C, D), $j_2 = 0$

$$GDL = 3(4 - 1) - 2 * 4 - 1 * 0 = 1 \quad (2.2)$$

Obsérvese que la articulación D y E son un mismo par prismáticos, por lo que sólo cuentan como un par inferior. Otra aplicación del cálculo de los grados de libertad de un camión volqueta se muestra en la figura 2.20.

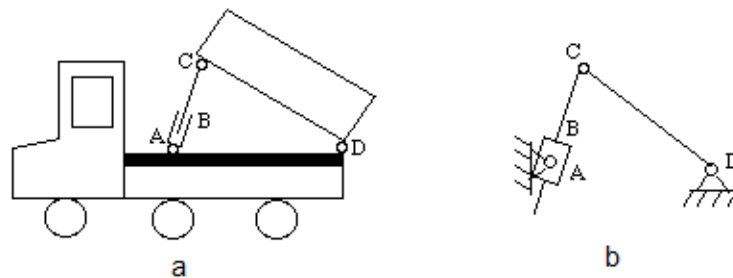


Figura 2.20 Camión volqueta

$n = 4$, $j_1 = 4$ (en A, B, C, D), $j_2 = 0$

$$GDL = 3(4 - 1) - 2 * 4 - 1 * 0 = 1 \quad (2.3)$$

Calcular los grados de libertad de los mecanismos que se muestran en la Figura 2.21.

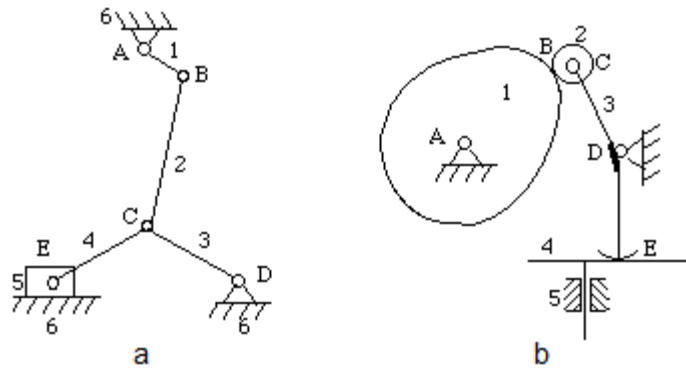


Figura 2.21 Cálculo de los grados de libertad

Para el mecanismo en la figura 2.21a

$$n = 6, j_1 = 7, j_2 = 0$$

$$GDL = 3(6 - 1) - 2 * 7 - 1 * 0 = 1 \quad (2.4)$$

Para el mecanismo en la Figura 2.21b

$$n = 5, j_1 = 5, j_2 = 1$$

$$GDL = 3(5 - 1) - 2 * 5 - 1 * 1 = 1 \quad (2.5)$$

Nota: La rotación del rodillo no influye en la relación del movimiento de entrada y salida del mecanismo. Por lo tanto, no se considerará la libertad del rodillo; Se llama un grado pasivo o redundante de la libertad. Imagínese que el rodillo está soldado al eslabón 2 cuando se cuentan los grados de libertad para el mecanismo.

2.2.5.2 Criterio de Kutzbach [14]

El número de grados de libertad de un mecanismo también se llama la movilidad del dispositivo. La movilidad es el número de parámetros de entrada que debe ser controlada de forma independiente para llevar al dispositivo a una posición particular.

El criterio Kutzbach, que es similar a la ecuación de Grübler, calcula la movilidad y la ecuación viene dada por:

$$GDL = 6(n - 1) - 5j_1 - 4j_2 - 3j_3 - 2j_4 - j_5 \quad (2.6)$$

donde :

GDL = total de grados de libertad en el mecanismo

n = número de eslabones (incluyendo el eslabón fijo)

j_1 = número de articulaciones de 1 GDL

j_2 = número de articulaciones de 2 GDL

j_3 = número de articulaciones de 3 GDL

j_4 = número de articulaciones de 4 GDL

j_5 = número de articulaciones de 5 GDL

Con el fin de controlar un mecanismo, el número de movimientos de entrada independientes debe ser igual al número de grados de libertad del mecanismo. Por ejemplo, el travesaño en la figura 2.19a tiene un solo grado de libertad, por lo que necesita un movimiento independiente de entrada para abrir o cerrar la ventana. Es decir, usted justo empuja o jala la varilla 3 para operar la ventana.

Para ver otro ejemplo, el mecanismo en la figura 2.21a también tiene 1 grado de libertad. Si se acciona una entrada independiente del eslabón 1 (por ejemplo, un motor montado en la articulación A del eslabón manivela 1), entonces el mecanismo tendrá un movimiento predefinido.

CAPITULO III

SISTEMA DE COORDENADAS, POSICIÓN Y ORIENTACIÓN

3.1 ASIGNACIÓN DE SISTEMAS DE COORDENADAS A UN ESLABÓN

Consideremos un par de revolución donde un eslabón es fijo, en robótica se le conoce como eslabón 0, le asignamos un sistema de coordenadas fijo $o_0x_0y_0z_0$, cuyo origen está en la articulación de tal manera que el eje z coincide sobre la línea de eje de la articulación; luego asignamos otro sistema de coordenadas al eslabón móvil 1 que se mueve solidariamente con él, por esta razón se le llama sistema de coordenadas móvil $o_1x_1y_1z_1$. Estos dos sistemas de coordenadas asumimos que inicialmente están traslapados, luego se acciona al eslabón móvil un ángulo θ , y en consecuencia también rota el sistema de coordenadas $o_1x_1y_1z_1$, si consideramos un punto P cuyas coordenadas x_1y_1 se conocen, vamos a plantearnos el problema de determinar cuáles son las coordenadas de este punto con respecto a al sistema de coordenadas fijo $o_0x_0y_0z_0$, en la figura 3.1 se observan al sistema de coordenadas fijo y móvil.

3.2 POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DE UN PUNTO EN EL PLANO

3.2.1 MATRIZ DE ROTACIÓN EN EL PLANO

En un par de rotación, al eslabón fijo le asignamos el sistema de coordenadas $o_0x_0y_0$ y al eslabón móvil le asignamos el sistema $o_1x_1y_1$, los orígenes de los dos sistemas coinciden en el estado inicial, se desea determinar las ecuaciones que relacionan las coordenadas x_0y_0 en función de x_1y_1 .

Es conveniente indicar que un movimiento de rotación en el mundo físico puede ser representado correctamente a través de una matriz de rotación, en la modelación de

mecanismos planares y espaciales, este es el concepto fundamental en el que se basa el método matricial de la robótica.

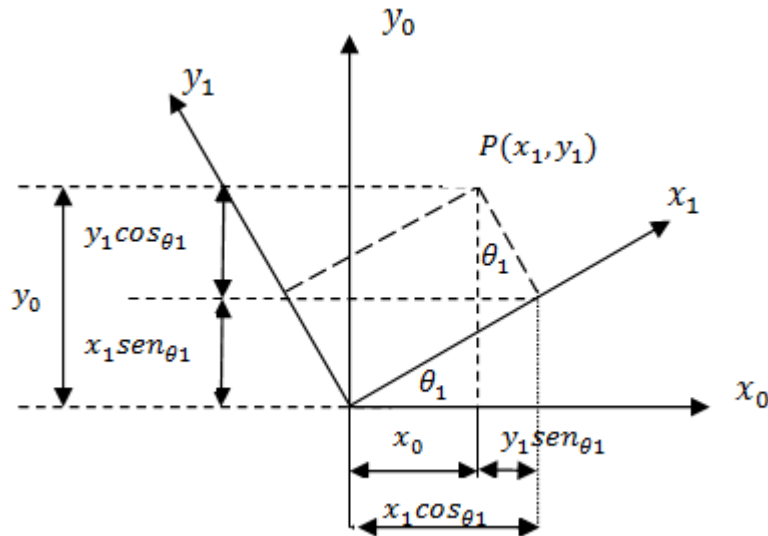


Figura 3.1 Asignación de los sistemas de coordenadas al eslabón fijo y móvil

Las ecuaciones que permiten transformar las coordenadas pueden ser escritas utilizando la figura 3.1 y el axioma el todo es igual a la suma de las partes:

$$x_0 = x_1 \cos \theta_1 - y_1 \sin \theta_1 \quad (3.1)$$

$$y_0 = x_1 \sin \theta_1 + y_1 \cos \theta_1 \quad (3.2)$$

$$1 = 1$$

A las dos primeras ecuaciones le añadimos una tercera la igualdad $1 = 1$, con la finalidad de tener una matriz 3x3 a esta matriz se le conoce como matriz de transformación homogénea, en vez de una matriz de rotación pura de 2x2, esto nos permite operar fácilmente con las matrices de traslación que estudiaremos más adelante. Estas tres ecuaciones pueden escribirse utilizando notación matricial como se indica a continuación, note que cuando trabajamos en el plano vamos a tener matrices de orden 3, a estas matrices se les conoce como matrices ampliadas:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

Donde la matriz de rotación R_{Z,θ_1} representa un giro alrededor del eje z un ángulo de θ_1 , y le representaremos como sigue:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{Z,\theta_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

$$R_{Z,\theta_1} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

3.2.2 MATRIZ DE TRASLACIÓN EN EL PLANO

En un par prismático al eslabón fijo le asignamos el sistema de coordenadas $o_0x_0y_0z_0$ y al eslabón móvil que se traslada le asignamos el sistema $o_1x_1y_1z_1$, ver figura 3.2, los orígenes de los dos sistemas coinciden inicialmente, se desea determinar las ecuaciones que relaciona las coordenadas de $P(x_1, y_1)$ con las coordenadas de $P(x_0, y_0)$ después de trasladar al sistema móvil Δx a lo largo de x_1 , y Δy a lo largo de y_1 , Un movimiento de traslación en el mundo físico puede ser representado a través de una matriz de traslación en el mundo virtual.

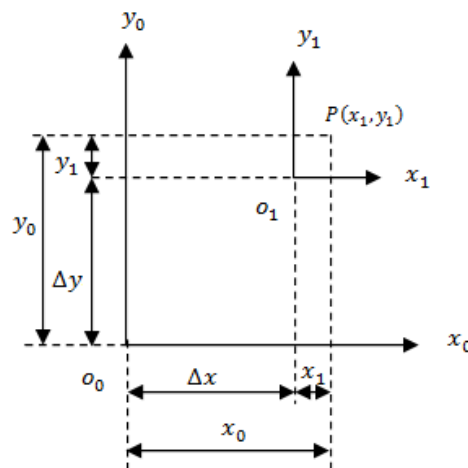


Figura 3.2 Asignación de sistemas de coordenadas a los eslabones

Se asume que un punto $P(x_1, y_1)$ adherido al sistema de coordenadas móvil, se traslada conjuntamente con el punto P, un valor de Δx a lo largo de x_1 , y Δy a lo largo de y_1 , las ecuaciones que relaciona a estos sistemas de coordenadas son:

$$x_0 = x_1 + \Delta x \quad (3.6)$$

$$y_0 = y_1 + \Delta y \quad (3.7)$$

Para poder escribir las ecuaciones en notación matricial se añade una tercera ecuación $1=1$, con esta igualdad se tiene.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Donde, la matriz de traslación en el plano es

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x \\ 0 & 1 & \Delta y \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

3.2.3 COMPOSICIÓN DE MOVIMIENTOS, MATRICES COMPUESTAS

En el mecanismo de la figura 3.3 se muestra la secuencia de movimientos del sistema de coordenadas móviles siguiendo la cadena cinemática, ya sea sobre el eslabón i , convenio Denavit-Hartenberg estándar DHs; o sobre la articulación i , Denavit-Hartenberg modificado DHm; o simplemente la secuencia de movimientos de todos los sistemas de coordenadas, estos tres métodos se presentan a continuación para un mecanismo planar de dos grados de libertad.

3.2.3.1 Método de Denavit-Hartenberg estándar, DHs.

Consideremos el mecanismo de 2GDL de la figura 3.3, donde inicialmente los dos sistemas de coordenadas fijo $o_0x_0y_0$, y móvil $o x y$ están traslapados inicialmente, al sistema móvil rotamos alrededor de z un ángulo de θ_1 , luego se traslada a lo largo del nuevo eje x un valor de Δx_1 a este sistema de coordenadas rotado y trasladado se asignamos como $o_1x_1y_1$ los subíndices 1 nos indica que estamos moviéndonos sobre el eslabón 1, de manera semejante sobre el eslabón 2 rotamos alrededor de z un ángulo de θ_2 , luego se traslada a lo largo del nuevo eje x un valor de Δx_2 a este sistema de coordenadas rotado y trasladado le asignamos como $o_2x_2y_2$ los subíndices 2 nos indica que estamos moviéndonos sobre el eslabón 2, todos estos movimientos son realizados con respecto a los ejes del sistema de coordenadas móvil.

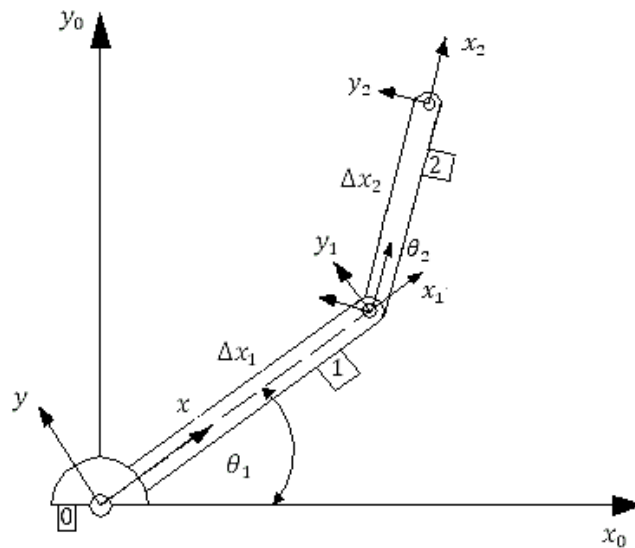


Figura 3.3 Asignación de sistemas de coordenadas sobre el eslabón i , DH standard

Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema 2 y el sistema 0 en notación matricial se encuentra multiplicando las matrices en la misma secuencia de los movimientos, rotación y traslación en tramos para cada eslabón, como se indica a continuación.

Movimientos sobre el eslabón 1, Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema fijo $o_0x_0y_0$, el sistema $o x y$, después de la rotación, viene dado por:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{z,\theta_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.12)$$

Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema $o x y$, y el sistema $o_0x_0y_0$, después de la traslación, es:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = T_{x,\Delta x_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

Remplazando (3.14) en la (3.12) se tiene:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & \Delta x_1 \cos\theta_1 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & \Delta x_1 \text{sen}\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

La matriz A_1 , es la matriz de transformación homogénea, entre el sistema de coordenadas i y el sistema de coordenadas $i+1$, y se denota como A_i , sistematizando todos los movimientos sobre el *eslabón* i nos da la fórmula de Denavit Hartenberg estándar en el plano.

$$A_i = R_{z,\theta_i} \cdot T_{x,\Delta x_i} \quad (3.19)$$

Movimientos sobre el eslabón 2. De manera semejante las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema 1 y el 2 utilizando notación matricial viene dado por:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & \Delta x_2 \cos\theta_2 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & \Delta x_2 \text{sen}\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.23)$$

Matriz del brazo T, Reemplazando la ecuación (3.23) en la (3.18) se tiene las ecuaciones de transformación de coordenadas del sistema 0 en función del último sistema 2, a esta matriz de transformación homogénea resultante se le conoce como matriz del brazo.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 A_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 \quad (3.24)$$

Donde A_1, A_2 son las matrices de transformación de coordenadas entre un sistema de coordenadas y el siguiente, la matriz resultante del mecanismo o del brazo del robot es T_2^0 . Reemplazando (3.17) y (3.22) en la (3.24) se obtiene T.

$$[T_2^0] = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & \Delta x_2 c_{12} + \Delta x_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & \Delta x_2 s_{12} + \Delta x_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & \Delta x_2 c_{12} + \Delta x_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & \Delta x_2 s_{12} + \Delta x_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

Dónde : $s_{12} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{12} = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)$, $s_1 = \text{sen}(\theta_1)$, $c_1 = \text{cos}(\theta_1)$

3.2.3.2 Método de Denavit-Hartenberg modificado, DHm.

Consideremos el mecanismo de 2GDL de la figura 3.4.

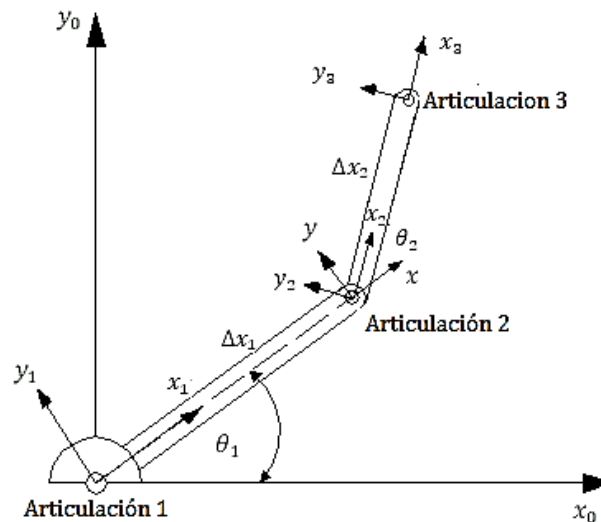


Figura 3.4 Sistemas de coordenadas pasando la articulación i, DH modificado

Asumamos que inicialmente los dos sistemas de coordenadas fijo $o_0x_0y_0$, y móvil $o x y$ están traslapados inicialmente, al sistema móvil rotamos alrededor de z un ángulo de θ_1 , luego se traslada a lo largo del nuevo eje x un valor de Δx_1 a este sistema de coordenadas rotado y trasladado le asignamos como $o_1x_1y_1$ los

subíndices 1 nos indica que estamos moviéndonos sobre la articulación 1, de manera semejante sobre el eslabón 2 rotamos alrededor de z un ángulo de θ_2 , luego se traslada a lo largo del nuevo eje x un valor de Δx_2 a este sistema de coordenadas rotado y trasladado le asignamos como $o_2x_2y_2$ los subíndices 2 nos indica que estamos moviéndonos sobre la articulación 2, finalmente trasladamos a lo largo de x un valor de Δx_2 .

Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema 3 y el sistema 0 en notación matricial se encuentra multiplicando las matrices en la misma secuencia de los movimientos, rotación y traslación en tramos sobre cada articulación, cabe recalcar que en este método DH modificado los movimientos son primero en el eje x , en consecuencia difiere del método DH estándar que es primero en el eje z

La matriz A_i , es la matriz de transformación homogénea, entre el sistema de coordenadas $i - 1$ y el sistema de coordenadas i , se denota como A_i , o también ${}^{i-1}A_i$, sistematizando todos los movimientos sobre la articulación i nos da la fórmula de Denavit-Hartenberg modificada en el plano es $A_i = T_{x,\Delta x_i} \cdot R_{z,\theta_i}$.

Movimientos para pasar la articulación 1

Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema fijo $o_0x_0y_0$, y el sistema $o_1x_1y_1$, después de la rotación, viene dado por:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{z,\theta_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\text{sen}\theta_1 & 0 \\ \text{sen}\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Movimientos para pasar la articulación 2

Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema $o_1x_1y_1$, y el sistema $o x y$, después de la traslación, es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{x,\Delta x_1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Luego se rota alrededor de z un ángulo de θ_2

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Remplazando (3.34) en (3.33) se tiene la matriz de transformación homogénea sobre la articulación 2

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & 0 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\text{sen}\theta_2 & \Delta x_1 \\ \text{sen}\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = A_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.37)$$

Movimientos para pasar la articulación 3

Las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el sistema $o_2x_2y_2$, y el sistema $o_3x_3y_3$, después de la traslación, es:

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = A_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.40)$$

Matriz del brazo T

Remplazando la ecuación (3.39) en la (3.37) y en la (3.30) se tiene las ecuaciones de transformación de coordenadas del sistema 0 en función del ultimo sistema 3, a esta matriz de transformación homogénea resultante se le conoce como matriz del brazo.

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = A_1 A_2 A_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.41)$$

$${}^0T_3 = A_1 A_2 A_3 \quad (3.42)$$

Donde A_1, A_2, A_3 son las matrices de transformación de coordenadas entre un sistema de coordenadas y el siguiente, la matriz resultante del mecanismo o del brazo del robot es T_2^0 . Remplazando (3.31) y (3.36) en la (3.40) en la (3.42), se obtiene T, y para simplificar la escritura se utiliza los siguientes remplazos: $s_{12} = \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)$, $c_{12} = \text{cos}(\theta_1 + \theta_2)$, $s_1 = \text{sen}(\theta_1)$, $c_1 = \text{cos}(\theta_1)$

$$[T_3^0] = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & \Delta x_2 c_{12} + \Delta x_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & \Delta x_2 s_{12} + \Delta x_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & \Delta x_2 c_{12} + \Delta x_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & \Delta x_2 s_{12} + \Delta x_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.2.3.3 Método Movimiento General continuo, MGc

El mecanismo de la figura 3.5, tiene dos sistemas de coordenadas el fijo $o_0x_0y_0$, y el móvil $o x y$. En esta sección vamos a desarrollar el método de Movimiento General continuo, consiste en mover de manera continua no por tramos como lo hace los métodos DHs y DHm, al sistema de coordenadas móvil siguiendo la cadena cinemática del mecanismo como se indica a continuación,

1. Rotación alrededor de z un ángulo de θ_1 .
2. Traslación a lo largo del nuevo eje x un valor de Δx_1 .
3. Rotación alrededor de z un ángulo de θ_2 ,
4. Traslación a lo largo del eje x un valor de Δx_2

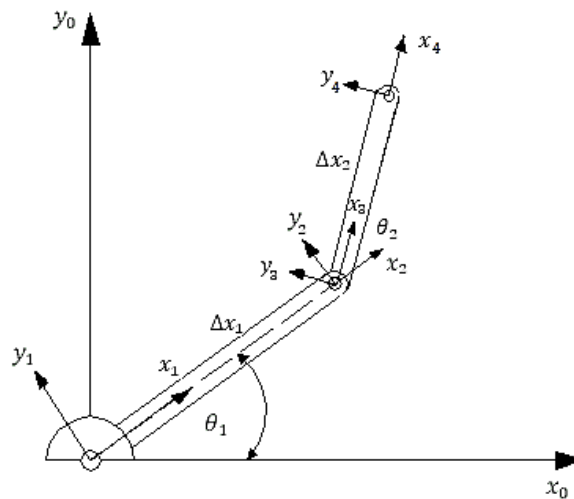


Figura 3.5 Sistemas de coordenadas siguiendo la secuencia de movimientos.

Las ecuaciones que relación a dos sistemas contiguos son

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{z,\theta_1} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{x,\Delta x_1} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.46)$$

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{z,\theta_2} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.47)$$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ 1 \end{bmatrix} = T_{x,\Delta x_2} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Remplazando las ecuaciones (3.48) en la (3.47) y esta en la (3.46) y finalmente en la (3.45) se obtiene la matriz del brazo 0T_4 .

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = R_{z,\theta_1} T_{x,\Delta x_1} R_{z,\theta_2} T_{x,\Delta x_2} \begin{bmatrix} x_4 \\ y_4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

$${}^0T_4 = R_{z,\theta_1} \cdot T_{x,\Delta x_1} \cdot R_{z,\theta_2} \cdot T_{x,\Delta x_2} \quad (3.50)$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 & 0 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & -\sin\theta_2 & 0 \\ \sin\theta_2 & \cos\theta_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \Delta x_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.51)$$

$$T_4^0 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & \Delta x_2 c_{12} + \Delta x_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & \Delta x_2 s_{12} + \Delta x_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

3.3 POSICIÓN Y ORIENTACIÓN DE UN PUNTO EN EL ESPACIO

3.3.1 MATRIZ DE ROTACIÓN EN EL ESPACIO [6]

En la figura 3.6 se tiene dos sistemas de coordenadas traslapados, el sistema de coordenadas fijo o, x, y, z y el sistemas de coordenadas móvil o, u, v, w , asumir que se tiene un punto P el cual está pegado al sistema de coordenadas móvil, la posición del punto P puede ser representado por el vector posición con respecto a los dos sistemas de coordenadas. Los vectores unitarios del sistema o, x, y, z serán $\vec{i}_x, \vec{j}_y, \vec{k}_z$, mientras que los de o, u, v, w serán $\vec{i}_u, \vec{j}_v, \vec{k}_w$.

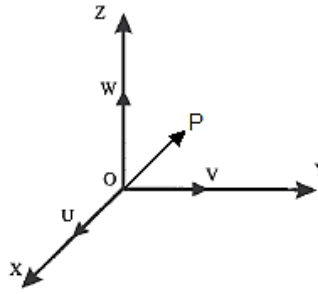


Figura 3.6 Sistemas de coordenadas fijo $o_0x_0y_0z_0$, y móvil o, u, v, w .

El vector posición del punto P referido al sistema fijo y al sistema móvil será:

$$\vec{P}_{x,y,z} = P_x \vec{i}_x + P_y \vec{j}_y + P_z \vec{k}_z$$

$$\vec{P}_{u,v,w} = P_u \vec{i}_u + P_v \vec{j}_v + P_w \vec{k}_w$$

Las coordenadas del punto P con respecto al sistema fijo se pueden determinar utilizando el producto punto entre el vector $\vec{P}_{u,v,w}$ y el unitario correspondiente a la coordenada que se requiere encontrar.

$$p_x = \vec{P}_{u,v,w} \cdot \vec{i}_x = (P_u \vec{i}_u + P_v \vec{j}_v + P_w \vec{k}_w) \cdot \vec{i}_x \quad (3.53)$$

$$p_y = \vec{P}_{u,v,w} \cdot \vec{j}_y = (P_u \vec{i}_u + P_v \vec{j}_v + P_w \vec{k}_w) \cdot \vec{j}_y$$

$$p_z = \vec{P}_{u,v,w} \cdot \vec{k}_z = (P_u \vec{i}_u + P_v \vec{j}_v + P_w \vec{k}_w) \cdot \vec{k}_z$$

Las tres ecuaciones escritas en notación matricial se presentan a continuación:

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vec{i}_u \cdot \vec{i}_x & \vec{j}_v \cdot \vec{i}_x & \vec{k}_w \cdot \vec{i}_x \\ \vec{i}_u \cdot \vec{j}_y & \vec{j}_v \cdot \vec{j}_y & \vec{k}_w \cdot \vec{j}_y \\ \vec{i}_u \cdot \vec{k}_z & \vec{j}_v \cdot \vec{k}_z & \vec{k}_w \cdot \vec{k}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \end{bmatrix} \quad (3.54)$$

Donde la matriz de rotación R contiene los vectores unitarios del sistema de coordenadas móvil con respecto al sistema de coordenadas fijo, es una matriz ortonormal.

$$R = \begin{bmatrix} \vec{l}_u \cdot \vec{l}_x & \vec{j}_v \cdot \vec{l}_x & \vec{k}_w \cdot \vec{l}_x \\ \vec{l}_u \cdot \vec{j}_y & \vec{j}_v \cdot \vec{j}_y & \vec{k}_w \cdot \vec{j}_y \\ \vec{l}_u \cdot \vec{k}_z & \vec{j}_v \cdot \vec{k}_z & \vec{k}_w \cdot \vec{k}_z \end{bmatrix} \quad (3.55)$$

Utilizando la ecuación matricial (3.55) y la figura 3.7 se puede determinar las matrices de rotación pura alrededor del eje x, eje y, eje z

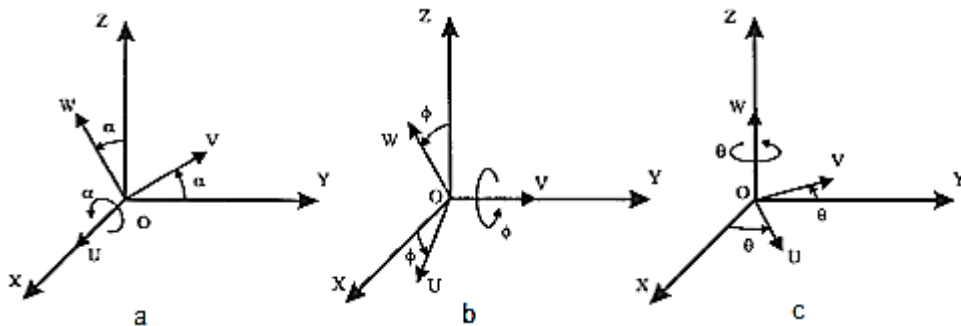


Figura 3.7 Rotación del sistema o,u,v,w alrededor de x, α , de y, ϕ , de z, θ .

Las matrices de rotación puras de orden 3x3 se presentan a continuación:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ 0 & \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \quad (3.56)$$

$$R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos\phi & 0 & \text{sen}\phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\text{sen}\phi & 0 & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (3.57)$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\theta & 0 \\ \text{sen}\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.58)$$

Para poder operar las matrices de rotación de orden 3x3 se necesita ampliarlas y para ello se añade una columna y una fila como se indica a continuación, de tal manera que se pueda trabajar con las matrices de traslación que son de orden 4x4:

$$R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha & 0 \\ 0 & \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

$$R_{y,\phi} = \begin{bmatrix} \cos \phi & 0 & \operatorname{sen} \phi & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \phi & 0 & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.60)$$

$$R_{z,\theta} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 & 0 \\ \operatorname{sen} \theta & \cos \theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

Si al sistema de coordenadas móvil se le realizan varios movimientos de rotación referidos al último sistema de coordenadas, en este caso se puede multiplicar las matrices de rotación en la misma secuencia de los movimientos, a esto se le conoce como postmultiplicación matricial.

Si los movimientos son realizados con referencia a un sistema de coordenadas fijo, se tiene que multiplicar las matrices en secuencia inversa a la de los movimientos, en este caso se le conoce como premultiplicación matricial

3.3.2 MATRIZ DE TRASLACIÓN EN EL ESPACIO

En la figura 3.8 se tiene el sistema de coordenadas móvil o, u, v, w trasladado con respecto al sistema fijo a lo largo del eje x un valor de Δx , en el eje y un valor de Δy , en el eje z un valor de Δz , se conoce las coordenadas del punto P con respecto al

sistema móvil, este punto P se mueve conjuntamente con el sistema de coordenadas móvil, se desea determinar las ecuaciones que relaciona las coordenadas de estos dos sistemas después del movimiento de traslación.

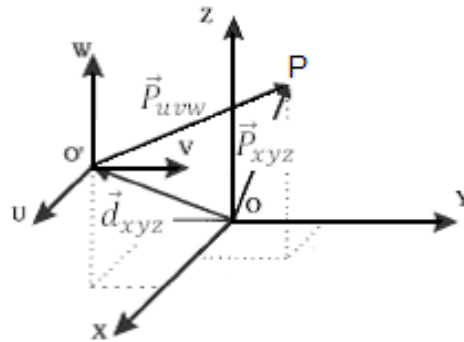


Figura 3.8 Asignación de sistemas de coordenadas a los eslabones

Las coordenadas del punto P con respecto a los dos sistemas de referencia son

$$P_{x,y,z}(p_x, p_y, p_z) \quad (3.62)$$

$$P_{u,v,w}(p_u, p_v, p_w) \quad (3.63)$$

La traslación del sistema móvil con respecto al fijo es

$$d_{x,y,z}(\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z) \quad (3.64)$$

Utilizando algebra vectorial se plantea la ecuación:

$$\vec{P}_{xyz} = \vec{P}_{uvw} + \vec{d}_{xyz} \quad (3.65)$$

$$p_x \vec{i}_x + p_y \vec{j}_y + p_z \vec{k}_z = (p_u \vec{i}_u + p_v \vec{j}_v + p_w \vec{k}_w) + (\Delta_x \vec{i}_x + \Delta_y \vec{j}_y + \Delta_z \vec{k}_z) \quad (3.66)$$

Al trasladarse el sistema de coordenadas móvil, no cambia la orientación de los vectores unitarios en consecuencia:

$$\vec{i}_u = \vec{i}_x \quad \vec{j}_v = \vec{j}_y \quad \vec{k}_w = \vec{k}_z \quad (3.67)$$

La ecuación 3.66 se puede escribir escalarmente como sigue:

$$p_x = p_u + \Delta_x \quad (3.68)$$

$$p_y = p_v + \Delta_y$$

$$p_z = p_w + \Delta_z$$

Para poder escribir matricialmente a estas tres ecuaciones se utiliza un artificio que es utilizar una cuarta ecuación $1=1$

$$\begin{bmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_u \\ p_v \\ p_w \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.69)$$

Donde la matriz de traslación en el espacio cuando se traslada en los tres ejes viene dada por:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \Delta_x \\ 0 & 1 & 0 & \Delta_y \\ 0 & 0 & 1 & \Delta_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.70)$$

3.3.3 POSTMULTIPLICACION Y PREMULTIPLICACION MATRICIAL

Postmultiplicación matricial. Al realizar los movimientos del sistema de coordenadas móvil con respecto a los ejes del último sistema de coordenadas móvil, se puede determinar las ecuaciones de transformación de coordenadas entre el último sistema de coordenadas con el sistema de coordenadas fijo, para ello se debe utilizar el producto matricial en la misma secuencia de los movimientos, a este producto de matrices se le conoce como postmultiplicación matricial y es muy común en robótica.

Todas las aplicaciones anteriores son ejemplos de postmultiplicación matricial, también cae en este caso los ángulos de Euler [11], aquí se tiene tres rotaciones consecutivas, rotación de α alrededor del eje z, rotación β alrededor del y, rotación γ alrededor del eje x, debemos aclarar que estas tres rotaciones son referidas al último sistema de coordenadas móvil.

$$R_{(\alpha,\beta,\gamma)} = R_{z1,\alpha}R_{y2,\beta}R_{x3,\gamma} \quad (3.71)$$

$$R_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (3.72)$$

$$R_{(\alpha,\beta,\gamma)} = \begin{bmatrix} cac\beta & cas\beta s\gamma - sac\gamma & cas\beta c\gamma + sas\gamma \\ sac\beta & sas\beta s\gamma + cac\gamma & sas\beta c\gamma - cas\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (3.73)$$

Premultiplicación matricial. Si los movimiento del sistema de coordenadas se realiza con respecto al sistema de coordenadas fijo, y se requiere la relación entre estos sistemas se debe multiplicar las matrices en secuencia inversa a la de los movimientos, a esto se le conoce como premultiplicación matricial de mucha utilidad en aeronáutica, en asuntos marítimos y en menor proporción en robótica. Una aplicación frecuente es la matriz RPY [11], que son las siglas en ingles de: roll (balanceo), pitch (inclinación), yaw (orientación).

La secuencia de movimientos es giro alrededor del eje x_0 un ángulo de γ (balanceo), rotación alrededor del eje y_0 un ángulo β (inclinación), rotación alrededor del eje z_0 un ángulo α (orientación).

$$R_{RPY(\gamma,\beta,\alpha)} = R_{z0,\alpha}R_{y0,\beta}R_{x0,\gamma} \quad (3.74)$$

$$R_{RPY(\gamma,\beta,\alpha)} = \begin{bmatrix} c\alpha & -s\alpha & 0 \\ s\alpha & c\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\beta & 0 & s\beta \\ 0 & 1 & 0 \\ -s\beta & 0 & c\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & c\gamma & -s\gamma \\ 0 & s\gamma & c\gamma \end{bmatrix} \quad (3.75)$$

$$R_{RPY(\gamma, \beta, \alpha)} = \begin{bmatrix} c\alpha c\beta & c\alpha s\beta s\gamma - s\alpha c\gamma & c\alpha s\beta c\gamma + s\alpha s\gamma \\ s\alpha c\beta & s\alpha s\beta s\gamma + c\alpha c\gamma & s\alpha s\beta c\gamma - c\alpha s\gamma \\ -s\beta & c\beta s\gamma & c\beta c\gamma \end{bmatrix} \quad (3.76)$$

CAPITULO IV

CINEMÁTICA DIRECTA: DENAVIT-HARTENBERG [15]

En este capítulo se desarrolla la modelación de mecanismos espaciales a través de la configuración de las ecuaciones de la cinemática directa para cadenas abiertas con un eslabón fijo conocidos como robot manipuladores. El problema de la cinemática directa se refiere a la relación entre las articulaciones individuales del robot manipulador y la posición y orientación de la herramienta o efector final. Dicho de manera más formal, el problema de cinemática directa es determinar la posición y la orientación del efector final, dados los valores de las variables articulares del robot. Las variables articulares son los ángulos entre los eslabones en el caso de articulación de revolución o de rotación y la extensión del eslabón en el caso de articulación prismática o deslizantes. El problema de la cinemática directa debe ser contrastado con el problema de cinemática inversa y que se refiere a la determinación de los valores de las variables de la articulación que alcanzan una posición y orientación deseadas del efector final del robot.

4.1 CADENAS CINEMÁTICAS

Un robot manipulador se compone de un conjunto de eslabones conectados por varias articulaciones. Las articulaciones o bien pueden ser muy simples, tales como una articulación de rotación o una articulación prismática, o de lo contrario puede ser más compleja, como una articulación de rótula. (Recordemos que una articulación de rotación es como una bisagra y permite una rotación relativa alrededor de un solo eje, y una articulación prismática permite un movimiento lineal a lo largo de un único eje, a saber, una extensión o retracción.) La diferencia entre las dos situaciones es que, en el primer ejemplo, la articulación sólo tiene un grado de libertad de movimiento: el ángulo en el caso de una articulación de rotación, y la cantidad de desplazamiento lineal en el caso de una articulación prismática. Por el contrario, una articulación cilíndrica tiene dos grados de libertad. En el presente estudio se asume

que todas las articulaciones solamente tienen un grado de libertad. Tenga en cuenta que el supuesto no implica ninguna pérdida real de generalización del modelo, ya que las articulaciones, como una articulación cilíndrica (dos grados de libertad) o una muñeca esférica (tres grados de libertad) siempre se pueden pensar como una sucesión de articulaciones de un grado de libertad con eslabones de longitud cero.

Con la suposición de que cada articulación tiene un solo grado de libertad, la acción de cada articulación puede ser descrita por un único número real: el ángulo de rotación en el caso de articulaciones de revolución o el desplazamiento en el caso de una articulación prismática. El objetivo del análisis cinemático directo es determinar el efecto acumulativo de todo el conjunto de variables articulares.

En este capítulo vamos a desarrollar un conjunto de convenciones que proporcionan un procedimiento sistemático para llevar a cabo este análisis. Por supuesto, es posible llevar a cabo el análisis de la cinemática directa incluso sin respetar estas convenciones, como lo hicimos en el ejemplo del manipulador planar de dos eslabones. Sin embargo, el análisis cinemático de un manipulador de n -eslabones puede ser extremadamente complejo y las convenciones introducidas más abajo simplifican el análisis considerablemente. Por otra parte, dan lugar a un lenguaje universal con el que los ingenieros de robótica pueden comunicarse.

Un robot manipulador con n articulaciones tendrá $n + 1$ eslabones, ya que cada articulación conecta dos eslabones. Numeramos las articulaciones entre 1 a n , y a los eslabones de 0 a n , a partir de la base. Utilizando el convenio Denavit-Hartenberg estándar, la articulación i conecta el extremo final del eslabón $i - 1$ con el inicio del eslabón i . Tendremos en cuenta la ubicación de la articulación i que se fija al eslabón $i - 1$. Cuando se acciona la articulación i , se mueve el eslabón i . Por lo tanto, el eslabón 0 (el primer eslabón) es fijo, y no se mueve cuando las articulaciones están accionadas. Por supuesto, el manipulador de robot en sí podría ser móvil (por ejemplo, podría ser montado en una plataforma móvil o en un vehículo autónomo), pero no vamos a considerar este caso en el presente capítulo, ya que

puede ser manejado fácilmente extendiendo ligeramente las técnicas que aquí se presenta.

Con la articulación i ésima, asociamos una variable articular, denotada por q_i . En el caso de una articulación de rotación, q_i es el ángulo de rotación, y en el caso de una articulación prismática, q_i es el valor del desplazamiento:

$$q_i = \begin{cases} \theta_i & : \text{articulación } i \text{ de revolución} \\ d_i & : \text{articulación } i \text{ prismática} \end{cases} \quad (4.1)$$

Para realizar el análisis cinemático, nosotros asignamos un sistema de coordenadas a cada eslabón. En particular, al eslabón i asignamos $o_i x_i y_i z_i$. Esto significa que, cualquiera que sea el movimiento ejecutado por el robot, las coordenadas de cada punto de eslabón i son constantes cuando se expresa en el sistema de coordenadas i ésima. Por otra parte, cuando la articulación i se acciona, el eslabón i y su sistema de coordenadas asignado, $o_i x_i y_i z_i$, experimentan un movimiento resultante.

El sistema de coordenadas $o_0 x_0 y_0 z_0$, se asigna a la base del robot, se conoce como el sistema de referencia inercial. La figura 4.1 ilustra la idea de asignar los sistemas de coordenadas a los eslabones en el caso de un manipulador tipo codo.

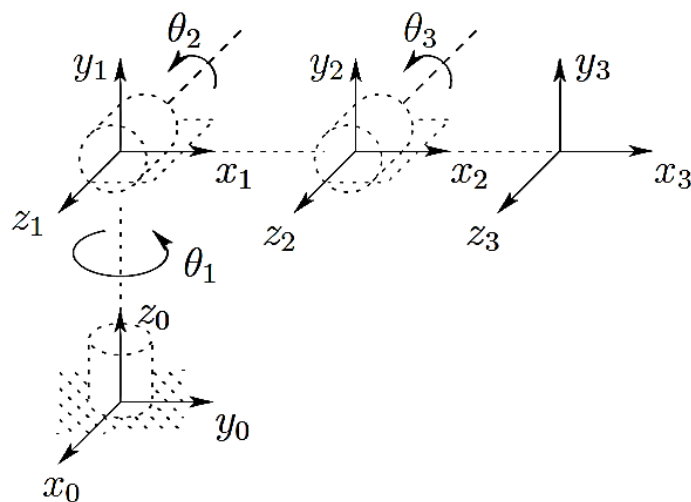


Figura 4.1 Asignación de los sistemas de coordenadas al manipulador tipo codo

Ahora supongamos que A_i es la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y la orientación de $o_i x_i y_i z_i$ respecto de $o_{i-1} x_{i-1} y_{i-1} z_{i-1}$. La matriz A_i no es constante, varía cuando se cambia la configuración del robot. Sin embargo, la suposición de que todas articulaciones son ya sea de rotación o prismática significa que A_i es una función solamente de una variable articular, a saber q_i . En otras palabras

$$A_i = A_i(q_i) \quad (4.2)$$

Ahora la matriz de transformación homogénea que expresa la posición y orientación de $o_j x_j y_j z_j$ con respecto a $o_i x_i y_i z_i$ por convención se llama, matriz de transformación, y es denotada por T_j^i . Desde el capítulo 3, vemos que

$$T_j^i = A_{i+1} A_{i+2} \dots \dots A_{j-1} A_j \quad \text{si } i < j$$

$$T_j^i = I \quad \text{si } i = j \quad (4.3)$$

$$T_j^i = (T_i^j)^{-1} \quad \text{si } i < j$$

Por la manera en que nosotros hemos asignado los varios sistemas de coordenadas a los correspondientes eslabones, se deduce la posición de cualquier punto del efector final, cuando se expresan en el sistema de coordenadas n , es constante e independiente de la configuración del robot. Representan la posición y la orientación del efector final con respecto al sistema de coordenadas fijo o bastidor la posición a través del vector o_n^0 (que da las coordenadas del origen del sistema de coordenadas de efector final con respecto al sistema de coordenadas fijo) y la orientación con la matriz de rotación 3×3 R_n^0 , tanto la posición y la orientación definen la matriz de transformación homogénea H .

$$H = \begin{bmatrix} R_n^0 & o_n^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

A continuación, la posición y la orientación del efector final en el sistema de coordenadas inercial o fijo está dado por

$$H = T_n^0 = A_1(q_1) \dots \dots A_n(q_n) \quad (4.5)$$

Cada transformación homogénea A_i es de la forma

$$A_i = \begin{bmatrix} R_i^{i-1} & o_i^{i-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

por lo tanto
$$T_j^i = A_{i+1} \dots A_i = \begin{bmatrix} R_j^i & o_j^i \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

La matriz R_j^i expresa la orientación de $o_j x_j y_j z_j$ con respecto a $o_i x_i y_i z_i$ y está dada por las partes rotacionales de las matrices A como

$$R_j^i = R_{i+1}^i \dots R_j^{j-1} \quad (4.8)$$

Los vectores de coordenadas o_j^i están dados recursivamente por la fórmula

$$o_j^i = o_{j-1}^i + R_{j-1}^i o_j^{j-1} \quad (4.9)$$

Estas expresiones son útiles cuando se estudia las matrices Jacobianas. En principio, eso es todo lo que hay en la cinemática directa. Determinar la función $A_i(q_i)$, y multiplicar a ellas como sea necesario. Sin embargo, es posible lograr un considerable monto de racionalización y simplificación, introduciendo ciertas convenciones, como la representación Denavit-Hartenberg de una articulación, y este es el objetivo del resto del capítulo.

4.2 REPRESENTACIÓN DENAVIT-HARTENBERG

Mientras es posible llevar a cabo todos los análisis en este capítulo mediante un sistema de coordenadas arbitrario asignado a cada eslabón, es útil ser sistemático en la elección de estos sistemas de coordenadas. Una convención usada comúnmente para la selección de los sistemas de coordenadas de referencia en aplicaciones de robótica es Denavit-Hartenberg, o convención D-H. En esta convención, cada transformación homogénea A_i se representa como un producto de cuatro transformaciones básicas.

$$A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} \quad (4.10)$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & s\theta_i & 0 & 0 \\ s\theta_i & c\theta_i & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_i \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c\alpha_i & -s\alpha_i & 0 \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde las cuatro cantidades $\theta_i, d_i, a_i, \alpha_i$ son los parámetros asociados con el eslabón i y la articulación i . Los cuatro parámetros a_i, α_i, d_i y θ_i , son generalmente llamados con los nombres longitud del eslabón, giro del eslabón, desplazamiento del eslabón, y ángulo de la articulación, respectivamente. Estos nombres se derivan de aspectos específicos de la relación geométrica entre dos sistemas de coordenadas, como se hará evidente a continuación. Dado que la matriz A_i , es una función de una sola variable, resulta que tres de las cuatro cantidades anteriores son constantes para un eslabón dado, mientras que el cuarto parámetro θ_i , para una articulación de rotación y d_i , para una articulación prismática, es la variable de la articulación.

De los capítulos anteriores se puede ver que una matriz de transformación homogénea arbitraria puede ser caracterizado por seis números, tales como, por ejemplo, tres números para especificar la cuarta columna de la matriz y tres ángulos de Euler para especificar la matriz de rotación superior izquierda 3x3. En la representación D-H, en contraste, sólo hay cuatro parámetros. ¿Cómo es esto posible? La respuesta es que, mientras el sistema de coordenadas i es requerido para asignar al eslabón i , nosotros hemos considerado se seleccione libremente el origen y los ejes del sistema de coordenadas. Por ejemplo no es necesario que el origen, o_i , del sistema de coordenadas i se coloque en el fin del eslabón físico i . De hecho, ni siquiera es necesario que el sistema de coordenadas se coloque dentro del eslabón físico; el sistema de coordenadas i podría estar en el espacio libre - siempre

y cuando el sistema de coordenadas i este *asignado fijamente* al eslabón i . Mediante una selección inteligente del origen y los ejes de coordenadas, es posible reducir el número de parámetros necesarios de seis a cuatro (o incluso menos en algunos casos). En la Sección 4.2.1 vamos a demostrar por qué, y en qué condiciones, esto se puede hacer, y en la Sección 4.2.2 vamos a demostrar exactamente cómo hacer las asignaciones de los sistemas de coordenadas.

4.2.1 EXISTENCIA Y CUESTIONES DE UNICIDAD

Evidentemente, no es posible representar cualquier transformación homogénea arbitraria usando sólo cuatro parámetros. Por lo tanto, comenzamos por determinar las transformaciones homogéneas que sólo se puede expresar en la forma (4.12). Asumimos nosotros que se tiene dos sistemas de coordenadas, denotados por el sistema 0 y 1, respectivamente. Entonces existe una matriz de transformación homogénea única A que tiene las coordenadas del sistema 1 en los del sistema 0. Ahora asumimos que los dos sistemas de coordenadas cumplen dos características adicionales, a saber:

(DH1) El eje x_1 es perpendicular al eje z_0

(DH2) El eje x_1 intersecta al eje z_0 .

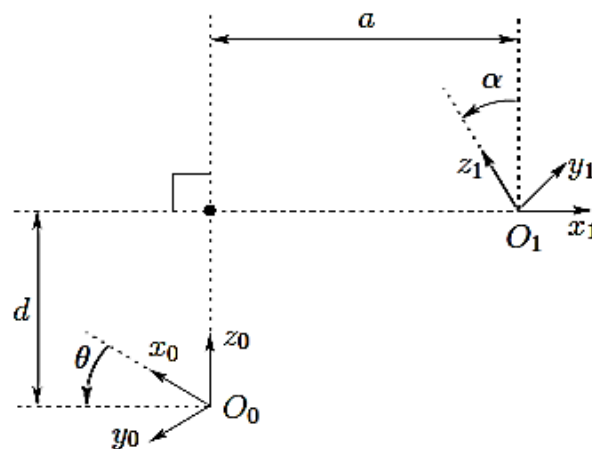


Figura 4.2 Sistema de coordenadas que satisfacen los supuestos DH1 y DH2

Como se muestra en la Figura 4.2. Bajo estas condiciones, afirmamos que existen números únicos θ, d, a, α de tal forma que

$$A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i} \quad (4.11)$$

Por supuesto, θ y α son ángulos, que realmente queremos decir que son únicos dentro de un múltiplo de 2π . Para demostrar que la matriz A se puede escribir de esta forma, se escribe A como

$$A = \begin{bmatrix} R_1^0 & o_1^0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

y dejar que r_i denota la columna $i^{\text{ésima}}$ de la matriz de rotación R_1^0 . Ahora vamos a examinar las implicaciones de las dos restricciones DH.

Si (DH1) se cumple, entonces x_1 es perpendicular a z_0 y tenemos $x_1 \cdot z_0 = 0$. Expresando esta restricción con respecto a ${}_0x_0y_0z_0$, utilizando el hecho de que r_1 es la representación del vector unitario x_1 con respecto al sistema de coordenadas 0, obtenemos

$$0 = x_1^0 \cdot z_0^0 \quad (4.13)$$

$$0 = [r_{11}, r_{21}, r_{31}]^T \cdot [0, 0, 1]^T \quad (4.14)$$

$$0 = r_{31} \quad (4.15)$$

Dado que $r_{31} = 0$, ahora sólo necesitamos demostrar que existen ángulos únicos θ y α de tal manera que

$$R_1^0 = R_{z,\theta} R_{x,\alpha} = \begin{bmatrix} c_\theta & -s_\theta c_\alpha & s_\theta s_\alpha \\ s_\theta & c_\theta c_\alpha & -c_\theta s_\alpha \\ 0 & s_\alpha & c_\alpha \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

La única información que tenemos es que $r_{31} = 0$, pero esto es suficiente. En primer lugar, ya que cada fila y columna de R_1^0 debe tener longitud unitaria, $r_{31} = 0$ implica que

$$\begin{aligned} r_{11}^2 + r_{21}^2 &= 1 \\ r_{32}^2 + r_{33}^2 &= 1 \end{aligned} \quad (4.17)$$

Por lo tanto existen un único θ, α tal que

$$(r_{11}, r_{21}) = (c_\theta, s_\theta) \quad ; \quad (r_{33}, r_{32}) = (c_\alpha, s_\alpha) \quad (4.18)$$

Una vez θ y α se encuentran, es rutina demostrar que los elementos restantes del R_1^0 deben tener la forma mostrada en (4.16), usando el hecho de que R_1^0 es una matriz de rotación.

El siguiente, supuesto (DH2) significa que el desplazamiento entre o_0 y o_1 se puede expresar como una combinación lineal de los vectores z_0 y x_1 . Esto se puede escribir como $o_1 = o_0 + dz_0 + ax_1$. Una vez más, podemos expresar esta relación en las coordenadas de $o_0x_0y_0z_0$ y obtenemos

$$o_1^0 = o_0^0 + dz_0^0 + ax_1^0 \quad (4.19)$$

$$o_1^0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + a \begin{bmatrix} c\theta \\ s\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.20)$$

$$o_1^0 = \begin{bmatrix} ac\theta \\ as\theta \\ d \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

Combinando los resultados anteriores, se obtiene (4.10) como se reivindica. Por lo tanto, vemos que cuatro parámetros son suficientes para especificar cualquier transformación homogénea que satisface las restricciones (DH1) y (DH2).

Ahora que hemos establecido que cada matriz de transformación homogénea satisface las condiciones (DH1) y (DH2) anteriores se pueden representar en la forma (4.10), podemos, de hecho, dar una interpretación física de cada uno de los cuatro cantidades en (3.10). El parámetro a es la distancia entre los ejes z_0 y z_1 , y se mide a lo largo del eje x_1 . El ángulo α es el ángulo entre los ejes z_0 y z_1 , medido en un plano normal a x_1 . El sentido positivo de α se determina a partir de z_0 a z_1 por la regla de la mano derecha como se muestra en la figura 4.3.

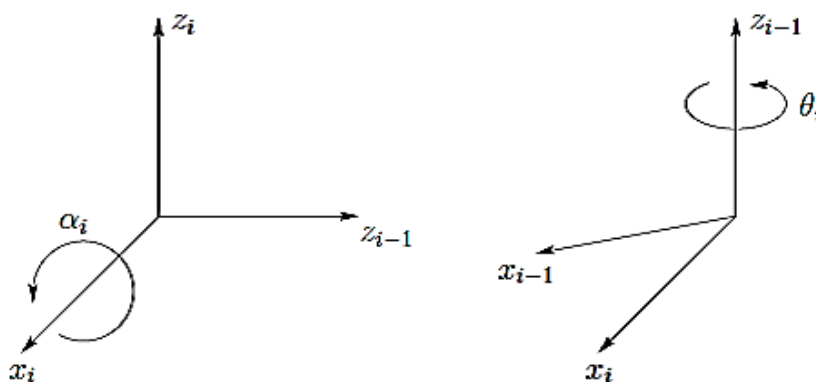


Figura 4.3 Sentido positivo para α_i y θ_i

El parámetro d es la distancia entre el origen o_0 y la intersección del eje x_1 con z_0 medido a lo largo del eje z_0 . Finalmente, θ es el ángulo entre x_0 y x_1 mide en un plano normal a z_0 . Estas interpretaciones físicas serán útiles en el desarrollo de un procedimiento para la asignación de los sistemas de coordenadas que satisfacen las restricciones (DH1) y (DH2), y ahora centramos nuestra atención en el desarrollo de tal procedimiento.

4.2.2 ASIGNACIÓN DE LOS SISTEMAS DE COORDENADAS

Para un robot manipulador dado, uno puede elegir siempre los sistemas de coordenadas $0, \dots, n$ de tal manera que las dos condiciones anteriores se cumplan. En ciertas circunstancias, esto requerirá la colocación del origen de o_i del sistema de

coordenadas i en un lugar que no puede ser intuitivamente satisfactorio, pero por lo general esto no será el caso. Al leer el material siguiente, es importante tener en cuenta que las opciones de los varios sistemas de coordenadas no son únicas, aun cuando son restringidos por los requerimientos anteriores. Por lo tanto, es posible que diferentes ingenieros obtengan diferentes, pero igualmente correctas, asignaciones de los sistemas de coordenadas para los eslabones del robot. Es muy importante observar, sin embargo, que el resultado final (por ejemplo, la matriz T_n^0) será el mismo, independientemente de la asignación de los sistemas de coordenadas de los eslabones intermedios (asumiendo que el sistema de coordenadas para el eslabón n coincide). Comenzaremos derivando el procedimiento general. Luego discutiremos varios casos especiales comunes en los que es posible simplificar aún más la matriz de transformación homogénea

Para empezar, la elección de z_i es arbitraria. En particular, a partir de (3.16), vemos que eligiendo α_i y θ_i adecuadamente, podemos obtener cualquier dirección arbitraria para z_i . Por lo tanto, para nuestro primer paso, asignamos los ejes z_0, \dots, z_{n-1} de una manera agradable intuitivamente. Específicamente, asignamos z_i a ser el eje de accionamiento para la articulación $i + 1$. Por lo tanto, z_0 es el eje de accionamiento para la articulación 1, z_1 es el eje de accionamiento para la articulación 2, etc. Hay dos casos a considerar: (i) si la articulación $i + 1$ es de rotación, z_i es el eje de rotación de la articulación $i + 1$; (ii) si la articulación $i + 1$ es prismática, z_i es el eje de la traslación de la articulación $i + 1$. Al principio puede parecer un poco confuso asociar z_i con la articulación $i + 1$, pero recuerde que esta satisface la convención que hemos establecido en la Sección 3.1, a saber, que las articulaciones i se fija con respecto al sistema de coordenadas i , y que cuando la articulación i se acciona, el eslabón i y su sistema de coordenadas adjunto, $o_i x_i y_i z_i$, experimentan un movimiento resultante.

Una vez que hemos establecido los ejes z para los eslabones, se establece el sistema de coordenadas base. La elección de un sistema de coordenadas base es casi arbitraria. Podemos elegir el origen o_0 del sistema de coordenadas base en

cualquier punto sobre z_0 . A continuación, elegimos x_0 , y_0 de cualquier manera conveniente siempre y cuando el sistema de coordenadas sea dextrógiro. Esto establece el sistema de coordenadas 0.

Una vez que el sistema de coordenadas 0 se ha establecido, comenzamos un proceso iterativo en el que se define el sistema de coordenadas i utilizando el sistema de coordenadas $i - 1$, comenzando con el sistema de coordenadas 1. La Figura 4.4 será de utilidad para la comprensión del proceso que ahora describimos.

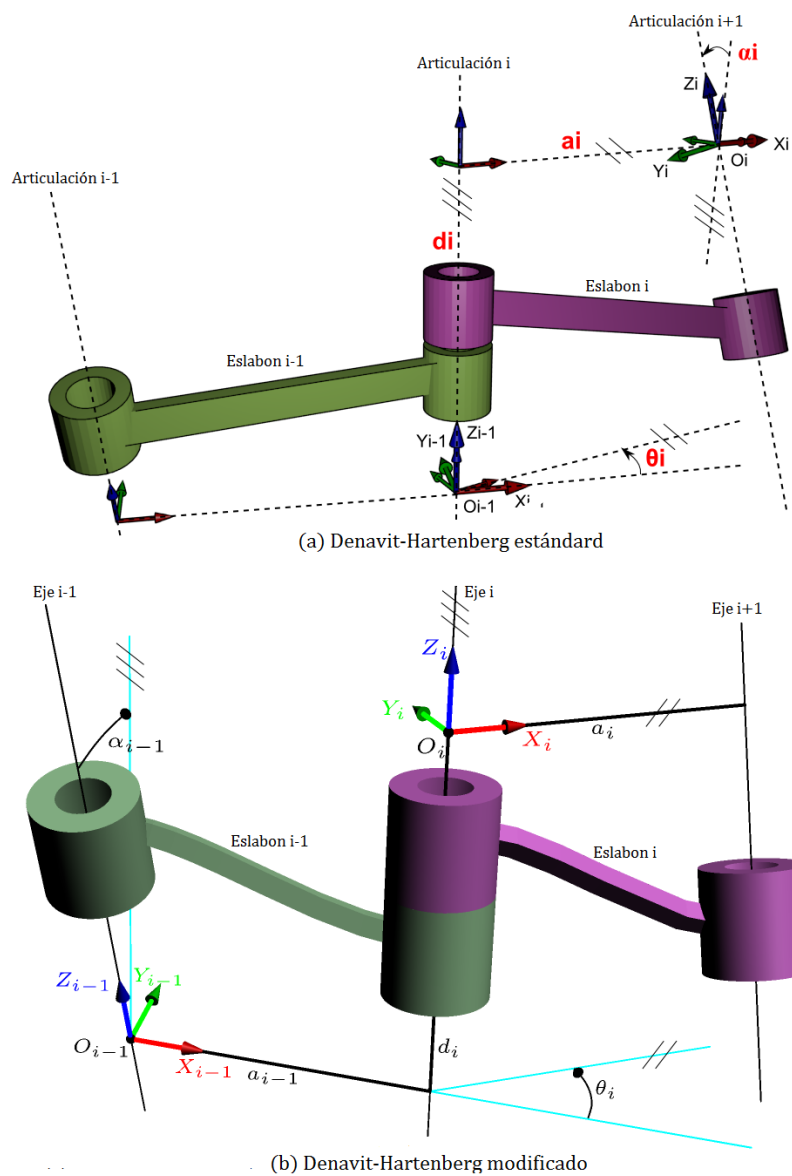


Figura 4.4 Sistema de coordenadas Denavit-Hartenberg estándar y modificado [17].

Con el fin de establecer el sistema de coordenadas i , es necesario considerar tres casos: (i) los ejes z_{i-1} , z_i no son coplanares, (ii) los ejes z_{i-1} , z_i se intersectan (iii) los ejes z_{i-1} , z_i son paralelos. Tenga en cuenta que en ambos casos (ii) y (iii) los ejes z_{i-1} , z_i son coplanares. Esta situación es de hecho bastante común, como veremos en la Sección 4.3. Consideremos ahora cada uno de estos tres casos.

(i) z_{i-1} y z_i no son coplanares: Si z_{i-1} y z_i no son coplanares, entonces existe un segmento de línea única perpendicular tanto a z_{i-1} y z_i tal que conecta las dos líneas y que tiene una longitud mínima. La línea que contiene esta normal común a z_{i-1} y z_i define x_i , y el punto donde esta línea corta z_i es el origen o_i . Por construcción, ambas condiciones (DH1) y (DH2) se cumplen y el vector de o_{i-1} a o_i es una combinación lineal de z_{i-1} y x_i . La especificación del sistema de coordenadas se completa mediante la elección del eje y_i para formar el sistema de coordenadas dextrógiro. De los supuestos (DH1) y (DH2) se satisfacen la matriz de transformación homogénea A_i y es de la forma (4.10).

(ii) z_{i-1} es paralela a z_i : Si los ejes z_{i-1} y z_i es son paralelos, entonces hay un número infinito de muchas normales comunes entre ellos y la condición (DH1) no especifica completamente el x_i . En este caso tenemos la libertad de elegir el origen o_i en cualquier lugar a lo largo de z_i . A menudo se elige o_i para simplificar las ecuaciones resultantes. El eje x_i se elige entonces ya sea para ser dirigido desde o_i hacia z_{i-1} , a lo largo de la normal común, o contrario a este vector. Un común método para elegir o_i es elegir la normal que pasa a través o_{i-1} como el eje x_i ; o_i es entonces el punto en el que este se cruza normales z_i . En este caso, d_i sería igual a cero. Una vez que se fija x_i , se determina y_i , como es habitual por la regla de la mano derecha. Dado que los ejes z_{i-1} y z_i son paralelos, α_i será igual a cero en este caso.

(iii) z_{i-1} intersecta al eje z_i : En este caso se elige x_i normal al plano formado por z_i y z_{i-1} . El sentido positivo de x_i es arbitraria. La opción más natural para el origen o_i en este caso es en el punto de intersección de z_i y z_{i-1} . Sin embargo, cualquier

punto conveniente a lo largo del eje z_i basta. Tenga en cuenta que en este caso el parámetro a_i es igual a 0

Este procedimiento constructivo funciona para sistemas de coordenadas de $0, \dots, n-1$ en un robot de n -eslabones. Para completar la construcción, es necesario especificar el sistema de coordenadas n . El sistema de coordenadas final $o_n x_n y_n z_n$ que comúnmente se conoce como el extremo del efector o sistema de coordenadas de la herramienta (véase la figura 4.5).

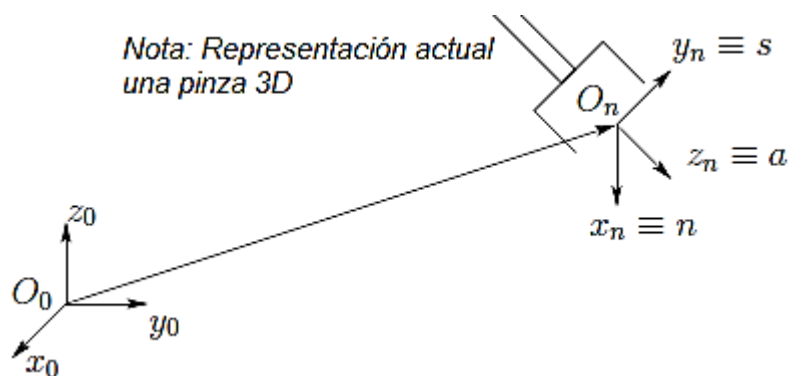


Figura 4.5 Asignación del sistema de coordenadas de la herramienta.

El origen o_n se coloca frecuentemente de manera simétrica entre los dedos de la pinza. Los vectores unitarios a lo largo de los ejes x_n, y_n , y z_n están etiquetados como n, s y a respectivamente. La terminología surge del hecho de que la dirección a es la dirección de aproximación, en el sentido de que la pinza típicamente se acerca a un objeto a lo largo de la dirección a . Del mismo modo la dirección s es la dirección de deslizamiento, la dirección a lo largo de la cual los dedos de la pinza deslizante para abrir y cerrar, y n es la dirección normal al plano formado por a y s .

En los robots contemporáneos el movimiento de la articulación final es una rotación del efector final por θ_n y los dos ejes de articulación finales, z_{n-1} y z_n , coinciden. En este caso, la transformación entre los dos últimos sistemas de coordenadas es una traslación a lo largo z_{n-1} por un distancia d_n seguida (o precedida) por una rotación

de θ_n radianes alrededor de z_{n-1} . Esta es una observación importante que simplifica el cálculo de la cinemática inversa.

Finalmente, tenga en cuenta el siguiente hecho importante. En todos los casos, si la articulación en cuestión es de rotación o prismática, las cantidades a_i y α_i son siempre constante para todo i y son característica del manipulador. Si la articulación i es prismática, entonces θ_i también es una constante, mientras que d_i es la variable de la articulación $i^{\text{ésima}}$. Del mismo modo, si la articulación i es de rotación, entonces d_i es constante y θ_i es la variable de articulación $i^{\text{ésima}}$.

4.2.3 RESUMEN

Podemos resumir el procedimiento anterior con base en la convención de DH en el siguiente algoritmo para derivar la cinemática directa para cualquier manipulador.

1. Localizar y etiquetar los ejes de articulación z_0, \dots, z_{n-1} .
2. Establecer el sistema de coordenadas base. Establecer el origen en cualquier lugar en el eje z_0 . Los ejes x_0 y y_0 se eligen convenientemente para formar un sistema de coordenadas dextrógiro.
Para $i = 1, \dots, n - 1$, realice los pasos 3 a 5.
3. Localizar el origen o_i donde la normal común a z_i y z_{i-1} intersecta z_i . Si z_i intersecta z_{i-1} localice o_i en esta intersección. Si z_i y z_{i-1} son paralelos, localizar o_i en cualquier posición a lo largo de z_i .
4. Establecer x_i largo de la normal común entre z_{i-1} y z_i través o_i , o en la dirección normal al plano $z_{i-1} - z_i$ si z_{i-1} y z_i se cruzan.
5. Establecer y_i para completar un sistema de coordenadas dextrógiro.

6. Establecer el sistema de coordenadas del efector final $o_n x_n y_n z_n$. Asumiendo la articulación enésima es de rotación, establecer $n = a$ a lo largo de la dirección z_{i-1} . Establecer el origen o_n convenientemente a lo largo de z_n , preferiblemente en el centro de la pinza o en la punta de cualquier herramienta que el manipulador pueda llevar. Establecer $y_n = s$ en la dirección del cierre de la pinza y establecer $x_n = n$ como $s \times a$. Si la herramienta no es un pinza simple establezca x_n e y_n convenientemente para formar un sistema de coordenadas dextrógiro.
7. Crear una tabla de parámetros de los eslabones $a_i, d_i, \alpha_i, \theta_i$
- a_i = distancia a lo largo de x_i desde o_i a la intersección de los ejes x_i y z_{i-1}
- d_i = distancia a lo largo de z_{i-1} desde o_{i-1} hasta la intersección de los ejes x_i y z_{i-1} .
- d_i es la variable de la articulación prismática i .
- α_i = ángulo entre z_{i-1} y z_i medido alrededor de x_i (ver Figura 3.3).
- θ_i = ángulo entre x_{i-1} y x_i medido sobre z_{i-1} (ver Figura 3.3). θ_i es la variable de la articulación de rotación i .
8. Formar las matrices de transformación homogénea A_i sustituyendo los parámetros anteriores en (4.10).
9. Formar $T_n^0 = A_1 \dots A_n$. Esto da entonces la posición y orientación del sistema de coordenadas de la herramienta expresadas en coordenadas de la base.

4.3 EJEMPLOS

En la convención DH el único ángulo variable es θ , se simplifica la notación escribiendo c_i para $\cos\theta_i$, etc. También se denotan $\theta_1 + \theta_2$ por θ_{12} , y $\cos(\theta_1 + \theta_2)$ por c_{12} , y así sucesivamente. En los siguientes ejemplos, es importante recordar que la convención DH, aunque sistemática, todavía permite una considerable libertad en

la elección de algunos de los parámetros del manipulador. Esto es particularmente cierto en el caso de ejes de articulación paralelos o cuando las articulaciones prismáticas están involucrados.

4.3.1 MANIPULADOR PLANAR TIPO CODO

Considere el brazo planar de dos eslabones de la figura 4.6. Los ejes de articulación z_0 , z_1 y z_2 son normales a esta página.

Establecemos el sistema de coordenadas base $a_0x_0y_0z_0$ como se muestra. El origen es elegido en el punto de intersección del eje z_0 con la página y la dirección del eje x_0 es completamente arbitraria. Una vez que se estableció el sistema de coordenadas base, el sistema de coordenadas $o_1x_1y_1z_1$ se fija como se muestra en la Convención DH, donde el origen o_1 ha sido localizado en la intersección de z_1 y la página. El sistema de coordenadas final $o_2x_2y_2z_2$ es fijado por la elección del origen o_2 en el extremo del eslabón 2 como se muestra.

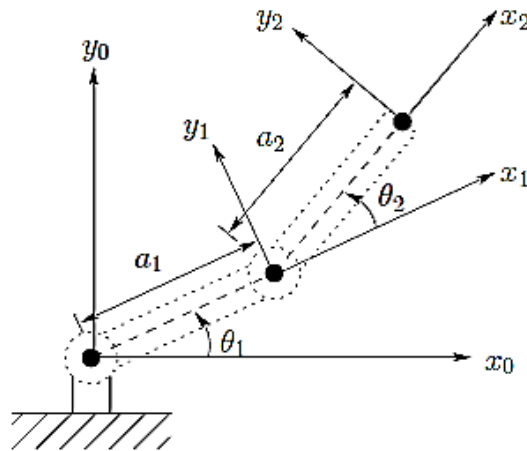


Figura 4.6 Manipulador planar de dos eslabones. El sentido de todos los ejes z apunta hacia afuera de la página, y no se muestran en la figura.

Los parámetros del eslabón se muestran en la Tabla 4.1. Las matrices A se determinan a partir de (4.10) como

Tabla 4.1 Parámetros del eslabón para el manipulador de 2 eslabones

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	0

* Variable

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.23)$$

La matrices T viene dado por

$$T_1^0 = A_1 \quad (4.24)$$

$$T_2^0 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_1 c_1 + a_2 c_{12} \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_1 s_1 + a_2 s_{12} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.25)$$

Tenga en cuenta que las dos primeras entradas de la última columna de T_2^0 son las componentes x e y del origen o_2 en el sistema de coordenadas base; es decir,

$$x = a_1 c_1 + a_2 c_{12} \quad (4.26)$$

$$y = a_1 s_1 + a_2 s_{12}$$

son las coordenadas del efector final en el sistema de coordenadas base. La parte de rotación de T_2^0 da la orientación del sistema de coordenadas $o_2x_2y_2z_2$ relativas al sistema de coordenadas base.

4.3.2 ROBOT CILÍNDRICO DE TRES ESLABONES

Consideremos ahora el robot cilíndrico de tres eslabones representado simbólicamente por la figura 4.7. Nosotros establecemos o_0 como se muestra en la articulación 1. Tenga en cuenta que la localización del origen o_0 a lo largo z_0 , así como la dirección del eje de x_0 son arbitrarias. Nuestra elección de o_0 es la más natural, pero o_0 podría muy bien ser localizado en la articulación 2. El eje x_0 se elige normal a la página. A continuación, desde z_0 y z_1 coinciden, se elige el origen o_1 en la articulación 1 como se muestra. El eje x_1 es normal la página cuando $\theta_1 = 0$, pero, por supuesto, su dirección va a cambiar dado que θ_1 es variable. Desde la intersección de z_2 y z_1 , el origen o_2 se sitúa en esta intersección. Se elige la dirección de x_2 paralela a x_1 de modo que θ_2 es cero.

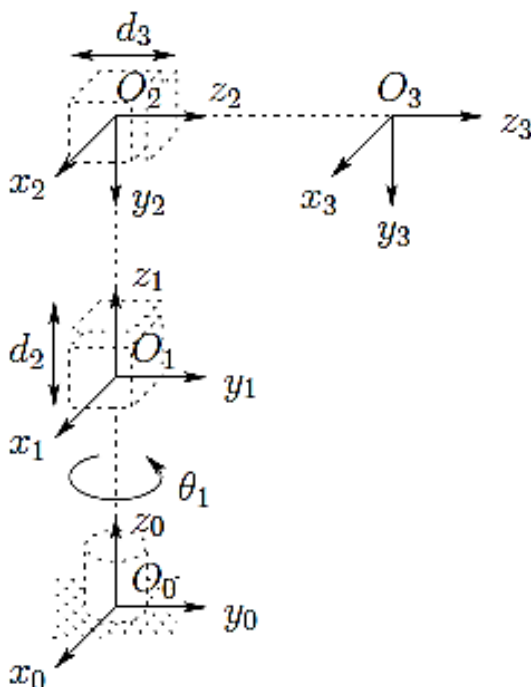


Figura 4.7 Manipulador cilíndrico de tres eslabones.

Tabla 4.2 Parámetros del eslabón para el manipulador cilíndrico de 3 eslabones.

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	d_1	0	0
2	0	d_2^*	0	-90
3	0	d_3^*	0	0

*Variable

Finalmente, se elige el tercer sistema de coordenadas en el extremo del eslabón 3 como se muestra. Los parámetros del eslabón se muestran ahora en la Tabla 4.2. Las correspondientes matrices A y T son

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$T_3^0 = A_1 A_2 A_3 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.28)$$

4.3.3 MUÑECA ESFÉRICA

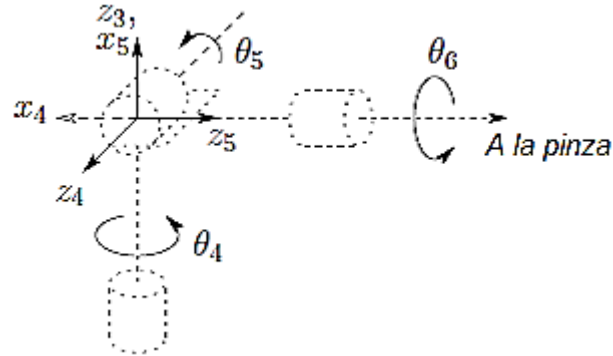


Figura 4.8 Asignación de los sistemas de coordenadas muñeca esférica.

La configuración esférica de la muñeca se muestra en la figura 4.8, en la que los ejes de articulación z_3, z_4, z_5 se cortan en o . Los parámetros de Denavit-Hartenberg se muestran en la Tabla 3.3. El manipulador Stanford es un ejemplo de un manipulador que posee una muñeca de este tipo. De hecho, el siguiente análisis se aplica a casi todas las muñecas esféricas.

Se demuestra ahora que los últimos tres variables articulares, $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ son ángulos de Euler, ϕ, θ, ψ respectivamente, con respecto al sistema de coordenadas $o_3x_3y_3z_3$. Para ver esto, necesitamos sólo calcular

Tabla 4.3 Parámetros de DH para la muñeca esférica.

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
4	θ_4^*	0	0	-90
5	θ_5^*	0	0	90
6	θ_6^*	d_6	0	0

* variable

las matrices A_4, A_5 y A_6 utilizando la tabla 4.3 y la expresión (4.10). Esto da

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Multiplicando estas matrices

$$T_6^3 = A_4 A_5 A_6 = \begin{bmatrix} R_6^3 & o_6^3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.32)$$

$$= \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_6 s_4 - c_4 c_5 s_6 & c_4 s_5 & d_6 c_4 s_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & s_4 s_5 & d_6 s_4 s_5 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La comparación de la parte de rotación R_6^3 de T_6^3 con la transformación ángulo Euler muestra que $\theta_4, \theta_5, \theta_6$ puede de hecho ser identificados como los ángulos de Euler ϕ, θ, ψ y con respecto al sistema de coordenadas $o_3 x_3 y_3 z_3$.

4.3.4 MANIPULADOR CILÍNDRICO CON LA MUÑECA ESFÉRICA

Suponga que ahora le añadimos una muñeca esférica al manipulador cilíndrico de la sección 4.3.2 tal como se muestra en la Figura 4.9.

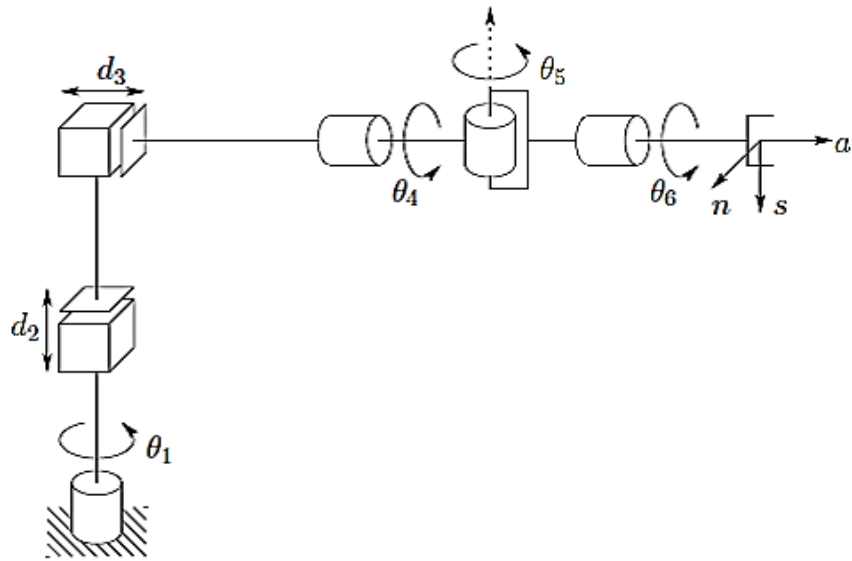


Figura 4.9 Robot cilíndrico con muñeca esférica.

Tenga en cuenta que el eje de rotación de la articulación 4 es paralelo a z_2 y de este modo coincide con el eje Z_3 del ejemplo 4.3.2. La implicación de esto es que podemos combinar inmediatamente las dos expresiones anteriores (4.28) y (4.32) para obtener la cinemática directa como

$$T_6^0 = T_3^0 T_6^3 \quad (4.33)$$

con T_3^0 dada por (4.28) y T_6^3 dada por (4.32). Por lo tanto la cinemática directa de este manipulador se describe por

$$T_6^0 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & -s_1 d_3 \\ s_1 & 0 & c_1 & c_1 d_3 \\ 0 & -1 & 0 & d_1 + d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_4 c_5 c_6 - s_4 s_6 & -c_6 s_4 - c_4 c_5 s_6 & c_4 s_5 & d_6 c_4 s_5 \\ c_4 s_6 + c_5 c_6 s_4 & c_4 c_6 - c_5 s_4 s_6 & s_4 s_5 & d_6 s_4 s_5 \\ -c_6 s_5 & s_5 s_6 & c_5 & d_6 c_5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.34)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde

$$r_{11} = c_6 s_1 s_5 - c_1 (s_4 s_6 - c_4 c_5 c_6)$$

$$r_{21} = -s_1 (s_4 s_6 - c_4 c_5 c_6) - c_1 c_6 s_5$$

$$r_{31} = -c_4 s_6 - c_5 c_6 s_4$$

$$r_{12} = -c_1 (c_6 s_4 + c_4 c_5 s_6) - s_1 s_5 s_6$$

$$r_{22} = c_1 s_5 s_6 - s_1 (c_6 s_4 + c_4 c_5 s_6)$$

$$r_{32} = c_5 s_4 s_6 - c_4 c_6$$

$$r_{13} = c_1 c_4 s_5 - c_5 s_1$$

$$r_{23} = c_1 c_5 + c_4 s_1 s_5$$

$$r_{33} = -s_4 s_5$$

$$d_x = d_6 c_1 c_4 s_5 - d_6 c_5 s_1 - d_3 s_1$$

$$d_y = d_3 c_1 + d_6 c_1 c_5 + d_6 c_4 s_1 s_5$$

$$d_z = d_1 + d_2 - d_6 s_4 s_5$$

Observe cómo la mayor parte de la complejidad de la cinemática directa de los resultados de este manipulador es de la orientación del efector final, mientras que la expresión para la posición del brazo a partir de (3.28) es bastante simple. La suposición de la muñeca esférica no sólo simplifica la derivación de la Cinemática Directa aquí, pero también se reducirá en gran medida el problema de cinemática inversa.

4.3.5 MANIPULADOR STANFORD

En la figura 4.10 se muestra el manipulador Stanford, este es un ejemplo de un manipulador esférico (RRP) con muñeca esférica. Este manipulador tiene un

desplazamiento de la articulación de hombro que ligeramente complica a la cinemática directa e inversa.

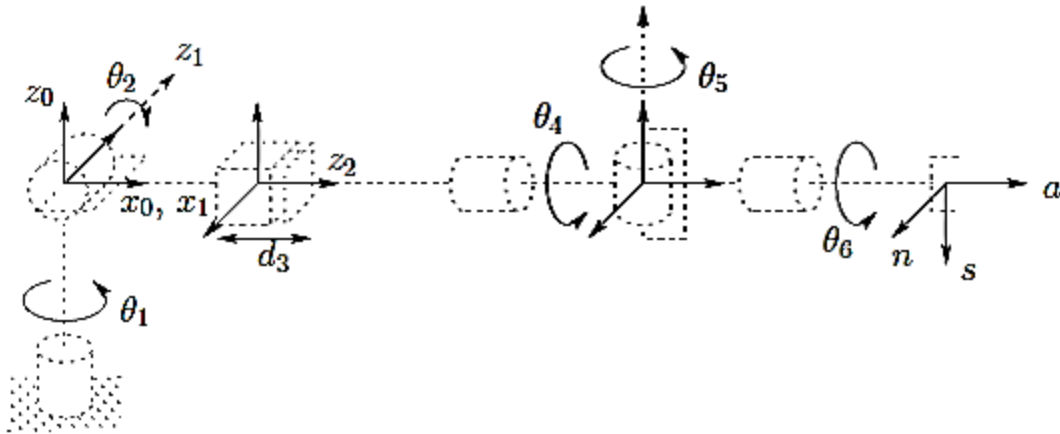


Figura 4.10 Asignación del sistema de coordenadas DH en el manipulador Stanford.

Tabla 4.4 Parámetros DH para manipulador Stanford.

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	0	-90
2	θ_2^*	d_2	0	+90
3	0	d_3^*	0	0
4	θ_4^*	0	0	-90
5	θ_5^*	0	0	+90
6	θ_6^*	d_6	0	0

*variable de la articulación

En primer lugar, se establece el sistema de coordenadas de la articulación usando la convención DH como se muestra. Los parámetros del eslabón se muestran en la Tabla 4.4. Es sencillo calcular las matrices A_i como

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & -s_1 & 0 \\ s_1 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & s_2 & 0 \\ s_2 & 0 & -c_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.36)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.37)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & 0 & -s_4 & 0 \\ s_4 & 0 & c_4 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

$$A_5 = \begin{bmatrix} c_5 & 0 & s_5 & 0 \\ s_5 & 0 & -c_5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.39)$$

$$A_6 = \begin{bmatrix} c_6 & -s_6 & 0 & 0 \\ s_6 & c_6 & c_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

T_6^0 viene dado por

$$T_6^0 = A_1 \dots A_6 \quad (4.41)$$

$$= \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & d_x \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & d_y \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

donde

$$\begin{aligned}
 r_{11} &= -c_6(c_5(s_1s_4 - c_1c_2c_4) + c_1s_2s_5) - s_6(c_4s_1 + c_1c_2s_4) \\
 r_{21} &= -c_6(c_5(c_1s_4 + c_2c_4s_1) - s_1s_2s_5) + s_6(c_1c_4 - c_2s_1s_4) \\
 r_{31} &= s_2s_4s_6 - c_6(c_2s_5 + c_4c_5s_2) \\
 r_{12} &= -s_6(c_5(s_1s_4 - c_1c_2c_4) + c_1s_2s_5) - c_6(c_4s_1 + c_1c_2s_4) \\
 r_{22} &= c_6(c_1c_4 - c_2s_1s_4) - s_6[c_5(c_1s_4 + c_2c_4s_1) - s_1s_2s_5] \\
 r_{32} &= s_6(c_2s_5 + c_4c_5s_2) + c_6s_2s_4 \tag{4.43} \\
 r_{13} &= c_1c_5s_2 - s_5(s_1s_4 - c_1c_2c_4) \\
 r_{23} &= s_5(c_1s_4 + c_2c_4s_1) + c_5s_1s_2 \\
 r_{33} &= c_2c_5 - c_4s_2s_5 \\
 d_x &= d_3c_1s_2 - d_6(s_5(s_1s_4 - c_1c_2c_4) - c_1c_5s_2) - d_2s_1 \\
 d_y &= d_2c_1 + d_6(s_5(c_1s_4 + c_2c_4s_1) + c_5s_1s_2) + d_3s_1s_2 \\
 d_z &= d_6(c_2c_5 - c_4s_2s_5) + d_3c_2 \tag{4.44}
 \end{aligned}$$

4.3.6 MANIPULADOR SCARA

Como otro ejemplo del procedimiento general, considerar el manipulador SCARA de la figura 4.11. Este manipulador, consta de un brazo RRP y una muñeca de un grado de libertad, cuyo movimiento es un giro sobre el eje vertical. El primer paso es localizar y etiquetar los ejes de articulación como se muestra.

Dado que todos los ejes de las articulaciones son paralelos tenemos cierta libertad en la colocación de los orígenes. Los orígenes se colocan como se muestra por conveniencia. Se establece el eje x_0 en el plano de la página como se muestra. Este

es completamente arbitrario y sólo afecta a la configuración cero del manipulador, es decir, la posición del manipulador cuando $\theta_1 = 0$

Los parámetros de la articulación se dan en la Tabla 4.5, y las matrices A son como sigue.

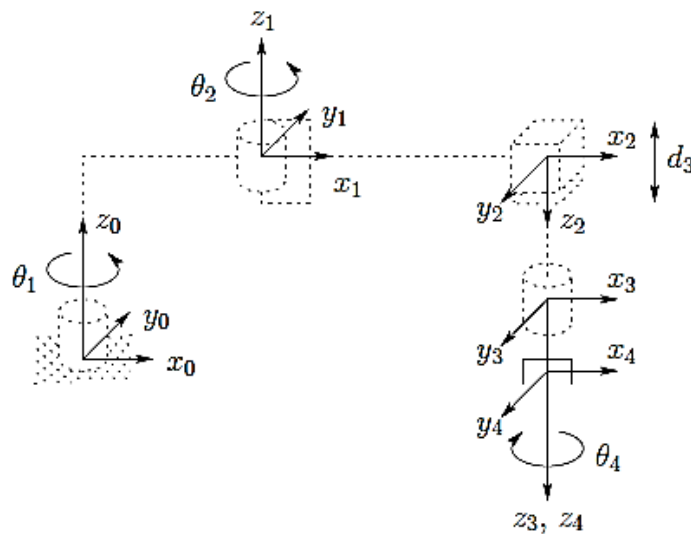


Figura 4.11 Asignación del sistema de coordenadas del manipulador SCARA.

Tabla 4.5: Parámetros DH del manipulador SCARA.

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	180
3	0	d_3^*	0	0
4	θ_4^*	d_4	0	0

*Variable de la articulación

$$A_1 = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c_2 & s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & -c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

$$A_4 = \begin{bmatrix} c_4 & -s_4 & 0 & 0 \\ s_4 & c_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.48)$$

Por tanto, las ecuaciones de la cinemáticas directa vienen dadas por

$$T_4^0 = A_1 \dots A_4 \begin{bmatrix} c_{12}c_4 + s_{12}s_4 & -c_{12}s_4 + s_{12}c_4 & 0 & a_1c_1 + a_2c_{12} \\ s_{12}c_4 - c_{12}s_4 & -s_{12}s_4 - c_{12}c_4 & 0 & a_1s_1 + a_2s_{12} \\ 0 & 0 & -1 & -d_3 - d_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

CAPITULO V

COMPARACION DEL METODO DE DENAVIT- HARTENBERG ESTÁNDAR CON EL MODIFICADO Y MOVIMIENTO GENERAL CONTINUO

5.1 COMPARACIÓN DE LOS MÉTODOS EN UN MECANISMO PLANAR.

5.1.1 MÉTODO DENAVIT – HARTENBERG-ESTÁNDAR [6].

La matriz del brazo del mecanismo de dos grados de libertad desarrollado en la sección 3.2.3.1 utilizando el método de Denavit-Hartenberg estándar, DHs conjuntamente con la figura 5.1, donde se asigna los sistemas de coordenadas a los eslabones, se toma en cuenta para formar los grupos de movimientos que se realizó al sistema de coordenadas móviles esto se resume en cada fila de la tabla de parámetros, según este convenio la secuencia es importante, primero sobre el eje z (rosca en z) y luego sobre el eje x (rosca en x), la notación es: giro alrededor de z , θ , traslación a lo largo de z se denota con d ; traslación a lo largo de x , a , giro alrededor de x , α ; los movimientos en grupos de cuatro se presentan en cada fila en la tabla 5.1.

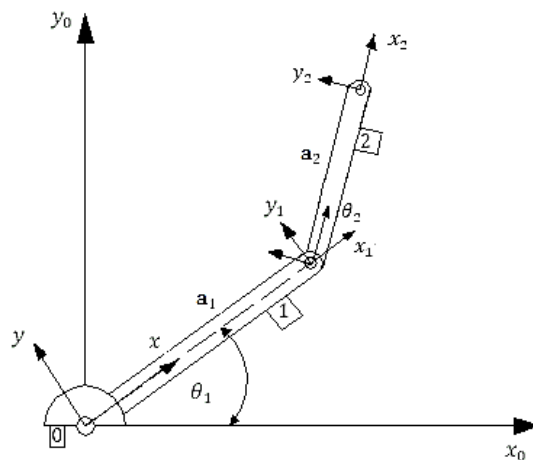


Figura 5.1 Sistemas de coordenadas sobre cada eslabón del mecanismo.

Tabla 5.1 Tabla de parámetros / eslabón, Denavit-Hartenberg estándar.

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	0

La fórmula Denavit-Hartenberg estándar para cada fila de la tabla DH, o grupos de movimientos y la secuencia indicada de acuerdo a la ecuación (4.10) es.

$$A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & a_1 c\theta_1 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & a_1 s\theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_2 c\theta_2 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & a_2 s\theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz del brazo es: ${}^0T_2 = A_1 A_2$

$${}^0T_2 = A_1 A_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.1)$$

Las ecuaciones del movimiento en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.1.2 MÉTODO DENAVIT-HARTENBERG MODIFICADO [5].

La matriz del brazo del mecanismo de dos grados de libertad desarrollado en la sección 3.2.3.2 utilizando el método de Denavit-Hartenberg modificado, DHm conjuntamente con la figura 5.2, donde se asigna los sistemas de coordenadas antes

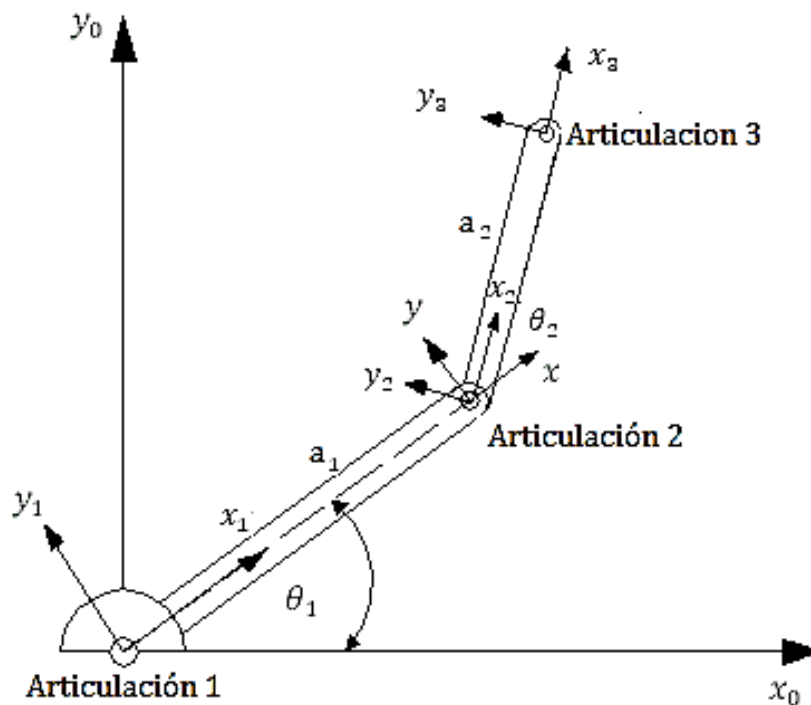


Figura 5.2 Sistemas de coordenadas sobre cada articulación del mecanismo.

y después de una articulación, se toma en cuenta para formar los grupos de movimientos que se realizó al sistema de coordenadas móviles sobre una articulación esto se resume en cada fila de la tabla de parámetros, según este convenio la secuencia es primero sobre el eje x (rosca en x) y luego sobre el eje z (rosca en z), la notación es: giro alrededor de x , α , traslación a lo largo de x , a , giro alrededor de z , θ , traslación a lo largo de z se denota con d ; los movimientos en grupos de cuatro se presentan en cada fila en la tabla 5.2.

Tabla 5.2 Tabla de parámetros Denavit-Hartenberg modificado

Articulación	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1^*	0
2	0	a_1	θ_2^*	0
3	0	a_2	0	0

La fórmula Denavit-Hartenberg modificado [5], para cada fila de la tabla DH, o grupos de movimientos y la secuencia indicada de acuerdo a la ecuación.

$$A_i = R_{x_{i-1}, \alpha_{i-1}} \cdot T_{x_{i-1}, a_{i-1}} \cdot R_{z, \theta_i} \cdot T_{z, d_i}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.2)$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & a_1 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz del brazo es: ${}^0T_3 = A_1A_2A_3$

$${}^0T_3 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3)$$

Las ecuaciones del movimiento en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_3 \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

5.1.3 MÉTODO MOVIMIENTO GENERAL CONTINUO.

La matriz del brazo del mecanismo de dos grados de libertad desarrollado en la sección 3.2.3.3 utilizando el método de Movimiento General continuo, MGc conjuntamente con la figura 5.3, donde se asigna los sistemas de coordenadas a los eslabones, siguiendo la cadena cinemática de forma continua sin formar grupos como en los otros dos métodos se presentan en la tabla 5.3.

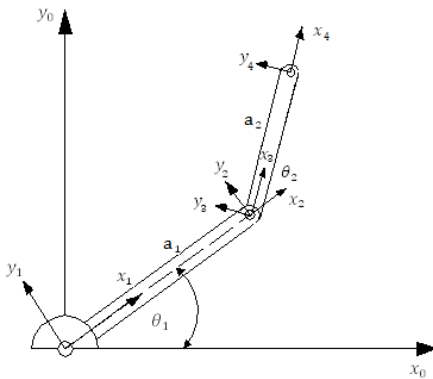


Figura 5.3 Sistemas de coordenadas continuos.

Tabla 5.3 Tabla de parámetros movimiento continuo.

Movimiento	θ_1^*	a_1	θ_2^*	a_2
------------	--------------	-------	--------------	-------

Utilizando el principio de la post-multiplicación matricial, que dice: el producto de matrices en el mismo orden de los movimientos, se tiene la matriz de transformación homogénea del brazo 0T_4 .

$${}^0T_4 = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Las ecuaciones del movimiento en notación matricial:

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = {}^0T_2 \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ y_0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2c_{12} + a_1c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2s_{12} + a_1s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Comparando las ecuaciones (5.1), (5.3), (5.4), se demuestra que los resultados son idénticos, siguiendo los tres métodos de Denavit-Hartenberg estándar, modificado y el método general del movimiento.

5.2 COMPARACION DE LOS METODOS EN UN MECANISMO ESPACIAL.

5.2.1 MÉTODO DENAVIT-HARTENBERG ESTÁNDAR

Denavit y Hartenberg organizaron la secuencia de movimientos en grupos de cuatro para pasar por el eslabón i , desde el sistema de coordenadas $(i - 1)$ al siguiente sistema coordenadas i , es decir los movimientos necesarios realizados en el eslabón, este método de asignación de los sistemas de coordenadas se debe Denavit y Hartenberg y actualmente se le conoce como DH estándar, ver figura 5.4.

Todos los movimientos realizados al sistema de coordenadas móvil son presentados de una manera formal en grupos de cuatro, los que se realizaron sobre un eslabón i , los mismos que se indican en cada fila de la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg en la tabla 5.1.

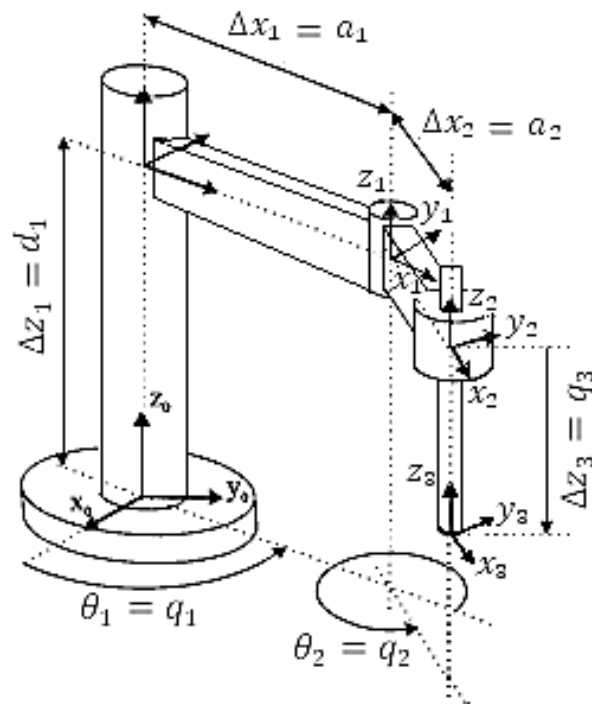


Figura 5.4 Asignación de los sistemas de coordenadas Denavit-Hartenberg estándar.

Los parámetros de cada fila de la tabla corresponden a la secuencia de movimientos que se realizaron al sistema de coordenadas en el eslabón i , estos parámetros y variables señaladas con asterisco se remplazan en la fórmula de la matriz de transformación de coordenadas A_i , también conocida como fórmula de Denavit Hartenberg estándar, ecuación 5.31.

Tabla 5.1 Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg estándar

Eslabón i	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	d_1	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	0
3	0	$-q_3^*$	0	0

$$A_i = R_{z,\theta} T_{z,d_i} \cdot T_{x,a_i} \cdot R_{x,\alpha_i}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\cos \alpha_i \sin \theta_i & \sin \alpha_i \sin \theta_i & a_i \cos \theta_i \\ \sin \theta_i & \cos \alpha_i \cos \theta_i & -\sin \alpha_i \cos \theta_i & a_i \sin \theta_i \\ 0 & \sin \alpha_i & \cos \alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación homogénea H se obtiene multiplicando las matrices de transformación de coordenadas A_i , a este resultado se le conoce como matriz de transformación homogénea del brazo y se denota con 0T_3 o con H . Obsérvese que la matriz A_i se le puede denotar también como ${}^{i-1}A_i$, es lo mismo, nos da mayor información, es la matriz de transformación de coordenadas entre el sistema $S\{i\}$ y el sistema $S\{i-1\}$, como se indica en la ecuación 5.34.

$$H = {}^0T_3 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 & 0 & a_1 \cos \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & a_1 \sin \theta_1 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\sin \theta_2 & 0 & a_2 \cos \theta_2 \\ \sin \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & a_2 \sin \theta_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

5.2.2 MÉTODO DENAVIT-HARTENBERG MODIFICADO

En este método de Denavit-Hartenberg modificado la secuencia de los movimientos se agrupan en grupos de cuatro, similar al anterior método estándar, aquí la diferencia está al formar grupos de cuatro movimientos para pasar la articulación i desde el sistema de coordenadas $S\{i-1\}$ hasta el sistema $S\{i\}$, ver figura 5.5.

Todos los movimientos realizados al sistema de coordenadas móvil son presentados de una manera formal en grupos de cuatro, dos movimientos rotación y traslación en x_{i-1} antes de pasar la articulación y otros dos movimientos en z_i después de pasar la articulación i , estos se indican en cada fila de la tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg modificada en la tabla 5.2.

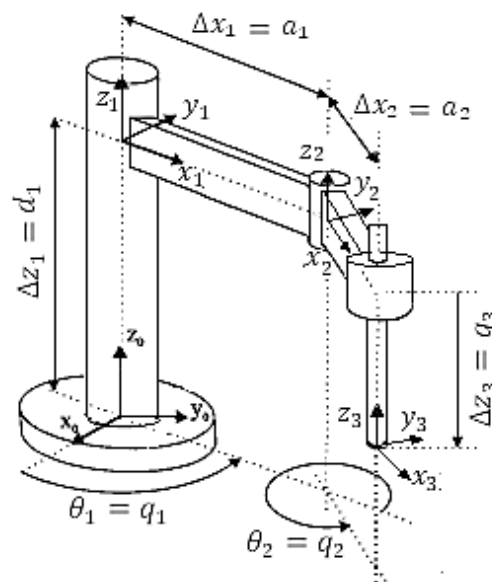


Figura 5.5 Asignación sistemas de coordenadas Denavit-Hartenberg modificado

Los parámetros de cada fila de la tabla corresponden a la secuencia de movimientos que se realizaron al sistema de coordenadas para pasar la articulación i , note la diferencia con el estándar, la secuencia de movimientos primero en el eje x luego en el eje z, estos parámetros y variables señaladas con asterisco de cada fila se rempazan en la fórmula de la matriz de transformación de coordenadas A_i , también conocida como fórmula de Denavit Hartenberg modificada.

Tabla 5.2 Tabla de parámetros de Denavit-Hartenberg modificada

Articulación i	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1^*	d_1
2	0	a_1	θ_2^*	0
3	0	a_2	0	$-q_3^*$

$$A_i = R_{x_{i-1}, \alpha_{i-1}} \cdot T_{x_{i-1}, a_{i-1}} \cdot R_{z, \theta_i} \cdot T_{z, d_i}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \theta_i & -\text{sen} \theta_i & 0 & a_{i-1} \\ \text{sen} \theta_i \cos \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \cos \alpha_{i-1} & -\text{sen} \alpha_{i-1} & -d_i \text{sen} \alpha_{i-1} \\ \text{sen} \theta_i \text{sen} \alpha_{i-1} & \cos \theta_i \text{sen} \alpha_{i-1} & \cos \alpha_{i-1} & d_i \cos \alpha_{i-1} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación homogénea H se obtiene multiplicando las matrices de transformación de coordenadas A_i , a este resultado se le conoce como matriz del brazo y se denota con 0T_3 o con H . Obsérvese que la matriz A_i se le puede denotar también como ${}^{i-1}A_i$, es la matriz de transformación de coordenadas entre el sistema $S\{i-1\}$ y el sistema $S\{i\}$, y se indica a continuación.

$$H = {}^0T_3 = {}^0A_1 \cdot {}^1A_2 \cdot {}^2A_3$$

$${}^0A_1 = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\text{sen} \theta_1 & 0 & 0 \\ \text{sen} \theta_1 & \cos \theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^1A_2 = \begin{bmatrix} \cos \theta_2 & -\text{sen} \theta_2 & 0 & a_1 \\ \text{sen} \theta_2 & \cos \theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$${}^2A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos(\theta_1) \\ \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \text{sen}(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \text{sen}(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

5.2.3 METODO MOVIMIENTO GENERAL CONTINUO.

En el mecanismo de la figura 5.6 se puede observar la secuencia de movimientos del sistema de coordenadas móviles siguiendo la cadena cinemática de los eslabones articulados, desde el sistema 0 hasta 3.

Multiplicando las matrices en el mismo orden de los movimientos se obtiene la matriz de transformación homogénea H del brazo articulado.

Movimiento General continuo	R_{z,θ_1}	T_{z,d_1}	T_{x,a_1}	R_{z,θ_2}	T_{x,a_2}	T_{z,q_3}
Parámetros	θ_1^*	d_1	a_1	θ_2^*	a_2	q_3^*

$$H = R_{z,\theta_1} \cdot T_{z,d_1} \cdot T_{x,a_1} \cdot R_{z,\theta_2} \cdot T_{x,a_2} \cdot T_{z,q_3}$$

$$R_{z,\theta_1} \cdot T_{z,d_1} \cdot T_{x,a_1} = \begin{bmatrix} c\theta_1 & -s\theta_1 & 0 & 0 \\ s\theta_1 & c\theta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

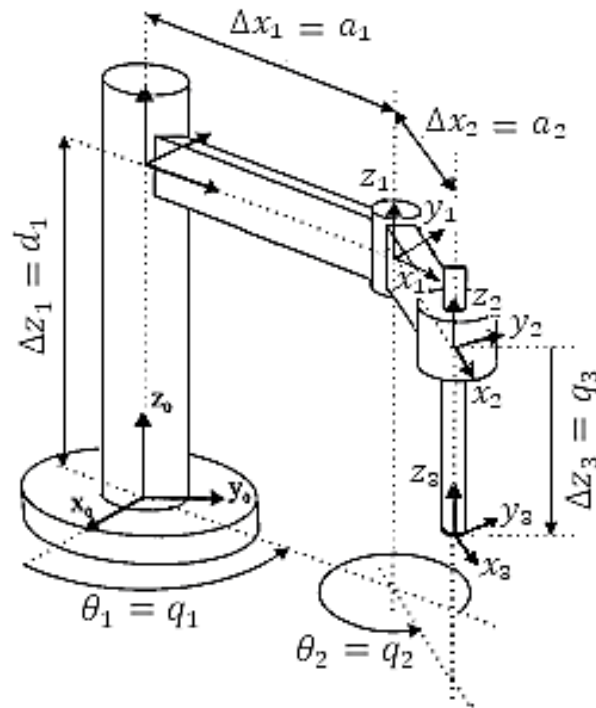


Figura 5.6 Sistemas de coordenadas en el robot SCARA, siguiendo la secuencia de movimientos.

$$R_{z,\theta_2} T_{x,a_2} T_{z,q_3} = \begin{bmatrix} c\theta_2 & -s\theta_2 & 0 & 0 \\ s\theta_2 & c\theta_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a_2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$H = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \cos(\theta_1) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & a_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) + a_1 \sin(\theta_1) \\ 0 & 0 & 1 & d_1 - q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Comparando las ecuaciones (5.5), (5.6), (5.7), se demuestra que los resultados son idénticos, siguiendo los tres métodos de Denavit-Hartenberg estándar, modificado y el método del Movimiento General continuo.

CAPITULO VI

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

6.1 CONCLUSIONES

En la presente investigación se confirmó el principio de la postmultiplicación y la premultiplicación matricial que es la base fundamental del método matricial de la robótica, lo cual permite plantear las ecuaciones del movimiento en una cadena cinemática abierta conformada por eslabones y articulaciones que son típicamente la configuraciones de los robots manipuladores.

El principio de la postmultiplicación dice: si los movimientos del sistema de coordenadas son con respecto a los ejes del último sistema de coordenadas móviles, entonces el producto de matrices es en la misma secuencia de dichos movimientos.

El principio de la premultiplicación dice: si los movimientos del sistema de coordenadas móviles son respecto al sistema fijo, entonces el producto de matrices es secuencia inversa a los movimientos.

En el método de Denavit-Hartenberg estándar se asigna el sistema de coordenadas i sobre la línea de eje de la articulación $i + 1$, ver Figura 6.1, en este caso se toma en cuenta los movimientos realizados al sistema de coordenadas móviles y se forma grupos de cuatro movimientos, estos movimientos se resume en cada fila de la tabla de parámetros, según este convenio es importante la secuencia, primero sobre el eje z (*rosca en z*) y luego sobre el eje x (*rosca en x*), la notación es: rotación alrededor de z , θ , traslación a lo largo de z , d ; traslación a lo largo de x , a , rotación alrededor de x , α ; con estos cuatro movimientos se forman las filas que indica de la tabla de parámetros, si uno de estos movimientos no es necesario realizar se llena con cero, como se muestra en la tabla 6.1.

El término *rosca en z* o *rosca en x* significa que se tiene dos movimientos uno de rotación y el otro de traslación y que avanza a lo largo del correspondiente eje.

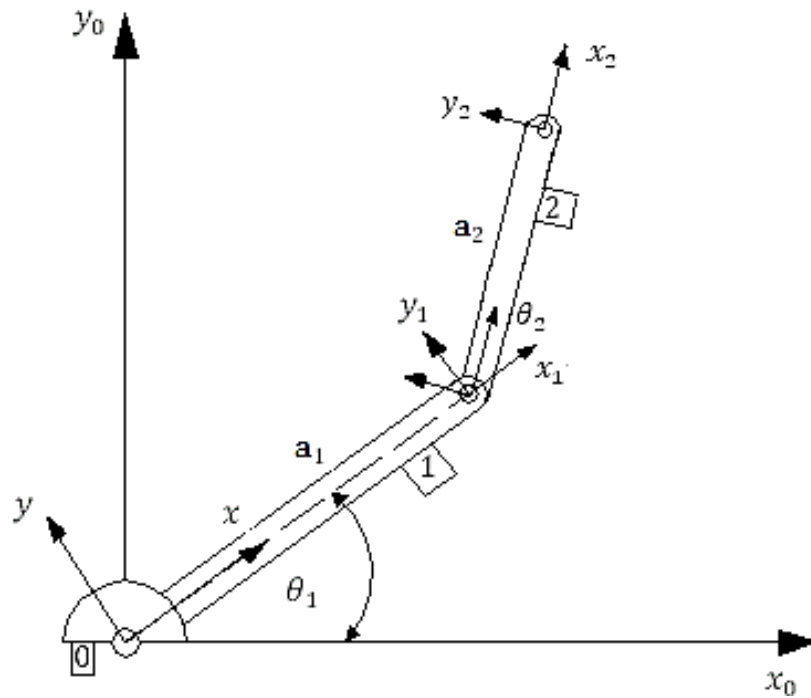


Figura 6.1 Asignación de sistemas de coordenadas sobre los eslabones.

Tabla 6.1 Tabla de parámetros de los eslabones.

Eslabón	θ_i	d_i	a_i	α_i
1	θ_1^*	0	a_1	0
2	θ_2^*	0	a_2	0

La secuencia de los movimientos de este método estándar es:

$$A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i},$$

y la fórmula de la matriz de transformación homogénea para cada fila es:

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i c\alpha_i & s\theta_i s\alpha_i & a_i c\theta_i \\ s\theta_i & c\theta_i c\alpha_i & -c\theta_i s\alpha_i & a_i s\theta_i \\ 0 & s\alpha_i & c\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

En el método de Denavit-Hartenberg modificado, se asigna al sistema de coordenadas i sobre la línea de eje de la articulación i , ver figura 6.2, se toma en cuenta para formar los grupos de movimientos que se realizó al sistema de coordenadas móviles sobre el eslabón $i - 1$, según este convenio la secuencia es primero sobre el eje x (rosca en x) y luego sobre el eje z (rosca en z), la notación es: giro alrededor de x , α , traslación a lo largo de x , a , giro alrededor de z , θ , traslación a lo largo de z , d ; ver tabla 6.2.

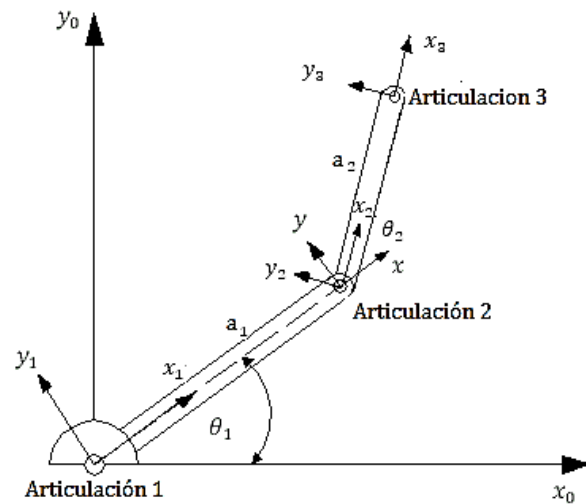


Figura 6.2 Asignación de coordenadas sobre las articulaciones.

Tabla 6.2 Tabla de parámetros / Articulación

Articulación	α_{i-1}	a_{i-1}	θ_i	d_i
1	0	0	θ_1^*	0
2	0	a_1	θ_2^*	0
3	0	a_2	0	0

La fórmula Denavit-Hartenberg modificada para cada fila de la tabla DH, o grupos de movimientos y la secuencia es $A_i = R_{x_{i-1}, \alpha_{i-1}} \cdot T_{x_{i-1}, a_{i-1}} \cdot R_{z, \theta_i} T_{z, d_i}$

$$A_i = \begin{bmatrix} c\theta_i & -s\theta_i & 0 & a_{i-1} \\ s\theta_i c\alpha_{i-1} & c\theta_i c\alpha_{i-1} & -s\alpha_{i-1} & s\alpha_{i-1} d_i \\ s\theta_i s\alpha_{i-1} & c\theta_i s\alpha_{i-1} & c\alpha_{i-1} & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El método de Movimiento General continuo, MGc; asigna los sistemas de coordenadas como se puede ver en la figura 6.3, siguiendo la cadena cinemática de forma continua sin formar grupos como en los otros dos métodos, la secuencia de movimientos se presentan en la tabla 6.3.

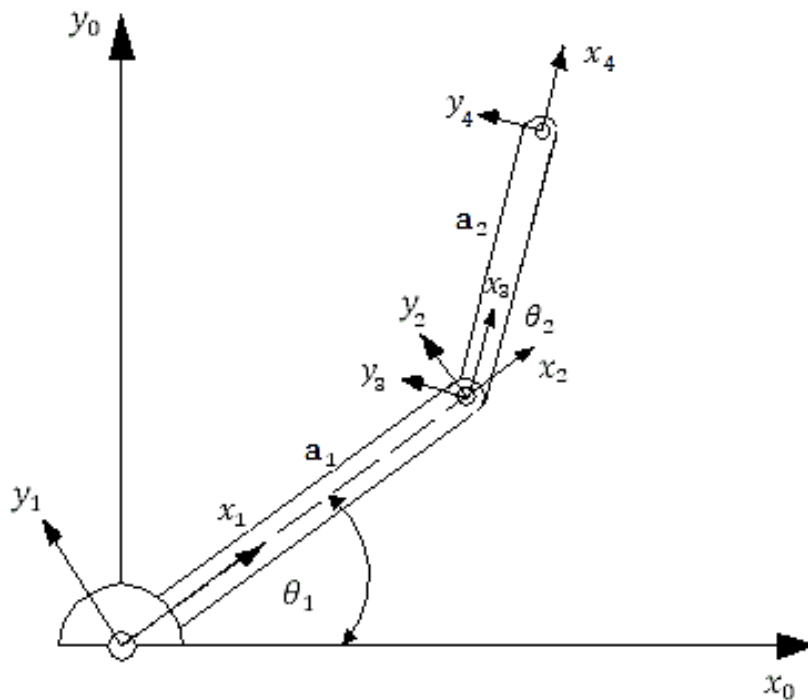


Figura 6.3 Sistemas de coordenadas continuos.

Tabla 6.3 Tabla de parámetros movimiento continuo.

Movimiento	θ_1^*	a_1	θ_2^*	a_2
------------	--------------	-------	--------------	-------

Utilizando el concepto fundamental del producto de matrices en la misma secuencia de los movimientos se obtienen las ecuaciones del movimiento de los mecanismos

de eslabones articulados, para el caso de la tabla 6.3 la matriz de transformación homogénea resultante del brazo es: $H = R_{z,\theta_1} \cdot T_{x,a_1} \cdot R_{z,\theta_2} \cdot T_{x,a_2}$

6.2 RECOMENDACIONES

En robótica se debe reconocer la importancia que tiene el modelo matricial planteado por Denavit-Hartenberg para encontrar las ecuaciones del movimiento en cadenas cinemáticas abiertas que son típicas en los robot articulados, esta es la base de la cinemática directa e indirecta, así como también para la dinámica de los mismos.

Algunas recomendaciones a seguir al emplear el modelo matricial de la robótica se presentan a continuación:

La secuencia de los movimientos del sistema de coordenadas móvil, se realiza siguiendo al mecanismo desde el eslabón fijo hasta el efector final; recuerde que los movimientos de rotación o traslación pueden ser representados en el mundo virtual de la simulación a través de matrices de rotación y traslación respectivamente, y si se tiene movimientos compuestos, estos pueden ser remplazados por matrices compuestas que no son más que el resultado del producto matricial.

En los productos matriciales se tiene que ser cuidadoso, pues si los movimientos de los sistemas de coordenadas son con respecto al último sistema de coordenadas móvil entonces se tiene que realizar el producto de matrices en la misma secuencia de los movimientos, así se obtienen la fórmulas de Denavit-Hartenberg estándar y modificada.

Denavit & Hartenberg estándar. La secuencia de movimientos para pasar sobre un eslabón es, $A_i = R_{z,\theta_i} T_{z,d_i} T_{x,a_i} R_{x,\alpha_i}$,

Denavit & Hartenberg modificada. La secuencia de movimientos para pasar sobre una articulación es, $A_i = R_{x_{i-1},\alpha_{i-1}} \cdot T_{x_{i-1},a_{i-1}} \cdot R_{z,\theta_i} T_{z,d_i}$, y el resultado del producto de estas cuatro matrices en esta misma secuencia nos da la fórmula:

Si los movimientos de los sistemas de coordenadas móviles son con respecto al sistema de coordenadas fijo entonces se tiene que realizar el producto de matrices en secuencia inversa de los movimientos, así por ejemplo se obtiene la fórmulas RPY, primer movimiento γ roll (balanceo), 2 movimiento β pitch (inclinación), y tercer movimiento α yaw (orientación), $R_{RPY(\gamma,\beta,\alpha)} = R_{z0,\alpha}R_{y0,\beta}R_{x0,\gamma}$

Finalmente se recomienda seguir investigando y desarrollando la aplicación del método Movimiento General continuo MGc planteado en el presente trabajo a la cinemática directa indirecta y dinámica de brazos de robot. En este método se utiliza el mismo concepto del producto de matrices en el mismo orden de los movimientos, considerando en este producto todos los movimientos, esto implica de todo el mecanismo, no en tramos como lo hace los otros dos métodos, de tal manera de obtener la matriz de transformación homogénea del brazo directamente, el resultado del producto de todas las matrices nos da la matriz $H=^0T_n$.

BIBLIOGRAFIA

1. Balasubramanian, R. (2011). The Denavit Hartenberg Convention. USA: Robotics Insitute Carnegie Mellon University

2. Barrientos A. Peñin L. Balaguer C. Aracil R. (1997). Fundamentos de Robótica. España: Ed. Mc Graw Hill
3. Corke, P. (1996). Robotics TOOLBOX. Australia: CSIRO
4. Corke, P. (2014). Robotics TOOLBOX. Australia: CSIRO
5. Craig, J. (2005). Introduction to robotics mechanics and control. 3rd edition. USA: PEARSON Prentice Hall.
6. Fu K., Gonzalez R., Lee C,. Robotica..Control, detención, visión e inteligencia.España: Ed. Mc Graw Hill.
7. Jochheim A. Gerke M. Bischoff A. (1999). Modeling and simulation of kinematic systems. Alemania: University of Hagen.
8. Mabie, H. (1987). Mechanism and Dynamics of Machinery. USA: John Wiley & Son.
9. Marghithu D. (2009) Mechanisms and Robots Analysis with MATLAB. USA: Ed. Springer.
10. Miranda. J. (2003). Mecanismos. México: Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey.
11. Ollero A. (2001). Robotica,manipuladores y robots moviles. España: Ed Marcombo.
12. Sandler B. (1999). ROBOTICS Designing the Mechanisms for Automated Machinery. USA: Ed Ben Gurion of the Negev, Beersheva, Israel.
13. Santos V. (2004). Robótica Industrial. Portugal: Universidad de Aveiro.
14. Shigley, J. Uicker Jr. J. (). Teoría De Maquinas Y Mecanismos. Mexico: Ed. Mc Graw Hill.
15. Spong, M. Hutchinson, S. Vidyasagar, M. (2004). Robot Dynamics and Control. USA: ED. John Wiley & Sons, Inc.
16. Vinogradov, O. (2000). Fundamentals of Kinematics and Dynamics of Machines and Mechanisms. USA..CRC Press.
17. http://en.wikipedia.org/wiki/Denavit%E2%80%93Hartenberg_parameters
18. http://datateca.unad.edu.co/contenidos/299012/Protocolo_Robotica_Avanzada.pdf
19. <http://isa.umh.es/assignaturas/rvc/>

20. <http://proton.ucting.udg.mx/materias/robotica/>
21. http://petercorke.com/Toolbox_software.html
22. <http://www.petercorke.com/RVC/>
23. <http://www.cs.cmu.edu/~rapidproto/mechanisms/chpt4.html#toc>