

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA

**DISEÑO DE ESTRUCTURAS TIPO CÁSCARA BASADAS EN
MATERIALES COMPUESTOS LAMINARES, UTILIZANDO EL
MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MÁSTER EN MATERIALES
DISEÑO Y PRODUCCIÓN**

ING. JOSÉ FERNANDO OLMEDO SALAZAR
jolmedo@espe.edu.ec

DIRECTOR: VÍCTOR H. GUERRERO, Ph.D.

QUITO, 21 DE ABRIL DEL 2008

DECLARACIÓN

Yo, Ing. José Fernando Olmedo Salazar, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría, que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional, y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Ing. José Fernando Olmedo Salazar

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por el Ing. José Fernando Olmedo Salazar, bajo mi supervisión.

Víctor H. Guerrero Ph.D.
DIRECTOR DE TESIS

AGRADECIMIENTOS

A Dios creador del universo y dueño de nuestras vidas.

A mis padres, sin cuyo esfuerzo, no hubiera alcanzado jamás, ningún peldaño en la vida.

A mi esposa e hijos, por su amor ilimitado, comprensión y apoyo incondicionales.

A los profesores de la Maestría de la Facultad de Ingeniería Mecánica de la Escuela Politécnica Nacional, por compartir sus conocimientos.

Un reconocimiento especial al Dr. Víctor Hugo Guerrero, por su asesoramiento, dedicación y paciencia.

A mi gran amigo Luis Echeverría que desinteresadamente comparte sus habilidades informáticas.

DEDICATORIA

Dedico este trabajo a mi esposa Fanny y a mis pequeños hijos Carla y Gabriel que en cada momento me enseñan la belleza de la vida.

CONTENIDO

CONTENIDO.....	v
RESUMEN.....	x
PRESENTACIÓN.....	xi
1. CAPÍTULO 1: INTRODUCCIÓN A LOS MATERIALES COMPUESTOS...	1
1.1. MATERIALES COMPUESTOS.....	1
1.2. DISEÑO DE PIEZAS CON MATERIALES COMPUESTOS.....	5
1.3. UTILIZACIÓN DE COMPUESTOS EN EL ECUADOR.....	6
1.4. OBJETIVOS.....	9
1.4.1. OBJETIVO GENERAL.....	9
1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	9
1.5. ALCANCE.....	9
REFERENCIAS.....	11
2. CAPÍTULO 2: MICROMECAÁNICA Y MACROMECAÁNICA DE LOS COMPUESTOS LAMINADOS	12
2.1. CLASIFICACIÓN DE LAS LÁMINAS.....	12
2.2. MICROMECAÁNICA DE LOS COMPUESTOS.....	13
2.2.1. DETERMINACIÓN DEL MODULO DE FLEXIBILIDAD LONGITUDINAL E_1	15
2.2.2. DETERMINACIÓN DEL MODULO TRANSVERSAL E_2	16
2.2.3. MODULO DE CIZALLAMIENTO G_{12}	18
2.2.4. DETERMINACIÓN DEL MODULO DE POISSON ν_{12}	19
2.3. MACROMECAÁNICA DE LA LÁMINA DE MATERIAL COMPUESTO..	21
2.3.1. MATRIZ DE FLEXIBILIDAD.....	22
2.3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ.....	25
2.3.3. TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS PARA UNA LÁMINA DE ORIENTACIÓN ARBITRARIA.....	27
2.3.4. RELACION ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS EN UN MATERIAL ORTOTRÓPICO	31
2.3.5. FORMA INVARIANTE DE \bar{Q}	32
2.3.6. FORMA INVARIANTE DE LA MATRIZ DE FLEXIBILIDAD PARA EL ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS.....	34
2.3.7. EJEMPLO DE APLICACIÓN.....	35
2.3.8. EJEMPLO DE APLICACIÓN CON ANSYS.....	40
REFERENCIAS.....	45
3. CAPÍTULO 3: ANÁLISIS DE LAMINADOS	46

3.1. LAMINADOS.....	46
3.2. TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADOS.....	47
3.2.1. RELACIONES CARGA - DEFORMACIÓN Y MOMENTO-CURVATURA EN UN LAMINADO.....	52
3.2.2. DEFORMACIONES Y CURVATURAS DEL PLANO MEDIO.....	57
3.2.3. EJEMPLO DE APLICACIÓN.....	58
3.3. TEORÍA DE PLACAS DE MINDLIN – REISSNER.....	65
REFERENCIAS.....	72
4. CAPÍTULO 4: ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS DE COMPUESTOS LAMINADOS.....	73
4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....	73
4.2. HOMOGENIZACIÓN.....	76
4.3. CONDICIONES DE EQUILIBRIO.....	77
4.4. FÓRMULACIÓN DEL ELEMENTO FINITO POR EL MÉTODO DE LA ENERGÍA.....	79
4.4.1. PRINCIPIO DE LA ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA.....	79
4.5. FUNCIONES DE FORMA.....	82
4.6. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO – DEFORMACIÓN.....	89
4.6.1. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO DEFORMACIÓN DE EXTENSIÓN.....	91
4.6.2. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO DEFORMACIÓN DE FLEXIÓN.....	92
4.6.3. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO DEFORMACIÓN DE CORTE.....	93
4.7. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO.....	94
4.8. EJEMPLO DE APLICACIÓN.....	104
4.9. CÓDIGOS COMERCIALES PARA ANÁLISIS CON ELEMENTOS FINITOS.....	112
4.10. SELECCIÓN DEL SOFTWARE	115
REFERENCIAS.....	116
5. CAPÍTULO 5: TEORÍAS DE FALLA	117
5.1. MODOS DE FALLA DE MATERIALES COMPUESTOS.....	117
5.2. CRITERIOS ASOCIADOS A LOS MODOS INDEPENDIENTES DE FALLA.....	121
5.2.1. TEORÍA DE MÁXIMO ESFUERZO.....	121
5.2.2. CRITERIO DE MÁXIMA DEFORMACIÓN.....	123
5.3. CRITERIOS DE FALLA POLINOMIALES.....	125
5.3.1. CRITERIO DE FALLA DE TSAI-HILL.....	125

5.3.2. CRITERIO DE FALLA DE HOFMAN.....	127
5.3.3. CRITERIO DE FALLA DE TSAI-WU.....	128
REFERENCIAS.....	131
6. CAPÍTULO 6: METODOLOGÍA PARA LA APLICACIÓN DE ANSYS EN EL ANÁLISIS	
DE COMPUESTOS LAMINADOS.....	132
6.1. GENERALIDADES DE ANSYS.....	132
6.2. SELECCIÓN DEL ELEMENTO APROPIADO PARA MODELAR MATERIALES COMPUESTOS.....	138
6.2.1. ELEMENTO TIPO MEMBRANA LINEAL ESTRATIFICADA (SHELL99).....	139
6.2.2. ELEMENTO TIPO MEMBRANA NO LINEAL ESTRATIFICADA (SHELL91).....	143
6.2.3. ELEMENTO MEMBRANA DE DEFORMACIÓN DE 4 NODOS (SHELL 181).....	144
6.2.4. ELEMENTO SÓLIDO ESTRATIFICADO TRIDIMENSIONAL (SOLID 186).....	145
6.2.5. ELEMENTO SÓLIDO ESTRATIFICADO TRIDIMENSIONAL (SOLID 46).....	146
6.2.6. ELEMENTO SÓLIDO ESTRATIFICADO (SOLID 191)	146
6.2.7. ELEMENTO TIPO MEMBRANA SÓLIDA ESTRATIFICADA (SOLSH 190).....	147
6.2.8. VIGAS TRIDIMENSIONALES (BEAM 188/189).....	148
6.3. MODELAMIENTO DEL MATERIAL Y CONFIGURACIÓN DE CAPAS.....	148
6.4. ESTRATIFICACIÓN DE CAPAS.....	154
6.5. VERIFICACIÓN DE DATOS DE ENTRADA.....	155
6.6. CRITERIOS DE FALLA.....	157
REFERENCIAS.....	160
7. CAPÍTULO 7: ANÁLISIS Y DISEÑO DE UNA ESTRUCTURA TIPO CÁSCARA CONSTRUIDA CON COMPUESTOS LAMINADOS.....	161
7.1. CONCURSO FÓRMULA SAE.....	161
7.2. TIPOS Y EVOLUCIÓN DEL CHASIS.....	162
7.3. CHASIS DE UN PROTOTIPO FÓRMULA SAE.....	166
7.4. MODELADO DEL CHASIS.....	167
7.4.1. MODELADO SUPERFICIAL DEL CHASIS.....	173
7.5. SOLICITACIONES A LAS QUE SE SOMETE EL CHASIS.....	182
7.5.1. CARGAS DE TORSIÓN.....	182
7.5.2. CARGAS DE FLEXIÓN.....	184
7.5.3. FRENADA BRUSCA.....	184
7.5.4. ACELERACIÓN MÁXIMA.....	187
CURVA.....	188

7.5.5. TORQUE DEL MOTOR.....	190
7.6. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES COMPUESTOS A UTILIZAR.....	191
7.6.1. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL LAMINADO.....	194
7.6.2. DETERMINACIÓN DEL ESPESOR DEL LAMINADO.....	200
7.7. MODELO DEL PROTOTIPO DE FÓRMULA SAE EN ANSYS.....	200
7.7.1. PREPROCESADO, IMPORTACIÓN ELEMENTOS Y MATERIALES.....	200
7.7.2. PREPROCESADO, RESTRICCIONES Y FUERZAS.....	212
7.7.3. ETAPA DE SOLUCIÓN.....	216
7.7.4. POSTPROCESADO.....	216
7.8. REDISEÑO CON FIBRA DE CARBONO EN MATRIZ EPÓXICA.....	220
7.8.1. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL LAMINADO CON FIBRA DE CARBONO Y EPOXI.	220
OBTENCIÓN Y MODIFICACIÓN DEL ARCHIVO DB LOG FILE	224
7.8.2. ESTRATIFICACIÓN DE LÁMINAS.....	231
7.8.3. VERIFICACIÓN DE DATOS INGRESADOS.....	237
7.8.4. ANÁLISIS DE MASAS.....	239
7.8.5. ANÁLISIS DE ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA.....	240
7.8.6. ESFUERZOS INTERLAMINARES.....	244
7.9. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS A LA FLEXIÓN, DEBIDO AL PESO DEL PILOTO Y MOTOR.....	246
7.9.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA.....	248
7.9.2. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES PARA LA FLEXIÓN.....	249
7.10. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS A LA FRENADA BRUSCA.....	250
7.10.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA.....	252
7.10.2. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES.....	254
7.11. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS A LA ACELERACIÓN MÁXIMA.....	254
7.11.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA	257
7.11.2. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES.....	258
7.11.3. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS EN UNA CURVA.....	258

7.11.4.	DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA.....	260
7.11.5.	DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES.....	261
7.12.	DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS AL TORQUE PRODUCIDO POR EL MOTOR.....	262
7.12.1.	DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIOS DE FALLA....	263
7.12.2.	DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES....	264
7.13.	RESUMEN.....	265
	REFERENCIAS.....	267
	CAPÍTULO 8: CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....	268
	ANEXOS.....	270

RESUMEN

La presente tesis, busca resolver el problema que supone el análisis de piezas complejas hechas a base de materiales compuestos y está articulada básicamente en desarrollos teóricos y prácticos. Los materiales compuestos combinan las propiedades de sus constituyentes, aprovechando sus ventajas y compensando sus defectos. Son materiales que al combinar su baja densidad, su resistencia a la corrosión y sus buenas propiedades de resistencia mecánica y rigidez, posibilitan un abanico de aplicaciones en diversos campos industriales.

Los capítulos 1, 2 y 3 se encargan del marco teórico previo que define y permiten entender la mecánica de los compuestos. Dentro de la mecánica de los compuestos se parte de la unidad fundamental que es la lámina y se converge al laminado, formado por la estratificación de láminas. La mecánica de un laminado se basa en dos teorías básicas que son la teoría de Kirchhoff y la teoría de placas de Mindlin – Reissner.

Puesto que la teoría presentada no permite resolver más que geometrías simples se hace necesario acudir al método de los elementos finitos. En el capítulo 4 se revisa la teoría de elementos finitos basada en el principio de energía potencial mínima y su aplicación en los compuestos, que permite determinar la matriz de rigidez del elemento finito y se plantea un sencillo problema, para entender el concepto de ensamblaje de varios elementos. Las complejidades verificadas aquí, llevan a la conclusión, de que la manera práctica de resolver un problema de análisis de una estructura hecha con compuestos es por medio de una herramienta computarizada adecuada. Es importante determinar que niveles de esfuerzos puede soportar un elemento estructural sin perder su funcionalidad lo que conduce al estudio de las teorías de falla en el capítulo 5.

Los capítulos 6 y 7 se encargan de ejemplificar la resolución de un problema estructural mediante Ansys para lo cual se escogió un chasis monocasco proveniente de una competición de los ámbitos universitarios que es la fórmula SAE. Para ello se diseñan las superficies del mencionado chasis y utilizando las hipótesis de carga típicas para estos prototipos se procede a determinar desplazamientos, esfuerzos y criterios de falla para cada una de las hipótesis. Los resultados obtenidos dan la certeza de que se puede utilizar con confianza este programa para resolver cualquier tipo de problema que involucre materiales compuestos.

PRESENTACIÓN

La tesis que se presenta en este documento, realizada dentro del programa de Maestría de Materiales, Diseño y Producción de la Escuela Politécnica Nacional, lleva por título “Diseño de Estructuras tipo Cáscara Basadas en Materiales Compuestos Laminados, utilizando el Método de Elementos Finitos “. El trabajo desarrollado en esta tesis forma parte de la actividad de investigación desarrollada por la Facultad de Ingeniería Mecánica de la EPN y es un trabajo dirigido por el Dr. Víctor Guerrero.

Las tareas que se han realizado son: Seleccionar las herramientas informáticas de elementos finitos que son capaces de analizar piezas hechas en materiales compuestos, estudiar los mecanismos que gobiernan la micromecánica y macromecánica de láminas y laminados, estudiar las teorías que gobiernan la falla en materiales compuestos, estudiar las particularidades correspondientes del método de los elementos finitos aplicados a materiales compuestos, seleccionar una pieza relativamente compleja y capaz de ser fabricada con materiales compuestos para ser analizada y lograr las competencias mínimas necesarias para utilizar con éxito la herramienta informática seleccionada.

Luego de mucho esfuerzo y dedicación se ha logrado alcanzar los objetivos de la tesis y ha sido verdaderamente gratificante trabajar con la ayuda del Dr. Víctor Guerrero en el mencionado proyecto.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN A LOS MATERIALES COMPUESTOS

El presente capítulo describe los materiales compuestos, sus aplicaciones y la importancia de estos materiales en la industria automotriz por la disminución del peso de los autos que conlleva. Adicionalmente se hace un comentario sobre la aplicación de los compuestos en el Ecuador y la importancia de contar con métodos

de diseño computarizado para analizar piezas hechas con materiales compuestos debido al volumen de cálculo involucrado. Finalmente se relata los objetivos y el alcance de la presente tesis.

1.1. MATERIALES COMPUESTOS

Un material compuesto se caracteriza por tener dos o más materiales constituyentes o fases con una significativa diferencia en su comportamiento macroscópico y una clara interfaz entre cada constituyente. Los materiales compuestos existen desde hace miles de años. Uno de los primeros usos de materiales compuestos se remonta al año 1500 AC, cuando los artesanos egipcios desarrollaron por primera vez el material denominado “plywood”, enlazando capas finas de madera para construir los ataúdes de los faraones. De manera similar, egipcios, mayas e incas usaban fibras vegetales para reforzar ladrillos y argamasas. El refuerzo del concreto con varillas de acero es otro ejemplo de material compuesto utilizado hasta la actualidad.

Los materiales compuestos son bastante comunes en la naturaleza. Los huesos de los mamíferos, por ejemplo, están formados de 50% de fibrillas de colágeno, alta cantidad de polisacáridos, glicoproteínas y apatita embebidas en hidroxiapatito; igual sucede con la queratina que forma el tejido muscular o el tejido leñoso de las gimnospermas, etc. Desde el punto de vista del diseño mecánico, los “composites” son materiales de ingeniería que combinan fibras o partículas embebidas en una matriz soportante polimérica, metálica, cerámica o de carbono, siendo los de matriz polimérica los que abarcan la gran mayoría de las aplicaciones.

Con el desarrollo de la física del estado sólido, que predecía la posibilidad de obtener cristales libres de impurezas con resistencias mecánicas de más de un millón de psi. y enormes módulos de elasticidad, estos composites empezaron a captar la atención de la industria y hoy son materiales de ingeniería comunes que se utilizan para varias aplicaciones. Por ejemplo, en la industria aeronáutica el Boeing 777 incorpora un 20% en materiales compuestos, lo que equivale a 8400 kg del peso total.

Usualmente, las propiedades de un composite se encuentran entre los valores individuales de los constituyentes, e inclusive pueden ser dramáticamente mejores que cualquiera de estos. El potencial de tal sinergia es una razón del tremendo interés en los composites.

La industria automotriz es una de las que mayor interés ha puesto en los materiales compuestos. El reemplazo de los paneles estructurales de acero y aluminio del cuerpo y chasis de un auto por materiales compuestos ofrece un 68% de reducción en peso, lo que resulta en un ahorro del 40% en consumo de combustible. Otro

punto a favor de los materiales compuestos es la reducción en la complejidad constructiva de un vehículo, ya que apenas se requiere de 1/5 del número de componentes utilizados actualmente ^[1.1]. Esto se debe a que con estos materiales se puede desarrollar formas más complejas y se necesitan menos uniones, como se puede apreciar en el asombroso método constructivo indicado en la figura 1.1.

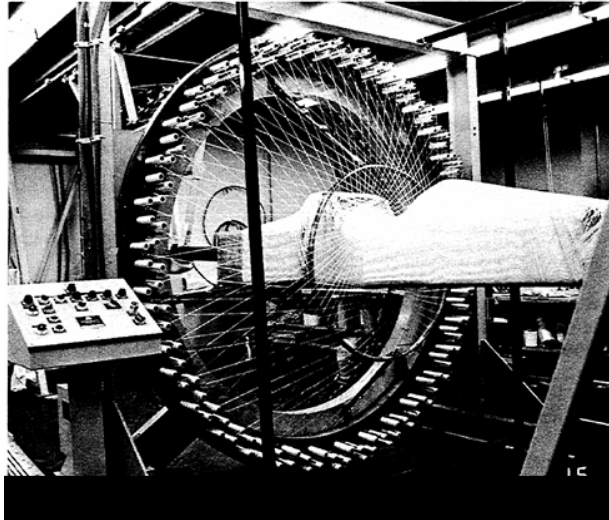


Figura 1.1. Máquina de trenzar controlada por computador, en el proceso de formar el monocasco de un auto de competencia. ^[1.2]

La principal dificultad que todavía hace inviable la fabricación en masa de autos con composites, es la utilización intensiva del estratificado manual que eleva los costos, así como los tiempos de curado excesivamente largos. Por ello muchos investigadores están replanteando la manufactura de los vehículos. Un concepto consiste en usar paneles planos tipo sándwich, luego cortarlos con ruteadoras industriales CNC y finalmente ensamblarlos (figura 1.2).

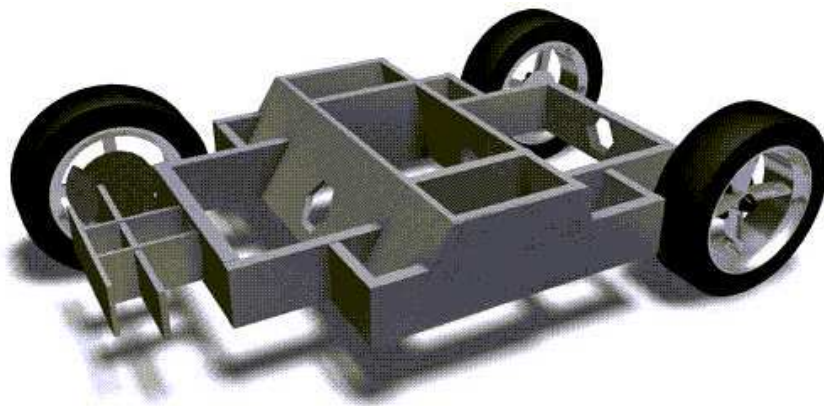


Figura 1.2. Concepto de diseño, "Unicar", utilizando paneles alveolares. ^[1.3]

En vista de la crisis energética mundial que se avecina, el uso de materiales compuestos es tomado muy en cuenta en otras latitudes, en la construcción de autos por ejemplo, debido al ahorro de combustible que supone. Muestra de esto se lo puede ver en la empresa brasileña de microautos urbanos **Obvio!**, desarrollado conceptualmente por la Pontificia Universidad Católica de Rio de Janeiro (figura 1.3), auto que usa bioetanol y apenas pesa 700 kg.



Figura 1.3. Micro-auto Obvio 828.^[1.4]

Actualmente no solo se construye la carrocería en materiales compuestos, sino también otros elementos como asientos (figura 1.4), cajas de engranajes (figura 1.5), ballestas para autos y camiones (figura 1.6), ejes de transmisión, etc.



Figura 1.4. Asiento de fibra de carbono / matriz epóxica del auto deportivo Porsche Carrera GT, que tiene un peso de apenas 10 kg. [1.5]



Figura 1.5. Carcasa de engranajes de un auto F1, en plástico reforzado con fibra de carbono (CFRP). [1.6]



Figura 1.6. Ballesta transversal de la suspensión delantera independiente del Corvette C5 fabricada con fibra de carbono y epoxi. [1.7]

En el campo de las aplicaciones comerciales, los materiales compuestos se usan intensivamente en varios implementos deportivos como cañas de pescar, botes, raquetas de tenis, bicicletas (figura 1.7), cascos (figura 1.8), etc. Como puede apreciarse, la libertad en el diseño que se consigue con estos materiales es sorprendente.



Figura 1.7. Bicicleta en compuesto reforzado con fibra de carbono, desarrollada por la firma italiana Pinarello. [1.8]



Figura 1.8. Casco de motociclista en material compuesto reforzado con fibra de carbono, desarrollada por la firma HJC Helmets. [1.9]

1.2. DISEÑO DE PIEZAS CON MATERIALES COMPUESTOS

La mayoría de aplicaciones de materiales compuestos involucra estructuras de tipo membrana. Estas usan la piel externa del objeto para soportar la carga. Un ejemplo de tales estructuras se tiene en alas de aviones, palas de aerogeneradores, ductos, estructuras automotrices monocasco, cascos de botes, que se encuentran solicitadas a tensiones complejas (choque, impacto, cargas cíclicas).

El diseño de este tipo de estructuras que involucran superficies tridimensionales sean de materiales tradicionales o materiales compuestos, implica obligatoriamente algún método de diseño computarizado, ya que los métodos disponibles de análisis manual están restringidos a geometrías simples. Uno de los más extendidos es el que usa el método de los elementos finitos y que en la práctica significa la utilización de software que facilite el volumen de cálculo necesario.

En los materiales compuestos esto es ineludible, debido a que no solo se diseña la estructura, sino también el material. Es decir, se determina el número de láminas y la orientación de las fibras en el compuesto, que den las propiedades mecánicas adecuadas según la dirección de la carga.

Actualmente el estado del arte en materiales compuestos es la selección de la fibra correcta y su adecuada orientación para optimizar el producto. Por ello, uno de los aspectos necesarios para tomar ventaja de estos materiales es la aplicación con criterio de modernas herramientas informáticas para automatizar el cálculo y analizar apropiadamente cualquier aplicación construida en base de composites. Por ejemplo, el chasis de un auto de Fórmula 1 (figura 1.9) involucra una estructura con

más de 500 láminas cortadas en formas diferentes que deben ser estratificadas manualmente en un molde. En este diseño se debe balancear continuamente el requerimiento peso vs. rigidez.

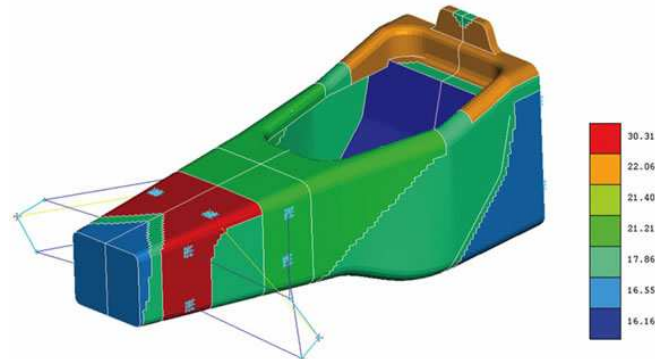


Figura 1.9. Optimización del espesor de la celda de seguridad del piloto de un Fórmula 1, usando el software "Genesis". [1.10]

1.3. UTILIZACIÓN DE COMPUESTOS EN EL ECUADOR

En el país no se ha incursionado profundamente en el tema de los materiales compuestos y tampoco se ha explotado su potencial, si bien se los viene utilizando en forma artesanal y empírica, sin mayor reflexión sobre su optimización y análisis. Ejemplos se lo puede encontrar a lo largo y ancho del país, especialmente en microempresas dedicadas al "tuning" de autos y también en lugares tan remotos como a orillas del río Coca, donde se pueden encontrar pequeños talleres dedicados a la fabricación de canoas en fibra de vidrio.

Hubo eso sí un intento de desarrollo en este campo cuando la empresa ensambladora AYMESA empezó a producir en 1978 un sedán de dos puertas, con carrocería de poliéster reforzado con fibra de vidrio. Era el auto **Cóndor** (figura 1.10), cuyos soportes superiores del sistema de amortiguación se conectaban directamente con la fibra de vidrio, soportando así cargas localizadas y demostrando la fortaleza de este material. Actualmente las empresas carroceras son las que más utilizan las construcciones en fibra de vidrio.



Figura 1.10. Sedán Cóndor de 1978.^[1.11]

Más avances en la aplicación de materiales compuestos se los encuentra en centros militares como el CIDFAE (Centro de Investigación y Desarrollo de la Fuerza Aérea Ecuatoriana) en el cual se realiza reemplazos y reparaciones en aeronaves y helicópteros con composites, utilizando fibra de vidrio, kevlar y fibra de carbono.

La Brigada de Aviación del Ejército 15-BAE también cuenta con una instalación destinada a efectuar diversas construcciones con materiales compuestos, como por ejemplo:

- Reparación de diferentes membranas estructurales de los helicópteros como cubre-motores (figura 1.11), cubre-transmisiones, etc.
- Construcción de aletas estabilizadoras, empenajes, etc.
- Reparación de aspas de helicópteros.

La tecnología que emplean es la construcción tipo sándwich, es decir el uso de paneles tipo panal o alveolares como material central, tejidos de fibra de vidrio como capa de protección exterior y resina epóxica como matriz; también utilizan espumados como material central.



Figura 1.11. Cubre-motor en reparación del helicóptero PUMA, fotografía tomada en los talleres del 15-BAE.

Ante estas circunstancias, las personas que están ligadas al mundo académico tienen la obligación de lanzar iniciativas que devengan en un incremento del acervo técnico y tecnológico del país. En el área de materiales compuestos se puede encontrar aplicaciones en un sinnúmero de campos, tales como energía eólica, prótesis, recreación, automotriz, carrocerías, etc.

Adicionalmente, otras razones que justifican este proyecto son:

- Divulgar estrategias y procedimientos que permitan disminuir el tiempo de diseño de productos construidos en materiales compuestos, fomentando de esta manera la aplicación de estos materiales.
- Incentivar el uso de software de elementos finitos en la resolución de problemas de Ingeniería, específicamente del software ANSYS, debido a que es indudablemente uno de los programas más importantes utilizado por ingenieros y diseñadores en un amplio abanico de industrias y aplicaciones, ocupa el puesto 122 en el ranking mundial del software técnico.
- Al haber escogido como elemento de aplicación una carrocería de un auto de competencia Fórmula SAE, se tiene la intención de dar un primer paso para iniciar el diseño completo de un prototipo, que lleve a incursionar en competencias interuniversitarias.

1.4. OBJETIVOS

El presente proyecto, plantea los siguientes objetivos:

1.4.1. OBJETIVO GENERAL

Formular un procedimiento para analizar estructuras de materiales compuestos utilizando el método de los elementos finitos y llevar a cabo una aplicación práctica, en una estructura tipo membrana, que se analiza utilizando un paquete comercial de elementos finitos de propósito general.

1.4.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Exponer la caracterización micromecánica de los materiales compuestos y la mecánica de láminas y laminados en base a la teoría disponible.
- Detallar las diversas teorías de falla, correspondientes a los materiales compuestos.
- Detallar las particularidades que las técnicas del método de los elementos finitos presentan para resolver problemas con los materiales compuestos.
- Detallar la metodología y seleccionar los elementos especializados disponibles en el software comercial de propósito general seleccionado, para analizar materiales compuestos.
- Seleccionar una aplicación ingenieril, que involucre la utilización de membranas, fabricadas en materiales compuestos.

1.5. ALCANCE

La presente tesis inicia con una revisión de los conceptos fundamentales de los materiales compuestos, tales como la micromecánica y la macromecánica, así como una revisión de las principales teorías de falla, las cuales sirven para comparar las tensiones actuantes en la carrocería de un auto con la resistencia del material y garantizar de esta manera que no exista degradación o rotura del elemento.

Posteriormente se detallan algunas de las particularidades del método de los elementos finitos, aplicados a materiales compuestos, indicando como se obtiene la matriz de elasticidad para un elemento rectangular tipo placa de cuatro nodos y cinco grados de libertad en cada nodo, utilizando el modelo discreto de Mindlin -

Reissner. Un conocimiento adecuado de este t3pico permite utilizar de manera profesional cualquier software de elementos finitos en el an3lisis de piezas basadas en materiales compuestos.

Luego de esta etapa introductoria, el trabajo se concentra, en primer lugar, en las particularidades que posee el software comercial seleccionado, orientadas al an3lisis de materiales compuestos, para luego, en forma pormenorizada, ejemplificar una aplicaci3n pr3ctica con una estructura tipo membrana. Se detalla el procedimiento a seguir con el programa, de tal manera que, siguiendo los pasos indicados, el lector pueda abordar cualquier otra aplicaci3n.

Se ha seleccionado el chasis monocasco de un auto de carreras monoplaza f3rmula "SAE Mini Indy", al que se someter3 a las hip3tesis de carga propias de estos modelos. El dise1o de este elemento es parte de un proyecto de mayor alcance y de gran inter3s acad3mico ya que los prototipos de esta categor3a, dise1ados y contruidos por estudiantes y profesores universitarios de varios pa3ses del mundo compiten anualmente en lo que inicialmente era un certamen de universidades estadounidenses. El inter3s se debe al convencimiento de que los cert3menes universitarios en cualquier campo del conocimiento contribuyen, de manera importante, al desarrollo de las competencias profesionales de los estudiantes.

REFERENCIAS

- 1.1. Whitfield, Kermit, *Building the future.*, <http://www.autofielguide.com/articles/110104.html>
- 1.2. Committee on Materials Science and Engineering, the Solid State Sciences Committee and the National Materials Advisory Board, National Research Council, *Research Opportunities and Functional Roles of Materials*, http://www.nap.edu/html/materials_and_man/0309039282/HTML/74-109.HTML
- 1.3. S. Milton and S.M. Grove, *Composite Sandwich Panel Manufacturing Concepts for a Lightweight Vehicle Chassis*, <http://www.tech.plym.ac.uk/sme/innovation/chass.pdf>
- 1.4. Environmentally friendly microsport cars designed in Rio de Janeiro, <http://www.obvio.ind.br/obviona/012.htm>
- 1.5. Sara Black & Dale Brosius, *SPE Automotive Composites Conference October2004* .<http://www.fiberforge.com/DOWNLOADS/CompositesTechnologyOct04.pdf>
- 1.6. John Barnard, *Gearbox Case Design*. (2001). <http://www.grandprix.com/ft/ftpw017.html>
- 1.7. Corvette: Year by Year, <http://www.web-cars.com/corvette/1997-3.php>
- 1.8. Bikes Pinarello, http://www.pinarello.com/main_eng.php
- 1.9. HJC Helmets, <http://www.hjchelmets.com/>
- 1.10. Pamela J. Waterman, *The Life of Composite Materials, A multi-layered sequence of engineered materials and design resources*, <http://www.deskeng.com/articles/aaaedt.htm>
- 1.11. The chevette photo gallery, <http://www.chevettes.com/about.php>
- 1.12. Wainwright, S. y Biggs, W. (1980). *Diseño mecánico en organismos* Madrid: H.Blume Ediciones

CAPÍTULO 2

MICROMECAÁNICA Y MACROMECAÁNICA DE LOS COMPUESTOS LAMINADOS

El presente capítulo presentará en primer lugar un resumen de los modelos matemáticos que se utilizan para entender teóricamente las propiedades de los materiales compuestos. A continuación se obtendrá el comportamiento de una lámina fabricada con estos materiales cuando se somete a cargas en diferentes direcciones. Se conoce como lámina a la unidad fundamental estructural de material compuesto de geometría plana o curva, mientras que un laminado es una secuencia de láminas estratificadas o apiladas una sobre otra. Finalmente se ejemplificará el análisis de una lámina, tanto en forma manual como con el software Ansys para efectuar un análisis comparativo. Conocer el fundamento teórico de la mecánica de láminas y laminados servirá tanto para sustentar todo el desarrollo matemático que conducirá luego al análisis de composites utilizando el método de los elementos finitos, como también permitirá generar apropiadamente los datos que deben ser ingresados al software especificado.

2.1. CLASIFICACIÓN DE LAS LÁMINAS

Los materiales compuestos están formados por un material de fase uniforme continua, llamado matriz, que rodea a la fase discontinua. Según la fase discontinua, los composites pueden ser:

Compuesto reforzado con partículas: Se caracteriza porque se compone de partículas suspendidas en una matriz. Las partículas pueden tener virtualmente cualquier forma, tamaño o configuración, con esto se logran propiedades uniformes en toda la masa del compuesto.

Ejemplo: Caucho en poliestireno para cámaras fotográficas.

Compuesto reforzado con fibras cortas: Las fibras cortas pueden estar orientadas aleatoriamente o en forma unidireccional. El reforzamiento aleatorio produce compuestos aproximadamente isotrópicos. Se habla de isotropía cuando un elemento presenta propiedades iguales en todas las direcciones y posiciones.

Ejemplo: Poliéster reforzado con fibra de vidrio utilizado en paneles de automóviles.

Compuesto reforzado con fibras largas: Estas fibras pueden ser unidireccionales o tejidas y los composites multicapas se refieren a los laminados. La respuesta del

material es generalmente ortotrópica y su comportamiento depende de la dirección de las cargas respecto a las fibras. Las propiedades de un material ortotrópico son diferentes en tres planos mutuamente perpendiculares.

Ejemplo: Epóxico reforzado con fibra de carbono utilizado en alas de aviación.

El presente estudio se centrará únicamente en los compuestos reforzados con fibras largas unidireccionales o tejidas, debido a que el elemento a ser analizado es un elemento estructural sometido a cargas significativas.

2.2. MICROMECAÍNICA DE LOS COMPUESTOS

La existencia de una gran variedad de parámetros, que brindan la flexibilidad para sintonizar un diseño para cada aplicación, significa que el diseño y el análisis para composites son más complejos que los correspondientes para materiales tradicionales. La explotación de las ventajas que ofrecen los materiales compuestos requiere una comprensión de la mecánica de estos materiales a múltiples niveles. El estudio de la mecánica de los materiales compuestos ofrece una aproximación analítica, cuyo objetivo es la caracterización de los materiales compuestos en los niveles micro y macromecánico.

La micromecánica analiza la relación entre las propiedades de un material compuesto y las propiedades y proporciones de sus constituyentes. Aquí se analiza en detalle la interacción de los constituyentes. Dentro de la micromecánica se emplean dos modelos de mecánica de materiales, denominados la “regla de las mezclas” y la “regla modificada de las mezclas”.

La regla de las mezclas es el modelo más simple e intuitivo. Un volumen representativo de una lámina consta de tres regiones distintas: fibra (f), matriz (m) y vacíos (v) (figura 2.1).

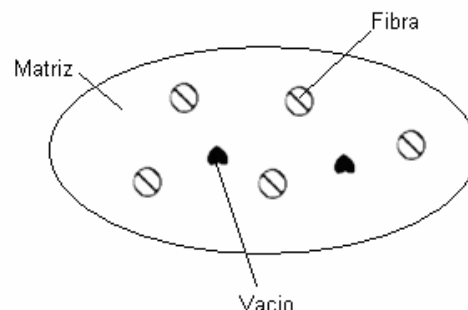


Figura 2.1. Estructura de un material compuesto al nivel micro.^[2.1]

La masa total (M) y el volumen (V) son $M = M_f + M_m$ y $V = V_f + V_m + V_v$, respectivamente, donde los subíndices f, m, v se refieren a las fibras, la matriz y los

vacíos. Dividiendo las masas y volúmenes individuales por la masa y volúmenes totales se obtienen las fracciones másicas y volumétricas, definidas por:

$$m_m + m_f = 1 \quad \text{y} \quad v_m + v_f + v_v = 1 \quad (2.1)$$

donde $m_f = M_f / M$, $m_m = M_m / M$, $v_f = V_f / V$, $v_m = V_m / V$, $v_v = V_v / V$, representan las fracciones indicadas. La fracción volumétrica de la fibra satisface la relación $0 < v_f < 1$ y es usualmente 0.5 o mayor. Igual característica cumple la fracción volumétrica de la matriz.

Cuando la fracción de vacíos es despreciable, se obtiene (2.2):

$$v_m = 1 - v_f \quad (2.2)$$

Adicionalmente la masa total es (2.3):

$$M = \rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m \quad (2.3)$$

La densidad de la lámina se calcula mediante (2.4):

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{\rho_f \cdot V_f + \rho_m \cdot V_m}{V} = \rho_f \cdot v_f + \rho_m \cdot v_m \quad (2.4)$$

La fracción volumétrica se relaciona con la másica mediante (2.5):

$$v_f = \frac{V_f}{V} = \frac{\frac{M_f}{\rho_f}}{\frac{M}{\rho}} = \frac{\rho}{\rho_f} \cdot m_f \quad \quad v_m = \frac{\rho}{\rho_m} \cdot m_m \quad (2.5)$$

A continuación se detalla la manera de calcular las constantes elásticas de un compuesto reforzado con fibras continuas unidireccionales, las cuales se utilizan para elementos estructurales. Este cálculo se usará para caracterizar el comportamiento estructural de la lámina y dar pautas para el diseño de composites.

2.2.1. DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE ELASTICIDAD LONGITUDINAL E_1

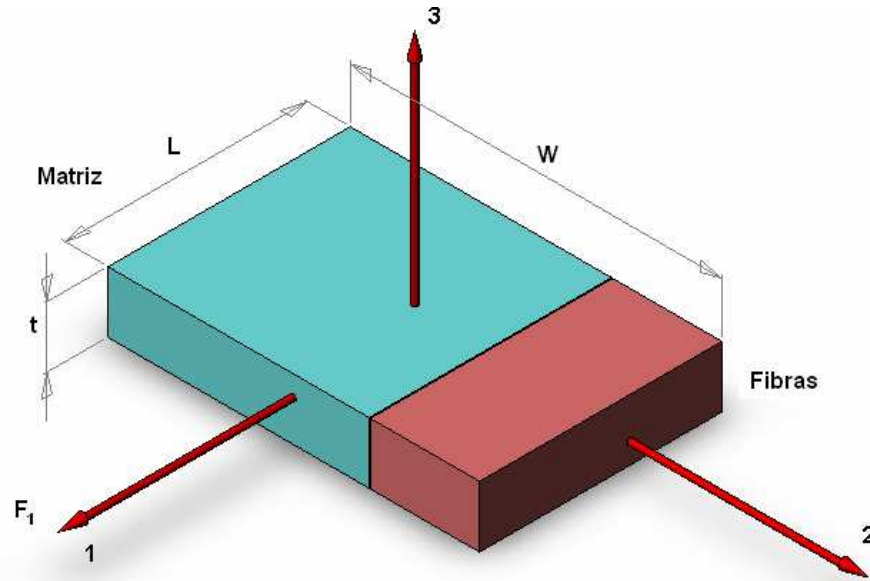


Figura 2.2. Volumen representativo para determinar el módulo E_1 .

El modelo de la figura 2.2 se denomina modelo de deformación constante y sirve para determinar el módulo longitudinal del compuesto a lo largo de las fibras. El eje 1 corresponde a la dirección longitudinal, el eje 2 a la dirección transversal y el 3 a la dirección a través del espesor. Se supone que ambos materiales son isotrópicos, homogéneos y linealmente elásticos, con constantes E_f , ν_f , G_f y E_m , ν_m , G_m . El elemento está sometido a la fuerza F_1 en la dirección de las fibras, a lo largo del eje longitudinal. La fuerza se distribuye en la superficie como:

$$F_1 = \sigma_1 A \quad (2.6)$$

A es la sección total. Parte de la fuerza es absorbida por las fibras y parte por la matriz.

$$\sigma_1 A = A_f \sigma_{f1} + A_m \sigma_{m1} \quad (2.7)$$

donde los subíndices $f1$ corresponden a la fibra en la dirección 1 y los $m1$ corresponden a la matriz en la dirección 1.

Los esfuerzos normales obedecen la ley de Hooke y son iguales a:

$$\sigma_1 = \epsilon_1 E_1 \quad \sigma_{f1} = \epsilon_{f1} E_f \quad \sigma_{m1} = \epsilon_{m1} E_m \quad (2.8)$$

Reemplazando (2.8) en (2.7) y dividiendo para A :

$$\varepsilon_1 \cdot E_1 = \frac{A_f}{A} \cdot \varepsilon_{f1} \cdot E_f + \frac{A_m}{A} \cdot \varepsilon_{m1} \cdot E_m \quad (2.9)$$

La elongación ΔL y las deformaciones unitarias son iguales:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{f1} = \varepsilon_{m1} \quad (2.10)$$

Las fracciones volumétricas, puesto que la longitud L es igual para ambos componentes, son:

$$v_f = A_f / A \quad v_m = A_m / A \quad (2.11)$$

Y se obtiene por tanto la siguiente expresión para el módulo de Young longitudinal en términos de los módulos de la fibra y la matriz. Esta expresión representa la regla de las mezclas para el cálculo del módulo de elasticidad.

$$E_1 = v_f \cdot E_f + v_m \cdot E_m = v_f \cdot E_f + (1 - v_f) \cdot E_m \quad (2.12)$$

2.2.2. DETERMINACIÓN DEL MÓDULO TRANSVERSAL E_2

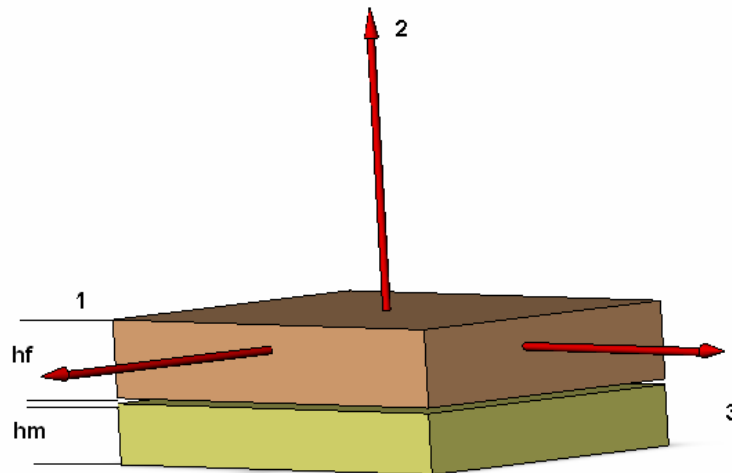


Figura 2.3. Volumen representativo para determinar el módulo E_2 .

El modelo de la figura 2.3 se utiliza para obtener el módulo transversal E_2 . En este caso los esfuerzos tanto en la fibra como en la matriz son los mismos (figura 2.4), esto sucede cuando el volumen representativo es cargado transversalmente con una fuerza en la dirección 2. Las pobres propiedades de las fibras en su dirección transversal, junto con las débiles propiedades del material que constituye la matriz,

conducen a la obtención de un material compuesto de bajas propiedades en dirección transversal a sus fibras.

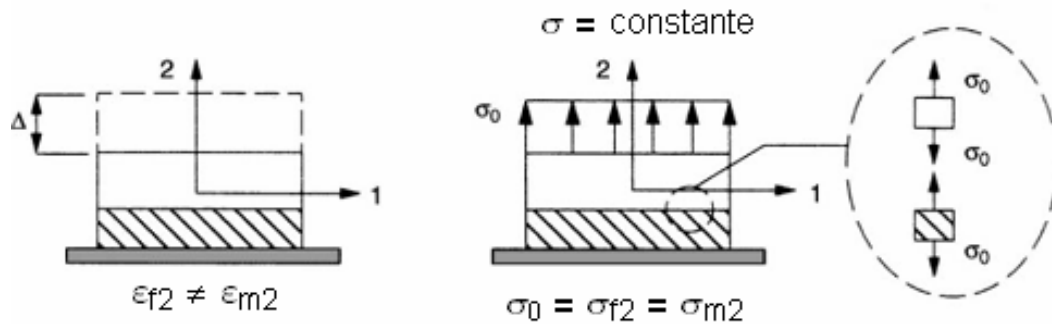


Figura 2.4. Modelo de esfuerzo constante para determinar el módulo E_2 .^[2.1]

Puesto que el módulo de cada constituyente es diferente, la deformación unitaria no será igual en la fibra y la matriz. El esfuerzo y deformación en la dirección 2 están relacionadas mediante:

$$\varepsilon_{f2} = \frac{\sigma_{f2}}{E_f} \quad \varepsilon_{m2} = \frac{\sigma_{m2}}{E_m} \quad (2.13)$$

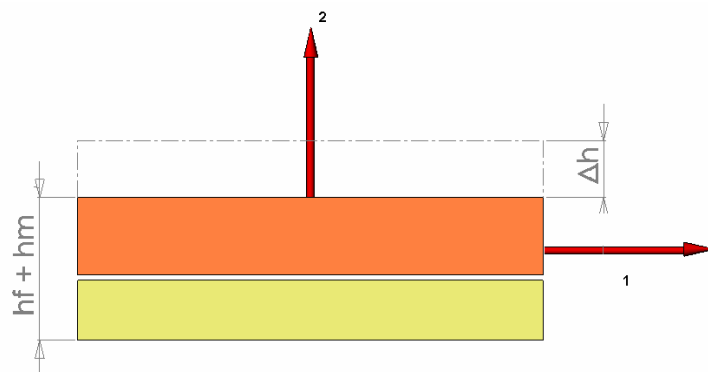


Figura 2.5. Deformación del volumen representativo, bajo condiciones de esfuerzo constante.

Las condiciones de deformación (ver figura 2.5) se expresan mediante:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta h}{h_f + h_m} \quad (2.14)$$

$$\Delta h = \Delta h_f + \Delta h_m = \varepsilon_{f2} \cdot h_f + \varepsilon_{m2} \cdot h_m = \frac{h_f}{E_f} \cdot \sigma_0 + \frac{h_m}{E_m} \cdot \sigma_0 = \left(\frac{h_f}{E_f} + \frac{h_m}{E_m} \right) \cdot \sigma_0 \quad (2.15)$$

La deformación en la dirección 2 es por tanto:

$$\varepsilon_2 = \frac{\Delta h}{h} = \left(\frac{h_f}{E_f} + \frac{h_m}{E_m} \right) \cdot \frac{\sigma_0}{h} = \left(\frac{h_f}{E_f} + \frac{h_m}{E_m} \right) \cdot \frac{\sigma_0}{h_f + h_m} = \left(\frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \right) \cdot \sigma_0 \quad (2.16)$$

Puesto que: $E_2 = \sigma_0 / \varepsilon_2$

$$E_2 = \frac{1}{\left(\frac{v_f}{E_f} + \frac{v_m}{E_m} \right)} = \frac{E_f \cdot E_m}{E_m \cdot v_f + E_f \cdot v_m} \quad (2.17)$$

2.2.3. DETERMINACIÓN DEL MÓDULO DE CIZALLAMIENTO G_{12}

El módulo cortante puede ser determinado al considerar el diagrama de cuerpo libre, mostrado en la figura 2.6. La deformación cortante para fibras y matrices son una función del módulo cortante para cada constituyente,

$$\gamma_{f12} = \frac{\tau_{f12}}{G_f} \quad \gamma_{m12} = \frac{\tau_{m12}}{G_m} \quad (2.18)$$

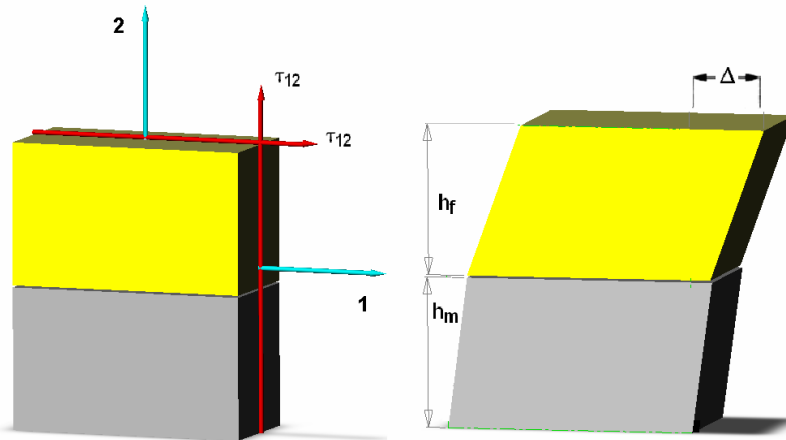


Figura 2.6. Diagrama de cuerpo libre y deformaciones para determinar G_{12} .

Partiendo de:

$$\tau_{f12} = \tau_{m12} = \tau_{12} \quad (2.19)$$

donde los subíndices $_{12}$ indican que el cortante está en el plano paralelo al eje 1 y en la dirección del eje 2.

La deformación por cortante según la figura 2.6 es:

$$\gamma_{12} = \frac{\Delta}{h_f + h_m} \quad (2.20)$$

donde:

$$\Delta = h_f \cdot \gamma_{f12} + h_m \cdot \gamma_{m12} \quad (2.21)$$

$$\gamma_{12} = \frac{h_f \cdot \gamma_{f12} + h_m \cdot \gamma_{m12}}{h_f + h_m} = v_f \cdot \gamma_{f12} + v_m \cdot \gamma_{m12} = v_f \cdot \frac{\tau_{f12}}{G_f} + v_m \cdot \frac{\tau_{m12}}{G_m} = \left(\frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m} \right) \cdot \tau_{12} \quad (2.22)$$

Puesto que:

$$\gamma_{12} = \frac{\tau_{12}}{G_{12}} \quad (2.23)$$

Se obtiene finalmente el módulo de elasticidad a corte en el plano. ^[2.2]

$$G_{12} = \frac{1}{\frac{v_f}{G_f} + \frac{v_m}{G_m}} = \frac{G_f \cdot G_m}{v_f \cdot G_m + v_m \cdot G_f} \quad (2.24)$$

2.2.4. DETERMINACIÓN DEL COEFICIENTE DE POISSON ν_{12}

La denominada relación de Poisson principal, ν_{12} , se obtiene mediante una aproximación similar para el análisis de E_1 . En primer lugar, la relación de Poisson principal es:

$$\nu_{12} = \frac{-\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \quad (2.25)$$

Para el estado de esfuerzos $\sigma_1 = \sigma$ y siendo todos los otros esfuerzos cero, las deformaciones son representadas en el volumen característico de la figura 2.7. La simplificación fundamental es que la deformación de la fibra es idéntica a la deformación de la matriz en la dirección de la fibra, La deformación transversal Δ_w es:

$$\Delta_w = -W \cdot \varepsilon_2 = W \cdot \nu_{12} \cdot \varepsilon_1 \quad (2.26)$$

Pero macroscópicamente también es igual a:

$$\Delta w = \Delta_{mw} + \Delta_{fw} \quad (2.27)$$

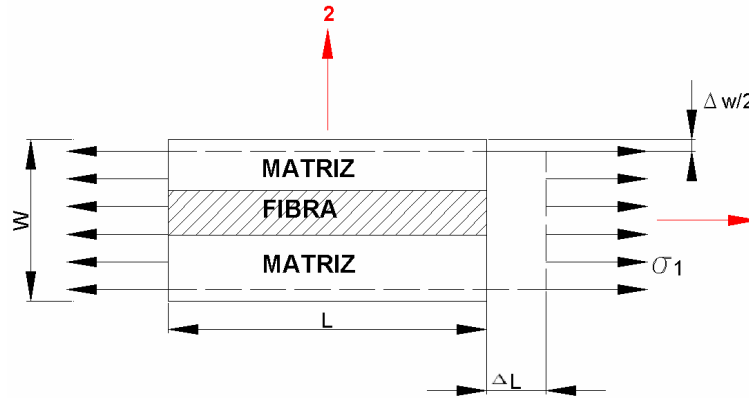


Figura 2.7. Volumen representativo para determinar ν_{12} .

El desplazamiento lateral de la matriz es:

$$\Delta m_w = h_m \cdot \varepsilon_{mw} = -h_m \cdot \nu_m \cdot \varepsilon_1 \quad (2.28)$$

$$\Delta f_w = h_f \cdot \varepsilon_{fw} = -h_f \cdot \nu_f \cdot \varepsilon_1$$

Pero adicionalmente:

$$h_m = \nu_m \cdot (h_f + h_m) = \nu_m \cdot W \quad (2.29)$$

Por lo tanto, reemplazando (2.29) en (2.28) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta m_w &= -(\nu_m \cdot W) \cdot (\nu_m \cdot \varepsilon_1) \\ \Delta m_f &= -(\nu_f \cdot W) \cdot (\nu_f \cdot \varepsilon_1) \end{aligned} \quad (2.30)$$

Finalmente, reemplazando las dos expresiones de (2.30) en (2.27) se obtiene:

$$\Delta w = -(\nu_m \cdot W) \cdot (\nu_m \cdot \varepsilon_1) - (\nu_f \cdot W) \cdot (\nu_f \cdot \varepsilon_1) = -W \cdot \varepsilon_1 \cdot (\nu_m \cdot \nu_m + \nu_f \cdot \nu_f) \quad (2.31)$$

Y se consigue el módulo de Poisson principal

$$\nu_{12} = (\nu_m \cdot \nu_m + \nu_f \cdot \nu_f) \quad (2.32)$$

Mientras los modelos que usan la regla de las mezclas simplificada dan resultados adecuados para E_1 y ν_{12} , los resultados para E_2 y G_{12} no concuerdan bien con los resultados provenientes del análisis de elementos finitos y de la teoría de la elasticidad. Por lo tanto, se necesita modificar los modelos simplificados^[2.3], para lo cual se cuenta para E_2 con la siguiente relación:

$$\frac{1}{E_2} = \frac{\frac{V_f}{E_f} + \eta \cdot \frac{V_m}{E_m}}{V_f + \eta \cdot V_m} \quad (2.33)$$

donde η es el factor de esfuerzo particionado que usualmente toma un valor entre 0.4 y 0.6^[2.3].

La regla de las mezclas modificadas para G_{12} , está dada por la siguiente fórmula:

$$\frac{1}{G_{12}} = \frac{\frac{V_f}{G_f} + \eta_i \cdot \frac{V_m}{G_m}}{V_f + \eta_i \cdot V_m} \quad (2.34)$$

donde η_i es el factor de cizallamiento – cortante particionado y es igual a 0.6^[2.3].

2.3. MACROMECAÁNICA DE LOS COMPUESTOS

La macromecánica es el estudio del comportamiento del material compuesto en donde el material es asumido completamente homogéneo y los efectos de los constituyentes (fibra, matriz) son detectados únicamente como propiedades aparentes promedio del material.

Como se indicó, un laminado no es más que láminas apiladas y perfectamente adheridas entre sí. Una diferencia entre los compuestos laminados y los materiales isotrópicos tradicionales es que la respuesta a las cargas en los materiales compuestos depende de la dirección en que se aplique la carga. Para analizar la respuesta de un compuesto laminado, se debe analizar en primer lugar una lámina simple, la cual se caracteriza por tener todas las fibras orientadas en la misma dirección. Este modelo permite tratar a la lámina como un material ortotrópico, asumiendo que las fibras se encuentran perfectamente rectas y uniformemente orientadas dentro de la lámina.

Para modelar matemáticamente una lámina se considera que existe una fila única de fibras a lo largo de esta. Un esquema del modelo referido se puede observar en la figura 2.8. Los ejes 1, 2 y 3 son las direcciones principales del material, el cual es conocido como ortotrópico por tener dos planos ortogonales de propiedades simétricas y es definido como sigue:

- 1: Dirección principal de la fibra.
- 2: Dirección perpendicular a la fibra en el plano de la lámina.
- 3: Dirección perpendicular a la fibra fuera del plano de la lámina.

Este sistema 1, 2, 3 se denomina el sistema principal coordenado del material.

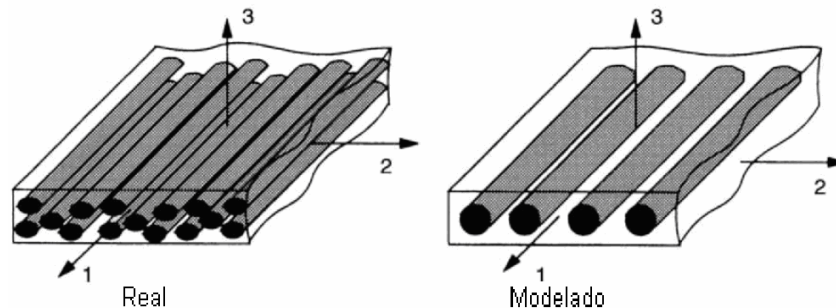


Figura 2.8. Representación esquemática de la lámina real y modelada. [2.1]

Para evaluar la respuesta de una lámina a las cargas externas, cada componente de la matriz de flexibilidad debe ser determinado.

2.3.1. MATRIZ DE FLEXIBILIDAD

Las relaciones deformación- esfuerzo para un material ortotrópico están dadas por la ecuación (2.35):

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & S_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & S_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (2.35)$$

O en forma compacta.

$$\{\varepsilon\} = [S]\{\sigma\} \quad (2.36)$$

donde S es la matriz de flexibilidad. Para determinar los parámetros S_{ij} se considera que los únicos esfuerzos inducidos en una lámina ortotrópica son los esfuerzos directos de tracción σ_1 , producidos por una carga que actúa en la dirección 1 en un sistema ortogonal de ejes 1-2. La aplicación de esta carga deformará al elemento como se muestra en la figura 2.8.

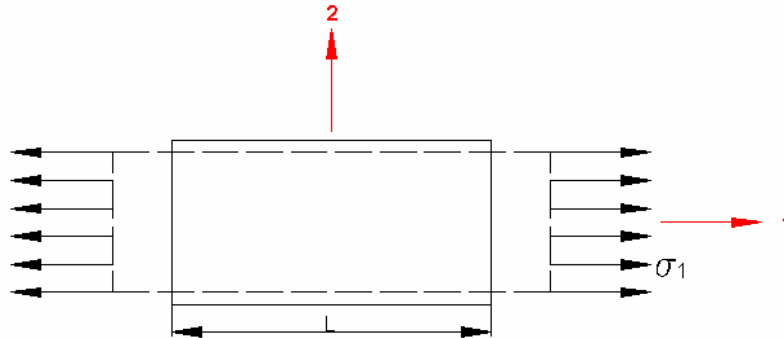


Figura 2.8. Representación de la deformación de una lámina sometida a carga en la dirección 1.

Esto dará como resultado las deformaciones unitarias siguientes:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_1}{E_1} \quad \varepsilon_2 = \frac{-\nu_{12} \cdot \sigma_1}{E_1} \quad \varepsilon_3 = \frac{-\nu_{13} \cdot \sigma_1}{E_1} \quad (2.37)$$

Ahora, si se considera que se le aplica al elemento una carga que produce un esfuerzo de tracción σ_2 en la dirección 2, el elemento se deformará como se muestra en la figura 2.9 y las deformaciones resultantes son:

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu_{21} \cdot \sigma_2}{E_2} \quad \varepsilon_2 = \frac{\sigma_2}{E_2} \quad \varepsilon_3 = \frac{-\nu_{23} \cdot \sigma_2}{E_2} \quad (2.38)$$

igual sucede con un esfuerzo de tracción σ_3 en el eje 3.

$$\varepsilon_1 = \frac{-\nu_{31} \cdot \sigma_3}{E_3} \quad \varepsilon_2 = \frac{-\nu_{32} \cdot \sigma_3}{E_3} \quad \varepsilon_3 = \frac{\sigma_3}{E_3} \quad (2.39)$$

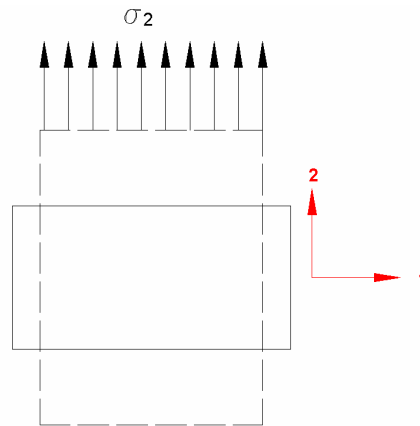


Figura 2.9. Representación de la deformación de una lámina sometida a carga en la dirección 2.

Por lo que los parámetros S_{ij} , se definen mediante:

$$\begin{aligned}
 S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2} & S_{13} &= \frac{-\nu_{31}}{E_3} \\
 S_{21} &= \frac{-\nu_{12}}{E_1} & S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{23} &= \frac{-\nu_{32}}{E_3} \\
 S_{31} &= \frac{-\nu_{13}}{E_1} & S_{32} &= \frac{-\nu_{23}}{E_2} & S_{33} &= \frac{1}{E_3}
 \end{aligned} \tag{2.40}$$

Puesto que la matriz de flexibilidad es simétrica ^[2.2], se cumple que:

$$\frac{\nu_{ij}}{E_i} = \frac{\nu_{ji}}{E_j} \tag{2.41}$$

$$\frac{\nu_{12}}{E_1} = \frac{\nu_{21}}{E_2} \quad \frac{\nu_{13}}{E_1} = \frac{\nu_{31}}{E_3} \quad \frac{\nu_{23}}{E_2} = \frac{\nu_{32}}{E_3} \tag{2.42}$$

Las ecuaciones (2.41) y (2.42) se denominan relaciones recíprocas. Además de los componentes normales de la matriz de flexibilidad, se deben determinar los términos cortantes S_{44} , S_{55} y S_{66} , que complementan las ecuaciones constitutivas del sólido elástico ortotrópico para formar la matriz (2.35). Por inducción de corte puro en los planos 2-3, 1-3, y 1-2, la relación entre corte y deformación es:

$$S_{44} = \frac{1}{G_{23}} \quad S_{55} = \frac{1}{G_{13}} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}} \tag{2.43}$$

donde G_{ij} es el módulo cortante aplicado al plano ij . Por lo tanto, la matriz de flexibilidad se la define mediante:

$$[S] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{-\nu_{13}}{E_1} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{12}}{E_1} & \frac{1}{E_2} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-\nu_{13}}{E_1} & \frac{-\nu_{23}}{E_2} & \frac{1}{E_3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{23}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{13}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{12}} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

2.3.2. MATRIZ DE RIGIDEZ

La matriz de rigidez $[C]$ proporciona la relación entre los esfuerzos y deformaciones en un material. Esta se conoce como la ley de Hooke generalizada para materiales anisotrópicos y puede ser expresada en forma matricial como:

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \epsilon \} \quad (2.45)$$

donde $[C]$ es la matriz de las constantes del material, las cuales son normalmente obtenidas mediante ensayos.

Las ecuaciones constitutivas para un material anisotrópico pueden ser escritas explícitamente como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.46)$$

donde [C] es la matriz de rigidez del elemento tridimensional.

En el caso de un material ortotrópico, la matriz [C] se simplifica y se denota como [Q]. Esta matriz de rigidez del material ortotrópico se obtiene explícitamente invirtiendo la matriz de flexibilidad:

$$[Q] = [S]^{-1} \quad (2.47)$$

La relación esfuerzo-deformación para la lámina ortotrópica es por lo tanto:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_4 \\ \epsilon_5 \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.48)$$

Los componentes individuales de la matriz de rigidez son expresados en términos de las constantes elásticas como:

$$Q_{11} = E_1 \cdot \frac{(1 - \nu_{23} \cdot \nu_{32})}{\Delta} \quad Q_{22} = E_2 \cdot \frac{(1 - \nu_{31} \cdot \nu_{13})}{\Delta} \quad Q_{33} = E_3 \cdot \frac{(1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21})}{\Delta}$$

$$Q_{12} = E_1 \cdot \frac{(\nu_{21} + \nu_{31} \cdot \nu_{23})}{\Delta} = E_2 \cdot \frac{(\nu_{12} + \nu_{32} \cdot \nu_{13})}{\Delta}$$

$$Q_{13} = E_1 \cdot \frac{(\nu_{31} + \nu_{21} \cdot \nu_{32})}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{(\nu_{13} + \nu_{12} \cdot \nu_{23})}{\Delta}$$

$$Q_{23} = E_2 \cdot \frac{(\nu_{32} + \nu_{12} \cdot \nu_{31})}{\Delta} = E_3 \cdot \frac{(\nu_{23} + \nu_{21} \cdot \nu_{13})}{\Delta}$$

donde:

$$\Delta = 1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21} - \nu_{23} \cdot \nu_{32} - \nu_{31} \cdot \nu_{13} - 2 \cdot \nu_{13} \cdot \nu_{21} \cdot \nu_{32} \quad (2.49)$$

$$Q_{44} = G_{23}, Q_{55} = G_{13}, Q_{66} = G_{12}$$

Bajo condiciones apropiadas, estas expresiones pueden ser simplificadas. Generalmente se asume que el módulo de flexibilidad en las direcciones 2 y 3 es el mismo ($E_2 = E_3$), lo cual implica que $\nu_{23} = \nu_{32}$, $\nu_{21} = \nu_{12}$ y $\nu_{13} = \nu_{31}$. Se considera que $E_2 \neq E_3$ cuando la lámina es compactada en el proceso de curado.

2.3.3. TRANSFORMACIÓN DE ESFUERZOS PARA UNA LÁMINA DE ORIENTACIÓN ARBITRARIA

Las ecuaciones (2.35) y (2.46) corresponden al caso particular en que el eje x del sistema de coordenadas coincide con el eje 1 del material (dirección de las fibras). Este es el caso del material conocido como especialmente ortotrópico [2.4]. En realidad, el eje del material no siempre coincide con el eje x, este caso se denomina: configuración fuera de eje, o material generalmente ortotrópico (figura 2.10).

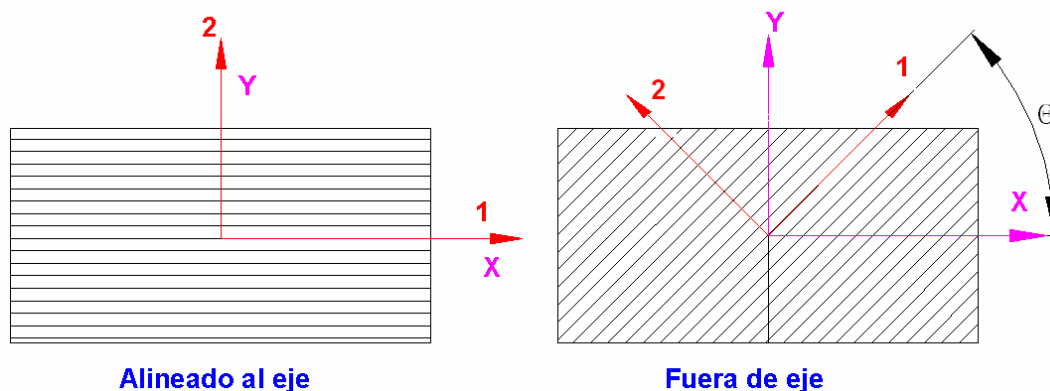


Figura 2.10. Configuraciones alineadas con el eje, y, fuera de eje.

Relacionar esfuerzos y deformaciones en el sistema x-y, en base de las relaciones constitutivas desarrolladas para el sistema 1-2, (2-35) y (2-46), requiere el uso de las ecuaciones de transformación siguientes, La transformación de las deformaciones se escribe en forma simplificada como:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_6 \end{Bmatrix} = [T_\varepsilon] \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \vdots \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.50)$$

donde la matriz $[T_\varepsilon]$ se define según (2.51)^[2.1], siendo $m = \cos(\theta) = dy/dl$ y $n = \sin(\theta) = dx/dl$.

$$[T_\varepsilon] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2 \cdot m \cdot n & 2 \cdot m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

La transformación de los esfuerzos se escribe en forma simplificada como:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.52)$$

donde la matriz de transformación $[T_\sigma]$ se obtiene al analizar el equilibrio de esfuerzos en el volumen representativo siguiente (figura 2.11):

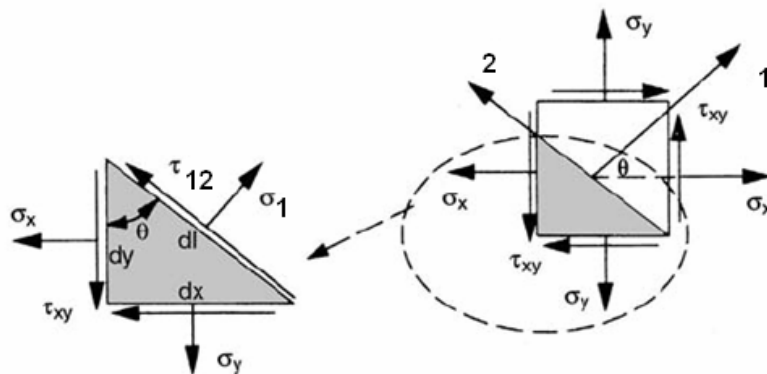


Figura 2.11. Transformación de esfuerzos desde un sistema x-y a un sistema 1-2. ^[2.1]

$$\sum F_1 = \sigma_1 \cdot (t \cdot dl) - \sigma_x \cdot (t \cdot dy) \cdot \cos(\theta) - \sigma_y \cdot (t \cdot dx) \cdot \sin(\theta) - \tau_{xy} \cdot (t \cdot dx) \cdot \cos(\theta) - \tau_{xy} \cdot (t \cdot dy) \cdot \sin(\theta) = 0$$

Despejando σ_1 y usando la notación indicada se simplifica a:

$$\sigma_1 = \sigma_x \cdot m^2 - \sigma_y \cdot n^2 + 2 \cdot \tau_{xy} \cdot m \cdot n \quad (2.53)$$

Similar procedimiento se sigue para el resto de ejes, de tal forma que la matriz de transformación $[T_\sigma]$ para tres dimensiones se representa como:

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -m \cdot n & m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.54)$$

El vector de esfuerzos se obtiene mediante el vector de desplazamientos mediante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \vdots \\ \epsilon_6 \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

Entonces se puede reemplazar (2.50) y (2.52) en (2.55), obteniéndose:

$$[T_\sigma] \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [Q] \cdot \left[[T_\epsilon] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \vdots \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \right] \quad (2.56)$$

Despejando los esfuerzos se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \vdots \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [T_\sigma]^{-1} \cdot [Q] \cdot [T_\epsilon] \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \vdots \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.57)$$

Entonces la matriz de rigidez reducida transformada $[\bar{Q}]$ se obtiene al multiplicar las siguientes matrices:

$$[\bar{Q}] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & 2 \cdot m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -2 \cdot m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -m \cdot n & m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{13} & Q_{23} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 0 & 0 & 0 & m \cdot n \\ n^2 & m^2 & 0 & 0 & 0 & -m \cdot n \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & n & m & 0 \\ -2m \cdot n & 2m \cdot n & 0 & 0 & 0 & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

El resultado de esta operación es la ecuación constitutiva (2.59):

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.59)$$

donde cada elemento de $[\bar{Q}]$ se define como sigue:

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cdot m^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{12} \cdot n^4 \\ \bar{Q}_{13} &= Q_{13} \cdot m^2 + Q_{23} \cdot n^2 \\ \bar{Q}_{16} &= -Q_{22} \cdot m \cdot n^3 + Q_{11} \cdot m^3 \cdot n - (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m \cdot n \cdot (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \cdot n^4 + 2 \cdot (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{22} \cdot m^4 \\ \bar{Q}_{23} &= Q_{13} \cdot n^2 + Q_{23} \cdot m^2 \\ \bar{Q}_{26} &= -Q_{22} \cdot m^3 \cdot n + Q_{11} \cdot m \cdot n^3 + (Q_{12} + 2 \cdot Q_{66}) \cdot m \cdot n \cdot (m^2 - n^2) \\ \bar{Q}_{33} &= Q_{33} \\ \bar{Q}_{36} &= (Q_{13} - Q_{23}) \cdot m \cdot n \\ \bar{Q}_{44} &= Q_{44} \cdot m^2 + Q_{55} \cdot n^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{45} &= (Q_{55} - Q_{44}) \cdot m \cdot n \\
\bar{Q}_{55} &= Q_{55} \cdot m^2 + Q_{44} \cdot n^2 \\
\bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12}) \cdot m^2 \cdot n^2 + Q_{66} \cdot (m^2 - n^2)^2
\end{aligned} \tag{2.60}$$

2.3.4. RELACIÓN ESFUERZO-DEFORMACIÓN PARA ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS EN UN MATERIAL ORTOTRÓPICO

La mayoría de estructuras construidas mediante materiales compuestos son diseñadas para aplicaciones que obedecen a un estado de esfuerzos planos. El estado de esfuerzos planos no es una idealización de la realidad, más bien es la forma natural de esfuerzos a los que se someten las piezas hechas de materiales compuestos. Este es la forma correcta de utilizar un laminado puesto que este no puede asumir altas cargas en otra dirección que no sea a lo largo de las fibras. En el estado de esfuerzos planos se asume que: $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$. Por lo tanto, la ecuación constitutiva en la forma general ortotrópica se reduce a:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{16} \\ Q_{12} & Q_{22} & Q_{26} \\ Q_{16} & Q_{26} & Q_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \tag{2.61}$$

La matriz de rigidez para esfuerzo plano también se denomina **matriz de rigidez reducida**. La forma especialmente ortotrópica es:

$$[Q] = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \tag{2.62}$$

donde los términos Q_{ij} son:

$$\begin{aligned}
Q_{11} &= \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & Q_{22} &= \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \\
Q_{12} &= \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = \frac{\nu_{21} \cdot E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} & Q_{66} &= G_{12}
\end{aligned} \tag{2.63}$$

La forma generalmente ortotrópica se formula usando las transformaciones de esfuerzos y deformaciones:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.64)$$

La variación de cada componente \bar{Q} en función de θ se ilustra en la figura 2.12, para una lámina de fibra de carbono y resina epoxy se utilizan las expresiones de (2.60).

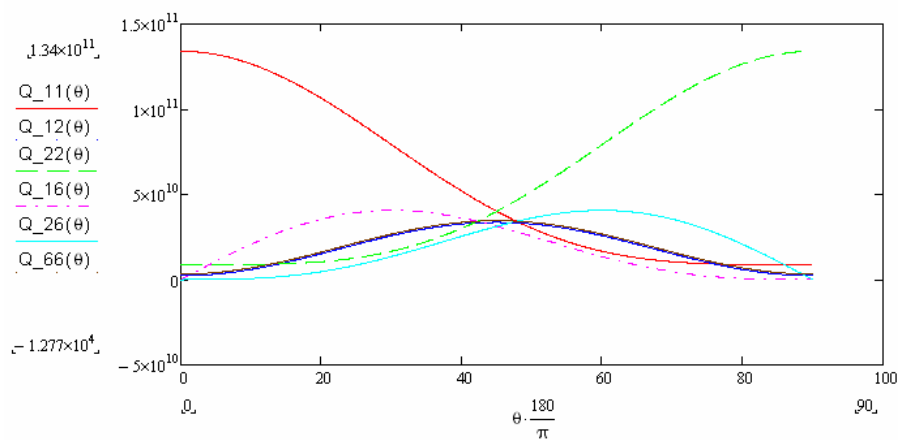


Figura 2.12. Variación de los elementos de la matriz reducida transformada en función de θ , para un módulo de flexibilidad de la fibra 220 GPa, de 3.6 GPa para la matriz y de una fracción volumétrica v_f de 0.6.

2.3.5. FORMA INVARIANTE DE \bar{Q}

Los componentes de \bar{Q} pueden ser expresados de una manera alternativa, conocida como la forma invariante de \bar{Q} [2.5], con el objetivo de determinar rápidamente los términos que modifican la rigidez con respecto al ángulo de orientación de la lámina, para lo cual se utilizan las identidades trigonométricas siguientes.

$$\begin{aligned}
\cos^2(\theta) &= \frac{1 + \cos(2\cdot\theta)}{2} \\
\cos^4(\theta) &= \frac{3 + 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta)}{8} \\
\sin^4(\theta) &= \frac{3 - 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta)}{8} \\
\sin(\theta)\cdot\cos^3(\theta) &= \frac{2\cdot\sin(2\cdot\theta) + \sin(4\cdot\theta)}{8} \\
\sin^3(\theta)\cdot\cos(\theta) &= \frac{2\cdot\sin(2\cdot\theta) - \sin(4\cdot\theta)}{8} \\
\sin^2(\theta)\cdot\cos^2(\theta) &= \frac{1 - \cos(4\cdot\theta)}{8}
\end{aligned} \tag{2.65}$$

Evaluando Q_{11} usando estas funciones, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cdot m^4 + 2\cdot(Q_{12} + 2\cdot Q_{66})\cdot m^2\cdot n^2 + Q_{22}\cdot n^4 \\
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cdot\frac{(3+4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta))}{8} + 2\cdot(Q_{12} + 2\cdot Q_{66})\cdot\frac{(1 + \cos(2\cdot\theta))\cdot(1 - \cos(2\cdot\theta))}{2} + Q_{22}\cdot\frac{(3 - 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta))}{8} \\
\bar{Q}_{11} &= Q_{11}\cdot\frac{(3 + 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta))}{8} + 2\cdot(Q_{12} + 2\cdot Q_{66})\cdot\frac{(1 - \cos(4\cdot\theta))}{8} + Q_{22}\cdot\frac{(3 - 4\cdot\cos(2\cdot\theta) + \cos(4\cdot\theta))}{8} \\
\bar{Q}_{11} &= \frac{3\cdot Q_{11} + 2\cdot Q_{12} + 4\cdot Q_{66} + 3\cdot Q_{22}}{8} + \left(\frac{4\cdot Q_{11} - 4\cdot Q_{22}}{8}\right)\cdot\cos(2\cdot\theta) + \left(\frac{Q_{11} - 2\cdot Q_{12} - 4\cdot Q_{66} + Q_{22}}{8}\right)\cdot\cos(4\cdot\theta)
\end{aligned} \tag{2.66}$$

Simplificando las ecuaciones, se consigue:

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2\cdot\cos(2\cdot\theta) + U_3\cdot\cos(4\cdot\theta) \tag{2.67}$$

Las otras expresiones de (2.60), también pueden ser simplificadas con las siguientes definiciones, denominadas invariantes de Q:

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{1}{8}\cdot(3\cdot Q_{11} + 2\cdot Q_{12} + 4\cdot Q_{66} + 3\cdot Q_{22}) \\
U_2 &= \frac{1}{2}\cdot(Q_{11} - Q_{22}) \\
U_3 &= \frac{1}{8}\cdot(Q_{11} + Q_{22} - 2\cdot Q_{12} - 4\cdot Q_{66}) \\
U_4 &= \frac{1}{8}\cdot(Q_{11} + Q_{22} + 6\cdot Q_{12} - 4\cdot Q_{66}) \\
U_5 &= \frac{1}{8}\cdot(Q_{11} + Q_{22} - 2\cdot Q_{12} + 4\cdot Q_{66})
\end{aligned} \tag{2.68}$$

La forma explícita de \bar{Q} puede expresarse como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & \cos(2 \cdot \theta) & \cos(4 \cdot \theta) \\ U_1 & -\cos(2 \cdot \theta) & \cos(4 \cdot \theta) \\ U_4 & 0 & -\cos(4 \cdot \theta) \\ U_5 & 0 & -\cos(4 \cdot \theta) \\ 0 & \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{2} & \sin(4 \cdot \theta) \\ 0 & \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{2} & \sin(4 \cdot \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} \quad (2.69)$$

2.2.6. FORMA INVARIANTE DE LA MATRIZ DE FLEXIBILIDAD PARA EL ESTADO DE ESFUERZOS PLANOS

La matriz de flexibilidad reducida para casos de esfuerzos planos es la siguiente:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_X \\ \epsilon_Y \\ \gamma_{XY} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & 0 \\ S_{12} & S_{22} & 0 \\ 0 & 0 & S_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_X \\ \sigma_Y \\ \tau_{XY} \end{Bmatrix} \quad (2.70)$$

Cada componente es expresado en término de las constantes elásticas como:

$$\begin{aligned} S_{11} &= \frac{1}{E_1} & S_{12} &= \frac{-\nu_{21}}{E_2} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} \\ S_{22} &= \frac{1}{E_2} & S_{66} &= \frac{1}{G_{12}} \end{aligned} \quad (2.71)$$

Utilizando los mismos procedimientos de transformación, se puede demostrar que las relaciones para una lámina generalmente ortotrópica en el caso de esfuerzo plano es:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{S}_{11} & \bar{S}_{12} & \bar{S}_{16} \\ \bar{S}_{12} & \bar{S}_{22} & \bar{S}_{26} \\ \bar{S}_{16} & \bar{S}_{26} & \bar{S}_{66} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.72)$$

donde:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{11} &= S_{11} \cdot m^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{22} \cdot n^4 \\ \bar{S}_{12} &= (S_{11} + S_{22} - S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{12} \cdot (n^4 + m^4) \\ \bar{S}_{16} &= (2 \cdot S_{11} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m^3 \cdot n - (2 \cdot S_{22} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m \cdot n^3 \\ \bar{S}_{22} &= S_{11} \cdot n^4 + (2 \cdot S_{12} + S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{22} \cdot m^4 \\ \bar{S}_{26} &= -(2 \cdot S_{22} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m^3 \cdot n + (2 \cdot S_{11} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m \cdot n^3 \\ \bar{S}_{66} &= 2 \cdot (2 \cdot S_{11} + 2 \cdot S_{22} - 4 \cdot S_{12} - S_{66}) \cdot m^2 \cdot n^2 + S_{66} \cdot (m^4 + n^4) \end{aligned} \quad (2.73)$$

La matriz de flexibilidad también se puede expresar en términos de invariantes, y para ello se definen constantes V_i .

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot S_{11} + 2 \cdot S_{12} + S_{66} + 3 \cdot S_{22}) \\ V_2 &= \frac{1}{2} \cdot (S_{11} - S_{22}) \\ V_3 &= \frac{1}{8} \cdot (S_{11} + S_{22} - 2 \cdot S_{12} - S_{66}) \\ V_4 &= \frac{1}{8} \cdot (S_{11} + S_{22} + 6 \cdot S_{12} - S_{66}) \\ V_5 &= \frac{1}{2} \cdot (S_{11} + S_{22} - 2 \cdot S_{12} + S_{66}) \end{aligned} \quad (2.74)$$

La expresión matricial para $\{S\}$ en términos de V_i es por lo tanto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array} \right\} \quad \left\{ \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\}$$

$$\begin{matrix}
 S_{11} \\
 S_{22} \\
 S_{12} \\
 S_{66} \\
 S_{16} \\
 S_{26}
 \end{matrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 V_1 \cos(2\cdot\theta) & \cos(4\cdot\theta) \\
 V_1 -\cos(2\cdot\theta) & \cos(4\cdot\theta) \\
 V_4 & 0 & -\cos(4\cdot\theta) \\
 V_5 & 0 & -4\cdot\cos(4\cdot\theta) \\
 0 & \sin(2\cdot\theta) & 2\cdot\sin(4\cdot\theta) \\
 0 & \sin(2\cdot\theta) & -2\cdot\sin(4\cdot\theta)
 \end{bmatrix}
 \begin{matrix}
 1 \\
 V_2 \\
 V_3
 \end{matrix}
 \quad (2.75)$$

2.3.7. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Con el propósito de aclarar la formulación anterior se plantea el siguiente ejemplo:

Una lámina de material compuesto está sometida a esfuerzo uniaxial como se aprecia en la figura 2.13, dada el esfuerzo de 1 MPa, $\theta = 45^\circ$ y las propiedades del material que son: $E_1 = 155 \times 10^9$ Pa, $E_2 = E_3 = 12.10 \times 10^9$ Pa, $G_{12} = G_{13} = 4.40 \times 10^9$, $G_{23} = 3.20 \times 10^9$ Pa, $\nu_{12} = \nu_{13} = 0.248$, $\nu_{23} = 0.458$, determine los desplazamientos que sufre la lámina.

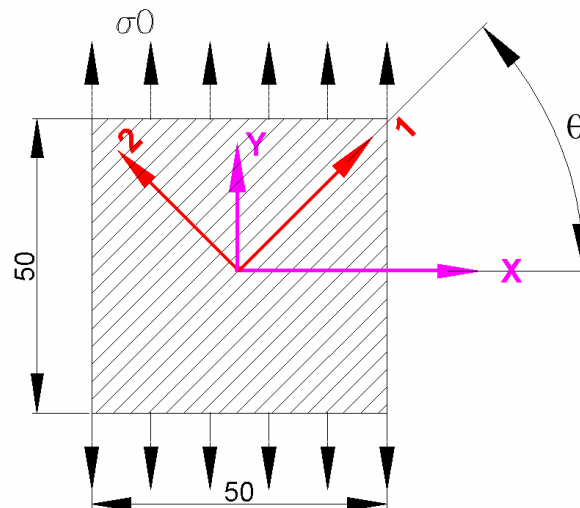


Figura 2.13. Lámina simple sometida a carga axial en x.

Los componentes de la matriz de flexibilidad se calculan mediante las relaciones anteriormente revisadas en (2.40).

$$E_1 = 155 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad E_2 = 12.1 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad G_{12} = 4.40 \cdot 10^9 \text{ Pa} \quad \nu_{12} = 0.248 \quad \theta = 45^\circ$$

$$S_{11} = \frac{1}{E_1} \quad S_{22} = \frac{1}{E_2} \quad S_{12} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} \quad S_{66} = \frac{1}{G_{12}}$$

$$\nu_{21} = E_2 \cdot \frac{\nu_{12}}{E_1} \quad \nu_{21} = 0.01936$$

Los invariantes según las expresiones dadas en 2.74 son:

$$V_1 = 6.14202 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$V_2 = -3.80965 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$V_3 = -1.68721 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$V_4 = -1.84721 \times 10^{-11} \cdot \frac{1}{\text{Pa}}$$

$$V_5 = 1.59784 \times 10^{-10} \cdot \frac{1}{\text{Pa}}$$

Los términos de la matriz de flexibilidad, para un ángulo de 45° se hallan mediante (2.75):

$$\{S\} = \begin{Bmatrix} 7.82922 \times 10^{-11} \\ 7.82922 \times 10^{-11} \\ -3.53441 \times 10^{-11} \\ 9.22962 \times 10^{-11} \\ -3.80965 \times 10^{-11} \\ -3.80965 \times 10^{-11} \end{Bmatrix} \cdot \frac{1}{\text{Pa}}$$

Dado que el vector de esfuerzos es:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \cdot 10^6 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ Pa}$$

Se puede determinar las deformaciones unitarias mediante (2.72), donde se verifica que al existir tanto deformaciones lineales como angulares se está ante lo que se conoce como acoplamiento corte-extensión puesto que aparece el término γ_{xy} .

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 7.82922 \cdot 10^{-11} & -3.53441 \cdot 10^{-11} & -3.80965 \cdot 10^{-11} \\ -3.53441 \cdot 10^{-11} & 7.82922 \cdot 10^{-11} & -3.80965 \cdot 10^{-11} \\ -3.80965 \cdot 10^{-11} & -3.80965 \cdot 10^{-11} & 9.22962 \cdot 10^{-11} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \cdot 10^6 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -3.534 \times 10^{-5} \\ 7.829 \times 10^{-5} \\ -3.81 \times 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

Note que aparecen los términos Q_{16} y Q_{26} los cuales significan que hay acoplamiento entre deformación cortante y tensiones normales (tercera fila) y entre esfuerzos cortantes y deformaciones normales (tercera columna).

El campo de desplazamientos se obtiene mediante las definiciones de deformaciones axiales y de corte, las cuales son integradas:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{Integrando} \quad u = \varepsilon_x \cdot x + f(y) \quad (2.76)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{Integrando} \quad v = \varepsilon_y \cdot y + g(x) \quad (2.77)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f(y)}{\partial y} + \frac{\partial g(x)}{\partial x} \quad (2.78)$$

Las funciones $f(y)$ y $g(x)$ pueden ser arbitrariamente asumidas como funciones lineales puesto que deben satisfacer las ecuaciones de compatibilidad:

$$f(y) = C_1 + C_2 \cdot y \quad g(x) = C_3 + C_4 \cdot x \quad (2.79)$$

En el centro de la placa, es decir en $x=0$, $y=0$, los desplazamientos pueden ser despreciados, por lo que $u = v = 0$. Usando estas condiciones, $C_1 = C_3 = 0$. En el centro también se cumple que la rotación del sólido rígido es eliminada por lo que se requiere:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

$$C_2 = C_4$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial}{\partial y}(\varepsilon_x \cdot x + C_2 \cdot y) + \frac{\partial}{\partial x}(\varepsilon_y \cdot y + C_4 \cdot x) = C_2 + C_4 = 2 \cdot C_2$$

$$C_2 = C_4 = \frac{\gamma_{xy}}{2}$$

Finalmente:

$$u = \epsilon_x \cdot x + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot y \quad v = \epsilon_y \cdot y + \frac{\gamma_{xy}}{2} \cdot x \quad (2.80)$$

Por lo tanto, el campo de desplazamientos se obtiene al reemplazar las deformaciones unitarias obtenidas en (2.80), las unidades de u y v dependerán de las unidades asignadas a x , y :

$$u = -3.53441 \cdot 10^{-5} \cdot x - \frac{3.80965}{2} \cdot 10^{-5} \cdot y$$

$$v = 7.82922 \cdot 10^{-5} \cdot y - \frac{3.80965}{2} \cdot 10^{-5} \cdot x$$

Es así que en el extremo superior izquierdo de una lámina de 50mm x 50mm, donde:

$$x = 0.025 \text{ m} \quad y = 0.025 \text{ m}$$

se reemplazan en (2.80), verificándose que:

$$u = -1.35981 \times 10^{-6} \text{ m} \quad v = 1.4811 \times 10^{-6} \text{ m}$$

Por tanto, el extremo de la lámina experimenta una deformación u de -0.001359 mm, v de 0.0014811 mm, y los desplazamientos de la placa ortotrópica varían de acuerdo con la posición en la placa según la figura 2.13, comprobándose el acoplamiento corte-extensión debido a la distorsión angular que presenta.

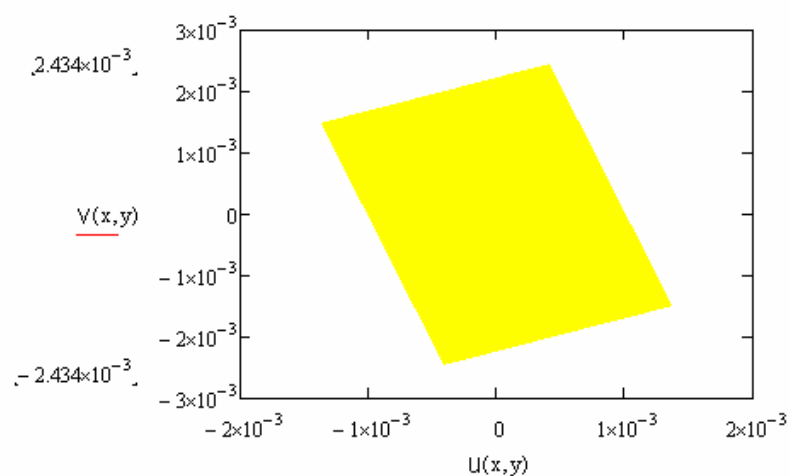


Figura 2.13. Desplazamientos en un material ortotrópico con eje del material a 45°

Mientras que para una placa de material isotrópico los desplazamientos corresponden a extensión en la dirección de la tracción aplicada (eje y) y contracción en el eje x (figura 2.14).

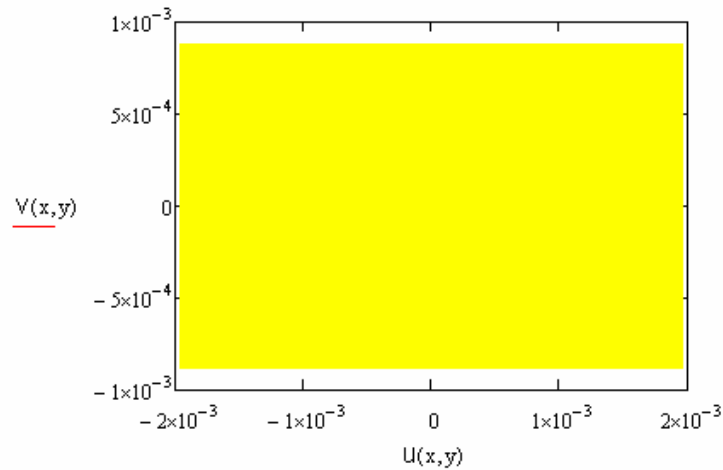


Figura 2.14. Desplazamientos en un material isotrópico.

Si se varía el ángulo de orientación de la fibra se tendrá diferente grado de deformación angular.

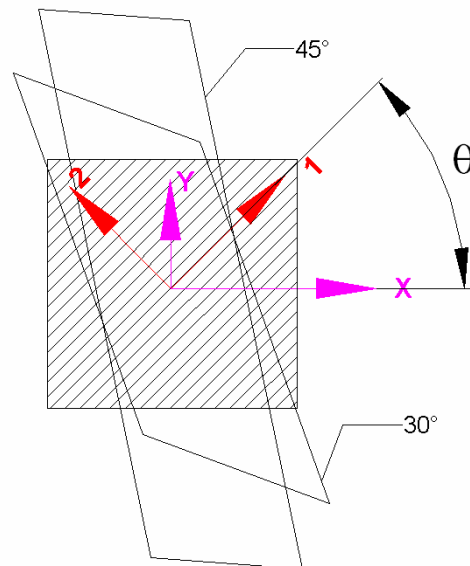


Figura 2.15. Variación de los desplazamientos con respecto a la orientación del eje principal del material. [2.2]

2.3.8. EJEMPLO DE APLICACIÓN CON ANSYS

Con el objetivo de validar el procedimiento que se seguirá posteriormente en Ansys, y familiarizarse con los comandos de este programa se realizará el mismo ejemplo

utilizando el software, para lo cual se sigue el siguiente procedimiento, que será revisado en profundidad en el capítulo 5^[2,6]:

- Ingreso de parámetros escalares
- Modelado de la lámina:

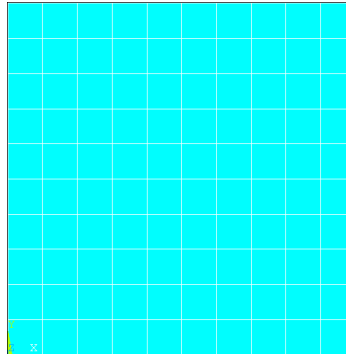


Figura 2.16. Modelo de un cuarto de lámina de 50 x 50 mm.

- Selección del elemento finito adecuado, específicamente el elemento membrana (**Shell**), denominado **Linear Layer 99**.
- Asignar la orientación de 45° y el espesor del laminado unitario.

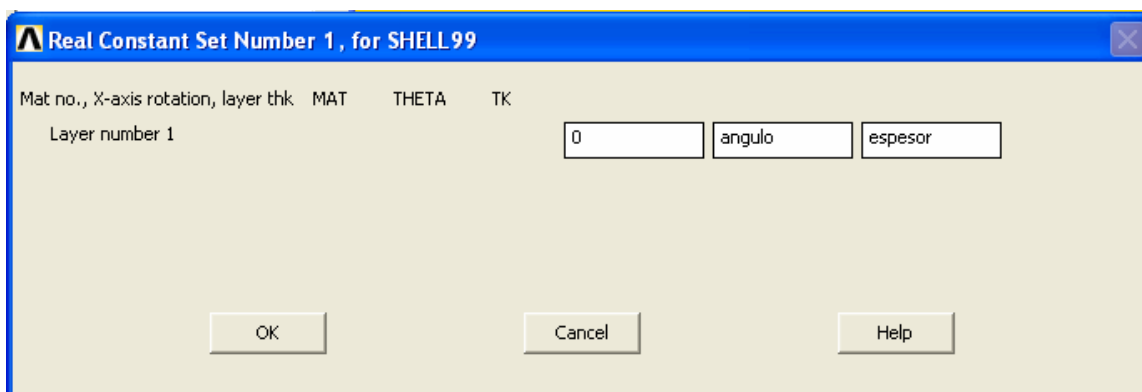


Figura 2.17. Cuadro de diálogo para asignar la orientación al eje principal de la lámina.

- Asignar las propiedades ortotrópicas al material
- Efectuar el mallado (mesh) de la lámina

- Definir las condiciones de frontera. Puesto que la placa no está sujeta por ningún lado, y se va a utilizar un cuarto de placa, se puede utilizar las condiciones de borde de simetría en el borde izquierdo y en el inferior.
- Colocar la carga de tracción en el borde superior

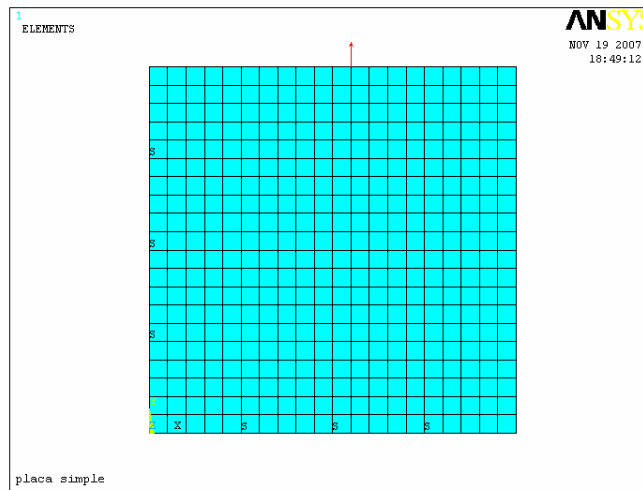


Figura 2.18. Condiciones de simetría y carga en la lámina.

- Resolver las ecuaciones.
- Efectuando el postprocesado se obtiene:

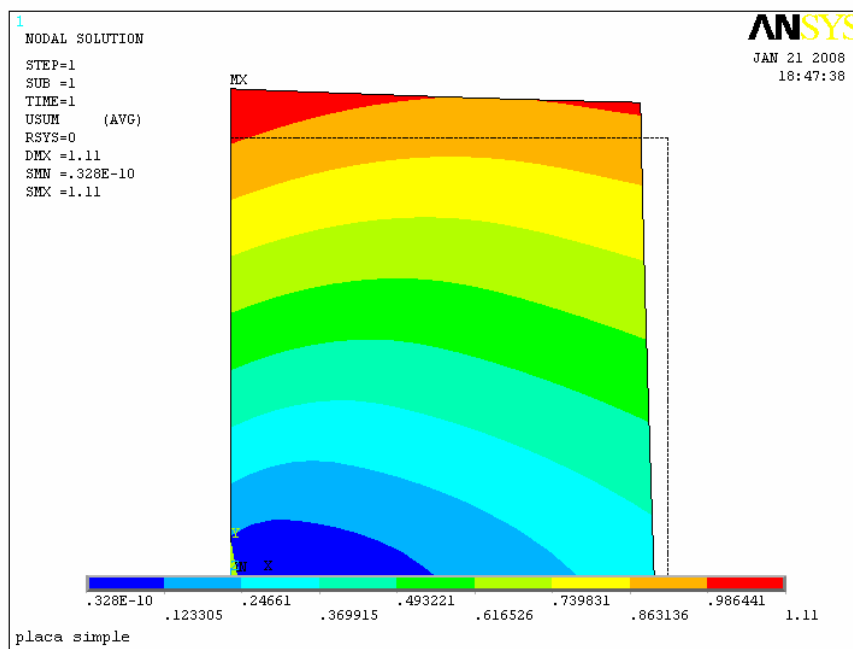


Figura 2.19. Desplazamientos de la lámina.

En la figura 2.19 se observa la distorsión angular que sufre una lámina ortotrópica cuando los ejes del material no coinciden con los ejes coordenados. Para efectuar el análisis comparativo se debe identificar los nodos respectivos según figura 2.20.

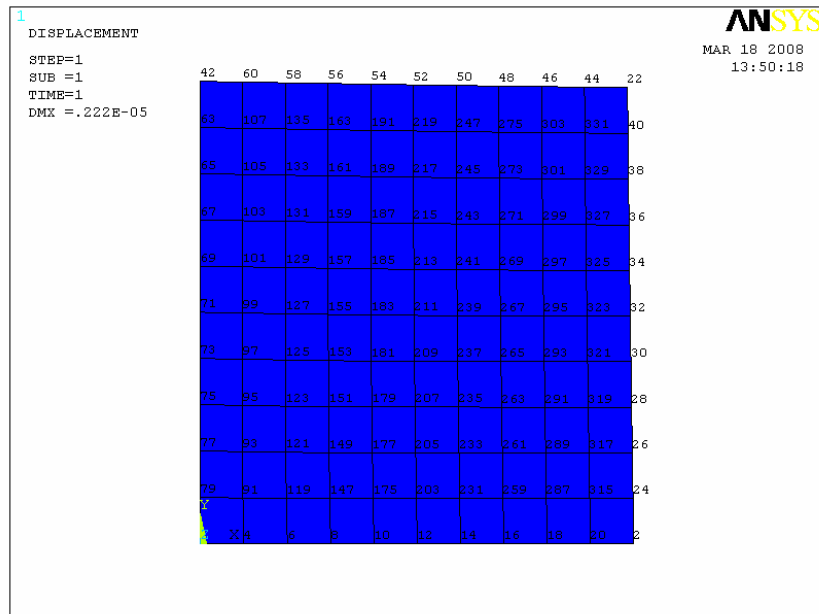


Figura 2.20. Identificación de nodos.

Una vez identificado el nodo, que en este caso es el 22, se buscan las deformaciones respectivas en la tabla de deformaciones siguientes:

ANSYS Main Menu

- Preferences
- Preprocessor
- Solution
- General Postproc
 - Data & File Opts
 - Results Summary
 - Read Results
 - Failure Criteria
 - Plot Results
 - List Results
 - Detailed Summary
 - Iteration Summary
 - Percent Error
 - Sorted Listing
 - Nodal Solution**
 - Element Solution
 - Section Solution
 - Superelem DOF

PRNSOL Command

File							
4	0.53566E-05	0.59556E-04	-0.30439E-04	-0.69881E-04	0.0000	0.0000	
4	0.53566E-05	0.59556E-04	-0.30439E-04	-0.69881E-04	0.0000	0.0000	
6	-0.33818E-04	0.81122E-04	-0.21717E-04	-0.41780E-04	0.0000	0.0000	
6	-0.33818E-04	0.81122E-04	-0.21717E-04	-0.41780E-04	0.0000	0.0000	
8	-0.27474E-04	0.70056E-04	-0.19569E-04	-0.37992E-04	0.0000	0.0000	
8	-0.27474E-04	0.70056E-04	-0.19569E-04	-0.37992E-04	0.0000	0.0000	
10	-0.30520E-04	0.69084E-04	-0.17715E-04	-0.34271E-04	0.0000	0.0000	
10	-0.30520E-04	0.69084E-04	-0.17715E-04	-0.34271E-04	0.0000	0.0000	
12	-0.29646E-04	0.66159E-04	-0.16771E-04	-0.32416E-04	0.0000	0.0000	
12	-0.29646E-04	0.66159E-04	-0.16771E-04	-0.32416E-04	0.0000	0.0000	
14	-0.29277E-04	0.64459E-04	-0.16159E-04	-0.31225E-04	0.0000	0.0000	
14	-0.29277E-04	0.64459E-04	-0.16159E-04	-0.31225E-04	0.0000	0.0000	
16	-0.28677E-04	0.63048E-04	-0.15787E-04	-0.30497E-04	0.0000	0.0000	
16	-0.28677E-04	0.63048E-04	-0.15787E-04	-0.30497E-04	0.0000	0.0000	
18	-0.28158E-04	0.62010E-04	-0.15548E-04	-0.30033E-04	0.0000	0.0000	
18	-0.28158E-04	0.62010E-04	-0.15548E-04	-0.30033E-04	0.0000	0.0000	
20	-0.27707E-04	0.61239E-04	-0.15401E-04	-0.29747E-04	0.0000	0.0000	
20	-0.27707E-04	0.61239E-04	-0.15401E-04	-0.29747E-04	0.0000	0.0000	
22	-0.35306E-04	0.78330E-04	-0.19756E-04	-0.38082E-04	0.0000	0.0000	
22	-0.35306E-04	0.78330E-04	-0.19756E-04	-0.38082E-04	0.0000	0.0000	

Figura 2.20. Tabla de deformaciones.

Lo mismo se puede hacer con los desplazamientos:

ANSYS Main Menu

- Preferences
- Preprocessor
- Solution
- General Postproc
 - Data & File Opts
 - Results Summary
 - Read Results
 - Failure Criteria
 - Plot Results
 - List Results
 - Detailed Summary
 - Iteration Summary
 - Percent Error
 - Sorted Listing
 - Nodal Solution
 - Element Solution
 - Section Solution
 - Superelem DOF
 - SpotWeld Solution
 - Reaction Solu
 - Nodal Loads
 - Elem Table Data

PRNSOL Command

File				
14	-0.34222E-06	0.0000	0.0000	0.34222E-06
15	-0.37866E-06	0.0000	0.0000	0.37866E-06
16	-0.41473E-06	0.0000	0.0000	0.41473E-06
17	-0.45044E-06	0.0000	0.0000	0.45044E-06
18	-0.48583E-06	0.0000	0.0000	0.48583E-06
19	-0.52091E-06	0.0000	0.0000	0.52091E-06
20	-0.55571E-06	0.0000	0.0000	0.55571E-06
21	-0.59027E-06	0.0000	0.0000	0.59027E-06
22	-0.12507E-05	0.15902E-05	0.0000	0.20231E-05
23	-0.66155E-06	0.75994E-07	0.0000	0.66590E-06
24	-0.69821E-06	0.15194E-06	0.0000	0.71455E-06
25	-0.73452E-06	0.22777E-06	0.0000	0.76903E-06
26	-0.77045E-06	0.30353E-06	0.0000	0.82808E-06
27	-0.80595E-06	0.37924E-06	0.0000	0.89072E-06
28	-0.84100E-06	0.45491E-06	0.0000	0.95615E-06
29	-0.87557E-06	0.53059E-06	0.0000	0.10238E-05
30	-0.90963E-06	0.60633E-06	0.0000	0.10932E-05
31	-0.94313E-06	0.68219E-06	0.0000	0.11640E-05
32	-0.97603E-06	0.75825E-06	0.0000	0.12359E-05
33	-0.10082E-05	0.83462E-06	0.0000	0.13089E-05
34	-0.10396E-05	0.91146E-06	0.0000	0.13826E-05
35	-0.10701E-05	0.98898E-06	0.0000	0.14571E-05
36	-0.10995E-05	0.10675E-05	0.0000	0.15325E-05
37	-0.11276E-05	0.11475E-05	0.0000	0.16088E-05

Figura 2.21. Tabla de desplazamientos.

Finalmente se establece la siguiente tabla de resultados. El programa se ha corrido con diferentes números de elementos finitos cuadrangulares:

Tabla 2.1. Tabla comparativa de resultados.

CÁLCULO TEÓRICO					
	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	u [m]	v[m]
	-0.353441E-04	-0.782922E-04	-0.380965E-04	-0.135981E-05	0.14811E-05
CÁLCULO EN ANSYS					
Elementos finitos	ϵ_x	ϵ_y	γ_{xy}	u [m]	v[m]
4	-0.36643E-04	-0.76994E-04	-0.36157E-04	-0.12824E-05	0.15585E-05
100	-0.35306E-04	-0.78330E-04	-0.38082E-04	-0.12507E-05	0.15902E-05
400	-0.35284E-04	-0.78352E-04	-0.38174E-04	-0.12459E-05	0.15950E-05
900	-0.35300E-04	-0.78337E-04	-0.38160E-04	-0.12445E-05	0.15965E-05

Se observa que existe una muy buena aproximación con respecto a las deformaciones y a los esfuerzos. Existe una ligera discrepancia con respecto a los

desplazamientos, del orden del 5%, que para propósitos prácticos es despreciable. También se observa que no necesariamente se consigue mejores resultados aumentando el número de elementos finitos, incluso con cuatro elementos los resultados no difieren en exceso. El desarrollo teórico visto en el presente capítulo se utilizará esencialmente para calcular correctamente los parámetros a ser ingresados en el software Ansys.

REFERENCIAS

- 2.1. Staab, G. H. (1999). *Laminar Composites*. Woburn: Butterworth-Heinemann.
- 2.2. Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. (2a. ed.). Philadelphia: Taylor & Francis, Inc.
- 2.3. Voyiadjis, G. Z. y Kattan, P. I. (2005). *Mechanics of Composite Materials with MATLAB*. Holanda: Springer.
- 2.4. Juan José Viladoms Weber, *Análisis de las propiedades de los materiales compuestos sometidos a tensión ó flexión*, http://catarina.udlap.mx/u_dl_a/tales/documentos/lim/viladoms_w_jj/
- 2.5. Mallick, P.K. (1993). *Fiber-Reinforced Composites*. (2a. ed.). New York: Marcel Dekker, Inc.
- 2.6. Oswaldo Rodriguez, *Orthotropic Plate with a Hole*, <http://courses.cit.cornell.edu/ANSYS/plate2/index.htm>

CAPÍTULO 3

ANÁLISIS DE LAMINADOS

El presente capítulo trata sobre dos teorías bidimensionales que simplifican el análisis de placas. Las teorías bidimensionales son obtenidas de la teoría de la elasticidad tridimensional, asumiendo variaciones de desplazamiento y esfuerzos a través del espesor del laminado. En primer lugar se revisa la teoría clásica de laminados, la cual asume que las deformaciones cortantes ingenieriles son cero y en base de esta teoría se desarrollan las ecuaciones constitutivas de un laminado. La teoría clásica de laminados describe la respuesta mecánica de cualquier laminado a una combinación de cargas en el plano y momentos flectores. A continuación se revisa la teoría de placas de Mindlin – Reissner, la cual predice un valor diferente de cero para la deformación cortante ingenieril, lo que da resultados satisfactorios para los materiales compuestos. Al incluirse las deformaciones transversales se tienen ecuaciones constitutivas completas.

3.1. LAMINADOS

Los materiales compuestos en los componentes ingenieriles son construidos en estructuras laminadas con el fin de incrementar la rigidez ya que en ciertos casos con una sola lámina no es posible lograr un elemento que soporte las cargas establecidas. El conformar un laminado consiste en estratificar lámina por lámina, hasta conseguir el espesor y propiedades mecánicas deseadas. Los laminados pueden ser construidos también por apilamiento de preimpregnados, o por bobinado de filamentos. Las láminas adyacentes pueden ser del mismo o de diferente material y la orientación de cada una de las fibras con respecto al eje de referencia (por convención el eje x) puede ser arbitraria en cada lámina.

Una importante característica de estos laminados es que su espesor es usualmente mucho más pequeño que las otras dimensiones. Esto posibilita que se simplifique la teoría que describe el comportamiento de estas láminas. En esta teoría, cada lámina puede ser representada como un material homogéneo con propiedades efectivas las cuales pueden ser isotrópica, ortotrópica o transversalmente isotrópica. Cada lámina está en un estado de esfuerzos planos y la lámina se deforma de acuerdo a la hipótesis de Kirchhoff cuyo contenido se revisará a continuación.

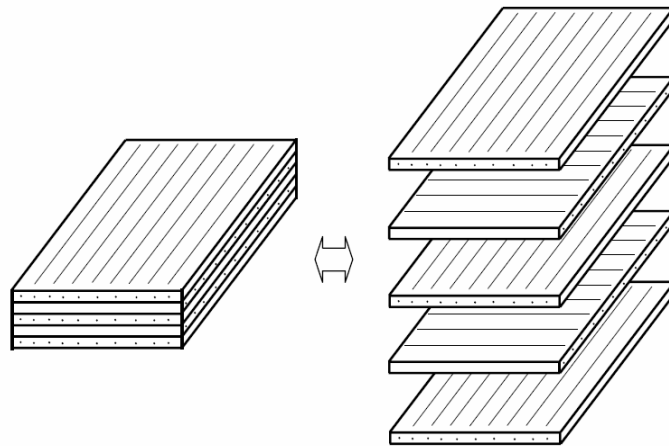


Figura 3.1. Estratificación de láminas para obtener un laminado. ^[3.1]

3.2. TEORÍA CLÁSICA DE LAMINADOS

La teoría de la placa delgada está basada en una colección de hipótesis formalizadas por Kirchhoff en 1850. Estas hipótesis permiten reducir la complejidad de un problema de elasticidad tridimensional a un problema resoluble bidimensional. Esta teoría permite resolver la mecánica de un laminado desde la lámina simple.

Es importante definir ciertas convenciones para efectuar el análisis matemático del laminado. Primero, el plano x-y es el plano del laminado y la dirección z es perpendicular al plano de la lámina, como se observa en la figura 3.2:

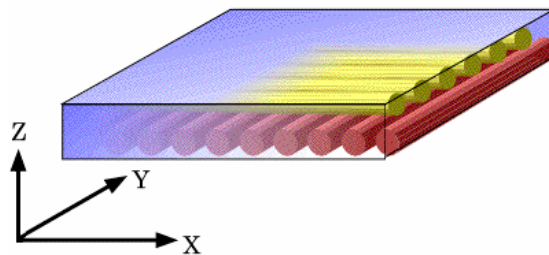


Figura 3.2. Convención de planos y ejes coordenados. ^[3.2]

De acuerdo a la teoría clásica de laminados (CPT), o teoría de placas de Kirchhoff se asume que:

- Cualquier línea originalmente recta y perpendicular al plano medio de un laminado ABCD, se asume que permanece recta y perpendicular al plano medio cuando el laminado es deformado. Esto equivale a ignorar la

deformación cortante en los planos perpendiculares a la superficie media y por lo tanto $\gamma_{xz} = 0$ y $\gamma_{yz} = 0$, y por lo tanto se tiene G_{13} y $G_{23} = \infty$.

- Se asume que las normales no varían de longitud, por tanto no existe variación del espesor en la dirección z , $\epsilon_z = 0$.
- Los desplazamientos de la placa en la dirección z provienen únicamente de la flexión.

Cuando una placa uniforme fleja, no existe extensión de la línea de centros (ver figura 3.3), siendo la línea de centros un eje que divide el laminado verticalmente en dos regiones de igual espesor y que pertenece a la superficie media. Pero de igual manera que en las vigas (debajo de la línea de centros, el eje z es negativo) se genera compresión y se tiene desplazamiento negativo y (sobre la línea de centros, el eje z es positivo) se genera tracción y se tiene desplazamiento positivo. Los desplazamientos en la dirección (x, y, z) son (u, v, w) respectivamente.

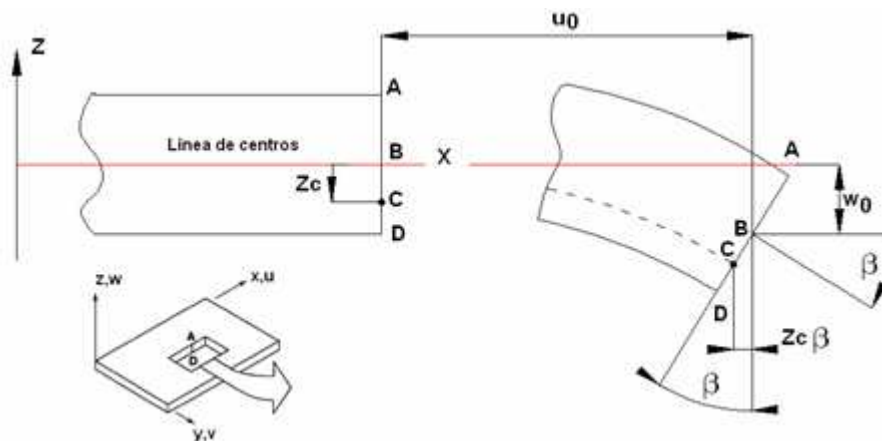


Figura 3.3. Geometría de una placa deformada según la teoría clásica de laminación. [3.3]

Debido a que la línea ABCD permanece recta, el desplazamiento en el punto C es:

$$u_c = u_0 - z_c \tan(\beta) \quad (3.1)$$

Siendo u_0 , v_0 y w_0 , los desplazamientos de la superficie media de la placa.

Para ángulos pequeños:

$$u_c = u_0 - z_c (\beta) \quad (3.2)$$

β es la pendiente de la línea de los centros o de la superficie media del laminado y es igual a:

$$\beta = \partial w_0 / \partial x \quad (3.3)$$

Por lo tanto, el desplazamiento u en cualquier punto z a través del laminado es:

$$u_c = u_0 - z_c (\partial w_0 / \partial x) \quad (3.4)$$

Los desplazamientos dentro del plano que son función de la posición (x, y, z) en el laminado pueden ser definidos mediante:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= u_0(x, y) - z \cdot \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) \\ v(x, y, z) &= v_0(x, y) - z \cdot \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial y} \right) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Una vez obtenido el desplazamiento, se puede definir la deformación unitaria tomando en cuenta que su concepto es la variación del cambio de desplazamiento (ver figura 3.4).

$$\epsilon_x = \frac{\left[u + \frac{\partial}{\partial x} (u \cdot dx) \right] - u}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (3.6)$$

Desplazamiento u + extensión $\frac{\partial u}{\partial x} dx$

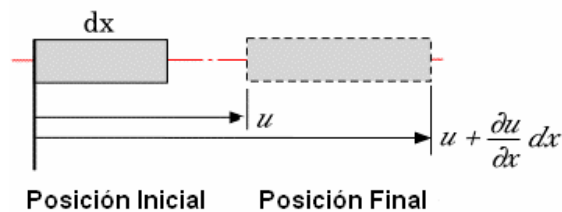


Figura 3.4. Desplazamiento en la dirección x .^[3.2]

Por ello se sustituye la función u determinada anteriormente y se evalúa su derivada:

$$\epsilon_x = \frac{\partial}{\partial x} \left[u_0(x, y) - z \cdot \left(\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} \right) \right] = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (3.7)$$

La deformación unitaria en y es obtenida de la misma manera:

$$\epsilon_y = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.8)$$

La deformación cortante ingenieril se define como la variación en el ángulo entre dos rectas, que eran perpendiculares antes de la aplicación de la carga (ver figura 3.5). Para pequeñas deformaciones este ángulo se calcula mediante:

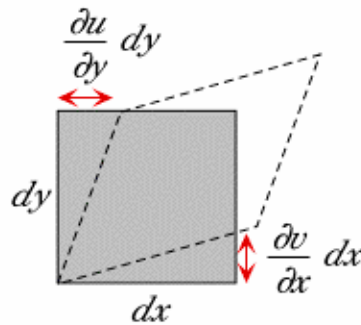


Figura 3.5. Deformación cortante ingenieril. ^[3.2]

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial v}{\partial x} \cdot dx = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.9)$$

Sustituyendo nuevamente las funciones u y v se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - 2 \cdot z \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \end{aligned} \quad (3.10)$$

En forma matricial:

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.11)

En forma simplificada:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \cdot \{\kappa\}$$

(3.12)

donde, ε_x^0 , ε_y^0 , γ_{xy}^0 son las deformaciones unitarias del plano de referencia y κ_x , κ_y , κ_{xy} son las curvaturas del plano de referencia o plano medio.

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix}$$

(3.13)

Utilizando las ecuaciones constitutivas, los esfuerzos en la lámina k-ésima pueden ser expresados como el producto de la rigidez y de la deformación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.14)

Reemplazando (3.11) en (3.14) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.15)

3.2.1. RELACIONES CARGA - DEFORMACIÓN Y MOMENTO-CURVATURA EN UN LAMINADO

Las fuerzas y momentos resultantes en un laminado se obtienen por integración del esfuerzo en cada lámina a través de su espesor, por ejemplo:

$$N_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x dz \quad M_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x \cdot z dz$$

(3.16)

Puesto que los esfuerzos varían de lámina a lámina del laminado, los cálculos deben ser efectuados para cada lámina y cada uno de estos resultados tendría que ser analizados para identificar los puntos críticos.

Una placa laminada posee tres resultantes de esfuerzos: N, Q y M, que son respectivamente fuerzas existentes en el plano del laminado o fuerzas de membrana, fuerzas de cizallamiento y momentos, como se muestra en la figura 3.6:

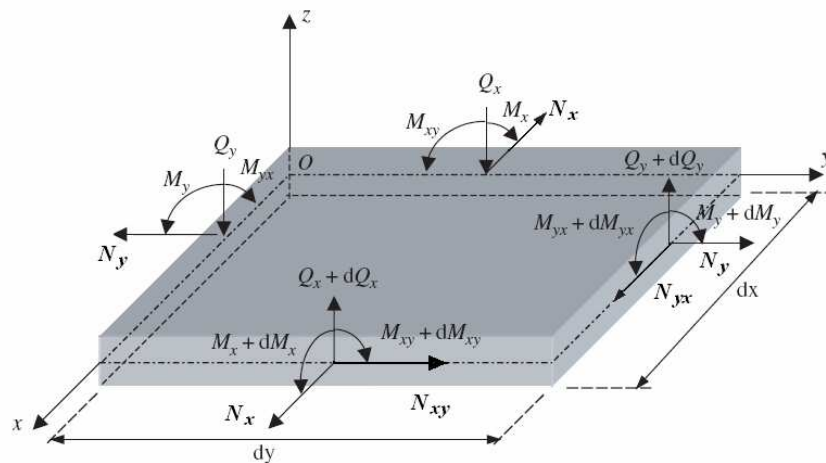


Figura 3.6. Fuerzas, cortantes y momentos en una porción de placa de dimensiones dx por dy . [3.4]

La colección entera de fuerzas y momentos resultantes para un laminado están definidas mediante:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k dz$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z dz$$

(3.17)

donde z_k y z_{k-1} están definidos en la geometría básica del siguiente esquema (ver figura 3.7). Note que z_i son las coordenadas, mientras que n es el número de láminas.

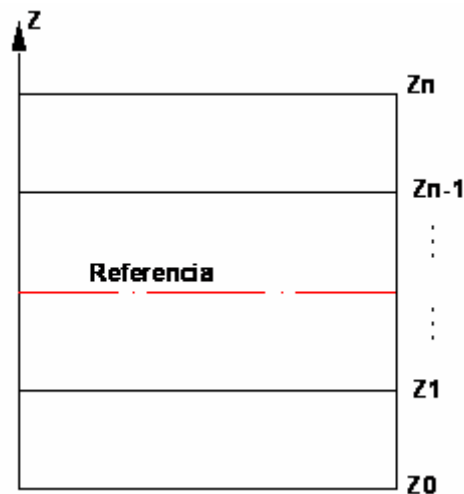


Figura 3.7. Geometría de una placa laminada.

Debido a que no siempre los ejes del material coinciden con los ejes de referencia, se necesita determinar la rigidez del material $[Q_{ij}]^{(k)}$ conocida como la rigidez "reducida transformada" en términos de $Q_{ij}^{(k)}$ y que se calculan con las ecuaciones de transformación vistas en (2.69):

Las ecuaciones anteriores pueden ser configuradas para tomar ventaja del hecho de que la matriz de rigidez $[\bar{Q}_{ij}]^{(k)}$ es constante dentro de la lámina y recordando que los esfuerzos son iguales al producto de la matriz de rigidez por las deformaciones:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z dz \right]$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \left[\int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix}_k \cdot z dz + \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}_k \cdot z^2 dz \right]$$

(3.18)

Se debe recalcar que ϵ_x^0 , ϵ_y^0 , γ_{xy}^0 , κ_x , κ_y y κ_{xy} no son funciones de z , la integración sobre el espesor puede ser llevada a cabo fácilmente, por lo que las ecuaciones anteriores pueden ser escritas como:

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.19)

donde:

$$[A_{ij}] = \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]^k \cdot (z_{k+1} - z_k)$$

$$\begin{aligned}
 [B_{ij}] &= \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]^k \cdot [(z_{k+1})^2 - (z_k)^2] \\
 [D_{ij}] &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n [\bar{Q}_{ij}]^k \cdot [(z_{k+1})^3 - (z_k)^3]
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

siendo:

$[A_{ij}]_{(3 \times 3)}$: Matriz elástica de extensión, representa la rigidez extensional, relaciona los esfuerzos normales (N_x, N_y, N_{xy}) con las deformaciones de la superficie media.

$[B_{ij}]_{(3 \times 3)}$: Matriz de acoplamiento extensión – flexión. Relaciona los momentos (M_x, M_y, M_{xy}) con las deformaciones de superficie media ($\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$ y ϵ_{xy}^0) y los esfuerzos normales (N_x, N_y, N_{xy}) con las curvaturas ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$).

$[D_{ij}]_{(3 \times 3)}$: Matriz elástica de flexión. Relaciona los momentos (M_x, M_y, M_{xy}) con las curvaturas ($\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$).

Un laminado será simétrico, en relación a la superficie media, cuando tiene las capas agrupadas en pares, localizadas simétricamente en relación a la superficie media, y con igual orientación de fibras y propiedades. La simetría del estratificado implica un trabajo de esfuerzo desacoplado del trabajo de flexión $[B_{ij}] = 0$, si no se verifica la simetría existirá tanto deformación en extensión y flexión.

En ausencia de deformación cortante y utilizando la teoría clásica de placas, la relación fuerza - deformación para una placa delgada de materiales compuestos se reduce a (3.21).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix}}_{[C]} \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.21)

donde $[C]$ es la matriz de rigidez para una placa sin deformación cortante. La ecuación anterior (3.21), en forma matricial se definen como:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \end{Bmatrix} \quad (3.22)$$

En las placas de materiales laminados, debido a que se consideran que estas están perfectamente pegadas entre sí, las deformaciones varían linealmente a través del espesor del estratificado, ver figura 3.8. Como las constantes elásticas son diferentes para cada capa, los esfuerzos presentan discontinuidades.

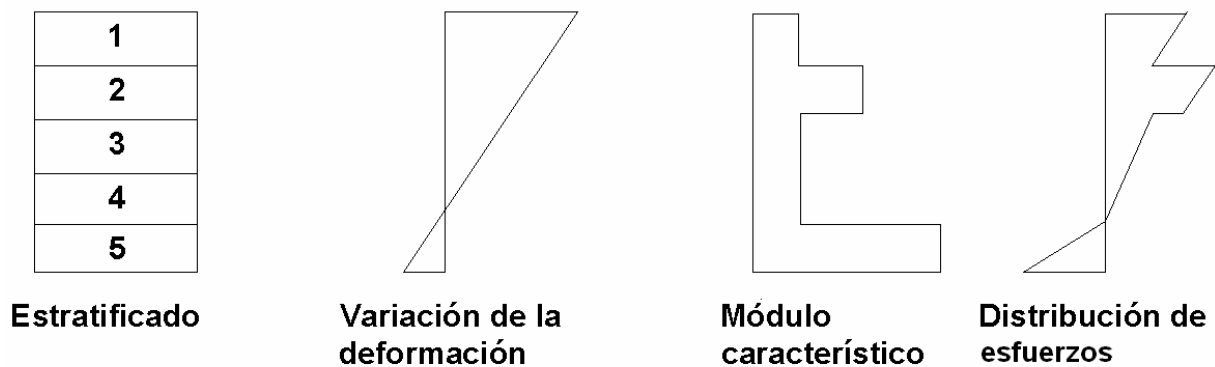


Figura 3.8. Variación hipotética de las deformaciones y esfuerzos a través del espesor. ^[3,5]

La mera presencia de [B] implica acoplamiento entre flexión y extensión, debido a que tanto fuerzas y curvaturas, como momentos y deformaciones existen simultáneamente. Cuando en un laminado existe la matriz [B] es imposible extender la lámina sin que al mismo tiempo aparezca flexión y torsión. Esto se lo puede simular en Ansys, sometiendo a un laminado cuyos ejes del material están a 45° y -45°, a una carga $N_y = 100 \text{ kN/m}$ (ver figura 3.9).

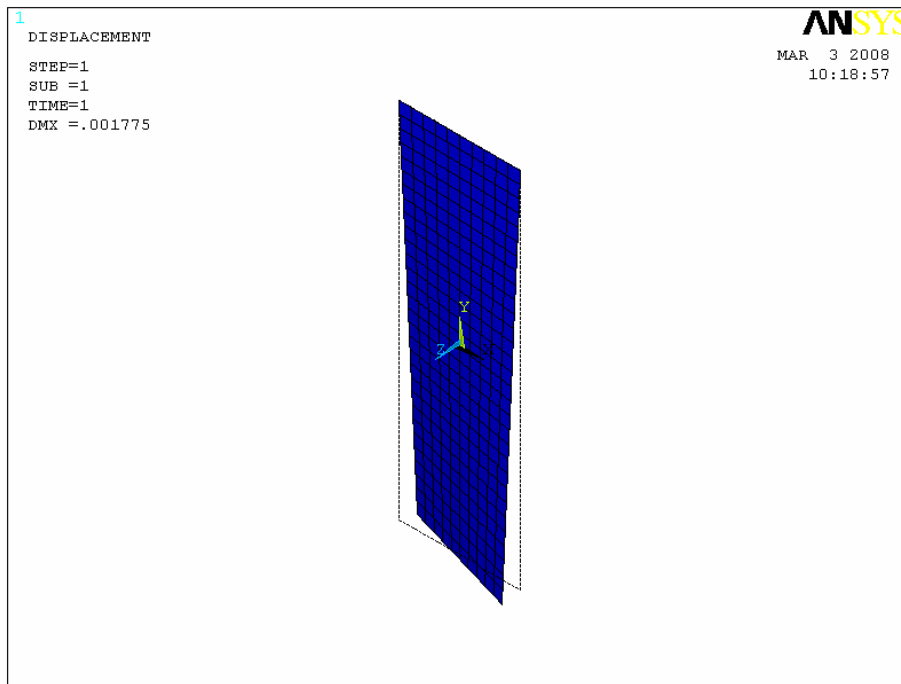


Figura 3.9. Respuesta en Ansys de un laminado utilizando para la fibra $E_f = 220 \text{ GPa}$ y $\nu_f = 0.2$ y para la matriz $E_m = 3.6 \text{ GPa}$ y $\nu_m = 0.35$ y una carga de tracción $N_y = 100 \text{ kN/m}$.

3.2.2. DEFORMACIONES Y CURVATURAS DEL PLANO MEDIO

Si las fuerzas normales y momentos resultantes actuando en una lámina son conocidos, sus deformaciones de plano medio pueden ser calculadas al despejar ϵ^0 y κ de 3.22^[3.3]. Así:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = [A_1] \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} + [B_1] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = [C_1] \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} + [D_1] \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix}$$

(3.23)

siendo:

$$[A_1] = [A]^{-1} + [A]^{-1} \cdot [B] \cdot [D^0]^{-1} \cdot [B] \cdot [A]^{-1}$$

$$\begin{aligned}
 [B_1] &= -[A]^{-1} \cdot [B] \cdot [D^0]^{-1} \\
 [C_1] &= [B_1]^T \\
 [D_1] &= [D^0]^{-1} \\
 [D^0] &= [D] - [B] \cdot [A]^{-1} \cdot [B] \\
 (3.24)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto los esfuerzos en cada lámina pueden ser calculadas mediante:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_j \cdot [\bar{Q}_{ij}]_k \cdot \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \\
 (3.25)$$

Con el objetivo de aclarar el procedimiento a seguir para el cálculo de un laminado se desarrollará el siguiente ejemplo.

3.2.3. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Determine las matrices A, B y D para un laminado con dos láminas a [+45/-45]. Cada lámina es de 6 mm de espesor y contiene 60% de fibra T-300 en una matriz epóxica. Considere para la fibra $E_f = 220$ GPa y $\nu_f = 0.2$ y para la matriz $E_m = 3.6$ GPa y $\nu_m = 0.35$. Finalmente, calcule los esfuerzos en el plano medio de cada lámina debido a una carga $N_y = 100$ kN/m.

Se calcula E_1 , E_2 , ν_{12} , ν_{21} y G_{12} para $\theta=0^\circ$ utilizando (2.12), (2.17) y (2.32):

$$E_f = 220 \cdot 10^9 \quad E_m = 3.6 \cdot 10^9 \quad \nu_f = 0.2 \quad \nu_m = 0.35 \quad \nu_f = 0.6$$

$$E_{11} = E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot (1 - \nu_f) \quad E_{11} = 1.334 \times 10^{11} \cdot \text{Pa}$$

$$E_{22} = \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot (1 - \nu_f) + E_m \cdot \nu_f} \quad E_{22} = 8.784 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot (1 - \nu_f) \quad \nu_{12} = 0.26$$

$$\nu_{21} = \frac{E_{22}}{E_{11}} \cdot \nu_{12} \qquad \nu_{21} = 0.017$$

Asumiendo relaciones isotrópicas para los constituyentes se tiene según 2.24:

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + \nu_f)} \qquad G_f = 9.167 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} \qquad G_m = 1.333 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{12} = \frac{G_f \cdot G_m}{G_f \cdot \nu_m + G_m \cdot \nu_f} \qquad G_{12} = 3.262 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

Se calcula Q_{11} , Q_{22} , Q_{12} , Q_{21} y Q_{66} para $\theta=0^\circ$, según 2.47

$$Q_{11} = \frac{E_{11}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \qquad Q_{11} = 1.34 \times 10^{11} \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{22} = \frac{E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \qquad Q_{22} = 8.824 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_{22}}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} \qquad Q_{12} = 2.294 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{21} = Q_{12}$$

$$Q_{66} = G_{12}$$

Se calculan los invariantes de Q: U_1 , U_2 , U_3 , U_4 y U_5 según 2.68:

$$U_1 = \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot Q_{11} + 3 \cdot Q_{22} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) \qquad U_1 = 5.578 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot (Q_{11} - Q_{22}) \qquad U_2 = 6.261 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_3 = \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) \qquad U_3 = 1.565 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_4 = \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) \qquad U_4 = 1.795 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_5 = \frac{1}{2} \cdot (U_1 - U_4) \qquad U_5 = 1.892 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

Los parámetros reducidos transformados de $[\bar{Q}_{ij}]$ en función del ángulo del material se calcula utilizando 2.69:

$$\bar{Q}_{11} = U_1 + U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$\bar{Q}_{12} = U_4 - U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$\bar{Q}_{22} = U_1 - U_2 \cdot \cos(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

$$\bar{Q}_{16} = \frac{1}{2} \cdot U_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) + U_3 \cdot \sin(4 \cdot \theta)$$

$$\bar{Q}_{26} = \frac{1}{2} \cdot U_2 \cdot \sin(2 \cdot \theta) - U_3 \cdot \sin(4 \cdot \theta)$$

$$\bar{Q}_{66} = U_5 - U_3 \cdot \cos(4 \cdot \theta)$$

Con los ángulos especificados en el ejemplo se pueden definir las matrices y por lo tanto se tiene para las fibras a +45°:

$$[Q_{45+}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.017 \times 10^{10} & 3.36 \times 10^{10} & 3.133 \times 10^{10} \\ 3.36 \times 10^{10} & 4.007 \times 10^{10} & 3.128 \times 10^{10} \\ 3.133 \times 10^{10} & 3.128 \times 10^{10} & 3.457 \times 10^{10} \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Y para -45° en [Pa]:

$$[Q_{45-}] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.017 \times 10^{10} & 3.36 \times 10^{10} & -3.133 \times 10^{10} \\ 3.36 \times 10^{10} & 4.007 \times 10^{10} & -3.128 \times 10^{10} \\ -3.133 \times 10^{10} & -3.128 \times 10^{10} & 3.457 \times 10^{10} \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

A continuación se determina las matrices [A], [B] y [D] para un laminado de +45° y -45°, según (3.20).

$$h_0 = -0.006 \text{ m}, \quad h_1 = 0 \text{ m}, \quad h_2 = 0.006 \text{ m}$$

$$[A] = [Q_{45+}] \cdot (h_1 - h_0) + [Q_{45-}] \cdot (h_2 - h_1); \quad [A] = \begin{bmatrix} 4.821 \times 10^8 & 4.032 \times 10^8 & 0 \\ 4.032 \times 10^8 & 4.809 \times 10^8 & 0 \\ 0 & 0 & 4.148 \times 10^8 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$$[B] = \frac{1}{2} \cdot [Q_{45+}] \cdot (h_1^2 - h_0^2) + \frac{1}{2} \cdot [Q_{45-}] \cdot (h_2^2 - h_1^2) ; [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1.128 \times 10^6 \\ 0 & 0 & -1.126 \times 10^6 \\ -1.128 \times 10^6 & -1.126 \times 10^6 & 0 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$$[D] = \frac{1}{3} \cdot [Q_{45+}] \cdot (h_1^3 - h_0^3) + \frac{1}{3} \cdot [Q_{45-}] \cdot (h_2^3 - h_1^3) ; [D] = \begin{bmatrix} 5.785 \times 10^3 & 4.838 \times 10^3 & 0 \\ 4.838 \times 10^3 & 5.771 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 4.978 \times 10^3 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

Se determinan las deformaciones y curvaturas del plano medio según las ecuaciones (3.24)

$$[A_{inv}] = [A]^{-1}$$

$$[A_{inv}] = \begin{bmatrix} 6.943 \times 10^{-9} & -5.821 \times 10^{-9} & 0 \\ -5.821 \times 10^{-9} & 6.96 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 2.411 \times 10^{-9} \end{bmatrix} \text{ [Pa]}^{-1}$$

$$[D^0] = [D] - [B] \cdot [A_{inv}] \cdot [B]$$

$$[D^0] = \begin{bmatrix} 2.719 \times 10^3 & 1.777 \times 10^3 & 0 \\ 1.777 \times 10^3 & 2.714 \times 10^3 & 0 \\ 0 & 0 & 2.107 \times 10^3 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$$[B_1] = -[A_{inv}] \cdot [B] \cdot [D^0]^{-1}$$

$$[B_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.054 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 6.038 \times 10^{-7} \\ 6.054 \times 10^{-7} & 6.038 \times 10^{-7} & 0 \end{bmatrix} \text{ [Pa]}^{-1}$$

$$[C_1] = [B_1]^T$$

$$[C_1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6.054 \times 10^{-7} \\ 0 & 0 & 6.038 \times 10^{-7} \\ 6.054 \times 10^{-7} & 6.038 \times 10^{-7} & 0 \end{bmatrix} [\text{Pa}]^{-1}$$

$$[A_1] = [A_{\text{inv}}] + [A_{\text{inv}}] \cdot [B] \cdot [D^0]^{-1} \cdot [B] \cdot [A_{\text{inv}}]$$

$$[A_1] = \begin{bmatrix} 7.715 \times 10^{-9} & -5.051 \times 10^{-9} & 0 \\ -5.051 \times 10^{-9} & 7.728 \times 10^{-9} & 0 \\ 0 & 0 & 5.696 \times 10^{-9} \end{bmatrix} [\text{Pa}]^{-1}$$

Para una carga de $N_x = 100000 \text{ N/m}$ en la dirección x, y utilizando (3.21) se tiene lo siguiente:

$$\{\epsilon^0\} = [A_1] \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\epsilon^0\} = \begin{Bmatrix} 7.715 \times 10^{-4} \\ -5.051 \times 10^{-4} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{\kappa\} = [C_1] \begin{Bmatrix} N_x \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \{\kappa\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0.061 \end{Bmatrix}$$

Con estas relaciones se puede calcular las deformaciones y rotaciones en el plano medio de la lámina a $+45^\circ$, utilizando la ecuación (3.12)

$$z_j = \frac{-3}{1000} \text{ [m]}$$

$$\{\epsilon_{45+}\} = \{\epsilon^0\} + z_j \cdot \{\kappa\}$$

$$\{\epsilon_{45+}\} = \begin{Bmatrix} 7.715 \times 10^{-4} \\ -5.051 \times 10^{-4} \\ -1.816 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

Y las deformaciones y rotaciones en el plano medio de la lámina a -45° :

$$z_j = \frac{3}{1000} [\text{m}]$$

$$\{\epsilon_{45-}\} = \{\epsilon^0\} + z_j \{\kappa\}$$

$$\{\epsilon_{45-}\} = \begin{Bmatrix} 7.715 \times 10^{-4} \\ -5.051 \times 10^{-4} \\ 1.816 \times 10^{-4} \end{Bmatrix}$$

Se calcula también los esfuerzos en el plano medios de $+45^\circ$, utilizando (3.23).

$$\{\sigma_{45+}\} = [Q_{45+}] \{\epsilon^0\} + z_j [Q_{45+}] \{\kappa\}$$

$$\{\sigma_{45+}\} = \begin{Bmatrix} 8.333 \times 10^6 \\ 0 \\ 2.093 \times 10^6 \end{Bmatrix}$$

Los esfuerzos con respecto a los ejes del material se calculan utilizando las ecuaciones de transformación:

$$\sigma_1 = 8.333 \times 10^6 \cdot \cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 0 \cdot \sin\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 2 \cdot (2.093 \times 10^6) \cdot \left(\cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \sin\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)$$

$$\sigma_1 = 6.259 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_2 = 8.333 \times 10^6 \cdot \sin\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 0 \cdot \cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 - 2 \cdot (2.093 \times 10^6) \cdot \left(\cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \sin\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)$$

$$\sigma_2 = 2.074 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

$$\tau_{12} = [-(8.333 \times 10^6) + 0] \cdot \left(\sin\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right) + 2.093 \times 10^6 \cdot \left(\cos\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 - \sin\left(45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2\right)$$

$$\tau_{12} = -4.167 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

Los esfuerzos en el plano medio de -45° , de igual forma:

$$\{\sigma_{45-}\} = [Q_{45-}] \{\varepsilon^0\} + z_j \cdot [Q_{45-}] \{\kappa\}$$

$$\{\sigma_{45-}\} = \begin{Bmatrix} 8.333 \times 10^6 \\ 0 \\ -2.093 \times 10^6 \end{Bmatrix} \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_1 = 8.333 \times 10^6 \cdot \cos\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 0 \cdot \sin\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 2 \cdot (-2.093 \times 10^6) \cdot \left(\cos\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \sin\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)$$

$$\sigma_1 = 6.259 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

$$\sigma_2 = 8.333 \times 10^6 \cdot \sin\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 0 \cdot \cos\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 + 2 \cdot (-2.093 \times 10^6) \cdot \left(\cos\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \sin\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right)$$

$$\sigma_2 = 2.074 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

$$\tau_{12} = [-(8.333 \times 10^6) + 0] \cdot \left(\sin\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cdot \cos\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)\right) - 2.093 \times 10^6 \cdot \left(\cos\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2 - \sin\left(-45 \cdot \frac{\pi}{180}\right)^2\right)$$

$$\tau_{12} = 4.167 \times 10^6 \text{ [Pa]}$$

Los esfuerzos así determinados deben ser verificados con las teorías de falla correspondientes de los materiales compuestos, para determinar si la placa resistirá el servicio, al que será sometida.

3.3. TEORÍA DE PLACAS DE MINDLIN - REISSNER.

La teoría clásica de placas (CPT), o teoría de placas de Kirchhoff, asume que las deformaciones de cizallamiento transversales (γ_{xz} y γ_{yz}) son nulas. Esta teoría considera que la fibra transversal permanece *recta, inextensible y perpendicular* a la superficie media de la placa después de la deformación, siendo las rotaciones de esta fibra en torno al plano medio calculadas por medio de las derivadas de la deflexión w .

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} \quad \theta_y = \frac{\partial w}{\partial x} \tag{3.26}$$

La CPT es adecuada para el análisis de placas delgadas, especialmente cuando la deformación transversal es despreciable. Las placas de materiales compuestos cuyas relaciones de módulo elástico (E_1/G_{13} y E_1/G_{23}) son próximas a 50 son susceptibles a fallar por corte transversal o delaminación. Por ello se necesita una teoría que tome en cuenta las deformaciones cortantes transversales ^[3.6].

Algunos de los primeros y más importantes trabajos publicados sobre placas son de Reissner en 1945, seguidos por el de Mindlin en 1951. Reissner trabajó con expansiones de campo de esfuerzos, mientras Mindlin se interesó en campos de desplazamientos. Ambos adoptaron coeficientes de corrección del cizallamiento constante, siendo $5/6$, para los trabajos de Reissner, y $\pi^2 / 12$ para los estudios de Mindlin. Otro pionero del estudio en cuestión fue Kirchhoff, que formalizó en 1850 la teoría de placas delgadas.

La teoría de **Mindlin - Reissner** se aplica en placas gruesas y en materiales compuestos, donde las deformaciones cortantes e inercia rotacional son incluidas. La teoría de Mindlin - Reissner considera las siguientes hipótesis:

- No se requiere que la fibra transversal sea perpendicular al eje axial después de la deformación, como se muestra en la figura 3.10. Por lo tanto $\gamma_{xz} \neq 0$ y $\gamma_{yz} \neq 0$.

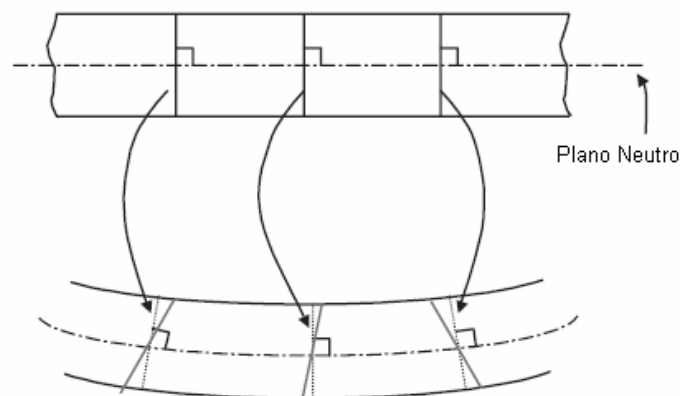


Figura 3.10. Una fibra recta que es perpendicular al plano neutro de la placa antes de la deformación rota, pero permanece recta después de la deformación. ^[3.4]

- Se asume que las tensiones normales perpendiculares a la superficie media se desprecian, $\sigma_z = 0$.
- Todos los puntos sobre una normal a la superficie media antes de la deformación permanecen sobre una línea recta luego de la deformación.
- Los desplazamientos son pequeños respecto al espesor.

- Las fibras rectas y normales a la superficie media antes de la deformación no cambian de longitud después de la deformación.

Los desplazamientos paralelos a la superficie media indeformable, u y v , a una distancia z pueden expresarse como:

$$u(x, y, z) = u^0(x, y) + z \cdot \theta_y(x, y)$$

$$v(x, y, z) = v^0(x, y) - z \cdot \theta_x(x, y)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y)$$

(3.27)

En estas ecuaciones:

θ_x = Rotación con respecto al eje x de la fibra transversal a la superficie media.

θ_y = Rotación con respecto al eje y de la fibra transversal a la superficie media.

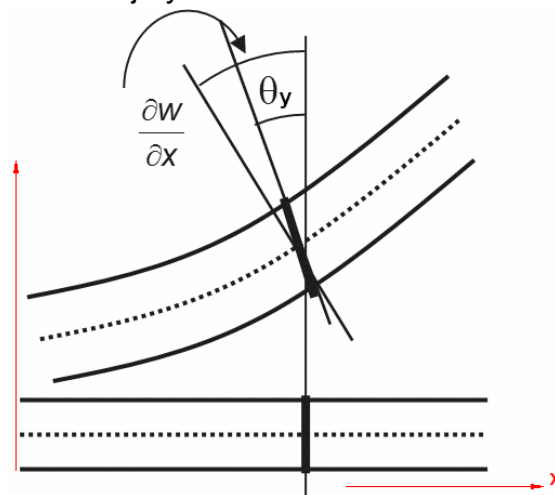


Figura 3.11. Deformación transversal de una placa en la hipótesis de Reissner-Mindlin donde θ_i y dw/dx_i no tienen necesariamente que coincidir, puesto que se considera que las deformaciones transversales no son nulas. ^[3.4]

Derivando se obtienen las deformaciones unitarias.

$$\begin{aligned}
 \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon_x^0 + z \cdot \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\
 \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = \epsilon_y^0 - z \cdot \left(\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \right) \\
 \epsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0
 \end{aligned}
 \tag{3.28}$$

Las deformaciones cortantes son:

$$\begin{aligned}
 \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy}^0 + z \cdot \left(\frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \right) \\
 \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\
 \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x}
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

En representación matricial, las ecuaciones (3.28) y (3.29) se resumen en la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \cdot \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix}
 \end{aligned}
 \tag{3.30}$$

Note que si las deformaciones transversales γ_{xz} y γ_{yz} son despreciables se regresa a la teoría clásica de placas o CPT. Las ecuaciones (3.30) se expresan en forma compacta como:

$$\{\varepsilon\} = \{\varepsilon^0\} + z \cdot \{\kappa\}$$

$$\{\gamma\} = \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.31)$$

siendo:

$$\{\kappa\} = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad \{\varepsilon^0\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (3.32)$$

La relación entre deformación y esfuerzo cortante en una lámina k es expresada mediante:

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}_k \quad (3.33)$$

La matriz de constantes elásticas, referente a la deformación de cizallamiento transversal se la representa mediante $[\bar{Q}^\gamma]$.

$$[\bar{Q}^\gamma] = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Las fuerzas cortantes se obtienen por integración de los esfuerzos cortantes:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz$$

(3.35)

Sustituyendo en (3.35) el producto de la matriz de las constantes elásticas por las deformaciones (3.33) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{z_{k-1}}^{z_k} [\bar{Q} \gamma]_k \begin{Bmatrix} \gamma \end{Bmatrix} dz$$

(3.36)

Para determinar las fuerzas cortantes transversales Q_x y Q_y , se asume una distribución parabólica para los esfuerzos cizallantes interlaminares τ_{xz} y τ_{yz} , siendo el factor de corrección: $5/6$ o $\pi^2/12$ [3.4].

$$[C] = \frac{5}{6} \cdot \sum_{k=1}^n [\bar{Q} \gamma]_k \cdot (z_{k+1} - z_k)$$

(3.37)

La ecuación (3.38) relaciona las deformaciones transversales con las fuerzas cortantes:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{44} & C_{45} \\ C_{45} & C_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.38)$$

Por lo tanto, en presencia de deformación cortante, la ecuación constitutiva del laminado debe incluir la matriz elástica de cortante $[C_{ij}]_{(2 \times 2)}$. Esta matriz es parte de la ecuación constitutiva del material y relaciona los esfuerzos cortantes (Q_x , Q_y) con las deformaciones debido al corte (γ_{xz} , γ_{yz}), según (3.39).

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} & 0 & 0 \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} & 0 & 0 \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} & 0 & 0 \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} & 0 & 0 \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} & 0 & 0 \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{45} & C_{55} \end{bmatrix}}_{[C]} \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (3.39)$$

Las ecuaciones constitutivas en forma compacta, para un laminado que incluye esfuerzos de cizallamiento transversal, se expresan mediante:

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon^0 \\ \kappa \\ \gamma \end{Bmatrix} \quad (3.40)$$

$(8 \times 1) \qquad \qquad (8 \times 8) \qquad (8 \times 1)$

Como se puede ver, resolver manualmente problemas de laminados es relativamente complejo y además estas ecuaciones se utilizan únicamente para placas de geometrías simples. Por lo tanto, si se requiere abordar geometrías complejas se necesita usar métodos variacionales o el método de elementos finitos. Sin embargo, la ecuación (3.40) es muy importante ya que servirá para desarrollar el método de elementos finitos que se verá en el siguiente capítulo. Asimismo, esta ecuación se utiliza en Ansys como alternativa para generar los datos en forma matricial que luego se ingresan al programa.

REFERENCIAS

- 3.1. Shu-Guang Li, *Composites I, Classical Laminate Theory of Composites*, http://personalpages.manchester.ac.uk/staff/shuguang.li/download/CompositesI_Notes_Laminate_Theory.pdf
- 3.2. John Pilling, *Design of Composite Materials and Structures*, <http://www.mse.mtu.edu/~drjohn/>
- 3.3. Jones, R. M. (1999). *Mechanics of Composite Materials*. (2a. ed.). Philadelphia: Taylor & Francis, Inc
- 3.4. Liu, G. R. y Quek, S. S. (2003). *The Finite Element Method: A Practical Course* Oxford: Butterworth-Heinemann.
- 3.5. Mallick, P.K. (1993). *Fiber-Reinforced Composites*. (2a. ed.). New York: Marcel Dekker, Inc.
- 3.6. Ochoa, O.O y Reddy, J.N. (1992). *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Holanda: Kluwer Academic Publishers.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS DE COMPUESTOS LAMINADOS

En el presente capítulo se revisa el procedimiento general para analizar elementos hechos de materiales compuestos usando el método de los elementos finitos. Salvo

en casos especiales donde se analiza probetas a escala microscópica, se debe utilizar las ecuaciones de la micromecánica y macromecánica para definir las constantes mecánicas con lo que se asume que las propiedades del material están teóricamente homogenizadas. Adicionalmente se presentan las ecuaciones diferenciales de la placa laminada, obtenidas mediante la resolución de las ecuaciones de equilibrio que constituyen la llamada **forma fuerte** de las ecuaciones de gobierno. El siguiente paso es determinar la ecuación de la energía de deformación elástica de la placa laminada de material compuesto, que constituye la **forma débil** de las ecuaciones de gobierno. A continuación se efectúa un breve resumen de las funciones de interpolación. En este caso se utilizarán las funciones de interpolación del elemento cuadrangular y se determinarán las matrices de transformación desplazamiento – deformación [B] de extensión, de flexión y de corte con las que se obtendrá la matriz de rigidez del elemento finito, que para ser resuelto implícitamente se integrará utilizando Matlab. Finalmente se resumen algunas características de los principales programas comerciales de propósito general utilizados para analizar problemas mediante el método de los elementos finitos.

4.1. MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

El método de los elementos finitos es una poderosa técnica numérica, que permite resolver diversos problemas de la física e ingeniería en general. Con el método de los elementos finitos se pueden resolver problemas de mecánica de sólidos o estructurales de carácter uni, bi o tridimensional, en regiones geoméricamente complicadas. Con algunas excepciones, la mayor parte de los sistemas en ciencia e ingeniería son de naturaleza *continua* y su comportamiento no se puede expresar en forma precisa en función de un número pequeño de variables discretas.

Aunque la mayor parte de los sistemas continuos son inherentemente tridimensionales, en algunos casos su comportamiento puede describirse adecuadamente por modelos uni o bidimensionales. Así ocurre, por ejemplo, con los problemas de flexión de placas, en los que el análisis se limita al estudio de la deformación del plano medio de la placa, y con todos los sistemas en los que se puede hacer uso de las hipótesis simplificadoras que reducen el estudio al de un problema bidimensional.

Un análisis riguroso de dichos sistemas precisa la integración de las ecuaciones diferenciales que expresan el equilibrio de un elemento diferencial genérico del sistema. Ejemplos de estos sistemas “continuos” son comunes en el análisis estructural de sólidos, placas y láminas en ingeniería civil, mecánica, aeronáutica, naval, materiales compuestos, transferencia de calor, mecánica de fluidos y electromagnetismo, etc.

La característica que ha hecho al método de los elementos finitos tan popular es que puede ser dividido en un conjunto de pasos lógicos y puede ser usado para analizar un amplio rango de problemas solo cambiando los datos de entrada del dominio. Estos pasos se expresan de la siguiente manera:

- Se genera un mallado que abarca toda la estructura, obteniéndose una colección de subdominios simples no intersectantes entre sí, denominados elementos finitos, cuyo comportamiento se especifica mediante un número finito de parámetros asociados a ciertos puntos característicos denominados nodos, ya que es más fácil derivar en cada elemento una solución conveniente aproximada.
- A partir de los principios de formulación variacional:

Principio de energía potencial mínima
 Principio de energía mínima complementaria
 Principio de energía estacionaria de Reissner

O utilizando el método de los residuos ponderados, uno de los cuales es el método de Galerkin, se obtiene la matriz de rigidez parcial $[k_e]$ de cada elemento finito. El principio de energía potencial mínima permite obtener $[k_e]$ resolviendo la integral (4.1).

$$[k_e] = \int [B]^T [C] [B] dV \quad (4.1)$$

donde $[B]$ es la matriz de transformación desplazamientos – deformaciones, V es el volumen del elemento y $[C]$ es la matriz de rigidez característica del material.

- La matriz de rigidez $[K]$ de la estructura es determinada al ensamblar las matrices de rigidez parciales $[k_e]$.
- Se especifica las condiciones de frontera y las cargas aplicadas en la estructura son reemplazadas por un sistema de fuerzas equivalentes, tal que las fuerzas actúan en los puntos nodales.
- El desplazamiento de los puntos nodales es calculado al resolver el sistema de ecuaciones definidos por:

$$[K] \{d\} = \{f\} \quad (4.2)$$

donde $\{ f \}$ es el vector fuerza, que representa las fuerzas nodales equivalentes, ver figura 4.1.

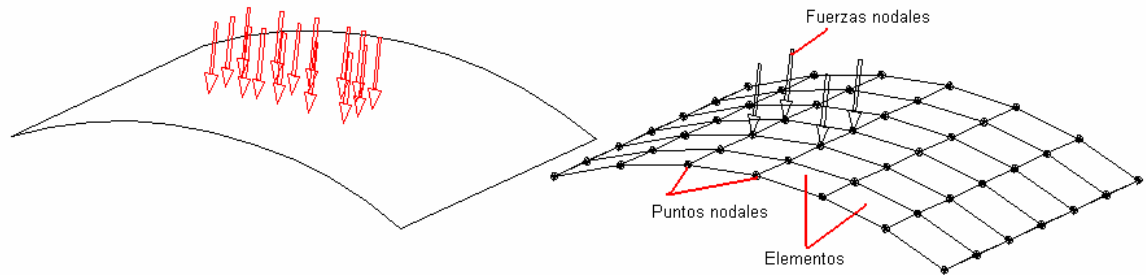


Figura 4.1. Estructura y su mallado en elementos finitos. [4.1]

- El vector $\{ d \}$ es subdividido en subvectores $\{ d_e \}$, que representan el desplazamiento de los puntos **nodales** de un elemento particular.
- El desplazamiento de un punto dentro del elemento es calculado por:

$$\{ U \} = [N] \{ d_e \} \quad (4.3)$$

donde el vector $\{ U \}$ representa el desplazamiento y $[N]$ es la matriz de las funciones de forma.

- La deformación en un punto es calculada por:

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ d_e \} \quad (4.4)$$

donde $[B]$ es la matriz de transformación desplazamientos - deformaciones.

- Las esfuerzos en un punto son calculadas por:

$$\{ \sigma \} = [C] \{ \varepsilon \} \quad (4.5)$$

Los pasos precedentes se aplican a barras, vigas, estructuras y placas fabricadas tanto en materiales convencionales como en materiales compuestos. La única diferencia entre materiales convencionales y materiales compuestos es la matriz de rigidez del material $[C]$ y la ecuación de la energía.

El propósito del presente capítulo es particularizar las características de la resolución de problemas relativos a elementos hechos de materiales compuestos por el método de los elementos finitos.

4.2. HOMOGENIZACIÓN

No es práctico calcular estructuras de materiales compuestos discretizando completamente sus constituyentes, es decir fibra y matriz. Aún con las computadoras más sofisticadas actualmente disponibles es computacionalmente costoso y materialmente imposible calcular en ese nivel de detalle. Sin embargo, cuando se requiere analizar el comportamiento al micronivel de pequeñas probetas del material se puede modelar las fibras embebidas en la matriz (ver figura 4.2). Adicionalmente, se realizan investigaciones en las cuales se utiliza microfotografías para evaluar los efectos del hilado, o de vacíos en la matriz (ver figura 4.3).

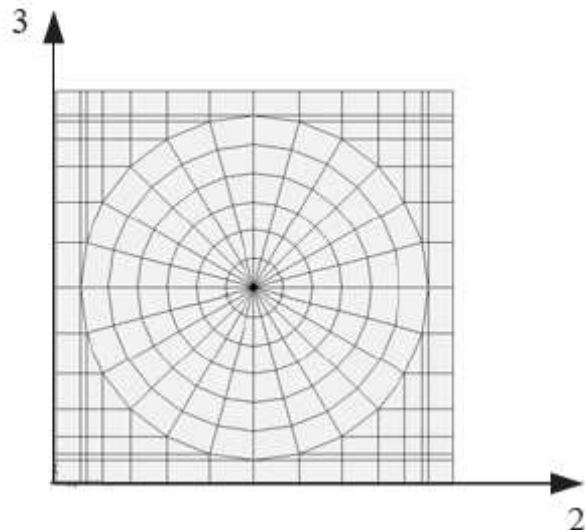


Figura 4.2. Discretización fibra-matriz. ²[4.2]

En aplicaciones prácticas de cálculo de materiales compuestos por el método de elementos finitos, es necesario idealizar los constituyentes mediante la obtención de las ecuaciones constitutivas del laminado, homogenizando así las propiedades del material.

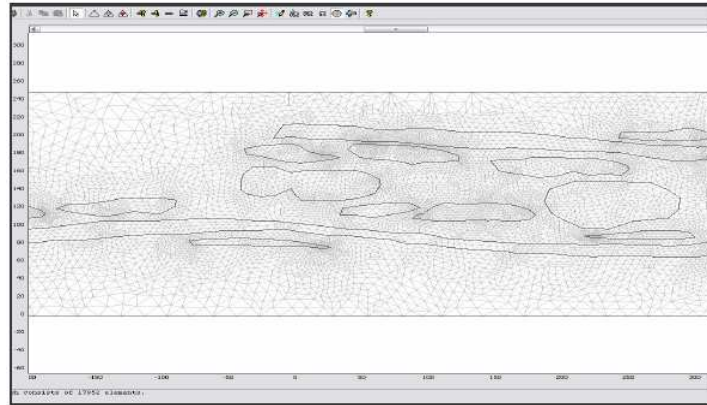


Figura 4.3 Geometría real de un tejido evaluada en COMSOL.^[4.3]

Debido a que la discretización de un laminado es un procedimiento sencillo, se prefiere analizar las estructuras reales usando membranas bidimensionales 2D. Sin embargo, siempre se puede emplear un análisis total 3D en regiones altamente esforzadas o regiones de especial interés tales como juntas y áreas donde los efectos de borde libre son prominentes. En un típico análisis bidimensional de estructuras laminadas, el laminado es modelado como un conjunto de membranas pegadas entre sí, desarrollando las matrices de rigidez y de acoplamiento derivadas de la teoría clásica de placas laminadas o de la teoría de placas de Mindlin – Reissner. En el análisis de compuestos, estas matrices de rigidez son las matrices **[A]**, **[B]** y **[D]**, las mismas que fueron definidas según las ecuaciones (3.20).

4.3. ECUACIONES DE EQUILIBRIO

Las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo sólido pueden ser derivadas usando tanto los principios de energía como los de mecánica vectorial (Leyes de Newton). Los principios de energía requieren la minimización de la energía potencial total para derivar las ecuaciones de equilibrio y las condiciones de frontera asociadas.

Para obtener las ecuaciones de equilibrio de un cuerpo sólido deformable, se debe examinar el estado general de esfuerzos en un punto arbitrario en el cuerpo, por medio de un elemento diferencial. Todas las componentes de los esfuerzos varían espacialmente y estas variaciones pueden ser expresadas en términos de la expansión de primer orden en series de Taylor (figura 4.4). Entonces las condiciones de equilibrio en la dirección **x** e **y** resultan en:

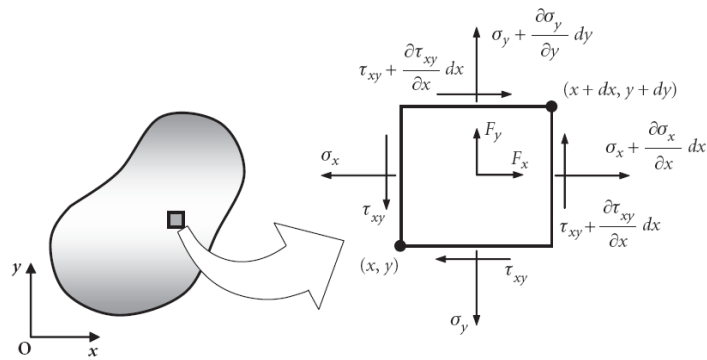


Figura 4.4. Esfuerzos en una superficie infinitesimal. [4.4]

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + F_y = 0$$

(4.7)

Extrapolando las ecuaciones anteriores al campo tridimensional, se puede obtener las siguientes expresiones, sumando fuerzas y momentos en la dirección (x, y, z). Las ecuaciones de equilibrio de elasticidad para el caso estático son:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + F_z = 0$$

(4.8)

Dada la delgada geometría de los laminados e integrando las ecuaciones (4.8) a lo largo del espesor, como en (3.16), se obtiene:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + F_x = 0$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + F_y = 0$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + Q = 0$$

(4.9)

4.4. FORMULACIÓN DE ELEMENTO FINITO MEDIANTE EL MÉTODO DE LA ENERGÍA

El sistema de ecuaciones desarrollado en (4.9) constituye la forma fuerte del sistema de ecuaciones de gobierno para placas. La forma fuerte, en contraste con la forma débil, requiere una continuidad estricta en las variables de campo (desplazamientos u , v y w). Obtener la solución exacta para una forma fuerte de sistema de ecuaciones diferenciales es usualmente muy complicado para problemas prácticos de ingeniería. El método de diferencias finitas puede ser usado para resolver sistemas de ecuaciones de la forma fuerte en forma aproximada. Este método usualmente trabaja bien para problemas con formas regulares simples.

Una forma débil o forma integral es usualmente formulada usando uno de los siguientes métodos:

- Método de los residuos ponderados
- Principios de energía

El método de residuos ponderados es una herramienta aplicable para resolver todo tipo de problemas de ecuaciones en derivadas parciales. El método de residuos ponderados suele estar orientado a la formulación de problemas de transferencia de calor. En la literatura disponible existe información sobre ambos métodos para resolver problemas de materiales compuestos.

Los principios de energía o variacionales están más adaptados a la resolución de problemas de mecánica de sólidos y estructuras. Los métodos de energía o variacionales se clasifican en:

- Principio de energía potencial mínima
- Principio de mínima energía complementaria
- Principio de energía estacionaria de Reissner

4.4.1. PRINCIPIO DE ENERGÍA POTENCIAL MÍNIMA

El principio de energía potencial mínima se enuncia así:

“Para sistemas conservativos, de todos los campos de desplazamiento cinemáticamente admisibles (u , v y w), aquellos que satisfacen las condiciones de equilibrio, extremizan la energía potencial total Π_p . Si la condición extrema es un mínimo, el estado de equilibrio es estable.”^[4.5]

Se consideran sistemas conservativos aquellos en los cuales el potencial de trabajo es independiente de la trayectoria. Es decir, si el sistema se desplaza desde una configuración dada y se trae de regreso al estado inicial, las fuerzas efectúan un trabajo nulo, independiente de la trayectoria. Los desplazamientos cinemáticamente admisibles son aquellos que satisfacen la naturaleza de valor único de los desplazamientos (compatibilidad) y las condiciones de frontera.

La energía potencial total Π_p de un cuerpo elástico en reposo se define como la diferencia entre la energía potencial de deformación elástica Π y el trabajo realizado por las fuerzas externas W_f .

$$\Pi_p = \Pi - W_f \quad (4.10)$$

Para un cuerpo elástico lineal la energía de deformación unitaria total Π está dada por (4.11):

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{ \epsilon \}^T \cdot \{ \sigma \} \cdot dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{ \epsilon \}^T \cdot [C] \cdot \{ \epsilon \} \cdot dV \quad (4.11)$$

donde V representa el volumen del sólido, $[C]$ es la matriz de rigidez del material, $\{ \epsilon \}$ es el vector de deformaciones y $\{ \sigma \}$ es el vector de tensiones.

El trabajo realizado por las fuerzas externas se obtiene mediante (4.12):

$$W_f = \int_V \{ U \}^T \{ f_b \} \cdot dV + \int_{S_f} \{ U \}^T \{ f_s \} \cdot dS_f \quad (4.12)$$

donde $\{ U \}$ representa el vector de desplazamientos $\{ u, v, w \}^T$ dentro del elemento, S_f representa la superficie del sólido en el cual las fuerzas de superficie son

$$\{ \quad \}$$

prescritas, f_b es el vector de fuerzas volumétricas y $\{f_s\}$ es el vector de fuerzas superficiales.

Para una placa de material compuesto lineal, se puede aplicar el principio indicado y se tiene que:

$$\Pi_p = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_{S_f} \{U\}^T \{f_s\} dS_f \quad (4.13)$$

La hipótesis de Mindlin - Reissner de describir el comportamiento de la placa por la superficie media, permite que la integral potencial total sea reducida a una ecuación de superficie. Desarrollando la ecuación (4.11) se obtiene:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dV = \frac{1}{2} \int_{S_f} \int_z \{\epsilon\}^T \{\sigma\} dz dS_f \quad (4.14)$$

Reemplazando en (4.14) las ecuaciones definidas en (3.12), (3.25) y (3.37) se obtiene:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_{S_f} \left[\int_z \{\epsilon^0 + z \cdot \kappa\}^T \cdot \left[\bar{Q}_{ij} \right]_k \cdot \{\epsilon^0 + z \cdot \kappa\} dz + \int_z \{\gamma\}^T \cdot \left[\bar{Q} \gamma \right]_k \cdot \{\gamma\} dz \right] \cdot dS_f \quad (4.15)$$

Desarrollando e integrando la ecuación (4.15) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \int \left\{ \{\epsilon^0\}^T \cdot \sum_{k=1}^n \left[\overline{Q}_{ij} \right]_k \cdot (z_k - z_{k-1}) \right\} \cdot \{\epsilon^0\} \, dS_f + \\
& + \frac{1}{2} \int \left\{ \{\epsilon^0\}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\left[\overline{Q}_{ij} \right]_k \cdot [z_k^2 - z_{k-1}^2] \right] \right\} \cdot \{\kappa\} \, dS_f \\
& + \frac{1}{2} \int \left\{ \{\kappa\}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\left[\overline{Q}_{ij} \right]_k \cdot [(z_k)^2 - (z_{k-1})^2] \right] \right\} \cdot \{\epsilon^0\} \, dS_f \\
& + \frac{1}{2} \int \left\{ \{\kappa\}^T \cdot \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^n \left[\left[\overline{Q}_{ij} \right]_k \cdot [(z_k)^3 - (z_{k-1})^3] \right] \right\} \cdot \{\kappa\} \, dS_f \\
& \{ \gamma \} + \frac{1}{2} \int \left\{ \{\gamma\}^T \cdot \sum_{k=1}^n \left[\left[\overline{Q}^{\gamma} \right]_k \cdot [z_k - z_{k-1}] \right] \right\} \cdot \{\gamma\} \, dS_f
\end{aligned}
\tag{4.16}$$

Se generan entonces cinco integrales de superficie, cuya escritura puede ser simplificada si se substituye por las matrices [A], [B], [C] y [D], desarrolladas en el capítulo 3, por lo tanto la energía potencial de deformación elástica para un material compuesto es:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int \left[\{\epsilon^0\}^T \cdot [A] \cdot \{\epsilon^0\} + \{\epsilon^0\}^T \cdot [B] \cdot \{\kappa\} + \{\kappa\}^T \cdot [D] \cdot \{\epsilon^0\} + \{\gamma\}^T \cdot [C] \cdot \{\gamma\} \right] dS_f
\tag{4.17}$$

siendo:

$\{\epsilon^0\}$, $\{\kappa\}$ y $\{\gamma\}$: Vectores referentes a las deformaciones normales, curvaturas y curvaturas producidas por el cizallamiento transversal.

$[Q_{ij}]_k$ y $[Q^Y]_k$: Matrices de constantes elásticas referentes a las deformaciones de tensión, flexión y cizallamiento transversal.

[A], [B], [C], [D]: Matrices elásticas de tensión, tensión / flexión, corte y flexión definidas en (3.20).

4.5. FUNCIONES DE FORMA

El campo de desplazamiento desconocido dentro de un elemento finito puede ser interpolado por una distribución aproximada. Esta distribución se vuelve más exacta conforme se consideran más elementos en el modelo y pueden ser expresadas como funciones polinomiales que pueden ser fácilmente derivadas e integradas. Por ejemplo, para el caso más simple de elemento finito que es el elemento barra, los desplazamientos son expresados en términos de los desplazamientos nodales $\{u_1, u_2\}$ por medio del polinomio de primer grado.

$$U(x) = \left(1 - \frac{x}{l}\right) \cdot u_1 + \left(\frac{x}{l}\right) \cdot u_2 \quad (4.18)$$

donde l es la longitud del elemento finito, x es la variable independiente y las funciones de interpolación N_1 y N_2 son:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{l} \quad N_2 = \frac{x}{l} \quad (4.19)$$

La figura (4.5) representa la interpolación lineal del campo de desplazamiento dentro del elemento barra:

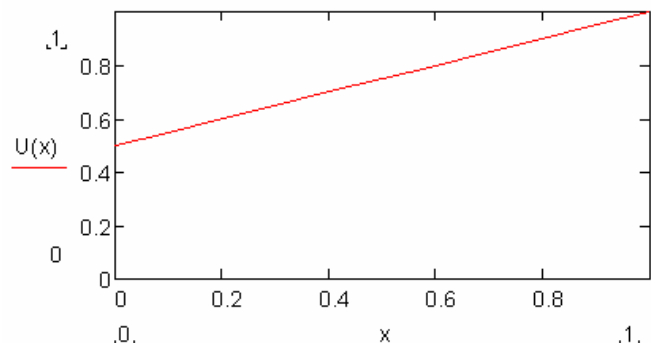


Figura 4.5. Interpolación lineal del campo de desplazamientos en una barra

En el caso de problemas en dos dimensiones se utilizan elementos triangulares y las funciones de interpolación son bidimensionales ^[4.6]:

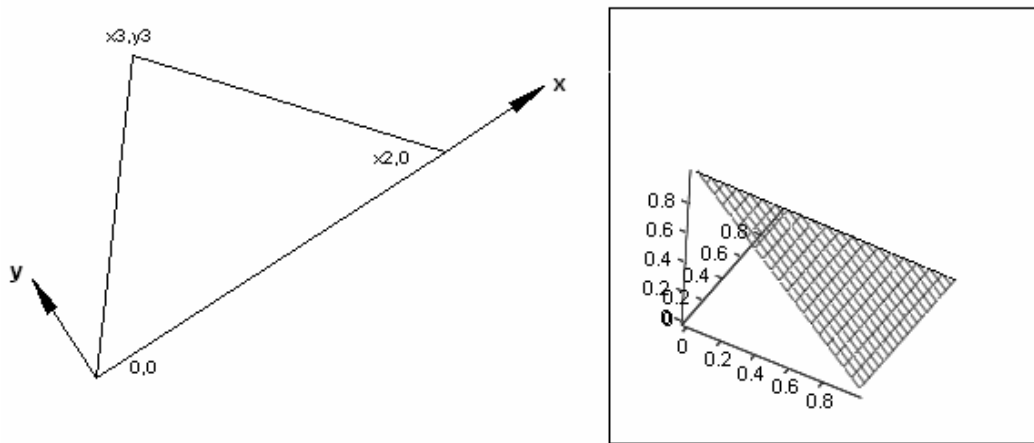
$$N1(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [(x_2 \cdot y_3 - x_3 \cdot y_2) + (y_2 - y_3) \cdot x + (x_3 - x_2) \cdot y]$$

$$N2(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [(x_3 \cdot y_1 - x_1 \cdot y_3) + (y_3 - y_1) \cdot x + (x_1 - x_3) \cdot y]$$

$$N3(x, y) = \frac{1}{2 \cdot A} \cdot [(x_1 \cdot y_2 - x_2 \cdot y_1) + (y_1 - y_2) \cdot x + (x_2 - x_1) \cdot y]$$

(4.20)

donde A es el área del elemento triangular de la figura 4.6 y está dada por el determinante de (4.21):



N1

Figura 4.6. Elemento triangular de tres nodos con el sistema de coordenadas atado al elemento y el gráfico de la función de forma para N1.

$$A = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{bmatrix}$$

(4.21)

Hay dos tipos básicos de funciones de interpolación que son usadas en análisis de elementos finitos. La interpolación de **Lagrange**, en la cual únicamente la función es interpolada, y la interpolación de **Hermite**, en la cual la función y sus derivadas son interpoladas. Por ejemplo, en la interpolación de Hermite se puede exigir que la primera derivada del desplazamiento axial sea continua. Los elementos finitos desarrollados usando la interpolación de Lagrange son llamados elementos C^0 , y los elementos finitos desarrollados usando la interpolación Hermite son llamados elementos C^m , donde $m > 0$ es el orden de las derivadas incluidas en la interpolación.

Como en la teoría de Mindlin - Reissner las curvaturas (θ_x y θ_y) no son derivadas del desplazamiento vertical w (ver 3.28), las funciones de interpolación solo requieren continuidades C^0 en los desplazamientos y las rotaciones. Por el contrario, en la teoría de Kirchhoff, se exigen continuidades en las primeras derivadas del desplazamiento (clase C^1). En otras palabras, es más fácil desarrollar los elementos finitos utilizando la teoría de Mindlin – Reissner.

Se seleccionará el elemento rectangular, puesto que la matriz de deformación no es constante, como sucede en los elementos triangulares. Esto genera una presentación más realista en las deformaciones y por lo tanto en la distribución de los esfuerzos a lo largo de la placa. La formulación de las ecuaciones para los elementos rectangulares es más simple comparada con los elementos triangulares, debido a que la función de forma puede formarse muy fácilmente debido a la regularidad en la forma del elemento rectangular.

Considere un dominio bidimensional. El dominio es discretizado en un número de elementos con cuatro nodos y cuatro lados rectos. Se numera los nodos en una dirección contraria a las manecillas del reloj, puesto que cada nodo tiene dos grados de libertad y el número total de grados de libertad para un elemento lineal rectangular será de ocho.

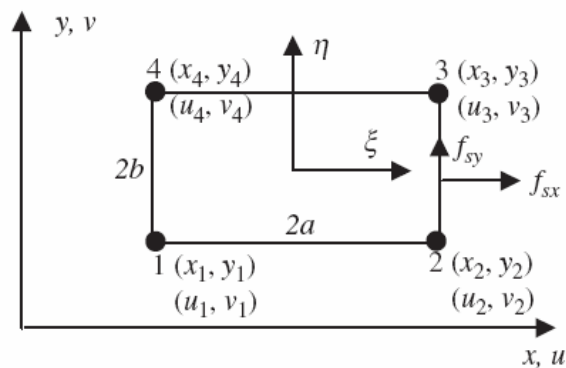


Figura 4.5. Elemento rectangular y su sistema de coordenadas. [4.7]

La dimensión del elemento es definida como $2a \times 2b \times h$. Se define un sistema local de coordenadas (ξ, η) con su origen localizado en el centro de elemento rectangular. La relación entre las coordenadas físicas (x, y) y el sistema local de coordenadas naturales (ξ, η) está dado por:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \qquad \eta = \frac{y - y_c}{b}$$

(4.22)

donde x_c y y_c son las coordenadas del centro del elemento y se obtiene:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{1}{a} \quad \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{b} \quad (4.23)$$

Un elemento diferencial de área se obtiene mediante:

$$dx \cdot dy = a \cdot b \cdot d\xi \cdot d\eta \quad (4.24)$$

Por lo tanto, para integrar una función $f(x, y)$ sobre un elemento rectangular, se puede efectuar la siguiente transformación al sistema de coordenadas naturales:

$$\int \int_{S_f} f(x, y) dx dy = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a \cdot b \cdot g(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.25)$$

Las funciones de forma expresadas en coordenadas naturales deben satisfacer los mismos requisitos que en coordenadas cartesianas. Por consiguiente, en elementos de clase C^0 basta que las funciones cumplan:

a) Condición de compatibilidad nodal (ver figura 4.6).

$$N_i(\xi_j, \eta_j) = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{cases} (i = j) \\ (i \neq j) \end{cases} \quad (4.26)$$

b) Condición de sólido rígido^[4.8]

$$\sum_{i=1}^n [N_i(\xi, \eta)] = 1 \quad (4.27)$$

Debido a la regularidad del elemento rectangular, las funciones de forma pueden ser obtenidas esencialmente por inspección y escritas directamente como sigue:

$$N_1 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 - \eta)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 - \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4} \cdot (1 + \xi) \cdot (1 + \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4} \cdot (1 - \xi) \cdot (1 + \eta)$$

(4.28)

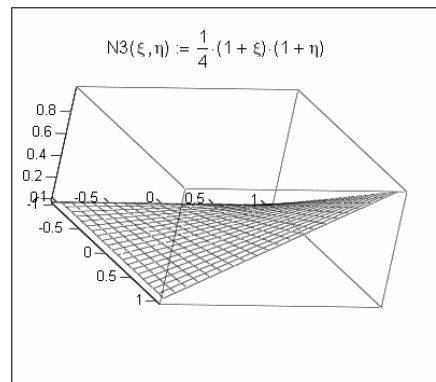


Figura 4.6. Función de interpolación N_3 .

La matriz de interpolación para un elemento cuadrangular con ocho grados de libertad tiene la forma siguiente:

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

El desplazamiento $\{U(x, y)\}$ es función de las coordenadas x e y , y expresa el desplazamiento en cualquier punto dentro del elemento finito mediante la matriz de funciones de interpolación $[N(x, y)]$ y el vector de desplazamiento en los nodos $\{d_e\}$:

$$\{U(x, y)\} = [N(x, y)] \{d_e\} \quad (4.30)$$

El vector desplazamiento $\{d_e\}$ tiene el arreglo siguiente:

$$\{d_e\} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{desplazamiento nodo 1} \\ \text{desplazamiento nodo 2} \\ \text{desplazamiento nodo 3} \\ \vdots \\ \text{desplazamiento nodo } \mathbf{n} \end{pmatrix} \quad (4.31)$$

La ecuación (4.30), se la escribe en forma explícita según (4.32):

$$U(x,y) = \begin{bmatrix} N_1 & N_2 & N_3 & N_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N_1 & N_2 & N_3 & N_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{pmatrix} = \begin{cases} N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4 \\ N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4 \end{cases}$$

(4.32)

Los desplazamientos $u(x, y)$ y $v(x, y)$ son interpolados mediante:

$$u(x, y) = N_1 \cdot u_1 + N_2 \cdot u_2 + N_3 \cdot u_3 + N_4 \cdot u_4$$

$$v(x, y) = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot v_3 + N_4 \cdot v_4$$

(4.33)

Adicionalmente, en la tabla (4.1) se indica otras funciones de interpolación que se usan con elementos finitos más complejos. Las funciones serendípitas son creadas por métodos de inspección, y no necesitan de nodos internos como las funciones lagrangianas:

Tabla 4.1. Las funciones de interpolación de Lagrange y Hermite. [4.7]

Tipo de elemento	Funciones de interpolación	Características
Elementos de Lagrange		
Lineales	$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$	Nodo i (i=1...,4)
Cuadráticos	$\frac{1}{4}\xi\xi_i(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)$ $\eta\eta_i$ $\frac{1}{2}\eta\eta_i(1+\eta\eta_i)(1\xi^2)$ $\frac{1}{2}\xi\xi_i(1+\xi\xi_i)(1\eta^2)$ $(1\xi^2)(1\eta^2)$	Nodo esquinero Nodo lateral $\xi_i = 0$ Nodo lateral $\eta_i = 0$ Nodo interior
Elemento serendípito cuadrático	$\frac{1}{4}(1+\xi\xi_i)(1+\eta\eta_i)(\xi\xi_i + \eta\eta_i + 1)$ $\frac{1}{2}(1\xi^2)(1+\eta\eta_i)$ $\frac{1}{2}(1+\xi\xi_i)(1\eta^2)$	Nodo esquinero Nodo lateral $\xi_i = 0$ Nodo lateral $\eta_i = 0$
Elementos cúbicos de Hermite		
Funciones de interpolación de la variable u	$\frac{1}{16}(\xi+\xi_i)^2(\xi-\xi_i-2)(\eta+\eta_i)^2(\eta-\eta_i-2)$ $\frac{1}{16}\xi_i(\xi+\xi_i)^2(\xi-\xi_i-1)(\eta+\eta_i)^2(\eta-\eta_i-2)$ $\frac{1}{16}(\xi+\xi_i)^2(\xi-\xi_i-2)\eta_i(\eta+\eta_i)^2(\eta-\eta_i-1)$ $\frac{1}{16}\xi_i(\xi+\xi_i)^2(\xi-\xi_i-1)(\eta+\eta_i)^2(\eta-\eta_i-1)\eta_i$	Para nodo j (i=1...,4)
Funciones de interpolación para la variable u Derivada $\partial u/\partial \xi$ Derivada $\partial u/\partial \eta$	$\frac{1}{2}(\xi_0+1)(\eta_0+1)(2+\xi_0+\eta_0-\xi^2-\eta^2)$ $\frac{1}{2}\xi_i(\xi_0+1)^2(\xi_0-1)(\eta_0+1)$ $\frac{1}{2}\eta_i(\xi_0+1)(\eta_0-1)(\eta_0+1)^2$ $\xi = (x-x_c)/a \quad \eta = (y-y_c)/b$ $\xi_0 = \xi\xi_i \quad \eta_0 = \eta\eta_i$	Para nodo i (i=1...,4) (2a y 2b son los lados del elemento rectangular x_c y y_c los coordenadas del centro del elemento

4.6. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO – DEFORMACIÓN

A modo de ejemplo se revisa el siguiente procedimiento de transformación de las deformaciones para el caso de esfuerzos planos definidas mediante:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \\ \epsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (4.34)$$

La forma matricial se simplifica a:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = [L] \cdot (U) \quad (4.35)$$

donde [L] es la matriz del operador diferencial y reemplazando (4.30) en (4.35) se obtiene:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = [L] \cdot [N(x, y)] \cdot \{d_e\} = [B] \cdot \{d_e\} \quad (4.36)$$

Por lo tanto las deformaciones pueden ser descritas mediante:

$$\{ \epsilon \} = [B] \{ d_e \} \quad (4.37)$$

donde $[B]$ es la matriz de deformación, que se determina al obtener las derivadas parciales de las funciones de forma, según (4.38):

$$[B] = [L][N(x, y)] \quad (4.38)$$

A continuación se define el vector de desplazamientos nodales $\{d_e\}$ y se obtienen las tres matrices de deformación $[B]$ para una placa de materiales compuestos. Se considera la siguiente notación para el vector de desplazamientos nodales ^[4.9]:

$\{d_e\}$ (20x1): vector de desplazamientos nodales del elemento finito placa de dimensiones (20 x 1), por cuanto se tiene 5 grados de libertad en los cuatro nodos y es igual a:

$$\{d_e\}^T = \{u_1 \ u_2 \ u_3 \ u_4 \ v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_4 \ w_1 \ w_2 \ w_3 \ w_4 \ \theta_{x1} \ \theta_{x2} \ \theta_{x3} \ \theta_{x4} \ \theta_{y1} \ \theta_{y2} \ \theta_{y3} \ \theta_{y4}\} \quad (4.39)$$

donde u_i , v_i y w_i son los desplazamientos lineales y θ_{xi} y θ_{yi} son las rotaciones con respecto a los ejes x , y en los nodos.

Se definen las matrices de transformación desplazamiento – deformación como:

$[B_t]$ (3x20): matriz de transformación desplazamiento - deformación de tensión

$[B_f]$ (3x20): matriz de transformación desplazamiento - deformación de flexión

$[B_c]$ (2x20): matriz de transformación desplazamiento - deformación de corte

Los vectores de deformación de la ecuación de la energía (4.17) se reemplazan en (4.37) de la siguiente manera:

$$\{\varepsilon^0\} = [B_t] \{d_e\}$$

$$\{\kappa\} = [B_f] \{d_e\}$$

$$\{\gamma\} = [B_c] \{d_e\}$$

(4.40)

4.6.1. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO - DEFORMACIÓN DE EXTENSIÓN

En base del procedimiento de transformación visto en 4.6 se transforman las deformaciones de la superficie media de la siguiente manera:

$$\{\varepsilon^0\} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u^0}{\partial x} \\ \frac{\partial v^0}{\partial y} \\ \frac{\partial u^0}{\partial y} + \frac{\partial v^0}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{Bmatrix} = [L] \begin{Bmatrix} u^0 \\ v^0 \end{Bmatrix} = [L][N]\{d_e\}$$

(4.41)

$$\text{O en forma simplificada: } \{\varepsilon^0\} = [L][N]\{d_e\} = [B_t]\{d_e\} \quad (4.42)$$

donde $[B_t]$ es la matriz de transformación desplazamiento – deformación de extensión, la cual se obtiene mediante:

$$[B_t] = [L][N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} N1 & N2 & N3 & N4 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & N1 & N2 & N3 & N4 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

(4.42)

Utilizando las ecuaciones (4.28) y hallando sus derivadas parciales se obtiene la matriz $[B_t]_{(3 \times 20)}$ que es igual a:

$$[B_t] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -\frac{1-\eta}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\eta}{a} & -\frac{1+\eta}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\eta}{a} & -\frac{1+\eta}{a} & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

4.6.2. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO DEFORMACIÓN DE FLEXIÓN

Las curvaturas correspondientes pueden ser expresadas según la ecuación (3.30) mediante:

$$[\kappa] = \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} - \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [L] \cdot \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [L] \cdot [N] \cdot \{ d_e \} \quad (4.44)$$

O en forma simplificada

$$\{ k \} = [L] [N] \{ d_e \} = [B_f] \{ d_e \} \quad (4.45)$$

donde $[B_f]$ es la matriz de transformación desplazamiento – deformación de flexión, la cual se obtiene mediante:

$$[B_f] = [L] \cdot [N] = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & \dots & N1 & N2 & N3 & N4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N1 & N2 & N3 & N4 \end{bmatrix} \quad (4.46)$$

Por lo tanto la matriz $[B_f]_{(3 \times 20)}$ es:

$$[B_f] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1-\eta}{a} & \frac{1-\eta}{a} & \frac{1+\eta}{a} & -\frac{1+\eta}{a} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1-\xi}{b} & \frac{1+\xi}{b} & -\frac{1+\xi}{b} & -\frac{1-\xi}{b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{1-\eta}{a} & -\frac{1-\eta}{a} & -\frac{1+\eta}{a} & \frac{1+\eta}{a} & -\frac{1-\xi}{b} & -\frac{1+\xi}{b} & \frac{1+\xi}{b} & \frac{1-\xi}{b} & 0 \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

En la ecuación anterior se aprecian las últimas columnas de la matriz para visualización.

4.6.3. MATRIZ DE TRANSFORMACIÓN DESPLAZAMIENTO DEFORMACIÓN DE CORTE

Las deformaciones correspondientes pueden ser expresadas mediante 3.20:

$$\begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [L] \cdot \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [L] \cdot [N] \cdot \{ d_e \} \quad (4.48)$$

O en forma simplificada

$$\{ g \} = [L] [N] \{ d_e \} = [B_c] \{ d_e \} \quad (4.49)$$

donde $[B_c]$ es la matriz de transformación desplazamiento – deformación de corte, la cual se obtiene mediante:

$$[B_c] = [L] [N] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & -1 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \dots & N1 & N2 & N3 & N4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & N1 & N2 & N3 & N4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & N1 & N2 & N3 & N4 \end{bmatrix} \quad (4.50)$$

Por lo tanto, la matriz transpuesta de $[B_c]_{(3 \times 20)}$ es (4.51), se utiliza la matriz en forma transpuesta para visualizar de mejor forma en el formato.

$$[B_c]^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ \frac{\xi-1}{4 \cdot b} & \frac{\eta-1}{4 \cdot a} \\ -\frac{\xi+1}{4 \cdot b} & -\frac{\eta-1}{4 \cdot a} \\ \frac{\xi+1}{4 \cdot b} & \frac{\eta+1}{4 \cdot a} \\ -\frac{\xi-1}{4 \cdot b} & -\frac{\eta+1}{4 \cdot a} \\ -(\eta-1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4} \right) & 0 \\ (\eta-1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} + \frac{1}{4} \right) & 0 \\ -(\eta+1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} + \frac{1}{4} \right) & 0 \\ (\eta+1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4} \right) & 0 \\ 0 & (\eta-1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4} \right) \\ 0 & -(\eta-1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ 0 & (\eta+1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} + \frac{1}{4} \right) \\ 0 & -(\eta+1) \cdot \left(\frac{\xi}{4} - \frac{1}{4} \right) \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

4.7. MATRIZ DE RIGIDEZ DEL ELEMENTO

Una vez que las matrices de transformación $[B] = [L] [N]$ son determinadas, la formulación de elemento finito para un elemento puede ser formulada usando el siguiente proceso. Se parte de la ecuación de la energía de deformación elástica siguiente:

$$\Pi = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{ \varepsilon \}^T \cdot \sigma \, dV = \frac{1}{2} \cdot \int_V \{ \varepsilon \}^T \cdot [C] \cdot \{ \varepsilon \} \, dV \quad (4.52)$$

Se substituye el vector $\{ \varepsilon \}$ por la expresión (4.37):

$$\{ \varepsilon \} = [B] \{ d_e \} \quad (4.53)$$

teniendo:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V [[B] \{ d_e \}]^T \cdot [C] \cdot [[B] \{ d_e \}] dV \quad (4.54)$$

El vector constante de deformación $\{ d_e \}$ puede salir de la integral:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ d_e \}^T \cdot \left[\int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [B] dV \right] \cdot \{ d_e \} \quad (4.55)$$

Por la tanto, la matriz de rigidez del elemento $[k_e]$ es:

$$[k_e] = \int_V [B]^T \cdot [C] \cdot [B] dV \quad (4.56)$$

La integral de volumen se puede cambiar a integral de superficie mediante:

$$[k_e] = \int_{S_f} \left(\int_0^h dz \right) [[B]^T \cdot [C] \cdot [B]] dS_f = h \cdot \int_{S_f} [[B]^T \cdot [C] \cdot [B]] dS_f \quad (4.57)$$

La ecuación de la energía se reescribe así:

$$\Pi = \frac{1}{2} \{ d_e \}^T \cdot [k_e] \cdot \{ d_e \} \quad (4.58)$$

En el caso del elemento finito para materiales compuestos se reemplaza en la ecuación de la energía (4.17) las correspondientes matrices de transformación $[B]$:

$$\begin{aligned}
\Pi = \frac{1}{2} \int_{S_f} & \{d_e\}^T \cdot [B_t]^T \cdot [A] \cdot [B_t] \{d_e\} + \{d_e\}^T \cdot [B_t]^T \cdot [B] \cdot [B_f] \cdot \{d_e\} + \dots \\
& + \{d_e\}^T \cdot [B_f]^T \cdot [B] \cdot [B_t] \cdot \{d_e\} + \{d_e\}^T \cdot [B_f]^T \cdot [D] \cdot [B_f] \cdot \{d_e\} + \dots \\
& + \{d_e\}^T \cdot [B_c]^T \cdot [C] \cdot [B_c] \cdot \{d_e\} dS_f
\end{aligned}
\tag{4.59}$$

Obteniendo factor común $\{d_e\}$, la matriz de rigidez del elemento queda:

$$\begin{aligned}
[K_e] = \int_{S_f} & \left[[B_t]^T \cdot [A] \cdot [B_t] + [B_t]^T \cdot [B] \cdot [B_f] + [B_f]^T \cdot [B] \cdot [B_t] + \right. \\
& \left. + [B_f]^T \cdot [B] \cdot [B_t] + [B_f]^T \cdot [D] \cdot [B_f] + [B_c]^T \cdot [C] \cdot [B_c] \right] dS_f
\end{aligned}
\tag{4.60}$$

Se puede comprobar que las expresiones anteriores generan la versión simplificada de la matriz de rigidez:

$$[K_e] = \int_{S_f} \left[[B_t] \ [B_f] \ [B_c] \right]^T \cdot \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [C] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B_t] \\ [B_f] \\ [B_c] \end{bmatrix} dS_f
\tag{4.61}$$

Mediante la transformación de coordenadas y siendo a y b los lados del elemento finito rectangular se obtiene la siguiente integral:

$$[K_e] = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a \cdot b \cdot \left[[B_t] \ [B_f] \ [B_c] \right]^T \cdot \begin{bmatrix} [A] & [B] & 0 \\ [B] & [D] & 0 \\ 0 & 0 & [C] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [B_t] \\ [B_f] \\ [B_c] \end{bmatrix} d\xi d\eta
\tag{4.62}$$

Las matrices de transformación se ensamblan de la forma siguiente y la versión transpuesta $[[B_t][B_f][B_c]]^T$ es (4.63):

$$[[B_t][B_f][B_c]]^T = \begin{bmatrix} \frac{\eta-1}{4a} & 0 & \frac{\xi-1}{4b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\eta-1}{4a} & 0 & -\frac{\xi+1}{4b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\eta+1}{4a} & 0 & \frac{\xi+1}{4b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\eta+1}{4a} & 0 & -\frac{\xi-1}{4b} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi-1}{4b} & \frac{\eta-1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\xi+1}{4b} & -\frac{\eta-1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\xi+1}{4b} & \frac{\eta+1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\xi-1}{4b} & -\frac{\eta+1}{4a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi-1}{4b} & \frac{\eta-1}{4a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi+1}{4b} & -\frac{\eta-1}{4a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi+1}{4b} & \frac{\eta+1}{4a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi-1}{4b} & -\frac{\eta+1}{4a} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi-1}{4b} & -\frac{\eta-1}{4a} & -(\eta-1)\left(\frac{\xi}{4}-\frac{1}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi+1}{4b} & \frac{\eta-1}{4a} & (\eta-1)\left(\frac{\xi}{4}+\frac{1}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\xi+1}{4b} & -\frac{\eta+1}{4a} & -(\eta+1)\left(\frac{\xi}{4}+\frac{1}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\xi-1}{4b} & \frac{\eta+1}{4a} & (\eta+1)\left(\frac{\xi}{4}-\frac{1}{4}\right) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\eta-1}{4a} & 0 & \frac{\xi-1}{4b} & 0 & (\eta-1)\left(\frac{\xi}{4}-\frac{1}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\eta-1}{4a} & 0 & -\frac{\xi+1}{4b} & 0 & -(\eta-1)\left(\frac{\xi}{4}+\frac{1}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\eta+1}{4a} & 0 & \frac{\xi+1}{4b} & 0 & (\eta+1)\left(\frac{\xi}{4}+\frac{1}{4}\right) \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\eta+1}{4a} & 0 & -\frac{\xi-1}{4b} & 0 & -(\eta+1)\left(\frac{\xi}{4}-\frac{1}{4}\right) \end{bmatrix}$$

(4.63)

Con el objetivo de ilustrar el procedimiento a seguir se resolverá la primera parte de la matriz de rigidez, correspondiente a la rigidez extensional:

$$\int_{S_f} [B_t]^T \cdot [A] \cdot [B_t] dS_f \quad (4.64)$$

Para simplificar el cálculo se supone que la matriz de rigidez extensional $[A]$ tiene valores unitarios:

$$[A] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Desarrollando la operación (4.64) se obtiene una matriz de (20 x 20) cuyo primer término es:

$$k_{11} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a \cdot b \cdot \left[\frac{\left(\frac{\eta-1}{4 \cdot a} + \frac{\xi-1}{4 \cdot b} \right) \cdot (\eta-1)}{4 \cdot a} + \frac{\left(\frac{\eta-1}{4 \cdot a} + \frac{\xi-1}{4 \cdot b} \right) \cdot (\xi-1)}{4 \cdot b} \right] d\eta d\xi \quad (4.65)$$

Resolviendo en el software MathCAD V14, se obtiene el valor de k_{11}

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 a \cdot b \cdot \left[\frac{\left(\frac{\eta-1}{4 \cdot a} + \frac{\xi-1}{4 \cdot b} \right) \cdot (\eta-1)}{4 \cdot a} + \frac{\left(\frac{\eta-1}{4 \cdot a} + \frac{\xi-1}{4 \cdot b} \right) \cdot (\xi-1)}{4 \cdot b} \right] d\eta d\xi = \frac{a}{3 \cdot b} + \frac{b}{3 \cdot a} + \frac{1}{2} \quad (4.66)$$

Si se desea obtener toda la matriz se debe recurrir a Matlab, se utiliza la función “diff” para obtener las derivadas parciales y la función “double (int (int))” para obtener las integrales dobles en forma numérica. Estas sentencias se aplican en el siguiente archivo .m:

```

% Programa para calcular la matriz de rigidez K (20 x 20) de
un elemento finito rectangular de material compuesto

syms r s
a = 1
b = 1

% Propiedades del material
% Matrices A B C D
A= [194 39 35; 39 55 35; 35 35 43];
B= [51 16 17; 16 18 17; 17 17 16];
D= [65 13 11; 13 18 11 ; 11 11 14];
C= [18 0 ; 0 18];

%Funciones de interpolación para un elemento rectangular
N1 = (1/4)*(1-r)*(1-s);
N2 = (1/4)*(1+r)*(1-s);
N3 = (1/4)*(1+r)*(1+s);
N4 = (1/4)*(1-r)*(1+s);

% Matriz de transformación desplazamiento de formación
% de tensión
Bte(1,1)= 1/a*diff(N1,r);
Bte(1,2)= 1/a*diff(N2,r);
Bte(1,3)= 1/a*diff(N3,r);
Bte(1,4)= 1/a*diff(N4,r);
Bte(2,5)= 1/b*diff(N1,s);
Bte(2,6)= 1/b*diff(N2,s);
Bte(2,7)= 1/b*diff(N3,s);
Bte(2,8)= 1/b*diff(N4,s);
Bte(3,1)= Bte(2,5);
Bte(3,2)= Bte(2,6);
Bte(3,3)= Bte(2,7);
Bte(3,4)= Bte(2,8);
Bte(3,5)= Bte(1,1);
Bte(3,6)= Bte(1,2);
Bte(3,7)= Bte(1,3);
Bte(3,8)= Bte(1,4);
Bte(3,20)=0;

% Matriz de transformación desplazamiento de formación

```



```
% de flexión
```

```
Bfl(1,17)= 1/a*diff(N1,r);
Bfl(1,18)= 1/a*diff(N2,r);
Bfl(1,19)= 1/a*diff(N3,r);
Bfl(1,20)= 1/a*diff(N4,r);
Bfl(2,13)= 1/b*diff(N1,s);
Bfl(2,14)= 1/b*diff(N2,s);
Bfl(2,15)= 1/b*diff(N3,s);
Bfl(2,16)= 1/b*diff(N4,s);
Bfl(3,13)= Bfl(1,17);
Bfl(3,14)= Bfl(1,18);
Bfl(3,15)= Bfl(1,19);
Bfl(3,16)= Bfl(1,20);
Bfl(3,17)= Bfl(2,13);
Bfl(3,18)= Bfl(2,14);
Bfl(3,19)= Bfl(2,15);
Bfl(3,20)= Bfl(2,16);
Bfl(1,1)= 0;
```

```
% Matriz de transformación desplazamiento de formación
```

```
% de corte
```

```
Bc(1,9) = 1/b*diff(N1,s);
Bc(1,10)= 1/b*diff(N2,s);
Bc(1,11)= 1/b*diff(N3,s);
Bc(1,12)= 1/b*diff(N4,s);
Bc(1,13)= N1;
Bc(1,14)= N2;
Bc(1,15)= N3;
Bc(1,16)= N4;
Bc(2,9) = 1/a*diff(N1,r);
Bc(2,10)= 1/a*diff(N2,r);
Bc(2,11)= 1/a*diff(N3,r);
Bc(2,12)= 1/a*diff(N4,r);
Bc(2,17)= N1;
Bc(2,18)= N2;
Bc(2,19)= N3;
Bc(2,20)= N4;
```

```
B1= Bte.'*A*Bte;
```

```
B2= Bte.'*B*Bfl;
```

```

B3= Bfl.'*B*Bte;
B4= Bfl.'*D*Bfl;
B5= Bc.'*C*Bc;

% Matriz B
B = B1+B2+B3+B4+B5;

% Resultado numérico en Matlab

K= a*b*double(int(int(B,r,1,1),s,1,1))

```

Obteniendo el siguiente resultado:

```

Columns 1 through 12
 96.5000 -57.5000 -57.0000 18.0000 43.8333 -6.8333 -32.1667 -4.8333 0 0 0 0
-57.5000 61.5000 18.0000 -22.0000 -4.8333 2.8333 -6.8333 8.8333 0 0 0 0
-57.0000 18.0000 96.5000 -57.5000 -32.1667 -4.8333 43.8333 -6.8333 0 0 0 0
18.0000 -22.0000 -57.5000 61.5000 -6.8333 8.8333 -4.8333 2.8333 0 0 0 0
43.8333 -4.8333 -32.1667 -6.8333 50.1667 -5.1667 -33.8333 -11.1667 0 0 0 0
-6.8333 2.8333 -4.8333 8.8333 -5.1667 15.1667 -11.1667 1.1667 0 0 0 0
-32.1667 -6.8333 43.8333 -4.8333 -33.8333 -11.1667 50.1667 -5.1667 0 0 0 0
-4.8333 8.8333 -6.8333 2.8333 -11.1667 1.1667 -5.1667 15.1667 0 0 0 0
0 0 0 0 0 0 0 0 12.0000 -3.0000 -6.0000 -3.0000
0 0 0 0 0 0 0 0 -3.0000 12.0000 -3.0000 -6.0000
0 0 0 0 0 0 0 0 -6.0000 -3.0000 12.0000 -3.0000
0 0 0 0 0 0 0 0 -3.0000 -6.0000 -3.0000 12.0000
-19.3333 2.8333 13.6667 2.8333 -19.8333 2.3333 14.1667 3.3333 6.0000 3.0000 -3.0000 -6.0000
2.8333 -3.3333 2.8333 -2.3333 2.3333 -2.8333 3.3333 -2.8333 3.0000 6.0000 -6.0000 -3.0000
13.6667 2.8333 -19.3333 2.8333 14.1667 3.3333 -19.8333 2.3333 3.0000 6.0000 -6.0000 -3.0000
2.8333 -2.3333 2.8333 -3.3333 3.3333 -2.8333 2.3333 -2.8333 6.0000 3.0000 -3.0000 -6.0000
-3.1667 19.6667 -2.6667 -13.8333 19.3333 -2.8333 -13.6667 -2.8333 -6.0000 6.0000 3.0000 -3.0000
19.6667 -20.1667 -13.8333 14.3333 -2.8333 3.3333 -2.8333 2.3333 -6.0000 6.0000 3.0000 -3.0000
-2.6667 -13.8333 -3.1667 19.6667 -13.6667 -2.8333 19.3333 -2.8333 -3.0000 3.0000 6.0000 -6.0000
-13.8333 14.3333 19.6667 -20.1667 -2.8333 2.3333 -2.8333 3.3333 -3.0000 3.0000 6.0000 -6.0000

Columns 13 through 20
-19.3333 2.8333 13.6667 2.8333 -3.1667 19.6667 -2.6667 -13.8333
2.8333 -3.3333 2.8333 -2.3333 19.6667 -20.1667 -13.8333 14.3333
13.6667 2.8333 -19.3333 2.8333 -2.6667 -13.8333 -3.1667 19.6667
2.8333 -2.3333 2.8333 -3.3333 -13.8333 14.3333 19.6667 -20.1667
-19.8333 2.3333 14.1667 3.3333 19.3333 -2.8333 -13.6667 -2.8333
2.3333 -2.8333 3.3333 -2.8333 -2.8333 3.3333 -2.8333 2.3333
14.1667 3.3333 -19.8333 2.3333 -13.6667 -2.8333 19.3333 -2.8333
3.3333 -2.8333 2.3333 -2.8333 -2.8333 2.3333 -2.8333 3.3333
6.0000 3.0000 3.0000 6.0000 -6.0000 -6.0000 -3.0000 -3.0000
3.0000 6.0000 6.0000 3.0000 6.0000 6.0000 3.0000 3.0000
-3.0000 -6.0000 -6.0000 -3.0000 3.0000 3.0000 6.0000 6.0000
-6.0000 -3.0000 -3.0000 -6.0000 -3.0000 -3.0000 -6.0000 -6.0000
24.1667 2.3333 -8.8333 0.3333 -14.0833 1.5833 10.4167 2.0833
2.3333 13.1667 0.3333 2.1667 2.0833 -0.5833 1.5833 -3.0833
-8.8333 0.3333 24.1667 2.3333 10.4167 2.0833 -14.0833 1.5833
0.3333 2.1667 2.3333 13.1667 1.5833 -3.0833 2.0833 -0.5833
-14.0833 2.0833 10.4167 1.5833 39.8333 -15.3333 -16.6667 10.1667
1.5833 -0.5833 2.0833 -3.0833 -15.3333 28.8333 10.1667 -5.6667
10.4167 1.5833 -14.0833 2.0833 -16.6667 10.1667 39.8333 -15.3333
2.0833 -3.0833 1.5833 -0.5833 10.1667 -5.6667 -15.3333 28.8333

```

Figura 4.7. Matriz de rigidez del elemento finito rectangular.

Cuando se utiliza un elemento rectangular de 4 nodos, la matriz de rigidez del elemento es del orden de 20 x 20, y para un elemento de 9 nodos es de 45 x 45.

Finalmente, para obtener el trabajo realizado por las fuerzas externas se reemplaza nuevamente (4.30) en (4.12):

$$W_f = \int_V [[N] \cdot d_e]^T \cdot f_b dV + \int_{S_f} [[N] \cdot d_e]^T \cdot f_s dS_f = d_e^T \cdot \left[\int_V [N]^T \cdot f_b dV + \int_{S_f} [N]^T \cdot f_s dS_f \right] \quad (4.67)$$

Las fuerzas de volumen son entonces:

$$F_b = \int_V [N]^T \cdot f_b dV \quad (4.68)$$

Y las fuerzas de superficie son:

$$\{F_s\} = \int_{S_f} [N]^T \cdot f_s dS_f \quad (4.69)$$

donde $[N]^T$:

$$[N]^T = \begin{bmatrix} N1 & 0 \\ N2 & 0 \\ N3 & 0 \\ N4 & 0 \\ 0 & N1 \\ 0 & N2 \\ 0 & N3 \\ 0 & N4 \end{bmatrix} \quad (4.70)$$

La ecuación (4.67) puede ser reescrita así:

$$W_f = \{d_e\}^T \cdot (F_b + F_s) = \{d_e\}^T \{f_e\} \quad (4.71)$$

F_b y F_s son las fuerzas nodales que actúan en los nodos del elemento, que son equivalentes a las fuerzas de cuerpo y fuerzas de superficie. Estas dos fuerzas pueden ser sumadas para formar el vector de fuerza total nodal f_e :

$$\{f_e\} = F_b + F_s \quad (4.72)$$

Si por ejemplo se tiene una carga uniformemente distribuida en un elemento, f_z es constante, la integral dará:

$$\{f_e\}^T = a \cdot b \cdot f_z \cdot (1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0) \quad (4.73)$$

Esto implica que la fuerza distribuida es dividida en cuatro fuerzas concentradas de un cuarto del total de la fuerza total. Estas son las condiciones de frontera de fuerzas que junto con las condiciones de frontera de desplazamientos son aplicadas en el ensamble del sistema de ecuaciones:

$$[k_e] \{d_e\} = \{f_e\} \quad (4.74)$$

Las ecuaciones formadas de esta manera son resueltas para los valores nodales de los desplazamientos, las ecuaciones correspondientes a los desplazamientos son utilizadas para determinar deformaciones unitarias y esfuerzos en cualquier punto dentro del dominio del elemento S_f .

Los elementos finitos placa/membrana más populares que usan los programas comerciales están basados en la teoría Reissner-Mindlin. Esta es la manera más conveniente de formular elementos placa/membrana. Al contrario, las aproximaciones analíticas prefieren usar la teoría clásica de placas laminadas. Esto se debe a que las deformaciones y curvaturas están definidas mediante la teoría clásica de laminados y son:

$$\epsilon^0 = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} \quad \kappa = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ -2 \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad (4.75)$$

Se aprecia claramente que las funciones [N] descritas en (4.28) no servirían para desarrollar las curvaturas κ ya que se obtendría valores de cero. Esto significa que se necesitan interpolaciones C^0 para u y v , e interpolaciones C^1 de w para

desarrollar un elemento de placa sometido a flexión. Las funciones de interpolación N deben garantizar continuidad en:

$$u, v, w, \frac{\partial w}{\partial x}, \frac{\partial w}{\partial y}, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}$$

Por lo tanto, es evidente que es mucho más difícil escoger una función de interpolación N que satisfaga todos estos requerimientos. Para un elemento triangular una de tales funciones debidas a Tocher es la siguiente:

$$w(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot y + \alpha_4 \cdot x^2 + \alpha_5 \cdot x \cdot y + \alpha_6 \cdot y^2 + \alpha_7 \cdot x^3 + \alpha_8 \cdot (x^2 \cdot y + x \cdot y^2) + \alpha_9 \cdot y^3 \quad (4.76)$$

Las constantes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4, \mathbf{a}_5, \mathbf{a}_6, \mathbf{a}_7, \mathbf{a}_8, \mathbf{a}_9$ son determinadas de las condiciones nodales.

Por lo tanto, la teoría de Reissner-Mindlin permite desarrollar elementos finitos más sencillos que en el caso de la teoría clásica de Kirchhoff, y válidos tanto para el análisis de placas delgadas como para el de placas gruesas. Los elementos de Kirchhoff son más limitados y complejos aunque quizás más seguros para el análisis de placas delgadas. Es difícil decidir cuál de las teorías es más recomendable, pero parece que la balanza se va decantando cada vez más en el uso de los elementos de Reissner- Mindlin.

4.8. EJEMPLO DE APLICACIÓN

Una vez que se determinó la matriz de rigidez de un elemento finito tipo placa para materiales compuestos se procede a ejemplificar el ensamblaje y resolución de la ecuación de rigidez global en el siguiente ejemplo: Para la placa bidimensional cargada que se muestra en la figura 4.8 se efectuará el ensamblaje de las matrices de rigidez del elemento finito, se aplicarán las condiciones de contorno y se determinarán los desplazamientos. Se utilizarán las propiedades del ejemplo 3.2.3.

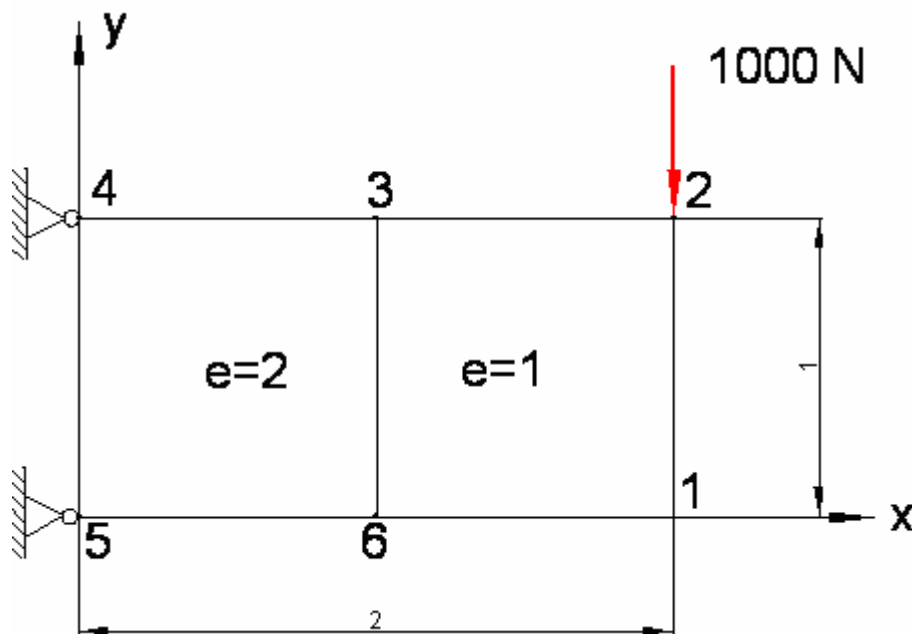


Figura 4.8. Placa con dos elementos finitos.

- **Ensamblaje:**

Es importante definir las coordenadas locales y globales según la figura 4.9

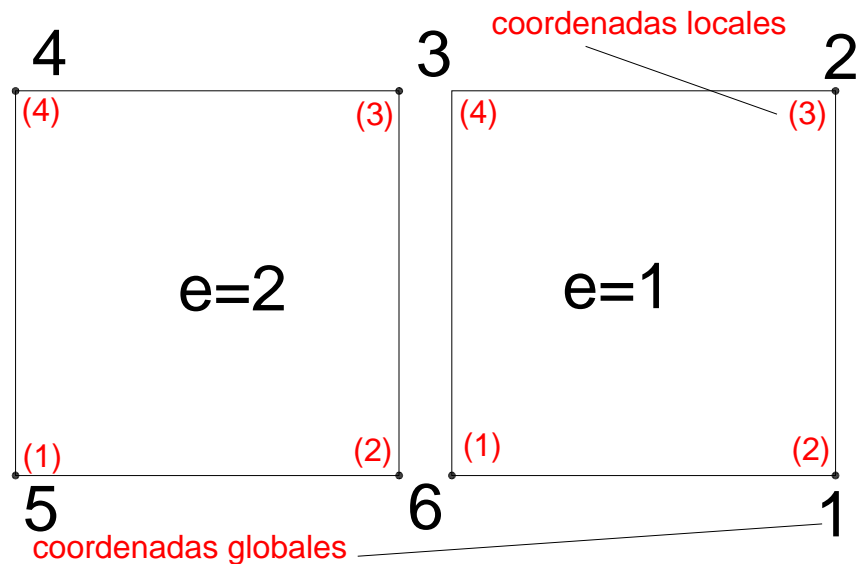
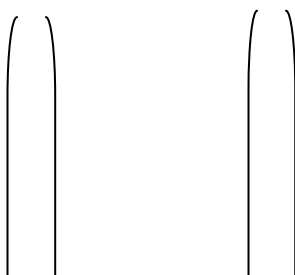


Figura 4.9. Malla de dos elementos de cuatro nodos.

A continuación se debe cambiar de posición las filas y las columnas de la matriz de rigidez del elemento finito (4.69) ordenada según tipos de desplazamientos (4.39), por una matriz ordenada según nodos, de la manera indicada en (4.77):



$$\begin{array}{l}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 v_1 \\
 v_2 \\
 v_3 \\
 v_4 \\
 w_1 \\
 w_2 \\
 w_3 \\
 w_4 \\
 \theta x_1 \\
 \theta x_2 \\
 \theta x_3 \\
 \theta x_4 \\
 \theta y_1 \\
 \theta y_2 \\
 \theta y_3 \\
 \theta y_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 u_1 \\
 v_1 \\
 w_1 \\
 \theta x_1 \\
 \theta y_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 w_2 \\
 \theta x_2 \\
 \theta y_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 w_3 \\
 \theta x_3 \\
 \theta y_3 \\
 u_4 \\
 v_4 \\
 w_4 \\
 \theta x_4 \\
 \theta y_4
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 [K_{ij}] \\
 \rightarrow [K_{ij}]
 \end{array}
 \quad (4.77)$$

La matriz de 20 x 20 $[K_{ij}]$ puede ser descompuesta en 16 submatrices de 5 x 5 cuya primera fila se construye de la siguiente manera:

$$\begin{array}{l}
 [K_{11 e}] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} & K_{15} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} & K_{25} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} & K_{35} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} & K_{45} \\ K_{51} & K_{52} & K_{53} & K_{54} & K_{55} \end{bmatrix} \\
 [K_{12 e}] = \begin{bmatrix} K_{16} & K_{17} & K_{18} & K_{19} & K_{110} \\ K_{26} & K_{27} & K_{28} & K_{29} & K_{210} \\ K_{36} & K_{37} & K_{38} & K_{39} & K_{310} \\ K_{46} & K_{47} & K_{48} & K_{49} & K_{410} \\ K_{56} & K_{57} & K_{58} & K_{59} & K_{510} \end{bmatrix} \\
 [K_{13 e}] = \begin{bmatrix} K_{111} & K_{112} & K_{113} & K_{114} & K_{115} \\ K_{211} & K_{212} & K_{213} & K_{214} & K_{215} \\ K_{311} & K_{312} & K_{313} & K_{314} & K_{315} \\ K_{411} & K_{412} & K_{413} & K_{414} & K_{415} \\ K_{511} & K_{512} & K_{513} & K_{514} & K_{515} \end{bmatrix} \\
 [K_{14 e}] = \begin{bmatrix} K_{116} & K_{117} & K_{118} & K_{119} & K_{120} \\ K_{216} & K_{217} & K_{218} & K_{219} & K_{220} \\ K_{316} & K_{317} & K_{318} & K_{319} & K_{320} \\ K_{416} & K_{417} & K_{418} & K_{419} & K_{420} \\ K_{516} & K_{517} & K_{518} & K_{519} & K_{520} \end{bmatrix}
 \end{array}
 \quad (4.78)$$

$$\begin{bmatrix} K_{11e} & K_{12e} & K_{13e} & K_{14e} \\ K_{21e} & K_{22e} & K_{23e} & K_{24e} \\ K_{31e} & K_{32e} & K_{33e} & K_{34e} \\ K_{41e} & K_{42e} & K_{43e} & K_{44e} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{Bmatrix} \quad (4.83)$$

Y en forma compacta:

$$[K_{ij}] \{U_j\} = \{F_i\} \quad (4.84)$$

La matriz de rigidez de la estructura se forma a partir de las contribuciones de las matrices de los diferentes elementos individuales. Esta operación se denomina ensamblaje. Las matrices de rigidez de cada elemento son:

6	1	2	3		5	6	3	4			
6	1	2	3	5	6	3	4	4			
$\left[\begin{array}{cccc} K_{11e} & K_{12e} & K_{13e} & K_{14e} \\ K_{21e} & K_{22e} & K_{23e} & K_{24e} \\ K_{31e} & K_{32e} & K_{33e} & K_{34e} \\ K_{41e} & K_{42e} & K_{43e} & K_{44e} \end{array} \right]$					$\left[\begin{array}{cccc} K_{11e} & K_{12e} & K_{13e} & K_{14e} \\ K_{21e} & K_{22e} & K_{23e} & K_{24e} \\ K_{31e} & K_{32e} & K_{33e} & K_{34e} \\ K_{41e} & K_{42e} & K_{43e} & K_{44e} \end{array} \right]$						
matriz elemento 1								matriz elemento 2			

Tras el ensamblaje se obtiene:

$$\begin{bmatrix} 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\ 6 & K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{23}^{(2)} + K_{14}^{(1)} & K_{24}^{(2)} \\ 1 & 0 & K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 \\ 2 & 0 & K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & 0 \\ 3 & K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} + K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{33}^{(2)} + K_{44}^{(1)} & K_{34}^{(2)} \\ 4 & K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)} \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

Como puede verse, la matriz es simétrica y para formar por ejemplo el elemento correspondiente a 5-5, se observa en la figura 4.9 que corresponde al K_{11} de la matriz del elemento 1. Adicionalmente existen elementos que son cero debido a que no existe conectividad entre estos nodos, por ejemplo 5-1, 5-2, etc.

- **Condiciones de contorno:**

El problema estructural siempre tiene restricciones de desplazamientos que deben imponerse para poder resolver el sistema de ecuaciones global y evitar la singularidad de la matriz de rigidez. A nivel práctico esto se traduce en eliminar las filas y columnas del sistema de ecuaciones que están relacionadas con el desplazamiento prescrito. Con ello se reduce la dimensión del sistema a resolver y sólo se calculan las verdaderas incógnitas del problema. En el caso del ejemplo específico se fijan los nodos 4 y 5, por lo tanto U_4 y U_5 son cero.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc}
 K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\
 K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{23}^{(2)} + k_{14}^{(1)} & K_{24}^{(2)} \\
 0 & K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 \\
 0 & K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & 0 \\
 K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} + K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{33}^{(2)} + K_{44}^{(1)} & K_{34}^{(2)} \\
 K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)}
 \end{array} \right] & \left\{ \begin{array}{c} U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.86)$$

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{cccccc}
 & 5 & 6 & 1 & 2 & 3 & 4 \\
 \begin{array}{c} 5 \\ 6 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccc}
 K_{11}^{(2)} & K_{12}^{(2)} & 0 & 0 & K_{13}^{(2)} & K_{14}^{(2)} \\
 K_{21}^{(2)} & K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{23}^{(2)} + k_{14}^{(1)} & K_{24}^{(2)} \\
 0 & K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} & 0 \\
 0 & K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} & 0 \\
 K_{31}^{(2)} & K_{32}^{(2)} + K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{33}^{(2)} + K_{44}^{(1)} & K_{34}^{(2)} \\
 K_{41}^{(2)} & K_{42}^{(2)} & 0 & 0 & K_{43}^{(2)} & K_{44}^{(2)}
 \end{array} \right] & \left\{ \begin{array}{c} U_5 \\ U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{array} \right\}
 \end{array}
 \end{array}
 \quad (4.87)$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones a resolver está definido en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & K_{13}^{(1)} & K_{23}^{(2)} + K_{14}^{(1)} \\ K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\ K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\ K_{32}^{(2)} + K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{33}^{(2)} + K_{44}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_6 \\ U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_6 \\ F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{Bmatrix} \quad (4.88)$$

En esta expresión se conoce el vector de fuerzas y los desplazamientos son las incógnitas a resolver. Desarrollando los vectores columna de acuerdo al ejemplo presentado se obtiene:

$$\begin{bmatrix}
 K_{22}^{(2)} + K_{11}^{(1)} & K_{12}^{(1)} & k_{13}^{(1)} & k_{23}^{(2)} + (k_{14})^{(1)} \\
 K_{21}^{(1)} & K_{22}^{(1)} & K_{23}^{(1)} & K_{24}^{(1)} \\
 K_{31}^{(1)} & K_{32}^{(1)} & K_{33}^{(1)} & K_{34}^{(1)} \\
 K_{32}^{(2)} + K_{41}^{(1)} & K_{42}^{(1)} & K_{43}^{(1)} & K_{33}^{(2)} + K_{44}^{(1)}
 \end{bmatrix}
 \begin{pmatrix}
 u_6 \\
 v_6 \\
 w_6 \\
 \theta x_6 \\
 \theta y_6 \\
 u_1 \\
 v_1 \\
 w_1 \\
 \theta x_1 \\
 \theta y_1 \\
 u_2 \\
 v_2 \\
 w_2 \\
 \theta x_2 \\
 \theta y_2 \\
 u_3 \\
 v_3 \\
 w_3 \\
 \theta x_3 \\
 \theta y_3
 \end{pmatrix}
 =
 \begin{pmatrix}
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 -1000 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0 \\
 0
 \end{pmatrix}
 \quad (4.89)$$

Esta ecuación se la puede resolver invirtiendo la matriz de rigidez y multiplicándola por el vector de fuerzas según el programa en Matlab 7.1.0 indicado en el Anexo 1.

$$U_i = [K_{(ij)} \text{ simplificada}]^{-1} \cdot F_i \quad (4.90)$$

Las incógnitas del sistema corresponden a los desplazamientos nodales de la malla, por lo tanto la obtención de la deformada de la estructura es inmediata. Algunos desplazamientos ya son conocidos por la imposición de las condiciones de contorno, por ello no forman parte del sistema de ecuaciones.

Los resultados en metros son los siguientes:

Tabla 4.2. Desplazamientos, resultado de correr el programa en Matlab.

u_6	- 0.00mm
v_6	0.00 mm
w_6	19. mm
θ_{x6}	0.021 rad
θ_{y6}	0.069 rad
u_1	-0.1 mm
v_1	0.1 mm
w_1	- 40.4 mm
θ_{x1}	0.0449 rad
θ_{y1}	0.0353 rad
u_2	0.1 mm
v_2	-0.1 mm
w_2	-15.2 mm
θ_{x2}	-0.0319 rad
θ_{y2}	-0.0406 rad
u_3	0.1 mm
v_3	0 mm
w_3	-27.1 mm
θ_{x3}	-0.0479 rad
θ_{y3}	0.0111 rad

Una vez que se han calculado los desplazamientos, las deformaciones se determinan mediante la fórmula que las relaciona, a partir del campo discretizado, ver ecuaciones (4.40):

$$\{\varepsilon^0\} = [B_t] \{d_e\}$$

$$\{\kappa\} = [B_f] \{d_e\}$$

$$\{\gamma\} = [B_c] \{d_e\}$$

(4.91)

Los esfuerzos se calculan por medio de la siguiente ecuación:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z_j \cdot [\bar{Q}_{ij}]_k \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix}$$

(4.92)

Como pudo constatarse en el desarrollo y formulación del problema de elementos finitos anterior. Resolver manualmente es sumamente largo y tedioso por más simple que sea un problema, por lo cual para aplicaciones prácticas es imprescindible el usos de herramientas computacionales y eso es lo que se revisará a continuación.

4.9. CÓDIGOS COMERCIALES PARA ANÁLISIS CON ELEMENTOS FINITOS

Los aspectos más importantes del análisis de elementos finitos de una estructura de materiales compuestos son:

- Homogenización de las propiedades materiales mediante la obtención de las leyes constitutivas.
- Postprocesamiento de resultados numéricos para recuperar esfuerzos y deformaciones en las direcciones principales del material para un análisis de falla subsecuente.

Un eficiente postprocesado de resultados numéricos es inherente a un ingreso preciso de datos de material, en la etapa del preprocesado. Un buen código comercial es aquel que incorpora el proceso de homogenización en un apropiado nivel de análisis, como también soporta pre y postprocesamiento de una amigable y eficiente manera. La tabla (4.2) lista algunos de los programas de elementos finitos que pueden analizar materiales compuestos, que soportan elementos sólidos 3D, placas 2D y membranas.

Tabla 4.3. Software de elementos finitos con posibilidad de calcular laminados compuestos.

Software	Descripción	Página Web
ABAQUS	Software de propósito general con una amplia variedad de tipo de elementos apropiados para analizar membranas laminadas y comportamiento no lineal en plásticos, ABAQUS utiliza la técnica VCCT para determinar la tasa de relajación de energía en el frente de la delaminación que ha sido utilizada por Boeing y juega un importante rol en el diseño de estructuras aeronáuticas.	http://www.abaqus.com/products/
ALGOR	Software de uso general, bajo costo, paquete de elementos finitos con elementos compuestos. Importante información en línea.	http://algor.com/homepage2.htm
ANSYS	ANSYS ofrece una gama de capacidades para análisis de composites. Las capacidades tradicionales incluyen elementos tipo cáscaras, sólidos y viga con definiciones de sección avanzadas y criterio de falla. El software ANSYS tiene capacidad de estratificar capas con diferentes propiedades y en diferentes ángulos. ANSYS puede trabajar con el paquete FIBERSIM que es una herramienta informática líder en el diseño de piezas hechas en materiales compuestos.	http://www.ansys.com/
COSMOS-M	Paquete de uso general de rango intermedio. Incluye varios módulos, tales como análisis no lineal avanzado, análisis de tensión y dislocaciones, análisis de estabilidad y frecuencia, análisis de transferencia de calor, análisis de respuesta dinámica, análisis de fatiga, y optimización del diseño.	http://www.srac.com/products.html
	DYNA3D es un programa de elementos finitos	

DYNA 3D	para resolver problemas de mecánica estructural o del continuo. Debido a su naturaleza explícita DYNA3D utiliza pequeños pasos temporales para integrar las ecuaciones de movimiento y es especialmente eficiente en la resolución de problemas de dinámica transitoria.	http://www.lstc.com
MSC. NASTRAN	MSC.NASTRAN puede ser eficientemente utilizado para modelar compuestos laminados. MSC.NASTRAN permite al usuario especificar las propiedades del material, orientación y espesor para cada lámina. El programa entonces calcula las propiedades de la placa equivalente.	http://www.mechsolution.com/products/patran/lammod.html
FEMAP	Pre y post procesador general para el análisis de elementos finitos. No soluciona por sí mismo pero interconecta con 20 diversos programas. Tiene una buena interfaz para definir láminas.	http://www.femap.co.uk/
COMSOL	COMSOL Multiphysics™ es una herramienta de modelado y análisis para prototipaje virtual de fenómenos físicos. COMSOL Multiphysics puede modelar virtualmente cualquier fenómeno físico que un ingeniero o científico pueda describir con ecuaciones diferenciales parciales (PDE), incluyendo transferencia de calor, movimiento de fluidos, electromagnetismo y mecánica estructural, soportando la integración de problemas de diferentes campos.	http://www.comsol.com/

Los pre y postprocesadores listados en la tabla 4.2 soportan las principales condiciones para analizar materiales compuestos reforzados con fibras. Estas incluyen:

- Ingreso de propiedades de láminas basadas tanto en arquitectura unidireccional como en tejido bidimensional.
- Estratificación de láminas.

- Orientación del vector, usado para definir la orientación de la capa en el espacio.
- Homogenización a propiedades tridimensionales efectivas.
- Ingreso de las matrices de rigidez [A], [B], y [D] para placas y cascarones.
- Recuperación de esfuerzos y deformaciones.
- Falla de la primera capa basado tanto en criterios puntuales tensión/deformación o falla cuadrática (Tsai-Wu, Hill, Hashin).

4.10. SELECCIÓN DEL SOFTWARE

Se ha analizado las cinco herramientas informáticas siguientes:

- Comsol
- Cosmos
- Algor
- Abaqus
- ANSYS

De estas, Cosmos y Comsol no tienen posibilidad de estratificar capas, solamente se puede homogenizar el laminado mediante un cálculo previo. De los tres restantes se escogió el programa ANSYS debido en primer lugar a la importancia que tiene este código en el ámbito académico y científico internacional. Cumple las condiciones descritas anteriormente para la solución de materiales compuestos y finalmente existen grandes cantidades de información y tutoriales en la red.

REFERENCIAS

- 4.1. Kollár, L.P. y Springer, G.S. (2003). *Mechanics of Composite Structures*. New York: Cambridge University Press.
- 4.2. Toledo, M., Nallin, G. y Luccioni, B.(2005). *Análisis Micromecánico de Compuestos Laminados*. Instituto de Ingeniería Civil y Medio Ambiente Salta.
- 4.3. Vozková, P. y Salacová J. (2006). *Elastic Properties of Woven Composite*, COMSOL Users Conference Prague, Technical University of Liberec, Czech Republic.
- 4.4. Moaveni, S. (1999). *Finite Element Analysis: Theory and application with ANSYS*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- 4.5. Chandrupatla, T.R. y Belegundu, A. D. (1999). *Elemento Finito en Ingeniería*. (2^a. ed.). México: Prentice Hall.
- 4.6. Hutton, D. (2004). *Fundamentals of Finite Element Analysis*. New York: Mc Graw Hill.
- 4.7. Ochoa, O.O. y Reddy, J.N. (1992). *Finite Element Analysis of Composite Laminates*. Holanda: Kluwer Academic Publishers.
- 4.8. Liu, G. R. y Quek, S. S. (2003). *The Finite Element Method: A Practical Course* Oxford: Butterworth-Heinemann.
- 4.9. Sampaio, E.M. (1990). *Um estudo por elementos finitos em placas de materiais compósitos*: Tese – Universidade Federal do Rio de Janeiro.
- 4.10. Zienkiewicz, O.C. y Taylor R.L. (2000). *The Finite Element Method. Volume 2: Solid Mechanics*. (5a. ed.). Oxford: Butterworth-Heinemann.
- 4.11. Rao, S.S. (2004). *The Finite Element Method in Engineering*. (4a. ed.). Elsevier Science Ltd.

CAPÍTULO 5

TEORÍAS DE FALLA

En el presente capítulo se analizan las principales teorías de falla de los materiales compuestos, que básicamente se clasifican en dos grupos: las teorías de falla independientes y los criterios polinomiales. Estas teorías se utilizan para caracterizar la resistencia de un material compuesto. Adicionalmente se ha graficado con la ayuda de Mathcad las envolventes de falla que se utilizan para definir los niveles de esfuerzos seguros del material, sin considerar la falla interlaminar. Para determinar si el elemento que será analizado posteriormente con Ansys, puede soportar los esfuerzos sin perder su funcionalidad, se necesita garantizar esto mediante algún método comparativo. Las funciones que establecen la comparativa entre los esfuerzos inducidos y la resistencia del material son los criterios de falla. Adicionalmente el programa Ansys maneja varios de los conceptos aquí expuestos por lo que es necesario conocer la derivación de los criterios de falla.

5.1. MODOS DE FALLA DE MATERIALES COMPUESTOS

Existe una amplia variedad de mecanismos de falla en materiales compuestos con respecto a los encontrados en metales (ver figura 5.1). La falla en materiales compuestos puede ser causada por diferentes mecanismos asociados tanto a la falla de los constituyentes como a falla de la interfaz.

Las dificultades en establecer y validar un criterio de falla para materiales compuestos están asociadas con la definición de falla en compuestos. Por ejemplo, en un laminado, una o más láminas podrían haber fallado, pero el laminado en sí, podría mantener todavía la carga. Asimismo, debido a la naturaleza multifase de un material compuesto, la falla en una fase no necesariamente implica lo mismo en otras, ni en el compuesto.

Fibras:

Se pueden considerar dos mecanismos de falla para las fibras:

- Debidas a las cargas de tracción

Las fibras en los materiales compuestos son los elementos encargados de transmitir cargas tensiles. Sin embargo, cuando por defectos de fábrica las fibras secas, es

decir las que no se hallan embebidas en la matriz, se rompen, la matriz actúa como un puente sobre la rotura y transmite la carga a las fibras adyacentes.

- Debidas a las cargas de compresión

En el caso de las fibras a compresión se puede tener el caso de un micropandeo progresivo.

Matriz:

El resquebrajamiento de la matriz frecuentemente ocurre en compuestos laminados. Este fenómeno no necesariamente determina la falla completa del material; sin embargo, se produce una degradación del mismo, facilitando la absorción de humedad y se reduce la rigidez que proviene de la matriz del laminado. Finalmente, si la falla se propaga en la interfaz entre láminas adyacentes se inicia la delaminación.

Interfaz Fibra - Matriz:

El modo de falla común considerado es el llamado *debonding* (*despegamiento*). Esto equivale a una pérdida de adhesión y un deslizamiento relativo entre la fibra y la matriz debido a las diferencias en los esfuerzos cortantes en la interfaz fibra-matriz, con una gran pérdida de energía por fricción. Si las propiedades en la interfaz entre la fibra y la matriz se pierden, la transmisión de carga desde la matriz a las fibras no se efectúa correctamente y hay una pérdida de propiedades del material compuesto.

Interfaz Lámina - Lámina:

La delaminación es una separación de las láminas adyacentes, que puede ser introducida durante la manufactura, o por las cargas de trabajo aplicadas subsecuentemente, especialmente si son cargas transversales. La delaminación reduce la rigidez y la resistencia a la flexión. Bajo cargas repetidas, la delaminación puede aumentar hasta un punto crítico donde se pierde rápidamente la resistencia a la compresión del elemento, y termina la vida de servicio del material.

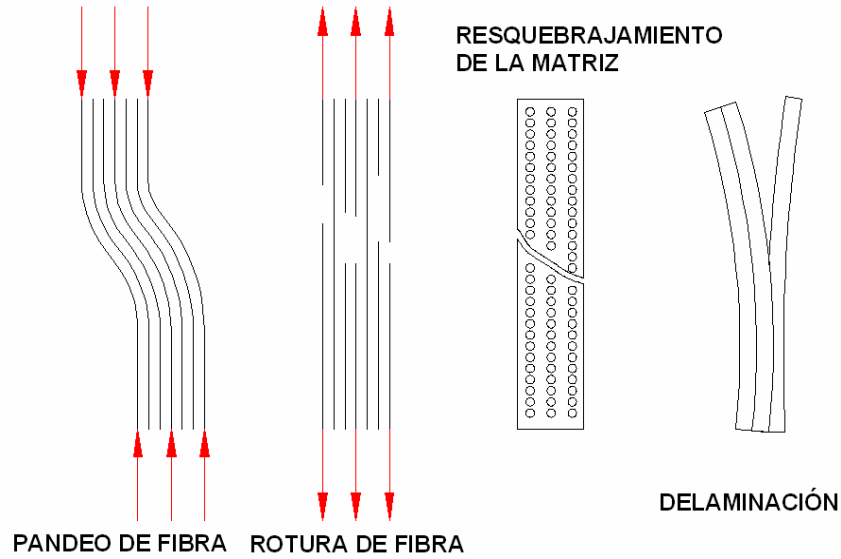


Figura 5.1. Mecanismos de falla en materiales compuestos. [5.1]

Los criterios de falla de materiales compuestos pueden ser clasificados en dos grupos, denominados criterios de falla independientes y criterios de falla polinomiales, que a su vez se dividen en:

Criterios de falla polinomiales {

- Criterio de Tsai-Wu
- Criterio de Tsai-Hill
- Criterio de Azzi-Tsai
- Criterio de Hoffman

Criterios asociados a los modos de falla o criterios independientes {

- Criterio de Máximo Esfuerzo
- Criterio de Máxima Deformación

Las teorías de falla más importantes utilizadas en diseño se resumen en el siguiente criterio aplicable a cualquiera de las láminas de un material compuesto:

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \tau_{23}, \tau_{13}, \tau_{12}, F_1, F_2, \dots) \begin{cases} < 1 & \text{no existe falla} \\ = 1 & \text{límite de falla} \\ > 1 & \text{existe falla} \end{cases} \quad (5.1)$$

Los criterios de falla presentados ofrecen resultados con suficiente precisión para la mayoría de problemas de interés práctico pero que sin embargo presentan las siguientes limitantes:

- Todos los criterios son conservadores, puesto que si una lámina falla, el resto todavía podría soportar carga.
- Los criterios necesitan datos que son difíciles de obtener.
- Los criterios de falla no consideran discontinuidades en el material, como orificios, bordes, etc.
- Ninguno de los criterios arroja luz sobre el modo o mecanismo de falla
- Ninguno de los criterios provee resultados aceptables para cada condición de interés práctico.

Se usará la siguiente notación para denotar a las resistencias máximas de un material ortotrópico, conocidas también como esfuerzo último o de falla, en las tres direcciones principales del material:

- σ_{1T} : Resistencia a la tracción en la dirección longitudinal.
- σ_{1C} : Resistencia a la compresión en la dirección longitudinal.
- σ_{2T} : Resistencia a la tracción en la dirección transversal.
- σ_{2C} : Resistencia a la compresión en la dirección transversal.
- σ_{3T} : Resistencia a la tracción en la dirección z.
- σ_{3C} : Resistencia a la compresión en la dirección z.
- τ_{12F} : Resistencia al cortante en el plano x-y.
- τ_{13F} : Resistencia al cortante en el plano x-z.
- τ_{23F} : Resistencia al cortante en el plano y-z.

Existen procedimientos estándar para medir estas resistencias mediante ensayos efectuados en el material. Asimismo, se tiene acceso en el Internet a tablas de propiedades mecánicas de varios materiales compuestos ^[5.2].

Por ejemplo, la cinta de preimpregnado AS/350 de fibra de carbono en matriz epóxica, tiene las resistencias siguientes:

$\sigma_{1T} = 1447$ MPa, $\sigma_{1C} = 1447$ MPa, $\sigma_{2T} = 51.7$ MPa, $\sigma_{2C} = 206$ MPa, y $\tau_{12S} = 93$ MPa. que se las obtiene de la tabla 5.1.

Tabla 5.1. *Tabla de propiedades mecánicas del preimpregnado unidireccional AS/3501 Carbono/Epoxi.* ^[5.2]

Fabricante		Hexcel		
Fibra		Matriz		Forma
AS Carbono		Epoxi 3501		Cinta
v_f	ρ (densidad)	Espesor	Temperatura	Condición
0.66	1.60 g/cm ³	-----	22.2 °C	Seco
E_{11}	E_{22}	G_{12}	ν_{12}	
138 GPa	8.96 GPa	7.10 GPa	0.30	
20.0 Msi	1.30 Msi	1.03 Msi		
σ_{1T}	σ_{1C}	σ_{2T}	σ_{2C}	τ_{12F}
1447 MPa	1447 MPa	51.7 MPa	206 MPa	93 MPa
210 ksi	209.9 ksi	7.5 ksi	29.9 ksi	13.5 ksi

5.2. CRITERIOS ASOCIADOS A LOS MODOS INDEPENDIENTES DE FALLA

Estos criterios tienen en cuenta el tipo de falla. En ellos se trata separadamente la falla de la fibra y de la matriz y se tiene en cuenta como sucede. Los criterios de este tipo más sencillos son el de máximo esfuerzo y el de máxima deformación. Estos criterios presentan la limitación de que no permiten una relación entre el esfuerzo normal y el cortante, como es en el caso de los criterios de falla polinomiales. No suelen dar resultados precisos si se aplica a estados de carga distintos al uniaxial.

5.2.1. TEORÍA DE MÁXIMO ESFUERZO

El criterio de máximo esfuerzo es el criterio más simple, y por ello es el más ampliamente usado en diseño y análisis de materiales compuestos. Considera que el material falla cuando el mismo supera un cierto esfuerzo límite en una zona determinada. Este método tiene el inconveniente que al manejar los esfuerzos en

forma separada no permite observar la interacción entre los mismos en distintas direcciones. Además el suponer que no existe interacción entre los diferentes mecanismos de fractura sobreestima la carga de rotura. Es decir, los resultados en ciertas condiciones son inseguros.

Esta teoría es una extensión de la teoría de esfuerzo normal máximo de los materiales ortotrópicos. Los esfuerzos normales en las direcciones 1, 2, 3 y los esfuerzos cortantes en los planos 1-2, 1-3, 2-3, son comparados con las correspondientes resistencias. Para un material ortotrópico se considera las condiciones de falla dadas en (5.2). Es decir, la rotura se produce si se verifica que:

$$\begin{aligned}
 \text{En la dirección de la fibra} & \quad \sigma_1 \geq \sigma_{1T} \quad | \sigma_1 | \geq \sigma_{1C} \\
 \text{En la dirección de la matriz} & \quad \sigma_2 \geq \sigma_{2T} \quad | \sigma_2 | \geq \sigma_{2C} \\
 \text{En la dirección transversal de la matriz} & \quad \sigma_3 \geq \sigma_{3T} \quad | \sigma_3 | \geq \sigma_{3C} \\
 \text{En la dirección del corte 12} & \quad \tau_{12} \geq \tau_{12F} \\
 \text{En la dirección del corte 13} & \quad \tau_{13} \geq \tau_{13F} \\
 \text{En la dirección del corte 23} & \quad \tau_{23} \geq \tau_{23F} \quad (5.2)
 \end{aligned}$$

La envolvente de la falla se observa en la figura 5.2:

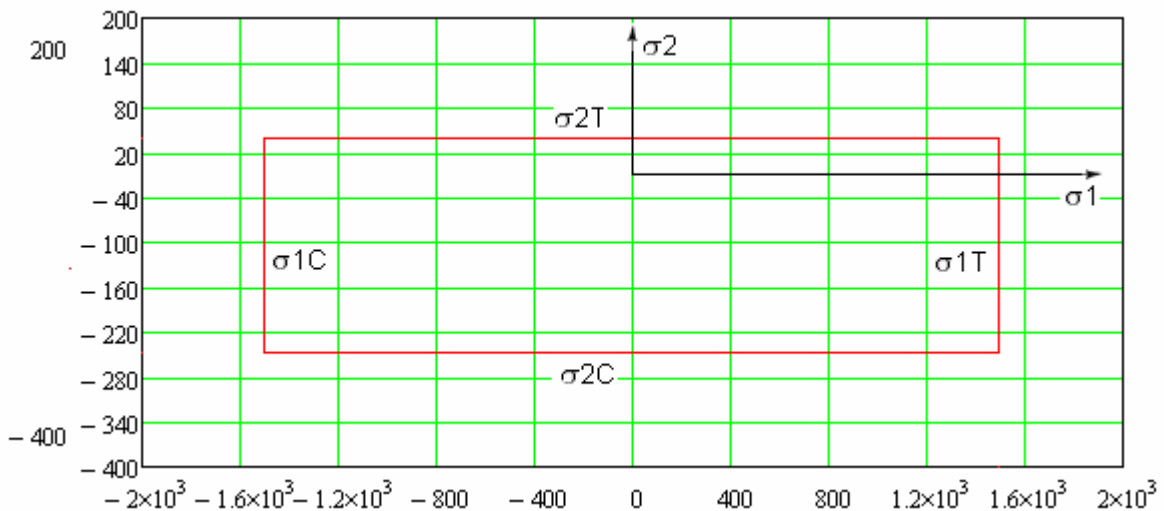


Figura 5.2. Envolvente de falla para la teoría del esfuerzo máximo con resistencias del material de: $\sigma_{1T} = 1500$ MPa, $\sigma_{2T} = 40$ MPa, $\sigma_{1C} = -1500$ MPa, $\sigma_{2C} = -246$ MPa ^[5.3].

El área limitada por la envolvente indica que los valores de esfuerzos que se encuentren limitados por el rectángulo corresponden a una zona segura.

5.2.2. CRITERIO DE LA MÁXIMA DEFORMACIÓN

Considera que el material falla cuando el mismo supera una cierta deformación límite en una zona determinada. No se considera la interacción entre las deformaciones combinadas sobre la lámina analizada. Las deformaciones en las direcciones 1, 2, 3 y las deformaciones cortantes en los planos 1-2, 1-3, 2-3, son comparados con las correspondientes deformaciones admisibles.

Condiciones de falla:

$$\begin{aligned}
 \text{En la dirección de la fibra} & \quad \varepsilon_1 \geq \varepsilon_{1T} \quad \left| \varepsilon_1 \right| \geq \varepsilon_{1C} \\
 \text{En la dirección de la matriz} & \quad \varepsilon_2 \geq \varepsilon_{2T} \quad \left| \varepsilon_2 \right| \geq \varepsilon_{2C} \\
 \text{En la dirección transversal de la matriz} & \quad \varepsilon_3 \geq \varepsilon_{3T} \quad \left| \varepsilon_3 \right| \geq \varepsilon_{3C} \\
 \text{En la dirección del corte 12} & \quad \left| \gamma_{12} \right| \geq \gamma_{12} \\
 \text{En la dirección del corte 13} & \quad \left| \gamma_{13} \right| \geq \gamma_{13} \\
 \text{En la dirección del corte 23} & \quad \left| \gamma_{23} \right| \geq \gamma_{23} \quad (5.3)
 \end{aligned}$$

Es importante definir también el diagrama de envolvente de falla para esta teoría, para lo cual se desarrollará la matriz de elasticidad. En el caso de esfuerzo plano se tiene las siguientes relaciones según las ecuaciones de (2.42):

En la dirección longitudinal se tiene:

$$\varepsilon_1 = \frac{\sigma_{1T}}{E_1} = \frac{\sigma_1}{E_1} - \nu_{12} \cdot \frac{\sigma_2}{E_1} \quad (5.4)$$

Despejando σ_2 de (5.4)

$$\sigma_2 = \frac{\sigma_1 - \sigma_{1T}}{\nu_{12}} \quad (5.5)$$

En la dirección transversal se tiene:

$$\varepsilon_2 = \frac{\sigma_{2T}}{E_2} = \frac{-\nu_{12}}{E_1} \cdot \sigma_1 + \frac{\sigma_2}{E_2} = \frac{\sigma_2}{E_2} - \frac{\nu_{21} \cdot \sigma_1}{E_2} \quad (5.6)$$

Despejando σ_2 :

$$\sigma_2 = \sigma_{2T} + \nu_{21} \cdot \sigma_1 \quad (5.7)$$

Para graficar la envolvente (figura 5.3), se utilizan los siguientes datos del material:

$E_1 = 155 \text{ GPa}$, $E_2 = 12.1 \text{ GPa}$, $\sigma_{1T} = 1500 \text{ MPa}$, $\sigma_{2T} = 40 \text{ MPa}$, $\sigma_{1C} = -1500 \text{ MPa}$, $\sigma_{2C} = -246 \text{ MPa}$, $\nu_{12} = 0.26$, $\nu_{21} = \nu_{12} E_2/E_1 = 0.02$. Se considera al valor de σ_1 como la variable independiente que varía entre -2700 y 1900 MPa y se calculan los segmentos de la envolvente tanto para tracción como compresión, utilizando (5.5) y (5.7).

$$\sigma_{2\text{tracción}}(\sigma_1) = \frac{\sigma_1 - \sigma_{1T}}{\nu_{12}}$$

$$\sigma_{2\text{compresión}}(\sigma_1) = \frac{\sigma_1 - \sigma_{1C}}{\nu_{12}}$$

$$\sigma_{t\text{tracción}}(\sigma_1) = \sigma_{2T} + \nu_{21} \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_{t\text{tensión}}(\sigma_1) = \sigma_{2T} + \nu_{21} \cdot \sigma_1$$

$$\sigma_{t\text{compresión}}(\sigma_1) = \sigma_{2C} + \nu_{21} \cdot \sigma_1$$

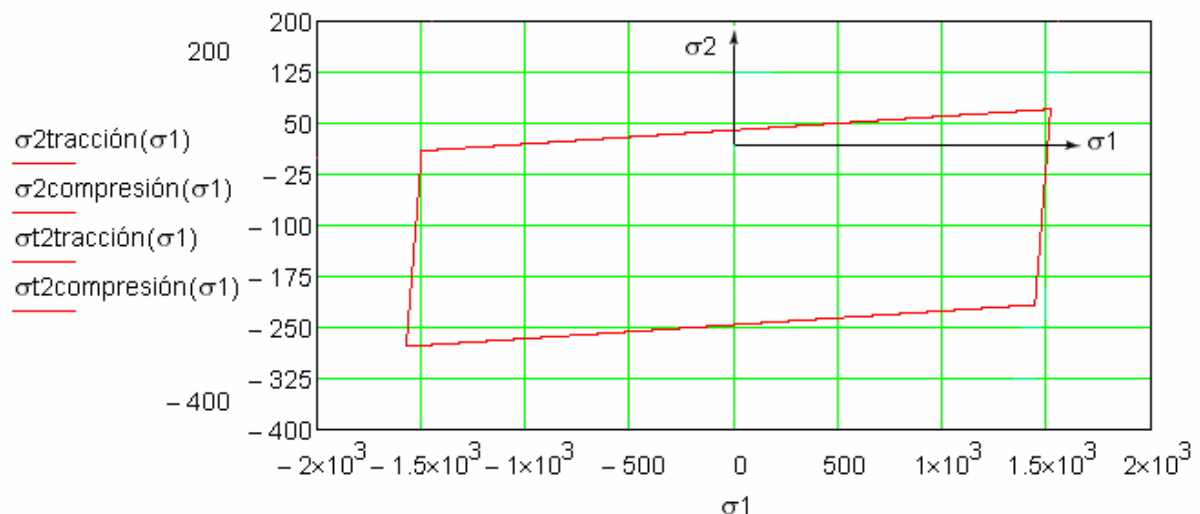


Figura 5.3. Envolvente de falla para la teoría de deformación máxima.

Como se puede constatar, se puede transformar los criterios de esfuerzo máximo a los de deformación máxima indistintamente.

5.3. CRITERIOS DE FALLA POLINOMIALES

Estos criterios de falla no distinguen el tipo de falla ni cual es la fase dominante en la fractura. En consecuencia, no pueden tener en cuenta fenómenos que suceden en la interfaz entre la matriz y la fibra. En esta categoría de criterios se pueden clasificar las distintas propuestas distinguiendo si el criterio de falla permite o no predecir la falla de la lámina pero no el modo de falla o la fase que se rompe.

Para todos estos criterios de falla es necesario determinar parámetros mediante la experimentación en el laboratorio. Normalmente son necesarias pruebas de tracción y compresión uniaxial en dos direcciones perpendiculares y pruebas de corte. Algunos de estos criterios también necesitan de pruebas de esfuerzo biaxial. En muchos de estos casos, estos parámetros son términos que permiten formular una expresión cuadrática polinomial que define los estados de esfuerzos o deformaciones máximos que permite el material.

Los criterios de falla agrupados en este tipo de aproximación utilizan algunas expresiones matemáticas para describir la superficie de fluencia para un material de comportamiento anisótropo. Generalmente, estas expresiones están basadas en ajustes de curvas obtenidas experimentalmente.

5.3.1. CRITERIO DE FALLA DE TSAI-HILL

La teoría de falla de Tsai-Hill se deriva del criterio de la energía de distorsión de Von Mises para materiales isotrópicos, pero es aplicado a materiales anisotrópicos con modificaciones apropiadas. En esta teoría, la falla se verifica cuando la energía de distorsión de fluencia iguala o excede un cierto valor relacionado con la resistencia de la lámina. En esta teoría no existe distinción entre la resistencia a la tracción y compresión.

La Teoría de Tsai-Hill matemáticamente se escribe así:

$$\frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{1T})^2} - \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{(\sigma_{1T})^2} + \frac{(\sigma_2)^2}{(\sigma_{2T})^2} + \frac{(\tau_{12})^2}{(\tau_{12F})^2} \leq 1 \quad (5.8)$$

Si al efectuar el cálculo se satisface la expresión, entonces el material no falla. Se puede definir la envolvente del criterio de Tsai-Hill para un laminado con las siguientes resistencias en MPa:

$$\sigma_{1T} = 1500 \text{ MPa}, \sigma_{2T} = 40 \text{ MPa}, \sigma_{1C} = -1500 \text{ MPa}, \sigma_{2C} = -246 \text{ MPa}, \tau_{12F} = 68 \text{ MPa}$$

Considerando que $\sigma_{1F} = \sigma_{1T}$, $\sigma_{2F} = \sigma_{2T}$, σ_1 la variable independiente, que varía entre -2700 y 1900 MPa y despejando σ_2 de (5.8) se obtiene la siguiente ecuación paramétrica en función de σ_1 :

$$\sigma_2(\sigma_1) = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}} + \sqrt{\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_{1T})^2}\right]^2 - 4 \cdot \left[\frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{1T})^2} - 1\right]}}{\frac{2}{(\sigma_{1T})^2}} \quad (5.9)$$

$$\sigma_{2s}(\sigma_1) = \frac{\frac{\sigma_1}{\sigma_{1T}} - \sqrt{\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_{1T})^2}\right]^2 - 4 \cdot \left[\frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{1T})^2} - 1\right]}}{\frac{2}{(\sigma_{1T})^2}} \quad (5.10)$$

La envolvente respectiva se la muestra en la figura 5.4.

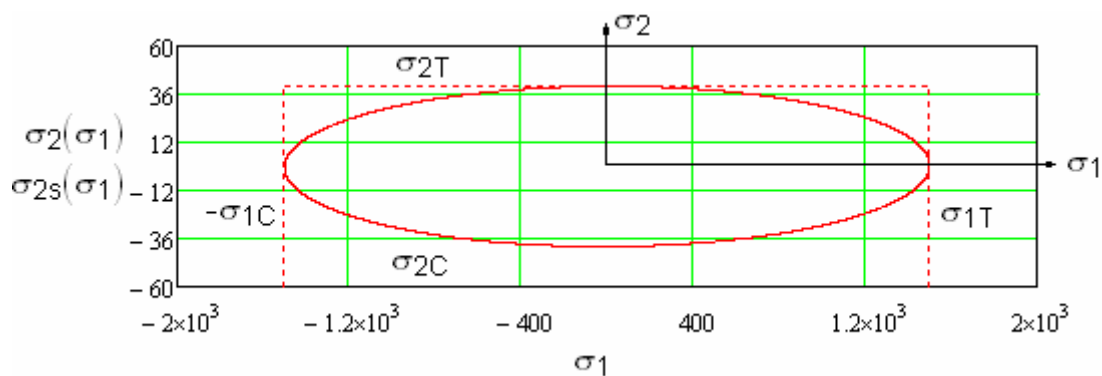


Figura 5.4. Envolvente de falla para la teoría de Tsai-Hill.

El criterio de falla de Tsai-Hill tiene muy buena exactitud cuando se lo utiliza para predecir la falla en fibra de vidrio embebida en matriz epóxica. Sin embargo se debe usar también valores apropiados de las resistencias de acuerdo al signo de σ_1 y σ_2 .

5.3.2. CRITERIO DE FALLA DE HOFFMAN

El criterio de falla de Hoffman trata de tomar en cuenta las diferentes resistencias en tracción y compresión. Añadiendo términos lineales a la ecuación de Hill, para esfuerzo plano en el plano 1-2, la ecuación de Hoffman se simplifica a:

$$\frac{-(\sigma_1)^2}{\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T}} + \frac{\sigma_1 \cdot \sigma_2}{\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T}} - \frac{(\sigma_2)^2}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} + \frac{\sigma_{1C} + \sigma_{1T}}{\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T}} \cdot \sigma_1 + \frac{\sigma_{2C} + \sigma_{2T}}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \cdot \sigma_2 + \frac{(\tau_{12})^2}{(\tau_{12F})^2} \leq 1 \quad (5.11)$$

En el cual σ_{1C} y σ_{2C} deben ingresar como números negativos. Para igual tracción y compresión, el criterio de Hoffman se reduce al criterio de Tsai-Hill, y ambos criterios son elipsoides en el espacio σ_1 , σ_2 , τ_{12} . Se puede definir la envolvente del criterio de Hoffman para un laminado con las siguientes resistencias en MPa:

$$\sigma_{1T} = 1500 \text{ MPa}, \sigma_{2T} = 40 \text{ MPa}, \sigma_{1C} = -1500 \text{ MPa}, \sigma_{2C} = -246 \text{ MPa}, \tau_{12F} = 68 \text{ MPa}$$

$$\sigma_2(\sigma_1) = \frac{\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T})} + \frac{\sigma_{2C} + \sigma_{2T}}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \right] + \sqrt{\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T})} + \frac{\sigma_{2C} + \sigma_{2T}}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \right]^2 + 4 \cdot \left[\frac{\sigma_{1C} + \sigma_{1T}}{\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T}} \cdot \sigma_1 - 1 - \frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T})} \right]}{\left(\frac{-2}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \right)}$$

$$\sigma_{2s}(\sigma_1) = \frac{\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T})} + \frac{\sigma_{2C} + \sigma_{2T}}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \right] - \sqrt{\left[\frac{\sigma_1}{(\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T})} + \frac{\sigma_{2C} + \sigma_{2T}}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \right]^2 + 4 \cdot \left[\frac{\sigma_{1C} + \sigma_{1T}}{\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T}} \cdot \sigma_1 - 1 - \frac{(\sigma_1)^2}{(\sigma_{1C} \cdot \sigma_{1T})} \right]}{\left(\frac{-2}{\sigma_{2C} \cdot \sigma_{2T}} \right)} \quad (5.12)$$

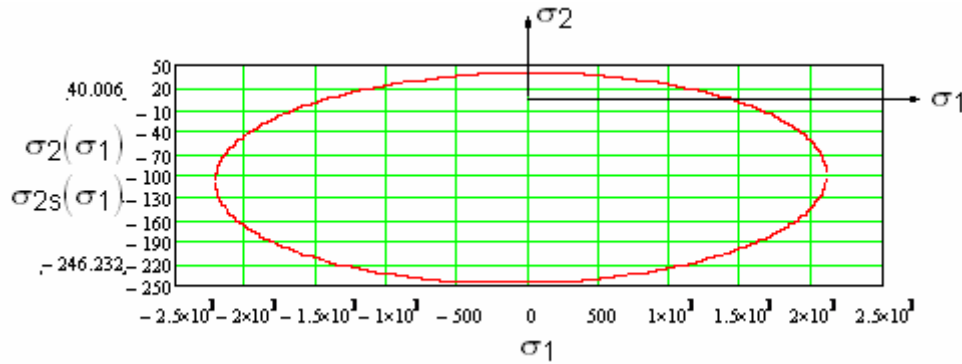


Figura 5.5. Envoltente de falla para la teoría de Hoffman.

El criterio de falla de Hoffman tiene muy buena aproximación con los datos provenientes de falla para fibra de vidrio en epóxico, boro en epóxico, y grafito en epóxico (figura 5.5).

5.3.3. CRITERIO DE FALLA TSAI-WU

El criterio de Hoffman no presenta resultados precisos en el caso de tracción biaxial. La teoría de Tsai-Wu mejora la correlación entre datos teóricos y experimentales incrementando el número de términos en la ecuación predictiva, la cual está basada en la teoría de energía de deformación total.

El criterio de falla polinomial más general es el criterio del tensor polinomial propuesto por Tsai y Wu, los cuales postularon una superficie de falla en un espacio de esfuerzos de seis dimensiones en la forma

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, 6 \quad (5.13)$$

Donde F_i y F_{ij} son tensores de fuerza de cuarto y sexto grado respectivamente. La ecuación completa requiere de 27 propiedades de resistencia. Para un material ortotrópico se necesitarían 3 tensores de acoplamiento F_{12} , F_{13} y F_{23} , cuya determinación requiere de ensayos de esfuerzo biaxial, por lo que la implementación de la ecuación es bastante complicada.

Para el caso de material ortotrópico y esfuerzo plano, se simplifica y la falla no ocurre si la siguiente condición se satisface:

$$F_{11} \cdot (\sigma_1)^2 + F_{22} \cdot (\sigma_2)^2 + F_{66} \cdot (\tau_{12})^2 + F_1 \cdot \sigma_1 + F_2 \cdot \sigma_2 + F_{12} \cdot \sigma_1 \cdot \sigma_2 \leq 1$$

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{1T} \cdot \sigma_{1C}} \quad F_{22} = \frac{1}{\sigma_{2T} \cdot \sigma_{2C}}$$

$$F_1 = \frac{1}{\sigma_{1T}} - \frac{1}{\sigma_{1C}} \quad F_{22} = \frac{1}{\sigma_{2T}} - \frac{1}{\sigma_{2C}}$$

$$F_{66} = \frac{1}{\tau_{12F}} \quad (5.14)$$

En este caso solo se necesitan seis propiedades de resistencia independientes para aplicar este criterio. La propiedad F_{12} es un término de interacción y debe ser determinado en un test biaxial. Si tal test se establece y si el material falla en:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \bar{\sigma}$$

F_{12} se puede expresar como:

$$F_{12} = \frac{1}{(\bar{\sigma})^2} \cdot \left[1 - \bar{\sigma} \cdot (F_1 + F_2) - (\bar{\sigma})^2 \cdot (F_{11} + F_{22}) \right] \quad (5.15)$$

Debido a que se ha comprobado que una determinación exacta de F_{12} no es crucial, en ausencia del test biaxial, se puede calcular F_{12} mediante:

$$F_{12} = -\frac{1}{2} \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} \quad (5.16)$$

La ventaja de esta teoría es que existe interacción entre los componentes de los esfuerzos y la teoría distingue entre resistencia a tracción y compresión. Se puede definir la envolvente del criterio de Tsai-Wu para un laminado con las siguientes resistencias en MPa:

$$\sigma_{1T} = 1500 \text{ MPa}, \sigma_{2T} = 40 \text{ MPa}, \sigma_{1C} = -1500 \text{ MPa}, \sigma_{2C} = -246 \text{ MPa}, \tau_{12F} = 68 \text{ MPa}$$

Si τ_{12} es igual a cero se definen las siguientes expresiones:

$$\sigma_2(\sigma_1) = \frac{-(F_2 + F_{12} \cdot \sigma_1) + \sqrt{(F_2 + F_{12} \cdot \sigma_1)^2 - 4 \cdot F_{22} \cdot [F_{11} \cdot (\sigma_1)^2 + F_1 \cdot \sigma_1 - 1]}}{2 \cdot F_{22}} \quad (5.17)$$

$$\sigma_{2s}(\sigma_1) = \frac{-(F_2 + F_{12} \cdot \sigma_1) - \sqrt{(F_2 + F_{12} \cdot \sigma_1)^2 - 4 \cdot F_{22} \cdot [F_{11} \cdot (\sigma_1)^2 + F_1 \cdot \sigma_1 - 1]}}{2 \cdot F_{22}}$$

(5.18)

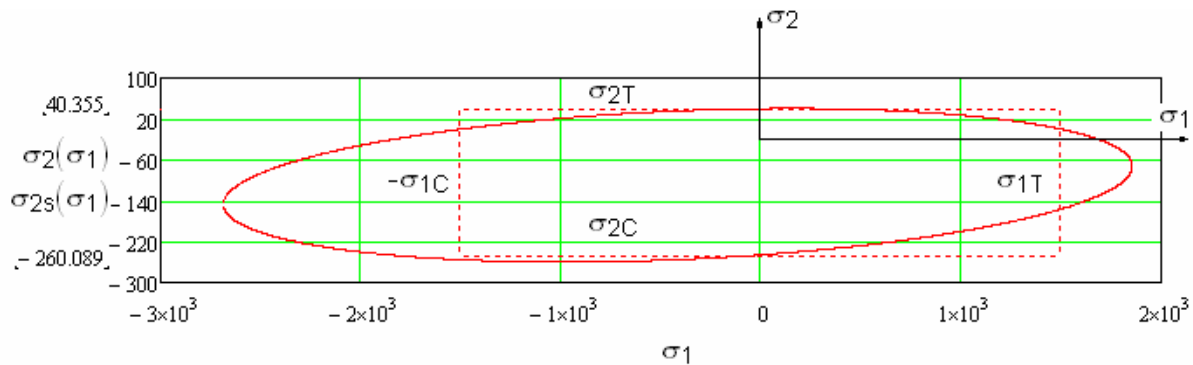


Figura 5.7. Envoltente de falla para la teoría de Tsai-Wu.

Al igual que en los casos precedentes, los esfuerzos dentro del elipsoide de la figura 5.7 son esfuerzos seguros.

Según Matías Molinier ^[5.4], aproximadamente el 17% de los diseñadores de elementos en composite utilizan el criterio de falla de Tsai-Hill mientras que el 11% utiliza el criterio de Tsai-Wu. Esto se debe principalmente a que los criterios polinomiales son fáciles de usar y la determinación de los parámetros es relativamente sencilla, obteniéndose resultados bastante aceptables. Aunque ciertamente tienen ciertas carencias, que son la imposibilidad de identificar el modo de falla o el componente que falla y muchas de las formulaciones de los criterios de falla, que sí tienen en cuenta la falta de isotropía, no tienen en cuenta el carácter heterogéneo del composite y su influencia en la falla.

Para solucionar esto se han desarrollado diversos criterios asociados a los distintos modos de falla. Estos tienen en cuenta el tipo de falla. En ellos se trata separadamente la falla de la fibra y de la matriz y se tiene en cuenta como sucede. Los criterios de este tipo más sencillos son el de máximo esfuerzo y el de máxima deformación. Son los criterios de falla más utilizados por los diseñadores de elementos de materiales compuestos, siendo el más utilizado el criterio de falla de máxima deformación con un 30% y le sigue el de máximo esfuerzo con un 22%. Un inconveniente grave que presentan es que no permiten una relación entre el esfuerzo normal y el cortante. Sin embargo, gracias a datos experimentales se ha podido comprobar que no hay un criterio mejor que otro, sino que dependiendo del tipo de material compuesto, es decir, del tipo de fibra y de matriz utilizado, hay un criterio de falla que se acerca mejor a los datos obtenidos experimentalmente. Por ejemplo, para un compuesto entretejido de fibra de vidrio-epoxi el criterio de falla de Tsai-Hill es el que mejor se aproxima a los datos obtenidos experimentalmente, al igual que para un entretejido de fibra de vidrio-fenólico. En cambio, para un

compuesto unidireccional de carbono el criterio del máximo esfuerzo se aproxima mejor a los datos experimentales.

REFERENCIAS

- 5.1. Kollár, L.P. y Springer, G.S. (2003). *Mechanics of Composite Structures*. New York: Cambridge University Press.
- 5.2. Material Properties Database, About.com: Composites / Plastics, [http://
composite.about.com/cs/databases/l/bldata.htm](http://composite.about.com/cs/databases/l/bldata.htm)
- 5.3. Voyiadjis, G. Z. y Kattan, P. I. (2005). *Mechanics of Composite Materials with MATLAB*. Holanda: Springer.
- 5.4. Molinier M.C. *Análisis de los criterios de falla aplicados a los laminados Compuestos*, Serie de monografías en Mecánica de Laminados Compuestos . Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires.

CAPÍTULO 6

METODOLOGÍA PARA LA APLICACIÓN DE ANSYS EN EL ANÁLISIS DE COMPUESTOS LAMINADOS

En el presente capítulo se describe la interfaz gráfica de Ansys y se indica de manera resumida como se importa, se graba y se carga archivos. Luego se examina los elementos finitos específicos para modelar materiales compuestos y las características de estos elementos. Finalmente se revisan los comandos particulares con que Ansys gestiona estos materiales.

6.1. GENERALIDADES DE ANSYS

Ansys es un programa amigable de elementos finitos de propósito general que contiene sobre las 100000 líneas de código. Ansys se usa en la mayoría de los campos de la ingeniería, incluyendo aeroespacial, automotriz, electrónica, nuclear, etc. Un aspecto relevante del Ansys es que su uso obliga a aprender de elementos finitos al contrario de otros programas “enlatados”. Ansys permite resolver numéricamente una amplia variedad de problemas mecánicos. Estos problemas incluyen análisis estructural estático/dinámico (lineal y no lineal), transferencia de calor, problemas de fluidos, además de problemas acústicos y electromagnéticos.

El propósito de este capítulo, es exponer en forma resumida las capacidades que nos ofrece el Ansys para analizar problemas con materiales compuestos por el método de elementos finitos. En forma general una solución de elementos finitos puede ser estructurada en tres etapas:

(1) Preprocesamiento: Definición del problema

Este a su vez consta de los siguientes pasos:

- Definición de puntos clave (Keypoints), líneas, áreas y volúmenes.
- Definir el tipo de elemento finito y las propiedades de material y geometría.
- Mallado de líneas, áreas y volúmenes según se requiera.

El software Ansys cuenta con herramientas suficientes para modelar formas sencillas bidimensionales o tridimensionales, (ver figura 6.1). Cuando se trata de

volúmenes o superficies complejas tridimensionales, se necesita utilizar software especializado de diseño para modelar cualquier pieza específica. En este caso, una vez que se diseña un elemento se lo traduce a Ansys, y se utilizan las opciones de importación: **File** → **Import** →:

- IGES
- CATIA
- CATIA V5
- Pro/E
- UG
- SAT
- PARA

(2) Solución: Asignación de cargas, restricciones y solución

En esta etapa se necesita especificar las cargas, que pueden ser puntuales o distribuidas, las restricciones (traslacionales y rotacionales) y finalmente se resuelve el sistema de ecuaciones que se genera internamente.

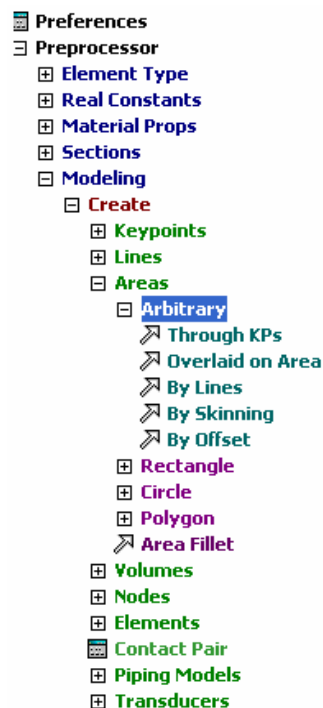


Figura 6.1. Árbol jerárquico del menú principal de ANSYS.

(3) Postprocesado: Revisión de resultados

En este paso se revisan los desplazamientos nodales, fuerzas y momentos en los elementos, gráficos de deformadas, diagramas de esfuerzos o mapas de temperatura, se pueden grabar animaciones y la salida puede ser gráfica o en forma de lista de resultados.

Existen dos métodos para utilizar Ansys. El primero es por medio de la interfaz gráfica del usuario o GUI. Este método utiliza las convenciones de todos los programas basados en el sistema operativo Windows. El segundo es por medio de lista de comandos. Este método es más difícil de aprender, pero tiene la ventaja de que todo el análisis puede ser descrito en un archivo de texto relativamente pequeño, en el cual se puede realizar modificaciones. El ambiente Ansys contiene dos ventanas: la ventana principal y una ventana de salida. La ventana principal consta de cinco zonas, según la figura 6.2.

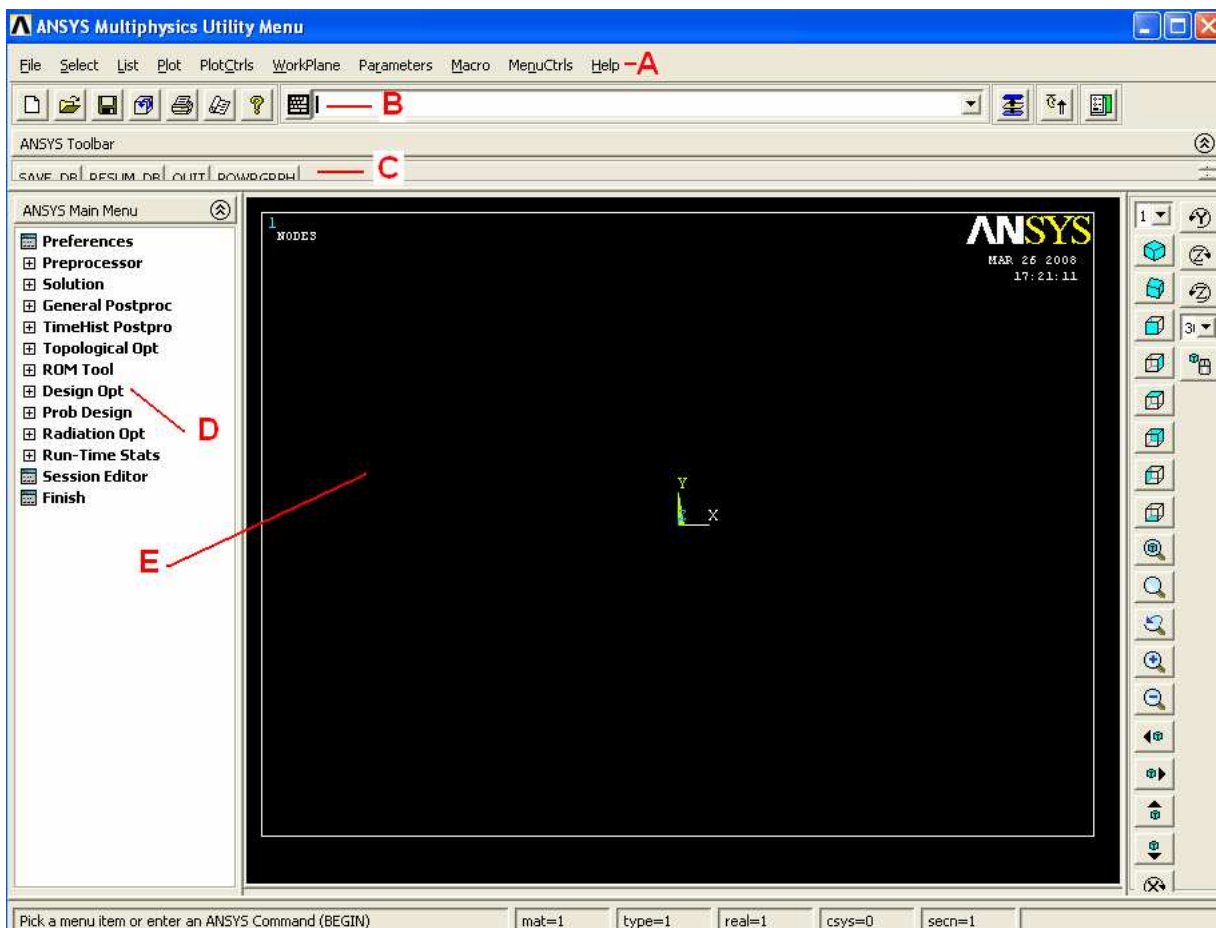


Figura 6.2. Ambiente Ansys.

- El Menú utilitario [A] contiene funciones que están disponible durante toda la sesión de modelamiento, tales como File, Select, List, Plot, Parameters, etc.

- Línea de comandos [B], en esta se puede escribir comandos directamente o copiar y pegar una lista de comandos como archivo de texto.
- Barra de herramientas [C] contiene botones que ejecutan comandos usualmente utilizados en la sesión de Ansys.
- Menú principal [D], contiene las principales funciones de Ansys organizadas en preprocesamiento, solución, postprocesamiento general y optimización de diseño. Este es el menú donde se halla la vasta mayoría de comandos de Ansys.
- Ventana gráfica [E], aquí se presentan todos los gráficos, se modela y los resultados son apreciados.

La ventana de salida, mostrada en la figura 6.3 presenta textos de salida como listado de datos y diagnósticos.

```

ANSYS 11.0 Output Window
*** ERROR ***
Another ANSYS job with the same job name (file) is already running in
directory or the file.lock file has not been deleted from an abnormal
terminated ANSYS run. To disable this check, set the ANSYS_LOCK env
variable to OFF.

Do you wish to override this lock and continue <y or n>?
y

ANSYS Structural U

***** ANSYS COMMAND LINE ARGUMENTS *****
INITIAL JOBNAME          = file

START-UP FILE MODE      = READ
STOP FILE MODE          = READ
GRAPHICS DEVICE REQUESTED = win32
GRAPHICAL ENTRY         = YES
LANGUAGE                 = en-us
INITIAL DIRECTORY      = C:\Documents and Settings\Administrador

00144862      UERSION-INTEL NT      RELEASE= 11.0      UP200701
CURRENT JOBNAME=file  18:59:50  SEP 03, 2007 CP=      0.891

/SHOW SET WITH DRIVER NAME= WIN32      , RASTER MODE, GRAPHIC PLANES
RUN SETUP PROCEDURE FROM FILE= D:\Archivos de programa\ANSYS Inc\v11
\start110.ans

/INPUT FILE= menust.tmp  LINE=      0
/INPUT FILE= D:\Archivos de programa\ANSYS Inc\v110\ANSYS\apdl\start
E=      0
ACTIVATING THE GRAPHICAL USER INTERFACE (GUI). PLEASE WAIT...
CUTTING PLANE SET TO THE WORKING PLANE

PRODUCE MODAL PLOT IN DSYS= 0
TURN OFF WORKING PLANE DISPLAY

```

Figura 6.3. Ventana de salida de Ansys.

Es importante grabar el modelo continuamente durante su creación. Este programa carece de la opción **Undo**, por lo que si se comete un error se debe ir a una etapa anterior, siempre que se haya archivado.

Para archivar el modelo, desde **ANSYS Utility Menu [A]** se selecciona **File** → **Save as Jobname. db** el modelo será grabado en un archivo llamado **Jobname.db**, donde Jobname es un nombre especificado por Ansys cuando se activa. Otra alternativa es usar simplemente **File** → **Save as**, en respuesta a lo cual aparece la siguiente ventana de la figura 6.4:

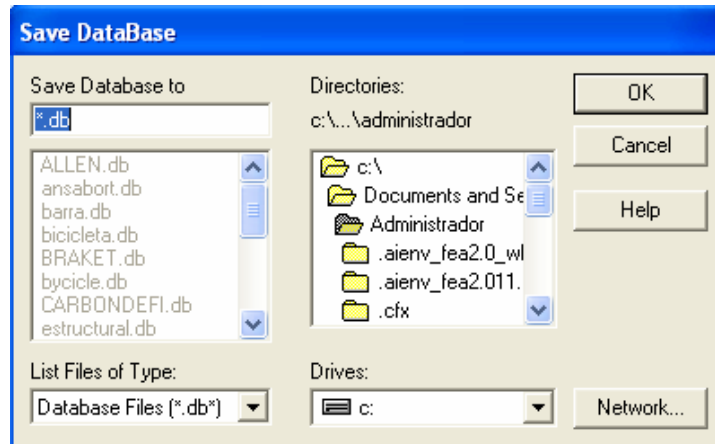


Figura 6.4. Grabar base de datos del problema.

En este caso se busca la carpeta en la cual se desea archivar la sesión. Frecuentemente es necesario cargar un archivo para continuar un trabajo previo. En este caso se puede utilizar **File** → **Resume from** y se despliega la siguiente ventana de la figura 6.5 en la cual se busca el archivo que se necesite:

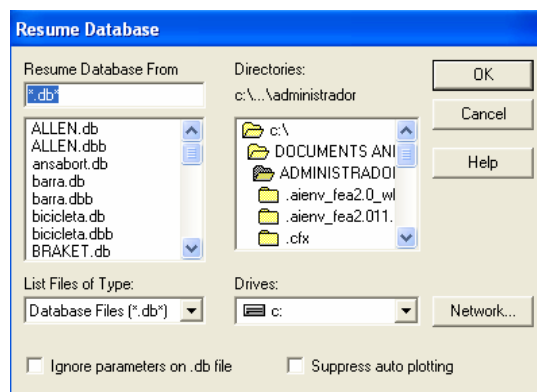


Figura 6.5. Recuperar base de datos del problema.

Ansys produce listas y tablas de muchos tipos de resultados que son normalmente desplegadas en pantalla. Sin embargo, es a menudo deseable grabar los resultados a un archivo para ser más tarde analizado o incluido en un reporte.

En vez de usar **Plot Results** para graficar los esfuerzos, se escoge **List Results**, cuando la lista aparece en la pantalla, se selecciona **File: Save As** y se da un nombre al archivo.

Si se necesita archivar una imagen de la pantalla entera se selecciona desde **ANSYS Utility Menu a Plot Ctrl. → Hard Copy**, y se puede escoger cualquiera de las dos opciones: **To Printer** y **To File**, que trasladan a las ventanas siguientes (ver figura 6.6).

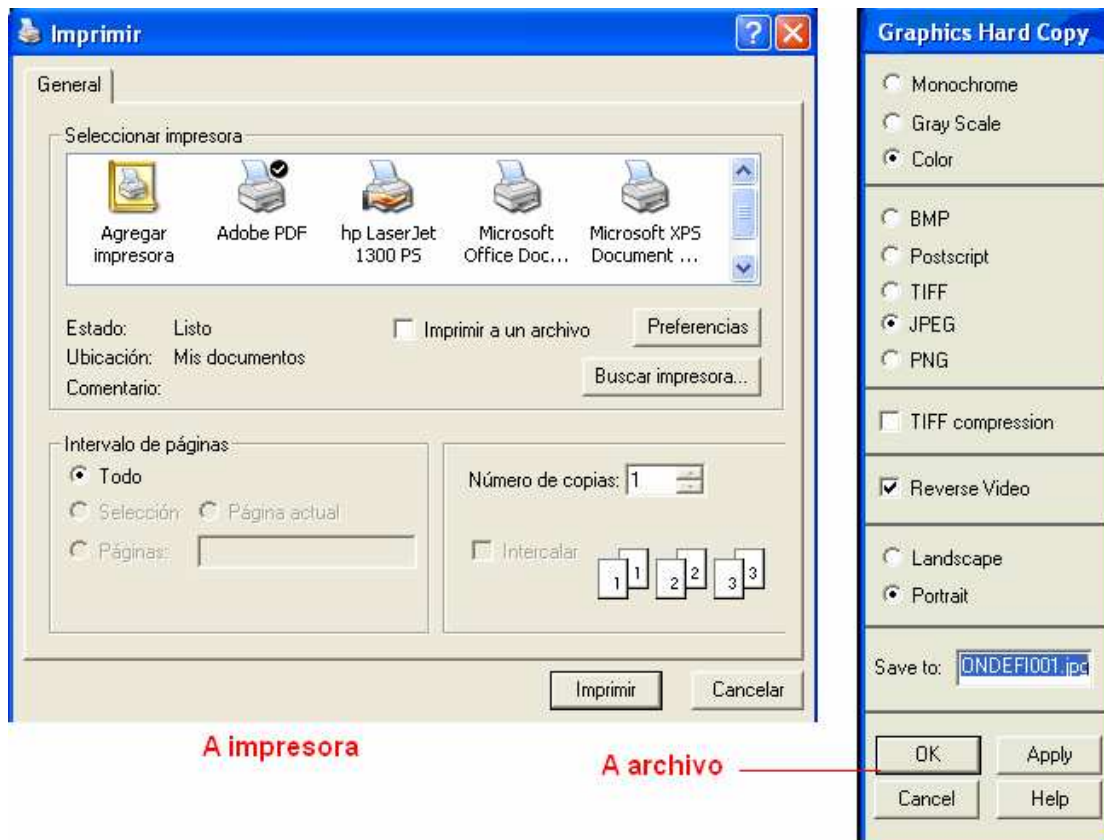


Figura 6.6. Envío de gráficos a archivo o impresora.

Finalmente, se puede salir del programa Ansys de diferentes maneras. Una de ellas es desde **Utility Menu**, seleccionando **File → Exit**, en cuyo caso despliega la siguiente ventana, en la cual se pueden escoger cuatro opciones:

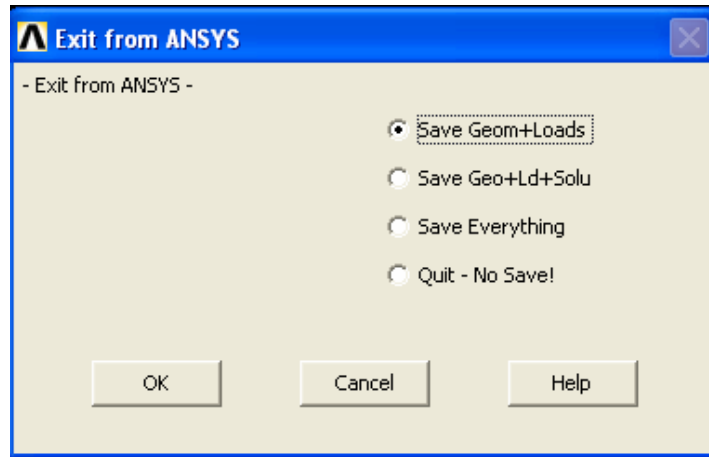


Figura 6.7. Salida de Ansys.

6.2. SELECCIÓN DEL ELEMENTO FINITO APROPIADO PARA MODELAR MATERIALES COMPUESTOS

La biblioteca de elementos finitos de Ansys contiene más de 100 diferentes tipos. Cada tipo de elemento tiene un nombre y un número único. El software Ansys permite modelar materiales compuestos con elementos especializados llamados elementos laminados (layered), y cada lámina puede poseer características isotrópicas u ortotrópicas diferentes.

Los siguientes tipos de elementos de la tabla 6.1 están disponibles para modelar materiales compuestos laminados:

Tabla 6.1. Tipos de elementos para laminados.

Tipo de elemento	Nombre de elemento
<p>Membrana (Shell): Los elementos estructurales tipo membrana de Ansys usan menos nodos y elementos y recursos computacionales, y el espesor puede ser fácilmente optimizado. Se debe modelar como superficie</p>	<p>SHELL91, SHELL99, SHELL181, SHELL281</p>
<p>Sólido: Los elementos sólidos requieren de más nodos, elementos, memoria computacional y tiempo de cálculo. Se debe modelar la pieza como sólido.</p>	<p>SOLID46, SOLID185 SOLID186 SOLID191</p>
Sólido – Membrana:	

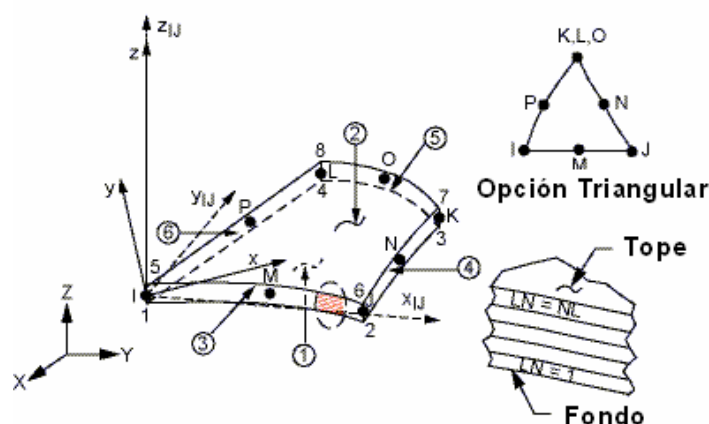
Para estructuras laminadas o estructuras tipo sándwich, utiliza la teoría de Mindlin - Reissner	SOLSH190
Viga: Elemento basada en la teoría de viga de Timoshenko análoga a Mindlin-Reissner, se usa en materiales no lineales	BEAM188, BEAM189

El elemento que será seleccionado depende de la aplicación, la exactitud y el tipo de resultados que necesitan ser obtenidos.

6.2.1. ELEMENTO TIPO MEMBRANA LINEAL ESTRATIFICADA (SHELL 99)

Es un elemento membrana tridimensional de 8 nodos con seis grados de libertad en cada nodo: tres traslaciones y tres rotaciones. Se lo utiliza para modelar membranas y placas de espesor moderado con una relación de lado a espesor mayor o igual a 10. Se puede modelar hasta un total de 250 capas de espesor uniforme y 125 con variación de espesor bilinealmente sobre el área de la capa.

En este elemento existe la opción de trasladar los nodos a la superficie superior o inferior de la capa. No resuelve problemas de plasticidad. Puede tratar deformaciones unitarias grandes, tiene posibilidad de implementar las teorías de falla disponibles. Con este elemento se puede trabajar con matrices constitutivas.



x_{IJ} = Eje x del elemento si la opción ESYS no es provista.

x = Eje x del elemento si la opción ESYS es provista

LN = Número de la capa

NL = Número total de capas

Figura 6.8. Geometría del elemento finito SHELL 99.

Puesto que este es uno de los elementos más usados para modelar compuestos, se resumen las entradas para este elemento en especial en la Tabla 6.2. Todos los elementos finitos adicionales cuentan con sus propias tablas de datos de entrada y salida.

Para editar las entradas de la tabla 6.2, una vez que se ha seleccionado el elemento finito se escoge: **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete** → **Options** (ver figura 6.10).

Tabla 6.2. Datos de entrada del elemento SHELL99.

DATOS DE ENTRADA DEL ELEMENTO SHELL99	
Nombre	Definición
Nombre del elemento	SHELL99
Nodos	I, J, K, L, M, N, O, P
Grados de Libertad	U, V, W, ROTX, ROTY, ROTZ
Constantes Reales	Si KEYOPT (2) = 1, entonces se suministra las siguientes 12+ (6*NL) constantes: NL, LSYM, ADMSUA, MAT, THETA, TK (I), TK (J), TK (K), TK (L) para capa 1, etc. hasta la capa NL.
Propiedades del material	EX, EY, EZ, ALPX, ALPY, ALPZ, (PRXY, PRYZ, PRXZ o NUXY, NUYZ, NUZ), DENS, GXY, GYZ, GXZ, para la capa 1, etc. hasta la capa NL (máximo número de propiedades del material 13*NL).
Cargas de superficie	Presiones: cara1(I-J-K-L)(abajo, en la dirección +z), cara2(I-J-K-L)(arriba, en la dirección -z), cara 3 (J-I), cara 4 (K-J), cara 5 (L-K), cara 6 (I-L)
Cargas de cuerpo	Temperaturas: T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8 si KEYOPT(2) = 0 o 1 Ninguna si KEYOPT(2) = 2, 3 o 4
Características especiales	Grandes deflexiones
KEYOPT(2)	Datos de entrada: 0: Capa de espesor constante (250 capas máximo), 1: Capas cónicas (125 capas máximo), 2: Matriz 6x6, usando lógica lineal, 3: Matriz 6x6, usando lógica cuadrática, 4: Matriz 3x3, usando lógica lineal
KEYOPT(3)	Elementos extras de salida: 0: Elemento básico de salida, 1: Integración de deformación, 2: Fuerzas nodales y momentos, 3: Fuerza y momento por unidad de longitud, 4: Combinación de todas las opciones
KEYOPT(4)	Sistema de coordenadas definido por: 0: No usa subrutinas para definir sistema de coordenadas del elemento. 4: Eje x del elemento definido por el usuario USERAN 5: Igual a 4 más eje x de la capa definido por USALYN .
KEYOPT(5)	Salida de esfuerzos y deformaciones: 0: Salida de esfuerzos, 1: Salida de deformaciones, 2: Esfuerzos y deformaciones
KEYOPT(6)	Salidas extras del elemento: 0: Ninguna salida extra. 1: Añade criterio de falla y el máximo del esfuerzo interlaminar.

	<p>2: Igual a 1 más la solución en los puntos de integración de la capa superior e inferior.</p> <p>3: Igual a 1 más la solución en los centroides del elemento y la esfuerzo interlaminar.</p> <p>4: Igual a 1 más la solución en los nodos esquineros de las láminas y la esfuerzo interlaminar entre láminas.</p> <p>5: Igual a 1 más la solución y los criterios de falla en los puntos de integración para todas las capas y la esfuerzo interlaminar entre láminas.</p>
KEYOPT(8)	<p>Archivo de datos de capas:</p> <p>0: Archiva datos del tope de la lámina del tope y del fondo de la lámina del fondo.</p> <p>1: Evalúa en la mitad del espesor de cada lámina</p>
KEYOPT(10)	<p>Matrices constitutivas del material:</p> <p>0: No se imprime propiedades de la matriz</p> <p>1: Matrices constitutivas del material para el elemento No. 1</p> <p>2: Lo mismo que 1 si KEYOPT(2) = 0, también escribe matrices como comandos de RMODIF para uso con KEYOPT(2)=2.</p> <p>3: Lo mismo que 1 si KEYOPT(2) = 0, también escribe matrices como comandos de RMODIF para uso con KEYOPT(2) = 3.</p>
KEYOPT(11)	<p>Equidistanciar nodos: 0: Nodos localizados en la mitad de la superficie</p> <p>1: Nodos localizados en la superficie superior, 2: Nodos localizados en la superficie inferior</p>

Es importante definir los datos de salida asociados con SHELL99, los cuales tienen una identificación propia y pueden ser desplegados si se los necesita para el análisis.

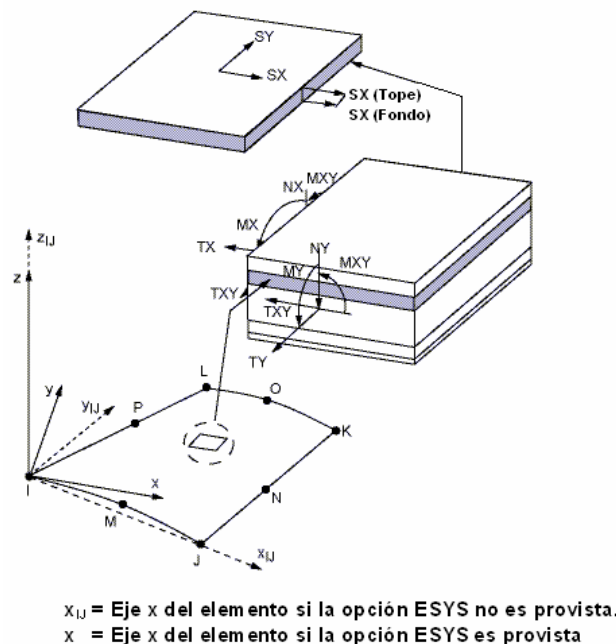


Figura 6.9. Diagrama salida de esfuerzos y fuerzas del elemento finito SHELL 99.

La tabla 6.3 despliega los nombres de las salidas del elemento finito SHELL99 y los requisitos para activarlas. Si por ejemplo se requiere visualizar los esfuerzos interlaminares máximos identificados por el parámetro ILMAX, se ve en la tabla 6.3 que se necesitan los requisitos 1 y 7. En la tabla 6.4 se verifica que las opciones a ser seleccionadas son: KEYOPT (2) = 0 o 1 y KEYOPT (6) \neq 0. Entonces, en

ANSYS Main Menu → Preprocessor → Element Type → Add / Edit / Delete → Options se activan las opciones indicadas:

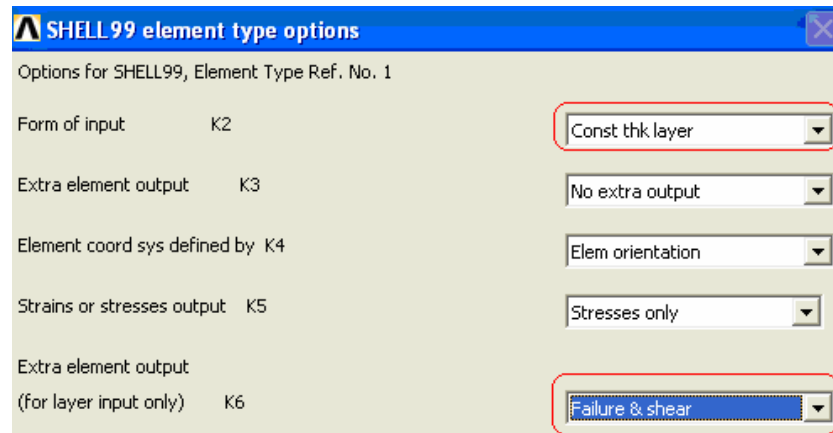


Figura 6.10. Opciones del elemento finito SHELL 99.

Tabla 6.3. Datos de salida del elemento SHELL99, ver figura 6.9.

DATOS DE SALIDA DEL ELEMENTO SHELL99		
Nombre	Definición	Requisito
EL	Número de Elemento	activo
NODES	Nodos - I, J, K, L, M, N, O, P	activo
VOLU	Volumen	activo
TTOP, TBOT	Temperatura promedio en la parte superior e inferior	1
XC, YC, ZC	Centroide del elemento	activo
PRES	Presión: P1 en nodos I, J, K, L; P2 en I, J, K, L; P3 en J, I; P4 en K, J; P5 en L, K; P6 en I, L	activo
TEMP	Temperaturas T1, T2, T3, T4, T5, T6, T7, T8	activo
INT	Número del punto de integración.	2
POS	Arriba (TOP), Abajo (BOT), Mitad del espesor (MID) del elemento	2
XI, YI, ZI	Global X, Y, Z localización del punto de integración	2
NUMBER	Número de capa	1,3
MAT	Número correspondiente al material de esta capa	1,3
THETA	Dirección del material de esta capa	1,3
AVE THICK	Espesor promedio de la capa o capa	3
ACC AVE THICK	Espesor promedio acumulado	1,3
AVE TEMP	Temperatura promedio de la capa	3
POS	Arriba (TOP), Abajo (BOT), Mitad del espesor (MID) de la capa	3
LOC	Localización promedio (si KEYOPT(6) = 3)	1,3
NODE	Número del nodo esquinero (si KEYOPT(6) = 4)	1,3
INT	Número del punto de integración (si KEYOPT(6) = 2 o 5)	1,3
S:X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Esfuerzos en coordenadas locales	1,4
S:1, 2, 3	Esfuerzos principales	1,4
S:INT	Intensidad de Esfuerzo	1,4
S:EQV	Esfuerzo equivalente	1,4
EPEL:X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Deformaciones elásticas (en coordenadas locales de capa), Deformación total si KEYOPT(2) = 2 o 3	4

EPEL:EQV	Deformaciones elásticas equivalentes	4
EPTH:X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Deformaciones térmicas (en coordenadas locales de capa), Deformación total si KEYOPT(2) = 2 o 3	4
EPTH:EQV	Deformaciones térmicas equivalentes	4
EPTO:X, Y, Z, XY, YZ, XZ	Deformaciones totales (no deformación térmica si KEYOPT(2) = 0 o 1)	2
EPTO:EQV	Deformaciones totales equivalentes	2
FC1 ... FC6, FCMAX	Valor de criterio de falla y máximo en cada punto de integración si KEYOPT(6) = 5	1,4
FC	Número de criterio de falla	1,5
VALUE	Máximo valor para este criterio	1,5
LN	Número de capa donde el máximo ocurre	1,5
EPELF(X,Y, Z, XY, YZ, XZ)	Deformación elástica de máximo valor para este criterio de falla	1,5
SF(X, Y, Z, XY, YZ, XZ)	Esfuerzo de máximo valor para este criterio de falla	1,5
LAYERS	Localización de la interfaz	1,6
ILSXZ	SXZ esfuerzo cortante interlaminar	1,6
ILSYZ	SYZ esfuerzo cortante interlaminar	1,6
ILANG	Angulo del vector de esfuerzo interlaminar	1,6
ILSUM	Sumatoria del vector de esfuerzo interlaminar	1,6
LN1, LN2	Número de capa que define la localización del esfuerzo interlaminar	1,7
ILMAX	Máxima esfuerzo interlaminar de corte	1,7
T(X, Y, XY)	Fuerzas totales en el plano	8
N(X, Y)	Fuerzas cortantes en X y Y fuera del plano	8
M(X, Y, XY)	Momentos totales del elemento por unidad de longitud	9
MFOR(X, Y, Z)	Fuerzas de cada nodo en el sistema coordenadas del elemento	10
MMOM(X, Y, Z)	Momento de cada nodo en el sistema coordinado del elemento	10

Estas entradas se activan cuando se seleccionan los requisitos siguientes:

Tabla 6.4. Requisitos para activar las salidas del elemento SHELL99.

REQUISITOS PARA ACTIVAR LAS SALIDAS DEL ELEMENTO SHELL 99	
No. de requisito	Requisito
1	Si KEYOPT(2) = 0 o 1
2	Punto de integración de la deformación, Si KEYOPT(3) = 1 o 4
3	Solución de capa si KEYOPT(6) > 1
4	La salida del ítem es controlada con KEYOPT(5)
5	Sumario de criterio de falla: si KEYOPT(6)=0, únicamente el máximo de todos los criterios de falla (FCMAX) es salida; salida de las deformaciones y/o esfuerzos elásticos (dependiendo en KEYOPT(5)) para cada criterio de falla y el máximo de todos los criterios (FCMAX).
6	Esfuerzos interlaminares si KEYOPT(6) > 2
7	Se imprime únicamente si KEYOPT(6) ≠ 0
8	Salida en los nodos esquineros únicamente si KEYOPT(3) = 3 o 4
9	Salida en los nodos esquineros únicamente si KEYOPT(3) = 3 o 4 y KEYOPT(9) ≠ 1
10	Salida únicamente si KEYOPT(3) = 2 o 4
11	Disponible únicamente cuando el centroide es un ítem GET
12	El esfuerzo equivalente usa una relación efectiva de Poisson: valores elásticos y térmicos, este valor es ingresado por el usuario (MP, PRXY)

A continuación se va a describir los otros elementos mencionados que se pueden utilizar en varias aplicaciones.

6.2.2. ELEMENTO TIPO MEMBRANA NO LINEAL ESTRATIFICADA (SHELL 91)

Elemento membrana tridimensional 3D de 8 nodos con seis grados de libertad en cada nodo: tres traslaciones y tres rotaciones. Se lo utiliza para modelar estructuras tipo sándwich relativamente gruesas.

Con este elemento se puede modelar hasta un total de 100 capas de espesor uniforme y 125 con variación de espesor bilinealmente sobre el área de la capa, se ingresa el dato del espesor en cada nodo.

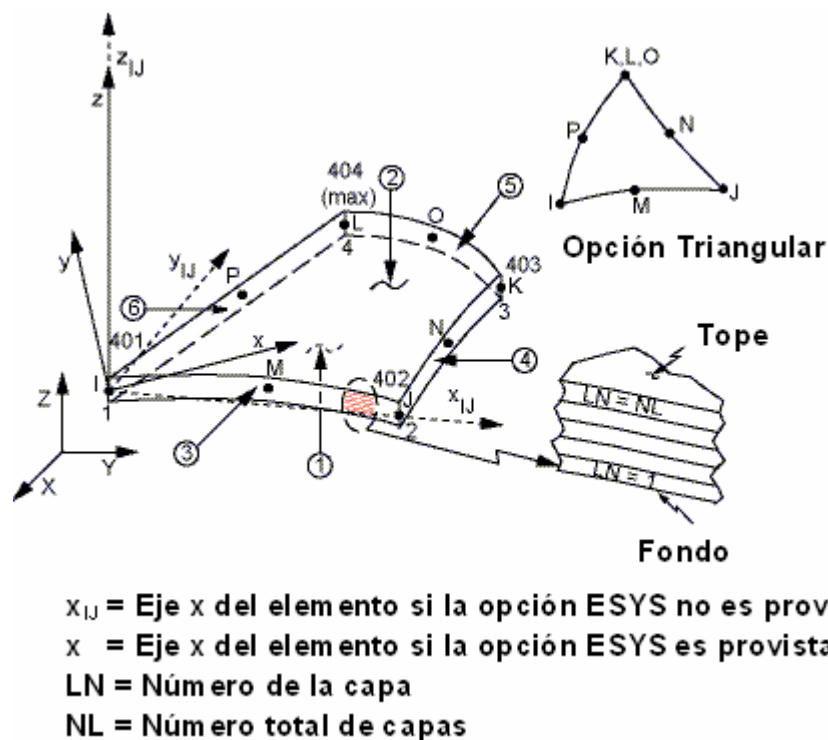


Figura 6.11. Geometría del elemento finito SHELL 91.

No se puede ingresar la matriz constitutiva de propiedades, resuelve problemas de plasticidad; deformaciones unitarias grandes. Se puede implementar las teorías de falla disponible.

6.2.3. ELEMENTO MEMBRANA DE DEFORMACIÓN DE 4 NODOS (SHELL 181)

Es un elemento de 4 nodos con seis grados de libertad en cada nodo, presenta traslaciones en las direcciones x, y, z, rotación con respecto a los ejes x, y, z (si la

opción membrana es usada, el elemento tiene únicamente grados traslacionales de libertad). La opción triángulo degenerado solo se emplea como elemento de relleno en el mallado. Aplica la teoría de Mindlin-Reissner.

SHELL181 puede ser usado para aplicaciones de estratificación tanto de membranas de elementos compuestos o estructuras tipo sándwich, también es utilizada para grandes rotaciones lineales y/o grandes deformaciones no lineales. El cambio en el espesor de la membrana es activada para un análisis no lineal.

Se puede modelar hasta un total de 255 capas de espesor uniforme o no uniforme. Resuelve problemas no lineales incluyendo grandes deformaciones y tiene la posibilidad de implementar las teorías de falla disponible.

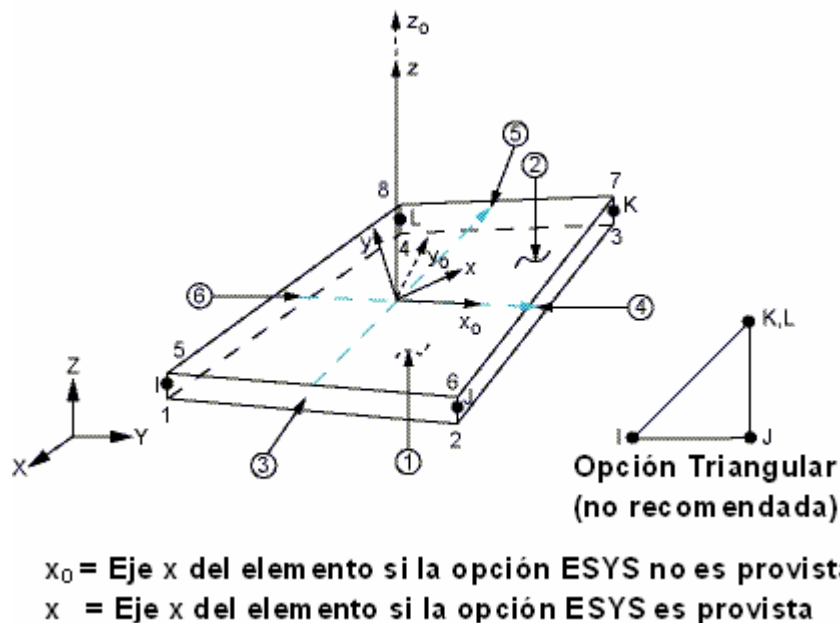
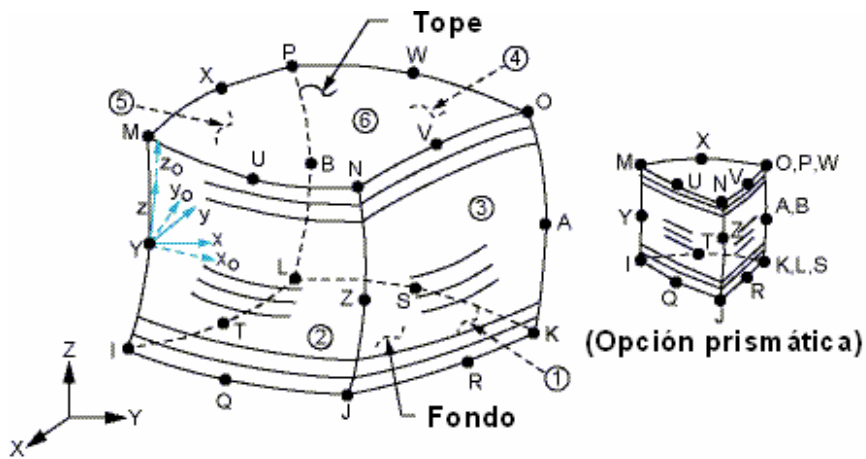


Figura 6.12. Geometría del elemento finito SHELL 181.

6.2.4. ELEMENTO SÓLIDO ESTRATIFICADO TRIDIMENSIONAL (SOLID 186)

Versión estratificada del elemento tridimensional sólido de 20 nodos con tres grados de libertad por nodo (u , v , w). Este elemento puede ser estratificado para modelar discontinuidades a través del espesor. Se puede modelar hasta un total de 250 capas de materiales y espesores diferentes. Resuelve problemas no lineales, incluyendo grandes deformaciones y brinda la posibilidad de implementar las teorías de falla disponibles.



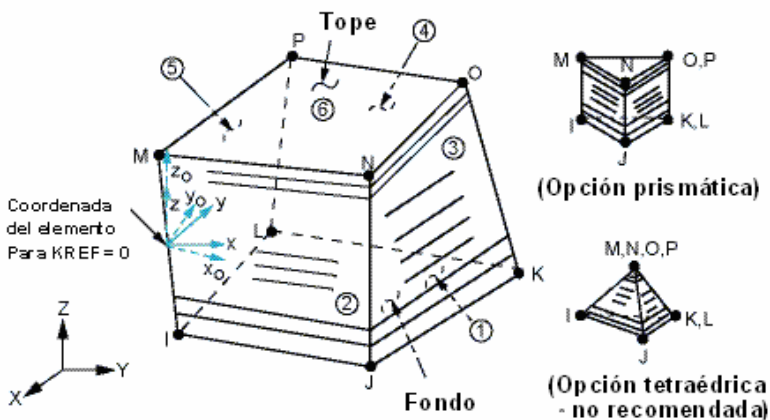
x_0 = Eje x del elemento si la opción ESYS no es provista.
 x = Eje x del elemento si la opción ESYS es provista.

Figura 6.13. Geometría del elemento finito SOLID 186.

6.2.5. ELEMENTO SÓLIDO ESTRATIFICADO TRIDIMENSIONAL (SOLID 46)

Versión estratificada del elemento tridimensional sólido de 8 nodos SOLID46 con tres grados de libertad por nodo (u, v, w), (ver figura 6.14). Este elemento puede ser utilizado para modelar membranas estratificadas gruesas o sólidos estratificados. Puede estratificar hasta 250 capas para modelar discontinuidades de la pendiente de deformación a través del espesor.

Se puede modelar hasta un total de 250 capas de espesor uniforme y 125 que pueden variar bilinealmente. Resuelve problemas no lineales incluyendo grandes deformaciones y tiene la posibilidad de implementar las teorías de falla disponibles.



x_0 = Eje x del elemento si la opción ESYS no es provista.
 x = Eje x del elemento si la opción ESYS es provista.

Figura 6.14. Geometría del elemento finito SOLID 186.

6.2.6. ELEMENTO SÓLIDO ESTRATIFICADO (SOLID 191)

Versión estratificada del elemento tridimensional sólido de 20 nodos SOLID95 con tres grados de libertad por nodo (u , v , w). Este elemento puede ser utilizado para modelar membranas estratificadas gruesas o sólidos estratificados. Puede estratificar hasta 250 capas para modelar discontinuidades de la pendiente de deformación a través del espesor. Se puede modelar hasta un total de 100 capas de espesor uniforme y 125 que pueden variar bilinealmente. Resuelve problemas no lineales incluyendo grandes deformaciones y brinda la posibilidad de implementar las teorías de falla disponibles.

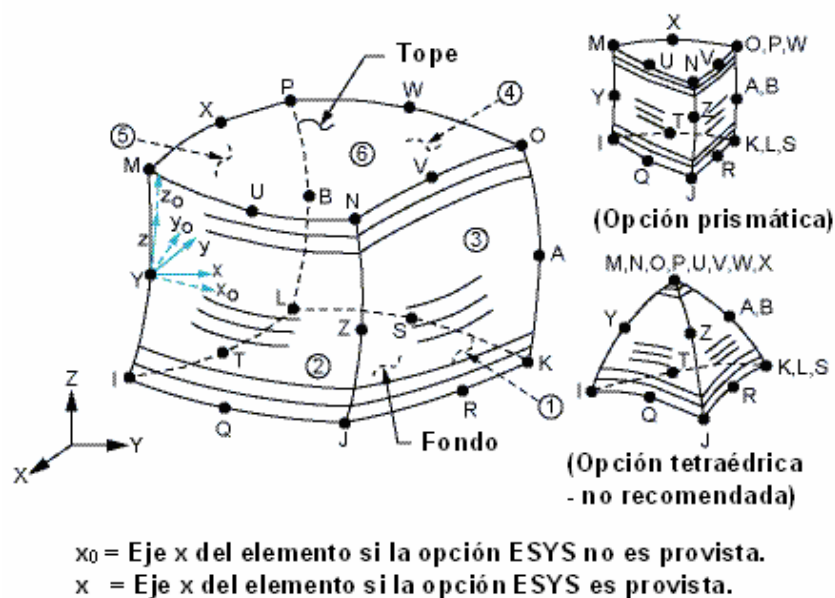
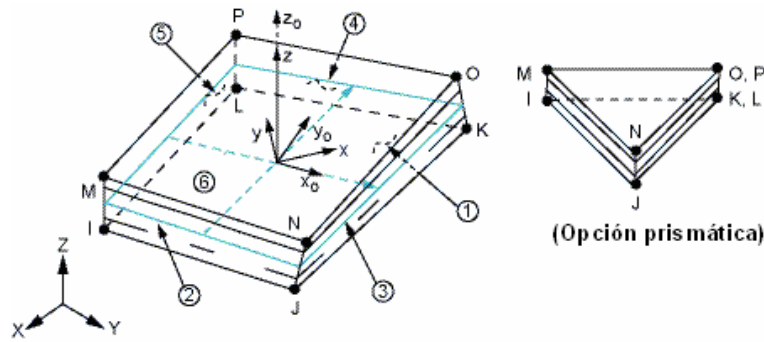


Figura 6.15. Geometría del elemento finito SOLID 191.

6.2.7. ELEMENTO TIPO MEMBRANA SÓLIDA ESTRATIFICADA (SOLSH 190)

Membrana sólida tridimensional de 8 nodos con tres grados de libertad por nodo (u , v , w). Este elemento puede ser estratificado para modelar discontinuidades a través del espesor. SOLSH 190 puede ser usado para simular membranas estructurales con un amplio rango de espesores.

El elemento tiene total capacidad no lineal incluyendo grandes deformaciones y permite modelar hasta 250 capas, tiene posibilidad de implementar las teorías de falla disponibles.



x_0 = Eje x del elemento si la opción ESYS no es provista.
 x = Eje x del elemento si la opción ESYS es provista.

Figura 6.16 Geometría del elemento finito SOLSH 190.

6.2.8. VIGAS TRIDIMENSIONALES (BEAM 188/189)

Versión lineal y cuadrática del elemento finito viga tridimensional con 6 grados de libertad (ver figura 6.17). Apropiado para modelar vigas delgadas o gruesas. Este elemento está basado en la teoría de vigas de Timoshenko y el efecto de la deformación de corte está incluido. A través de comandos puede manejar múltiples materiales a través de la sección de corte, inclusión y predicción de esfuerzos cortantes. Resuelve problemas no lineales incluyendo grandes deformaciones.

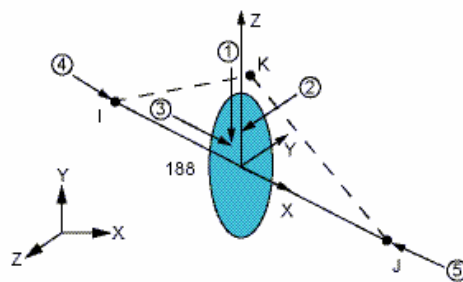


Figura 6.17 Geometría del elemento finito BEAM 188/189.

6.3. MODELAMIENTO DEL MATERIAL Y CONFIGURACIÓN DE CAPAS

Una vez que está cargado en el programa el elemento a ser analizado, sea vía las herramientas de modelado de Ansys, o mediante un software externo de diseño, se selecciona el elemento finito apropiado para el modelo mediante: **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete**.

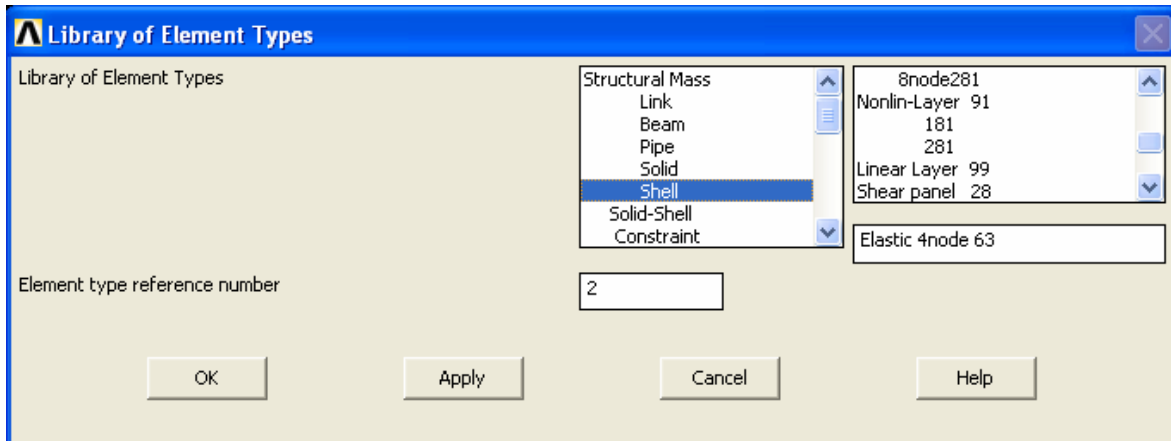


Figura 6.18. Biblioteca de elementos finitos.

Se necesita entonces asignar las propiedades del material, que son ortotrópicas para la mayoría de los compuestos. Es importante notar que estas propiedades corresponderán a una capa denominada **especialmente ortotrópica**. Es decir, los ejes del material 1-2 coinciden con los ejes de referencia (ejes de carga) x-y. Es decir, la dirección de las cargas aplicadas coincide con la dirección de los ejes del material (ver figura 6.19). Las propiedades del material se asignan mediante **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Models** (ver figura 6.20).

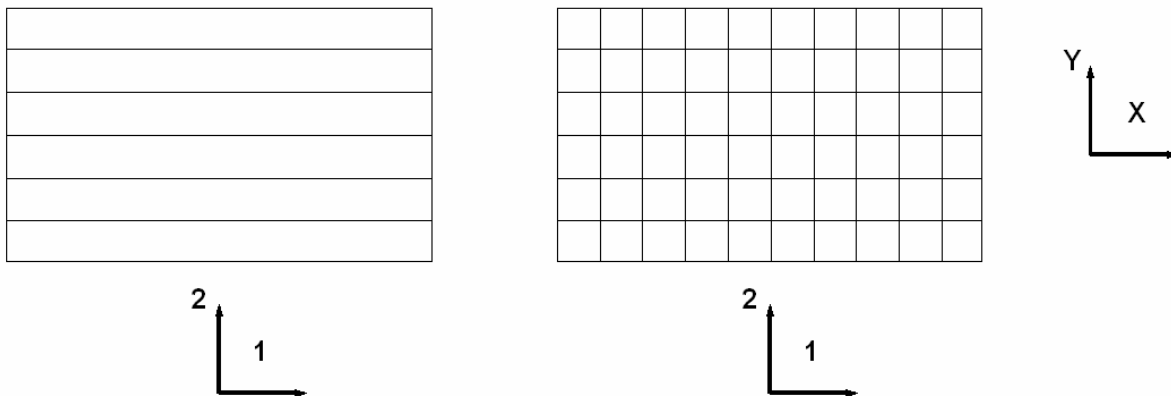


Figura 6.19. Capa especialmente ortotrópica.

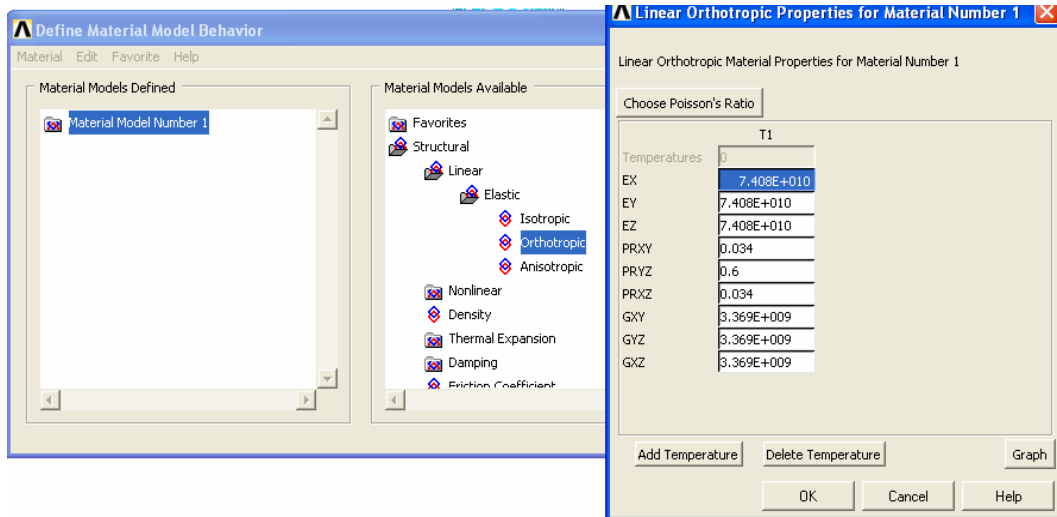


Figura 6.20. Cuadro de diálogo para asignar las propiedades mecánicas.

De ser necesario, se puede generar n materiales adicionales, de tal modo que cada capa puede ser construida de diferente material ortotrópico. Es importante no dejar vacío ninguno de los campos. Como se ha visto en los capítulos precedentes, para obtener un laminado compuesto, se suele estratificar con capas, cuyos ejes del material no coinciden necesariamente con los ejes de referencia. Estas capas se denominan **generalmente ortotrópicas**, y sus propiedades se calculan automáticamente asignando la rotación en grados de la capa con respecto al eje x. Esto se puede hacer llenando los campos que aparecen al seleccionar: **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Real Constants** → **Add / Edit / Delete** → **OK** (ver figura 6.21).

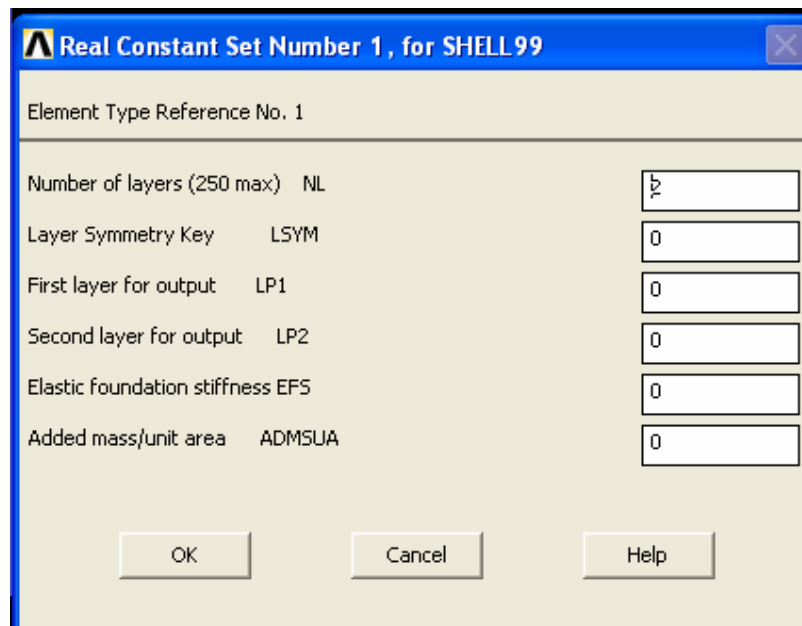


Figura 6.21. Cuadro de diálogo para asignar las características preliminares del laminado cuando se selecciona SHELL 99, 0 significa opción desactivada.

Los campos corresponden a las siguientes definiciones:

- **NL:** Número de capas
- **LSYM:** Se activa con 1 si se tiene un laminado simétrico y únicamente se define la mitad de las capas, con 0 se desactiva la opción
- **LP1:** Primera capa especialmente seleccionada para datos de salida.
- **LP2:** Segunda capa especialmente seleccionada para datos de salida.
- **EFS:** Rigidez de fundación elástica.
- **ADMSUA:** Añade masa por unidad de área en el capa.

A continuación se obtiene el siguiente cuadro de diálogo, donde se puede asignar el material de la capa, la orientación de la misma con respecto a los ejes de referencia y el espesor de la capa.

Mat no.	X-axis rotation, layer thk	MAT	THETA	TK
Layer number 1	1	0	0	0
Layer number 2	0	0	0	0
Layer number 3	0	0	0	0
Layer number 4	0	0	0	0
Layer number 5	0	0	0	0
Layer number 6	0	0	0	0

Figura 6.22. Cuadro de diálogo para asignar material, orientación y espesor.

Adicionalmente Ansys permite definir las propiedades mediante matrices constitutivas. Si se utiliza este segundo método, se debe antes activar **options** en el siguiente cuadro de diálogo:

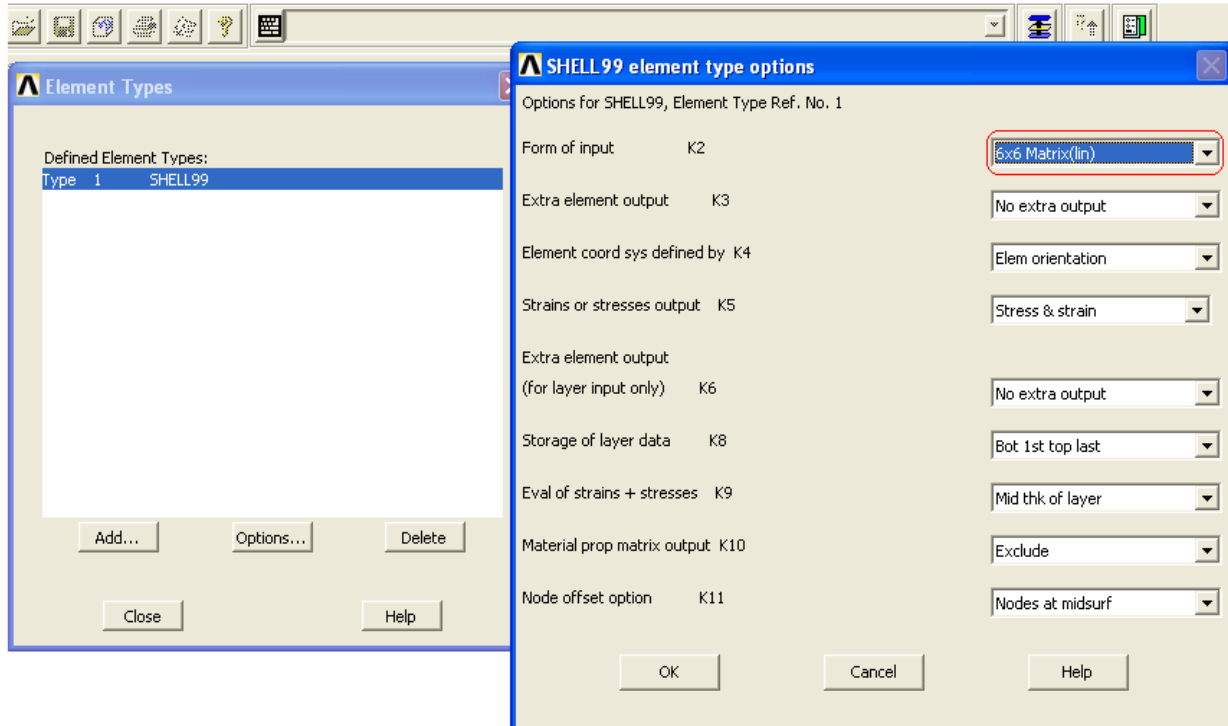


Figura 6.23. Cuadro de diálogo para activar las opciones del elemento finito.

A continuación, en KEYOPT(2) “K2”, se selecciona la opción “6x6 Matrix”. Cuando se vuelve a **Real Contants** aparecerá el siguiente set de matrices cuyos campos deben ser llenados (ver figura 6.24). La opción matrices constitutivas solo está disponible para los elementos SHELL 99 y SOLID 46. Estas matrices obviamente deben ser calculadas fuera del programa, y podrán ser incluidas en la solución cuando se activa KEYOPT(10) “K10”. Si se selección “K3” se pueden obtener datos extras de salidas, como por ejemplo deformaciones, fuerzas nodales y fuerzas y momentos por unidad de longitud.

Real Constant Set Number 1, for SHELL99

Element Type Reference No. 1

Submatrix A (21 real constants)

A(1),A(2),A(3)	5	1	0
A(4),A(5),A(6)	0	0	0
A(7),A(8),A(9)	0	0	0
A(10),A(11),A(12)	0	0	0
A(13),A(14),A(15)	0	0	0
A(16),A(17),A(18)	0	0	0
A(19),A(20),A(21)	0	0	0

Submatrix B (21 real constants)

B(1),B(2),B(3)	0	0	0
B(4),B(5),B(6)			
B(7),B(8),B(9)			
B(10),B(11),B(12)			
B(13),B(14),B(15)			
B(16),B(17),B(18)			
B(19),B(20),B(21)			

Submatrix D (21 real constants)

D(1),D(2),D(3)			
D(4),D(5),D(6)			
D(7),D(8),D(9)			
D(10),D(11),D(12)			
D(13),D(14),D(15)			
D(16),D(17),D(18)			
D(19),D(20),D(21)			

MT array

MT(1),MT(2),MT(3)			
MT(4),MT(5),MT(6)			

BT array

BT(1),BT(2),BT(3)			
BT(4),BT(5),BT(6)			

OK Cancel Help

Figura 6.24. Set de matrices constitutivas del laminado ortotrópico.

Si el espesor de la capa no es constante se puede seleccionar en KEYOPT (2) "K2" la opción **Tapered Layer**, y cuando se edite **Real Constants** se deberá llenar los siguientes campos:

Real Constant Set Number 1, for SHELL99

Layer number 1	MAT, THETA	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(I), TK(J)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(K), TK(L)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
Layer number 2	MAT, THETA	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(I), TK(J)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(K), TK(L)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
Layer number 3	MAT, THETA	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(I), TK(J)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(K), TK(L)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
Layer number 4	MAT, THETA	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(I), TK(J)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(K), TK(L)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
Layer number 5	MAT, THETA	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(I), TK(J)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(K), TK(L)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
Layer number 6	MAT, THETA	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(I), TK(J)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>
	TK(K), TK(L)	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="0"/>

OK Cancel Help

Figura 6.25. Asignación de espesor variable en cada capa.

6.4. ESTRATIFICACIÓN DE CAPAS

Una de las ventajas que ofrece el trabajar con materiales compuestos es que se puede estratificar capas donde sea necesario, y en el número y orientación que convenga. Es posible definir varios laminados con números de capas, espesores, orientaciones y material diferente. Para esto se selecciona la opción **Add** en el cuadro de diálogo siguiente (ver figura 6.26).

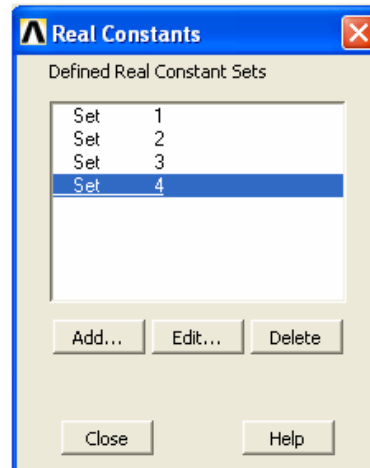


Figura 6.26. Definición de diferentes tipos de laminados.

Adicionalmente, en el software de diseño Solidworks se puede delimitar varias secciones, que serán reconocidas por Ansys. En estas áreas se puede asignar el set o laminado que optimice la resistencia del elemento a ser diseñado. Para definir las características de cada área se puede utilizar la opción **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Meshing** → **Mesh Attributes** → **Picked Areas** y se obtiene el siguiente cuadro de diálogo (ver figura 6.27), donde se escoge el tipo de laminado que previamente se definió y que está identificado por los dígitos 1, 2, 3 y 4. A continuación se malla todo el elemento que está siendo analizado.

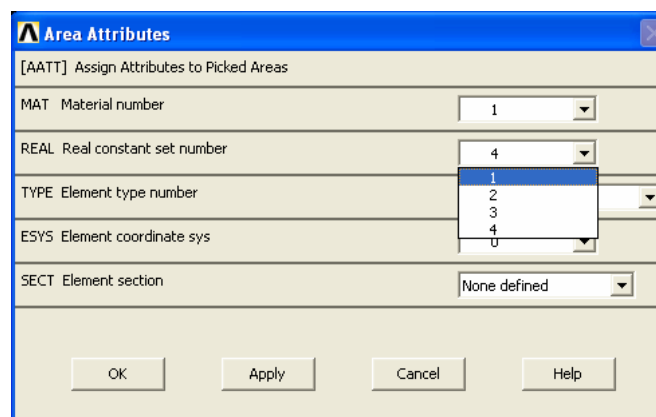


Figura 6.27. Atributos de área.

Otra posibilidad para estratificar capas es utilizando la opción **Main Menu** → **Preprocessor** → **Sections** → **Shell** → **Add/Edit**, que genera la herramienta de estratificación indicada en la figura 6.27.

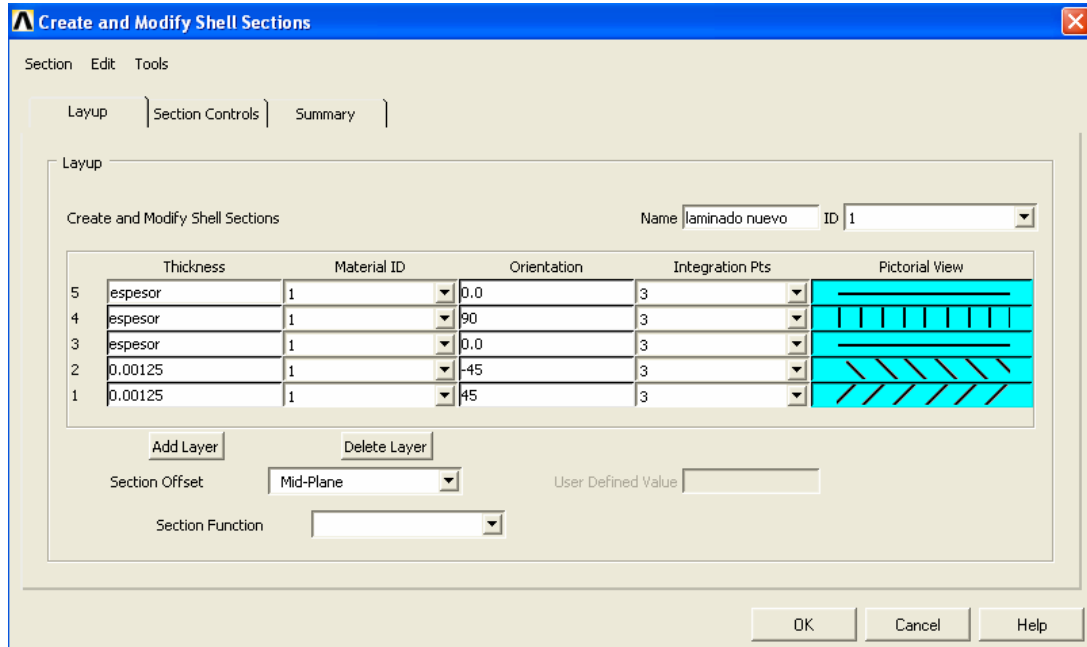


Figura 6.28. Crear y modificar secciones de membrana.

Este laminado que está identificado con un nombre “laminado nuevo” puede ser igualmente asignado a cualquier área de un elemento, ya que igualmente aparecerá en el campo SECT de la figura 6.27.

6.5. VERIFICACIÓN DE DATOS DE ENTRADA

ANSYS tiene varias opciones para verificar si los datos de entrada han sido correctamente ingresados:

- Si se utiliza **Utility Menu** → **List** → **Elements** → **Layered Elements**, lista los elementos y sus atributos.
- Si se ingresa **E/SHAPE, 1** en la línea de comandos, provocará que los elementos membrana sean visualizados en forma sólida y que los sólidos sean presentados con sus membranas, con lo cual se puede contar las capas del laminado (ver figura 6.29).

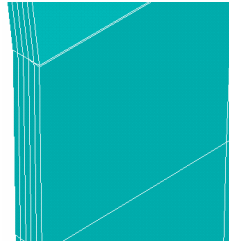


Figura 6.29. Ejemplo de la visualización con /ESHAPE, 1.

- **LAYLIST** lista la secuencia de estratificación de capas y las propiedades del material.

```

LAYERLIST Command
File
LIST OF ALL LAYERS FOR ALL SELECTED ELEMENTS
LIST LAYERS 1 TO 5 IN REAL SET 1 FOR ELEMENT 1
TOTAL LAYERS = 5 LSYM = 0 LP1 = 0 LP2 = 0
EFS = 0.00 ADMS = 0.00
-----
NO. ANGLE THICKNESS MAT EX EX
-----
1 0.0 0.125E-02 1 0.741E+11 0.741E+11
2 0.0 0.125E-02 1 0.741E+11 0.741E+11
3 0.0 0.125E-02 1 0.741E+11 0.741E+11
4 0.0 0.125E-02 1 0.741E+11 0.741E+11
5 0.0 0.125E-02 1 0.741E+11 0.741E+11
-----
SUM OF THK 0.625E-02
LIST LAYERS 1 TO 5 IN REAL SET 1 FOR ELEMENT 2
TOTAL LAYERS = 5 LSYM = 0 LP1 = 0 LP2 = 0
EFS = 0.00 ADMS = 0.00
-----
NO. ANGLE THICKNESS MAT EX EX
-----
1 0.0 0.125E-02 1 0.741E+11 0.741E+11

```

Figura 6.30. Comando LAYLIST.

- **LAYPLOT** permite visualizar la secuencia de estratificación en forma de cartas, las capas están cruzadas de líneas paralelas que indican su orientación.

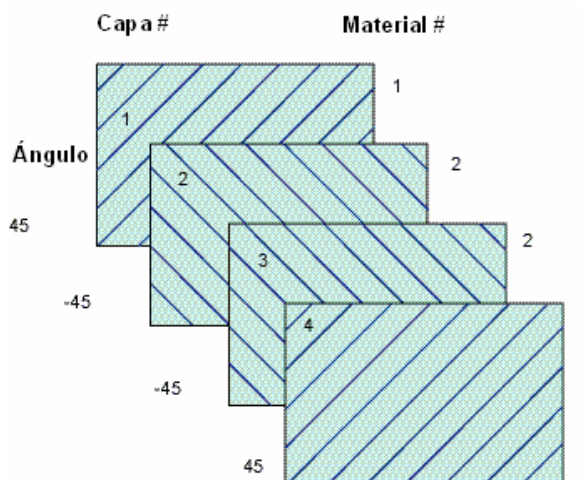


Figura 6.31. Comando LAYPLOT.

- **SECPLOT** similar a LAYPLOT, se selecciona con **Main Menu** → **Preprocessor** → **Sections** → **Shell** → **Lay-up** → **Plot Section**

6.6. CRITERIOS DE FALLA

Los criterios de falla son usados para determinar si una capa ha fallado debido a las cargas aplicadas. Ansys permite escoger tres criterios predefinidos de falla o se puede especificar hasta seis criterios de falla del usuario.

Los tres criterios predefinidos son:

- **Criterio de falla por máxima deformación:** Considera que el material falla cuando el mismo supera una cierta deformación límite en una zona determinada. Este criterio permite nueve deformaciones de falla y están definidas de acuerdo a las ecuaciones revisadas en (5.3).
- **Criterio de Falla por máximo esfuerzo:** Considera que el material falla cuando el mismo supera una cierta tensión límite en una zona determinada. Este criterio permite nueve esfuerzos de falla y están definidos de acuerdo a las ecuaciones revisadas en (5.2).
- **Criterio de Falla de Tsai-Wu:** Es un criterio de falla polinomial general, el cual permite nueve esfuerzos de falla y tres coeficientes de acoplamiento adicionales. Las deformaciones, esfuerzos y factores de acoplamiento pueden ser dependientes de la temperatura. El criterio de falla de Tsai-Wu se basa en el índice de esfuerzo revisado en (5.15).

Si el índice de esfuerzo es mayor que 1, significa que los esfuerzos son mayores que los admisibles y por lo tanto fallará el laminado.

Para visualizar cualquiera de los criterios de falla se debe activar en primer lugar la opción: **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete** → **Options** (ver figura 6.32).

Luego se utiliza la opción K8 para archivar los datos de todas las láminas, a continuación se debe ingresar los esfuerzos y deformaciones admisibles del material obtenidas vía tablas de especificaciones o en pruebas de laboratorio seleccionando:

ANSYS Main Menu → **Preprocessor** → **Material Props** → **Failure Criteria** → **Add / Edit** (ver figura 6.33).

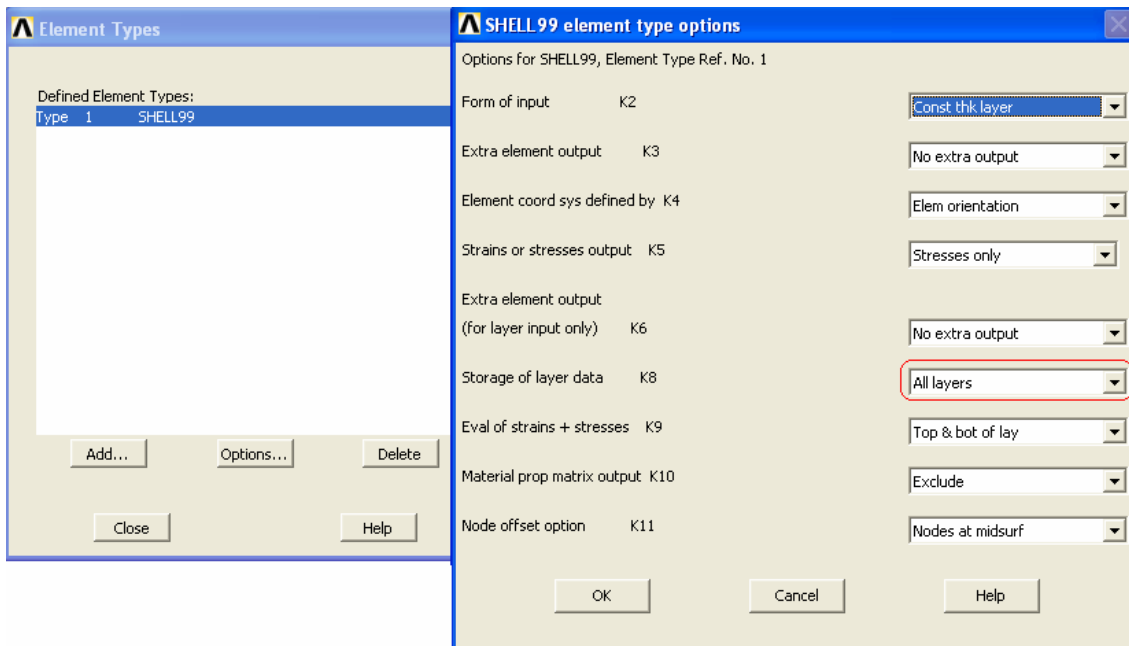


Figura 6.32. Cuadro para activar las opciones del elemento finito.

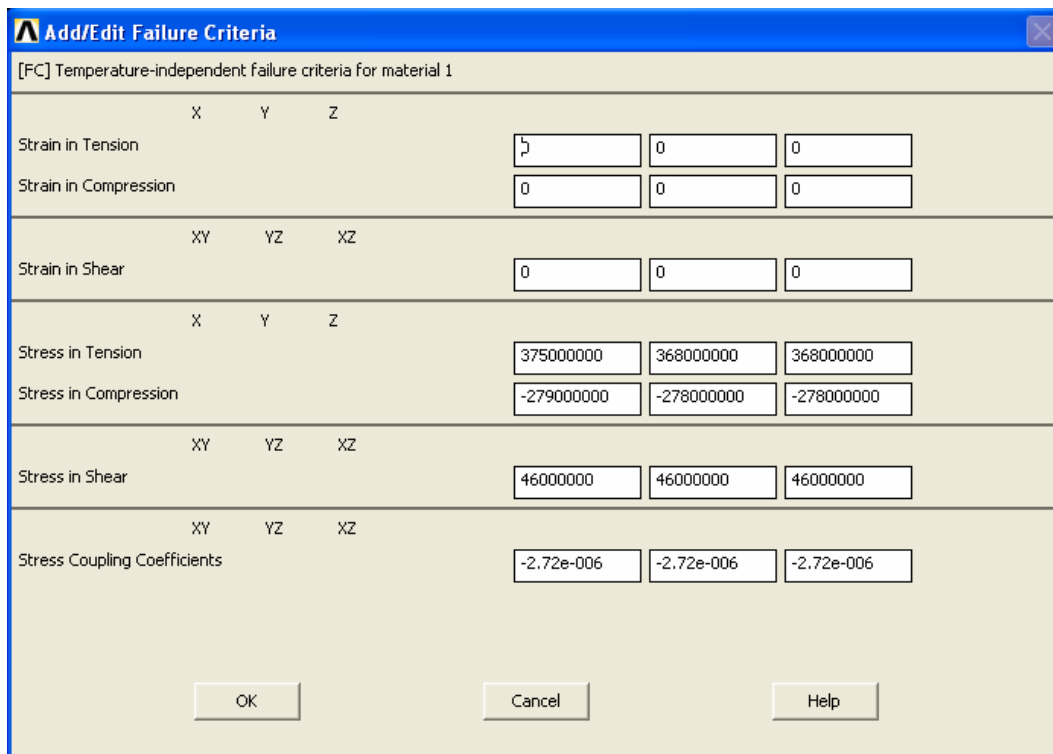


Figura 6.33. Esfuerzos y deformaciones admisibles.

Cuando se analiza los resultados se puede obtener los mapas de los criterios de falla mediante: **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot results** → **Contour plot** → **Nodal Solu** → **Failure Criteria**.

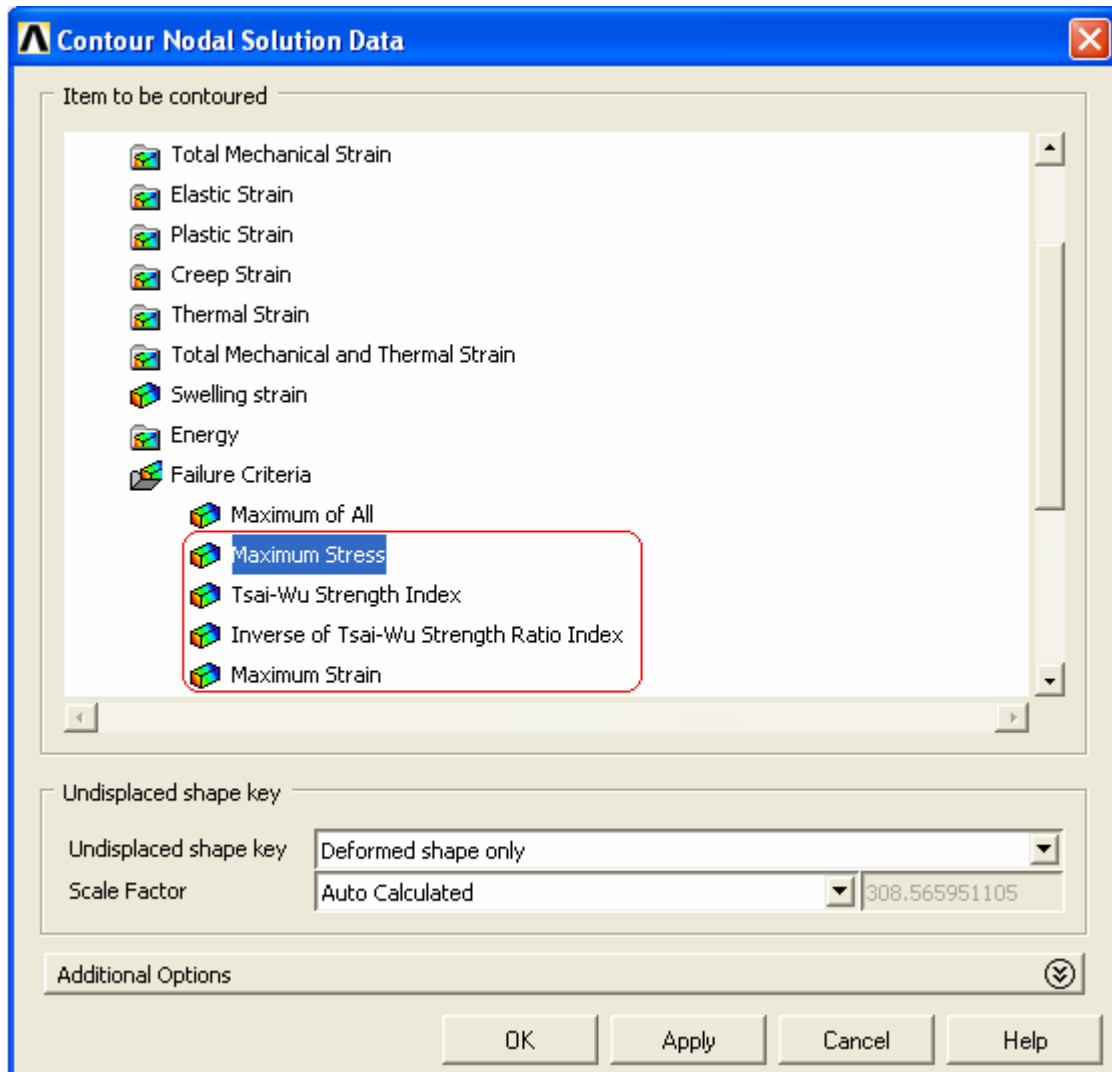


Figura 6.34. Soluciones de contorno.

REFERENCIAS

- 6.1. Moaveni, S. (1999). *Finite Element Analysis: Theory and application with ANSYS*. New Jersey: Prentice-Hall, Inc.
- 6.2. Nakasone, Y., Yoshimoto, S. y Stolarski, T.A. *Engineering Analysis with ANSYS Software*. Oxford: Butterworth-Heinemann.

CAPÍTULO 7

ANÁLISIS Y DISEÑO DE UNA ESTRUCTURA TIPO CÁSCARA CONSTRUIDA CON COMPUESTOS LÁMINADOS

El presente capítulo tratará sobre el diseño de un chasis para un prototipo monoplaça, para participar en la competición de la fórmula SAE, y su posterior análisis en Ansys. Como todo problema de diseño se realiza un proceso iterativo de síntesis y análisis hasta llegar a la mejor solución. Se utilizará como hipótesis de carga las originadas en investigaciones efectuadas en prototipos de chasis tubular. El objetivo es determinar un prediseño básico que permitirá, luego de ser el caso, ahondar en la temática del diseño completo de un chasis funcional, como proyecto estudiantil. Un objetivo adicional es desarrollar un procedimiento a seguir con Ansys para analizar cualquier pieza hecha con materiales compuestos.

7.1. CONCURSO FÓRMULA SAE

La capacidad fundamental de una lámina de material compuesto es soportar esfuerzos en el plano de la lámina por lo que en la mayoría de los casos se utilizan para construir paneles de autos, fuselajes y alas de avión, estructuras de botes, etc. En este trabajo, para ejemplificar el análisis en Ansys de una estructura tipo membrana, construida en base de materiales compuestos, se ha decidido diseñar el chasis monocasco de un prototipo de fórmula SAE (Sociedad de Ingenieros Automotrices).

Al visitar las páginas web de universidades extranjeras se puede constatar que diversas competencias de índole académico entre ellas sustentan en gran manera la creatividad de los alumnos. Esta es constantemente puesta a prueba con un sinnúmero de proyectos de competencia como por ejemplo: el vehículo solar, la carrera mini baja, competencia de aerodeslizadores, la fórmula SAE, etc. Por ello es de particular interés para los que se involucran en la formación de ingenieros, estudiar esta aplicación.

El desarrollo y optimización de un prototipo de fórmula SAE puede prolongarse por varios meses, y ser llevado a cabo por un equipo multidisciplinario. Este primer proyecto busca fijar una base sólida sobre la que sea posible seguir progresando. En primer lugar, este elemento está englobado en un proyecto académico universitario de mayor alcance, que buscaría involucrar a los estudiantes en el diseño y construcción de un prototipo competitivo completo, y en segundo lugar ilustra de manera clara una aplicación de los materiales compuestos.

La competición de la fórmula SAE es un certamen anual íteruniversitario en el cual los estudiantes miembros de la SAE conciben, diseñan y compiten con un auto deportivo monoplaza de formato pequeño, fabricado por ellos. En esta competencia se pone a prueba el conocimiento, la habilidad, la creatividad y la imaginación de los estudiantes. Los autos, construidos por un equipo que se esfuerza por un período de un año, son sometidos a pruebas estáticas y dinámicas. El resultado final es una gran experiencia para jóvenes estudiantes que se enfrentan a un reto típico de ingeniería.

7.2. TIPOS Y EVOLUCIÓN DEL CHASIS

El chasis de un vehículo es la estructura en la que se montan y sujetan los demás componentes. El chasis soporta las cargas tales como las cargas en las ruedas, reacciones del tren cinemático y las reacciones en los puntos de anclaje de los cinturones de seguridad. Además ofrece una resistente protección en caso de accidente, y para el vehículo es el equivalente al esqueleto de un ser humano.

El chasis de cualquier auto debe ser ligero, para no desperdiciar potencia y reducir el consumo, rígido para proteger al piloto y lograr un buen comportamiento en pista y de construcción económica y viable. Los chasis en general han evolucionado y son muy variados. Se pueden citar por ejemplo, el chasis en escalera (ver figura 7.1), utilizado en la actualidad por camiones y camionetas, y que no es suficientemente rígido a la torsión, fue prácticamente el primero en utilizarse para los automóviles.



Figura 7.1 Chasis en escalera. ^[7.1]

Hoy en día, la mayoría de automóviles se configuran de acuerdo al chasis monocasco, en el cual la lámina superficial absorbe los esfuerzos. Estos chasis pueden ser manufacturados en acero estampado (ver figura 7.2), aluminio, magnesio (ver figura 7.3) o materiales compuestos (ver figura 7.4). Se utilizan especialmente en los turismo, en todocaminos de alta gama y en los Fórmula1. El chasis de la figura 7.5 es un desarrollo revolucionario de Porsche, que utiliza fibra de carbono en matriz epóxica para construir una celda de extrema rigidez que integra la cabina con la estructura que soporta el motor y la transmisión.



Figura 7.2. Chasis monocasco de acero estampado de un turismo. ^[7.2]

En la figura 7.3 se observa uno de los primeros autos que usaron una construcción monocasco en magnesio, con lo que se lograba una estructura sumamente liviana.

Se perdió el interés en el magnesio con el surgimiento de los materiales compuestos.



Figura 7.3. Chasis monocasco en aleación de magnesio del Jaguar D-Type. [7.3]



Figura 7.4. Primer auto con chasis monocasco en fibra de vidrio, Lotus Elite. [7.4]



Figura 7.5. Chasis de fibra de carbono/epoxi del Porsche Carrera GT. [7.5]

Existen también los chasis tubulares (ver figura 7.6), cuya construcción es muy difícil de automatizar, por lo que se realiza de forma artesanal y se reserva para los autos deportivos y de competición.

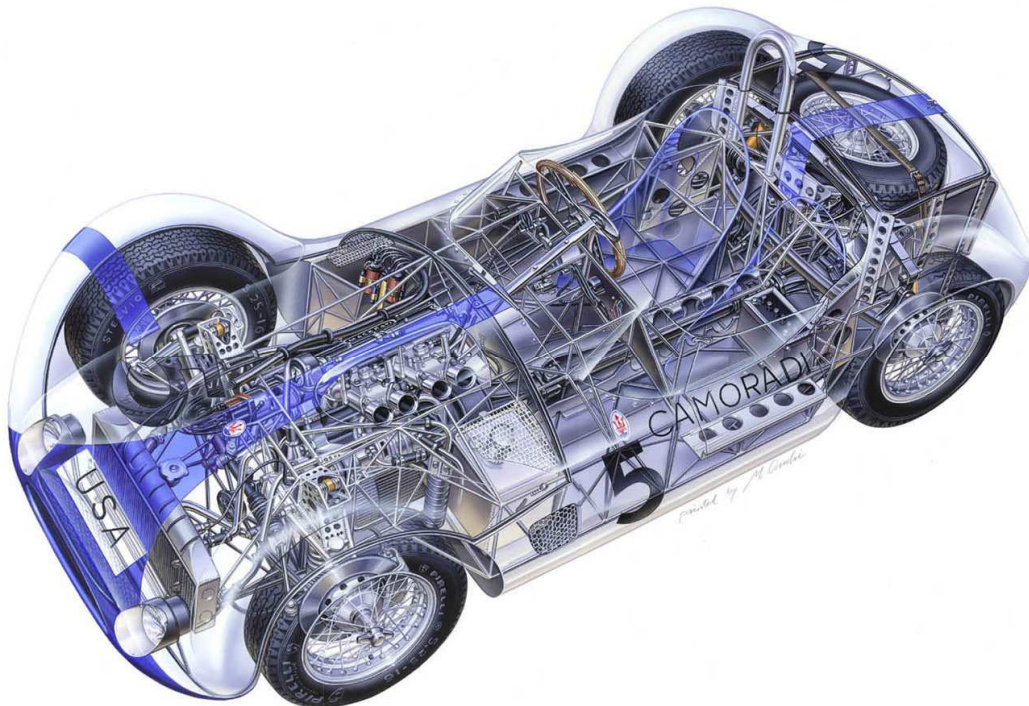


Figura 7.6. Chasis tubular del Maserati birdcage. [7.6]

Finalmente, también se utiliza un chasis que rememora a los vertebrados, conocido como “backbone”, o chasis de columna vertebral (ver figura 7.7), utilizado principalmente en los famosos Volkswagen escarabajos.



Figura 7.7. Chasis tipo columna vertebral del Volkswagen escarabajo. [7.7]

7.3. CHASIS DE UN PROTOTIPO FÓRMULA SAE

Los prototipos de Fórmula SAE se construyen en base a diferentes tipos de chasis. Uno de los más comunes es el chasis tubular de acero (ver figura 7.8), cuyos costos son bajos y que ofrece una buena respuesta a los esfuerzos, aunque el principal inconveniente es el peso.



Figura 7.8. Chasis tubular para un prototipo Fórmula SAE [7.8].

Otra posibilidad, pero más costosa, es la utilización de un chasis monocasco realizado en materiales compuestos, especialmente fibra de carbono (ver figura 7.9). Este tipo de chasis ofrece la ventaja de obtener una estructura muy resistente y un comportamiento excelente en pista, ya que este tipo de estructuras ofrecen gran resistencia a torsión y su peso es menor que el de las estructuras de acero. Este tipo de estructura es objeto del presente estudio y análisis.



Figura 7.9. Chasis monocasco para un prototipo Fórmula SAE [7.8].

A continuación se procederá a ilustrar el diseño geométrico del chasis, utilizando herramientas de diseño industrial.

7.4. MODELADO DEL CHASIS

Normalmente al proyectar un chasis se lo hace mediante el análisis de las restricciones que provienen de la reglamentación de la Fórmula SAE. Existe una normativa que impone el espacio destinado al piloto, la seguridad del mismo, y las dimensiones generales.

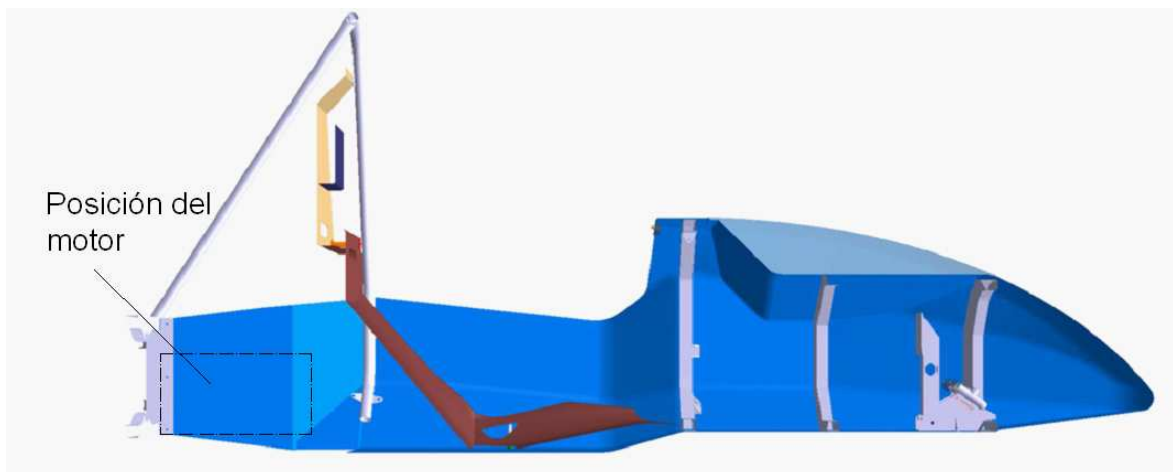
Debido a que el propósito de esta tesis no es el diseño de un prototipo Fórmula SAE, sino más bien ilustrar la aplicación de software de elementos finitos en el análisis de elementos construidos con composites, se optará por otro procedimiento. Este consiste en utilizar imágenes de modelos ya construidos, que se encuentran disponibles en el Internet para digitalizarlas. En base de estas imágenes se genera las superficies tridimensionales del modelo. El procedimiento para diseñar el chasis será el siguiente:

- Digitalización de los perfiles tridimensionales mediante Rhinoceros.
- Creación de las superficies en SolidWorks.

Un diseño que parece interesante se muestra en las imágenes encontradas en la página de Internet: <http://www.dutracing.nl/>, (ver figura 7.10), las cuales son bastante detalladas y corresponden a un prototipo construido en fibra de carbono.



Figura 7.10. Fotografía del Dut07. [7.9]



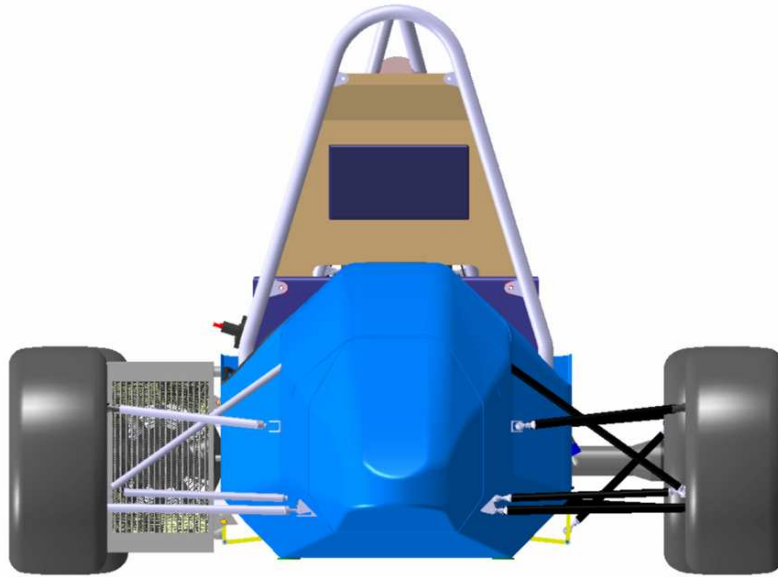


Figura 7.11. Imágenes del Dut07. [7.9]

El programa que se utilizará para modelar los perfiles y superficies es el software de formas libres Rhinoceros 3.0. Este software es utilizado especialmente en el diseño industrial. Los algoritmos en que se fundamenta su funcionamiento se basa en la matemática de curvas NURBS (Non Uniform Rational B-Splines). Debido a que, como se puede ver en la figura 7.10, los perfiles geométricos del chasis son complejos, se ha decidido utilizar este programa para la primera etapa de diseño que consiste en obtener los perfiles del chasis.

Las NURBS, B-splines racionales no uniformes, son representaciones matemáticas de geometría en 3D capaces de describir cualquier forma con precisión, desde simples líneas en 2D, círculos, arcos o curvas, hasta los más complejos sólidos o superficies orgánicas de forma libre en 3D. El desarrollo de las NURBS empezó aproximadamente en 1950 cuando los ingenieros necesitaban la representación matemática exacta de superficies de forma libre, como las usadas en carrocerías de automóviles y cascos de barcos y que pudieran ser reproducidos exacta y técnicamente en cualquier momento. Las anteriores representaciones de este tipo de diseños solo podían hacerse con modelos físicos o maquetas realizadas por el diseñador o el ingeniero.

Las curvas NURBS han llegado a ser un estándar para gestionar la información geométrica que es procesada y usada por computadoras. Algunas de las razones de la popularidad de las NURBS son:

- NURBS provee una base matemática unificada para representar formas y pueden ser usadas para describir formas analíticas tales como cónicas, círculos, cuadrados, etc. y formas libres tales como perfiles de autos, formas humanas, etc.
- Los algoritmos NURBS son rápidos y numéricamente estables.
- A la vez que puede representar perfiles y superficies suaves, también puede representar esquinas agudas y torceduras.
- NURBS son generalizaciones de otras curvas populares como las curvas de Bézier y las Splines.
- Las curvas NURBS se caracterizan porque tienen un control global de cualquier curva o superficie

Las curvas NURBS se definen por el grado y por puntos de control:

Un grado es un número entero positivo. Este número normalmente es 1, 2, 3 o 5, pero puede ser cualquier número entero positivo. Las líneas y polilíneas NURBS de Rhinoceros son grado 1, los círculos son grado 2 y la mayoría de las formas libres son grado 3 o 5. Existe la posibilidad de incrementar los grados de una curva NURBS sin cambiar su forma. Generalmente, no es posible reducir el grado de una curva NURBS y no cambiar su forma.

Los puntos de control son una lista de puntos de grado+1 como mínimo. Una de las maneras más sencillas de cambiar la forma de una curva NURBS es mover los puntos de control. Los puntos de control tienen un número asociado denominado peso. Con algunas excepciones, los pesos son números positivos. Cuando todos los puntos de control de una curva tienen el mismo peso (normalmente 1), la curva se denomina no racional; de lo contrario, se trataría de una curva racional. En NURBS, la R significa racional e indica que una curva NURBS tiene la posibilidad de ser racional. En la práctica, la mayoría de las curvas NURBS son no-rationales. Algunas curvas, círculos y elipses NURBS, ejemplos significativos, son siempre racionales.

Una forma de introducir al estudio de las curvas NURBS es mediante las curvas de Bézier. Para entender el algoritmo en que se basan las curvas de Bézier se grafica una curva de grado 4 con 5 puntos de control que serán los siguientes pares coordenados (x, y): (1,4); (2,7); (3,13); (7,21); (5,40).

La curva de Bézier es definida por:

$$C(u) = \sum_{i=0}^n \left[(B_{i,n}) \cdot [u^i \cdot (1-u)^{n-i}] \cdot P_i \right] \quad (7.1)$$

Para dibujar la curva se define el grado de polinomio:

$$n = 4$$

El índice del vector i va desde:

$$i = 0 \dots n$$

La influencia que cada punto intermedio ejerce en la curva es gobernada por un set de funciones básicas que aseguran que los puntos de control cercanos a un punto en la curva ejerzan más influencia que aquellos puntos de control más lejanos. Estas funciones se denominan polinomios de Bernstein y se definen mediante (7.2):

$$B_{i,n} = \frac{n!}{i! \cdot (n-i)!} \quad (7.2)$$

Con la ayuda de estos polinomios se forma una matriz $[M(u)]$ de funciones de interpolación según (7.3):

$$B_{i,n} \cdot u^i \cdot (1-u)^{n-i} = \begin{bmatrix} (u-1)^4 \\ -4 \cdot u \cdot (u-1)^3 \\ 6 \cdot u^2 \cdot (u-1)^2 \\ -4 \cdot u^3 \cdot (u-1) \\ u^4 \end{bmatrix} \quad (7.3)$$

El parámetro de entrada u va desde 0 hasta 1 en pasos de 0.1. Adicionalmente, los puntos de control impuestos que caracterizan la curva son:

$$[P] = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 7 \\ 3 & 13 \\ 7 & 21 \\ 5 & 40 \end{bmatrix}$$

Finalmente, la curva está dada por la expresión (7.4):

$$[C(u)] = [M(u)]^T [P] \quad (7.4)$$

donde $[M(u)] = [B_{i,n} u^i (1-u)^{n-i}]$

Y se puede graficar la curva deseada (ver figura 7.12).

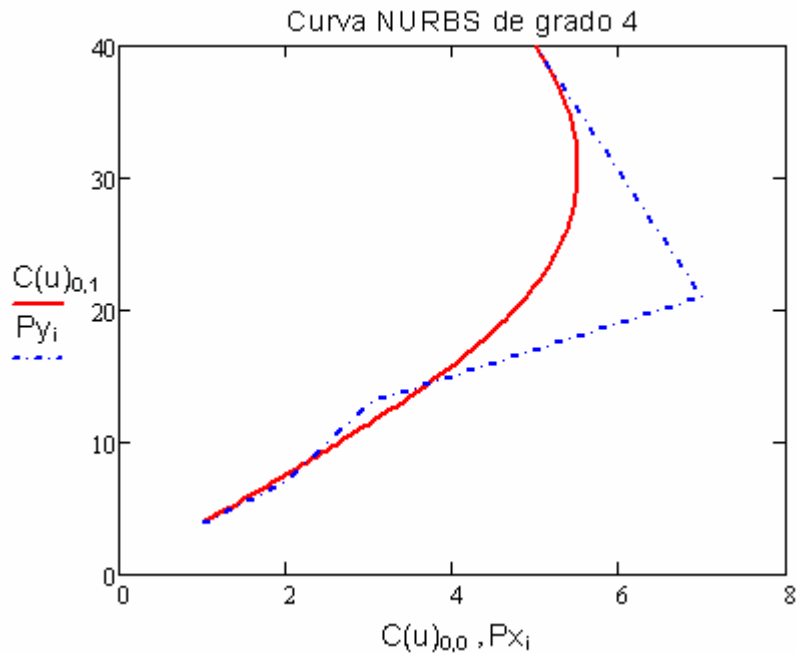


Figura 7.12. Curva NURBS en MathCAD.

Nótese que la curva es tangente a los segmentos de inicio y fin. Es importante recalcar que la curva es controlada globalmente por los puntos de control (aristas en la figura 7.12). Ahora se ilustrará en el programa Rhinoceros el mecanismo para obtener curvas libres. En primer lugar, se dibuja una línea recta horizontal en cualquier ventana del programa Rhinoceros (ver figura 7.13).



Figura 7.13. Línea recta trazada en Rhinoceros.

A continuación se edita la curva, se cambia el grado y se aumenta los puntos de control, que originalmente son 2 (ver figura 7.14).

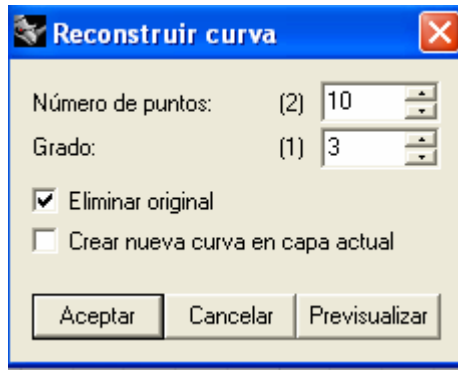


Figura 7.14. Cuadro de diálogo de la opción reconstruir curva.

Luego se deforma la curva en forma libre, arrastrando con el mouse los puntos según el diseño a obtener (ver figura 7.15):

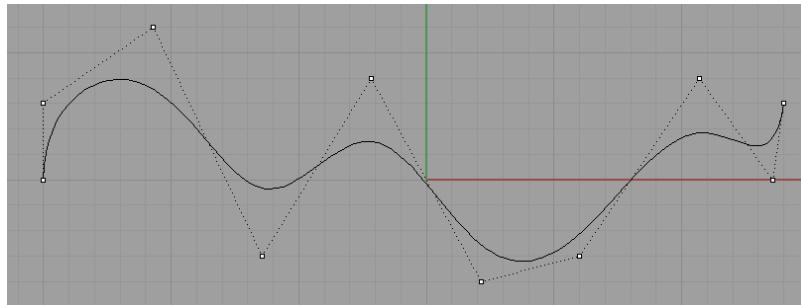


Figura 7.15. Línea deformada mediante los puntos de control.

Esta es la característica que diferencia al Rhinoceros de otros programas CAD y que es de gran ayuda para el diseño. Además se tiene la facilidad de digitalizar imágenes en mapa de bits, generar perfiles de sección transversal, generar superficies de transición, mezclar superficies y cambiar indistintamente sólidos a superficies y viceversa.

En este trabajo se modelará en dos formas, un modelo sólido y un modelo superficial, el modelo superficial se utilizará para comunicarse con Ansys, mientras que el modelo sólido servirá para maquinar un molde a escala que se utilizará para obtener un laminado en fibra de vidrio y familiarizarse con las técnicas constructivas.

7.4.1. MODELADO SUPERFICIAL DEL CHASIS

El primer paso es pegar las imágenes en las ventanas de Rhinoceros, alinearlas y escalarlas adecuadamente sabiendo que la altura del prototipo es de un metro. En base de estas imágenes se generan perfiles que son deformados y suavizados por medio de sus puntos de control (ver figura 7.16).

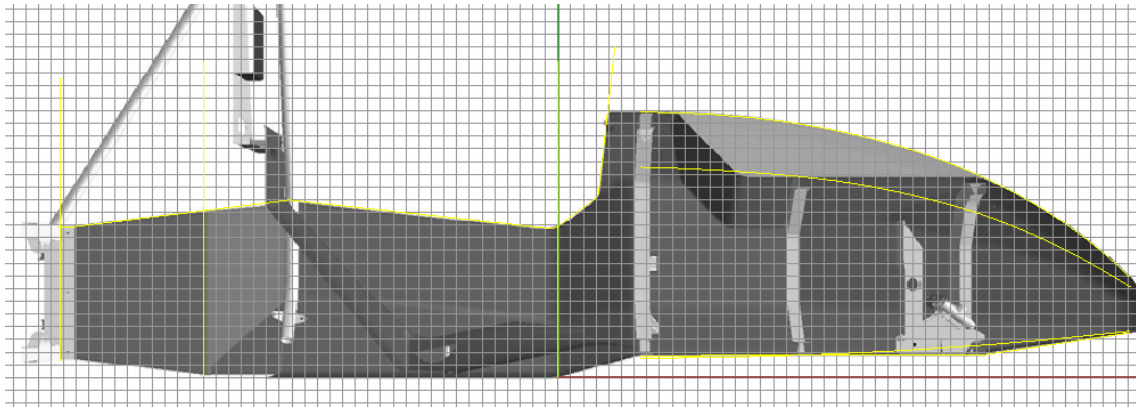
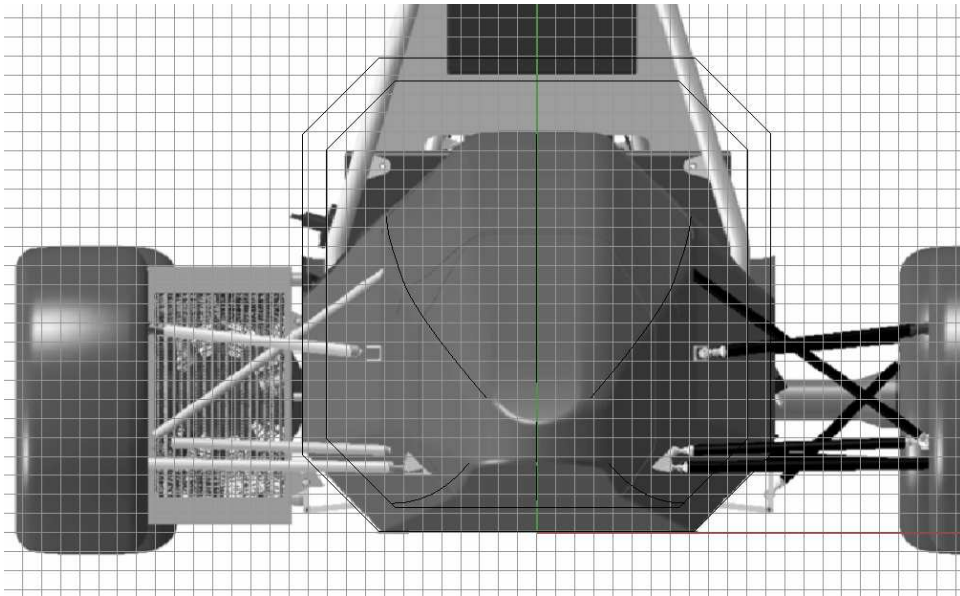


Figura 7.16. Imágenes frontal y lateral, pegadas en las ventanas frontal y lateral de Rhinoceros, con los correspondientes perfiles digitalizados.

Adicionalmente, se debe dibujar secciones rectangulares para generar el habitáculo, el resultado final es el que se muestra en la figura (7.17). Las medidas del prototipo se darán posteriormente.

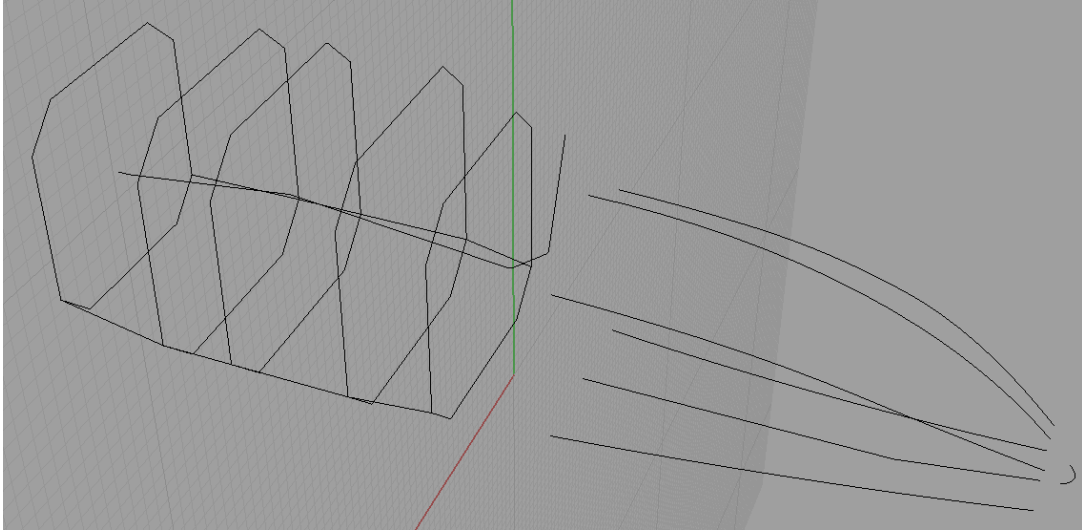


Figura 7.17. Perfiles definitivos en Rhinoceros.

Luego de realizadas algunas pruebas se concluyó que las superficies desarrolladas en Rhinoceros no eran amigables con el formato IGES, que traduce el programa Ansys. Por ello los perfiles serán exportados a SolidWorks, para generar las superficies tridimensionales.

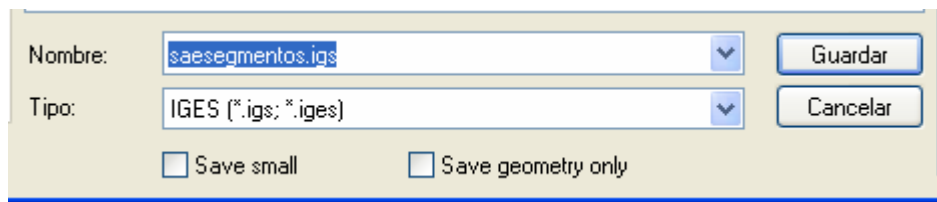


Figura 7.18. Cuadro de diálogo de exportación a varios formatos.

Los perfiles generados en Rhinoceros y exportados a SolidWorks se observan en la figura (7.19).

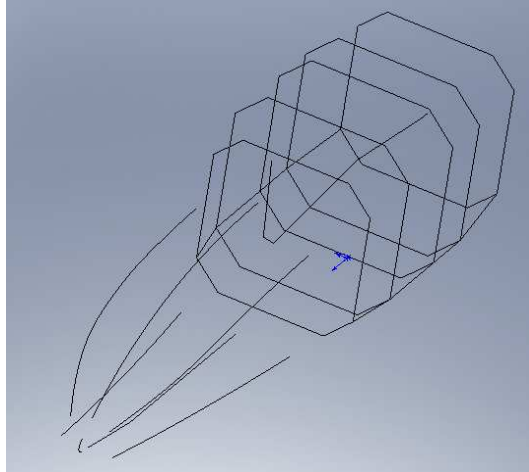


Figura 7.19. Perfiles del chasis construidos en Rhinoceros y exportados a SolidWorks.

El SolidWorks cuenta también con herramientas poderosas para generar superficies. En este caso se utiliza la opción de recubrimiento, para así obtener la superficie del monoplaza (ver figura 7.20).

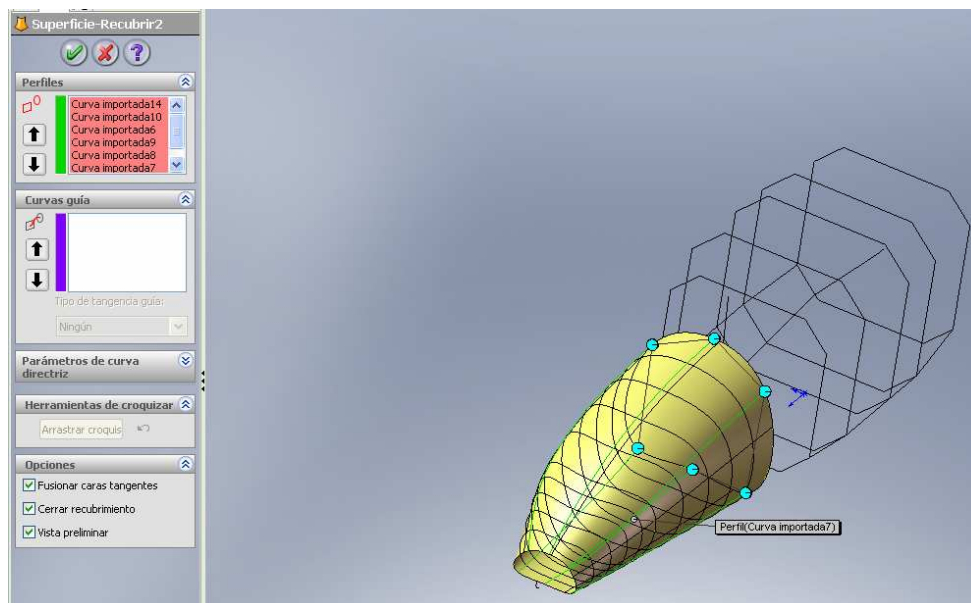


Figura 7.20. Recubrimiento de la nariz.

A continuación se presenta una serie de imágenes, donde se muestra en forma general el procedimiento para obtener la superficie del prototipo en SolidWorks. En primer lugar se utiliza la opción recubrimiento para recubrir el habitáculo (ver figura 7.21) que se une con la nariz.

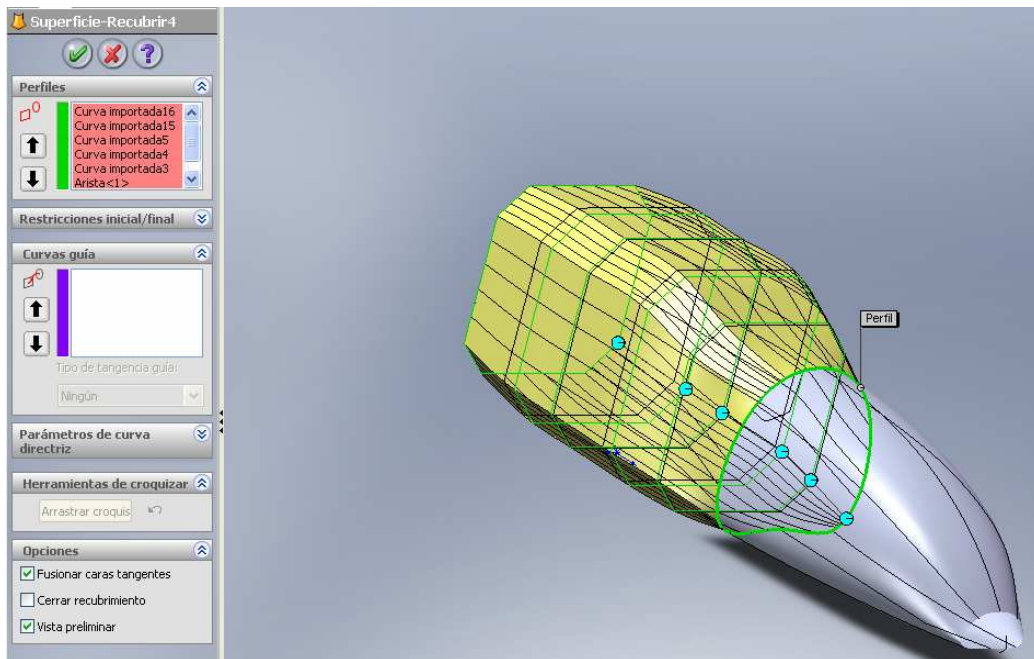


Figura 7.21. Recubrimiento del habitáculo.

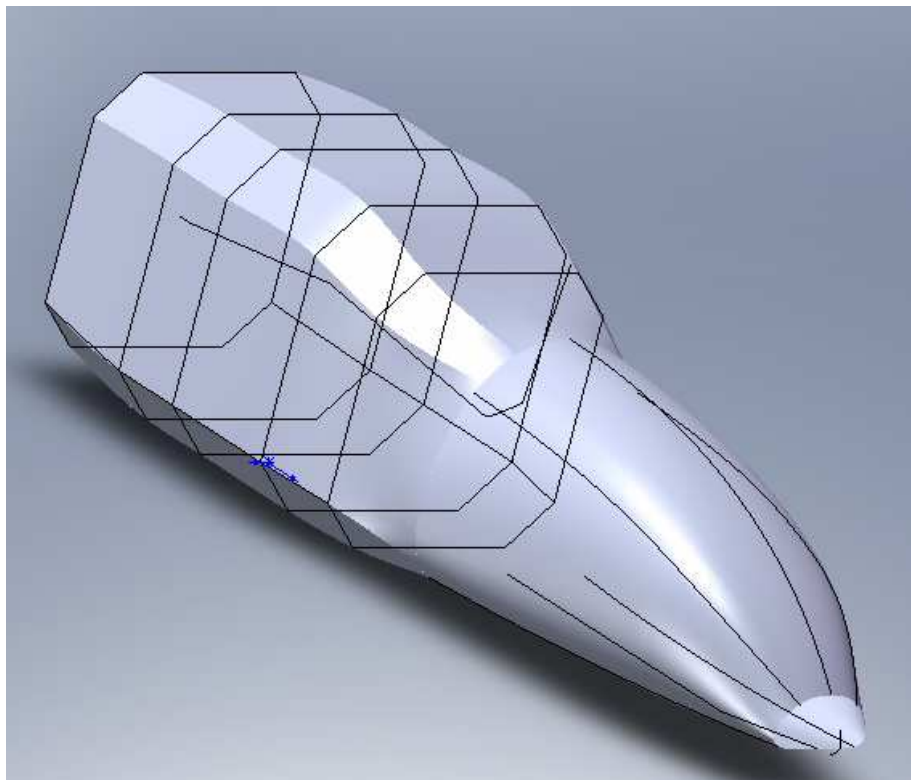


Figura 7.22. Superficie resultante del prototipo, sin cortes para ingreso del piloto.

En la figura (7.22) se observa el prototipo antes de ser cortado (ver figura 7.23).

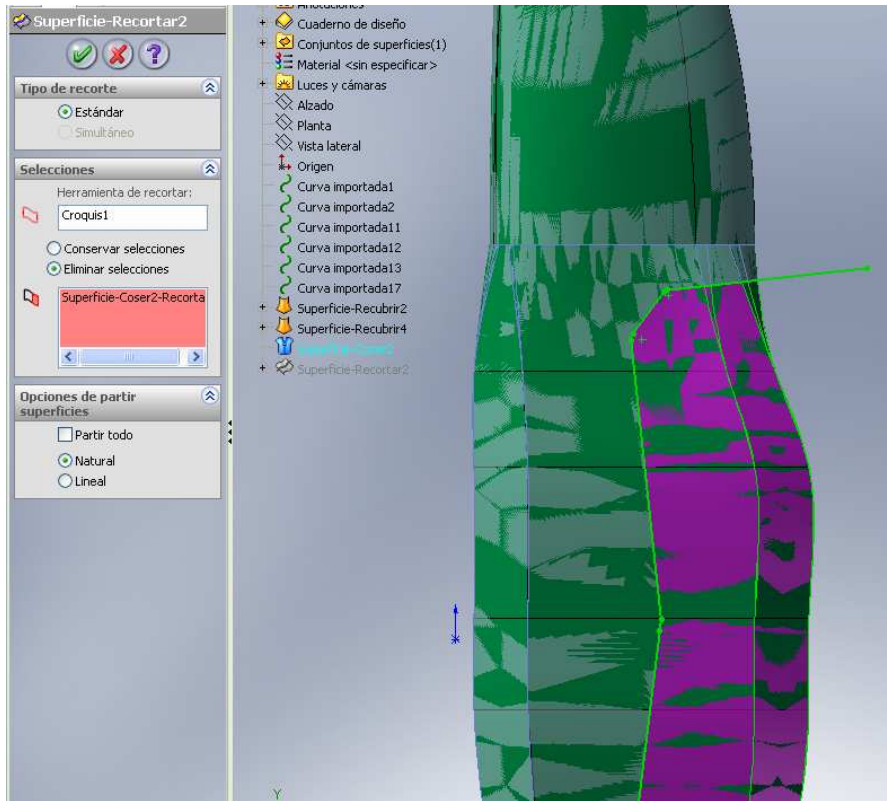


Figura 7.23. Corte del habitáculo del monoplaza obtenido mediante la opción recortar.

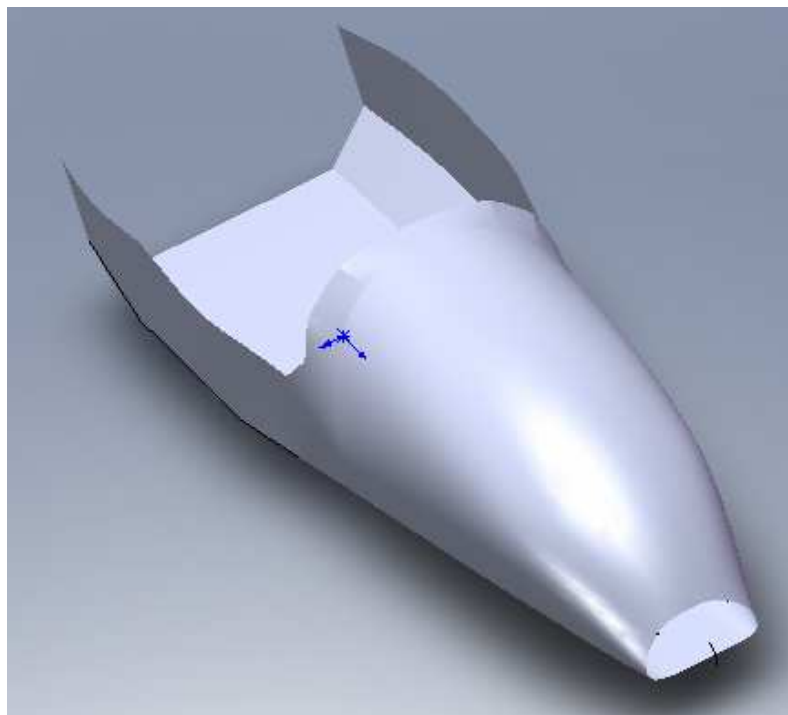


Figura 7.24. Superficie resultante del prototipo Fórmula SAE.

Para terminar la superficie (ver figura 7.24) se necesita tapar la abertura en la nariz. Esto se lo hace simplemente con una superficie extruida a modo de parche a la que se le da una forma elíptica según la figura (7.25).

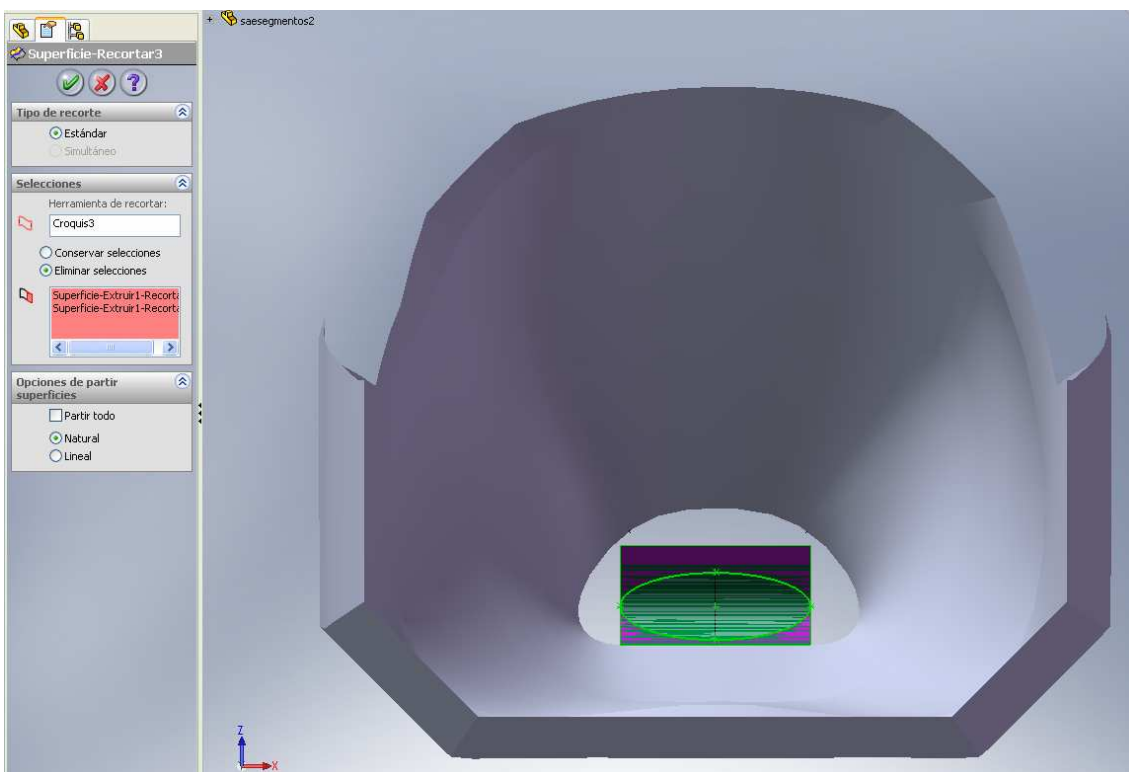
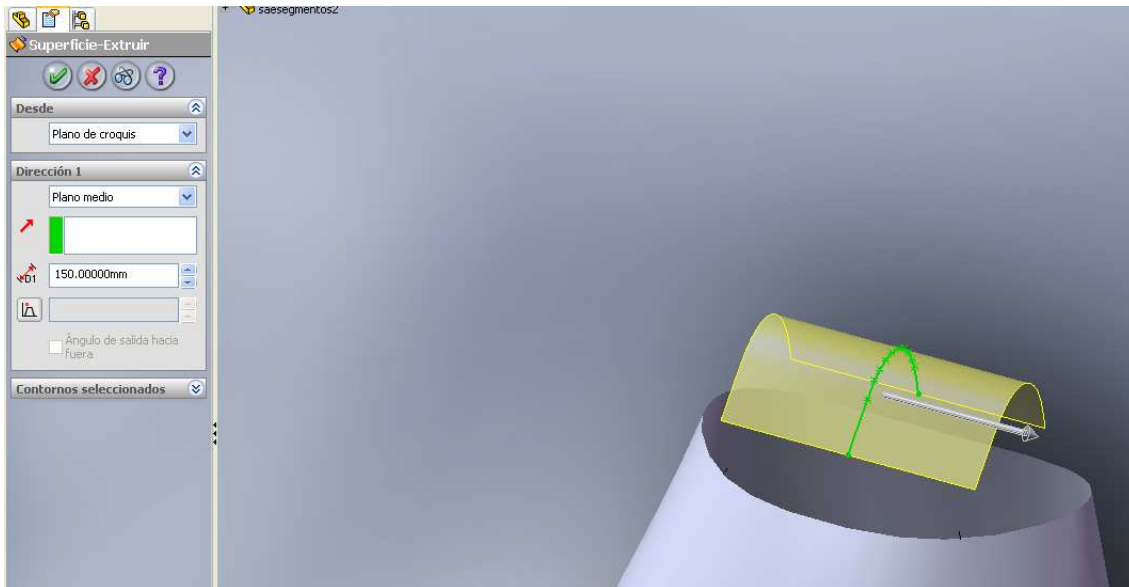


Figura 7.25. Superficie elíptica del parche en la nariz del Fórmula SAE.

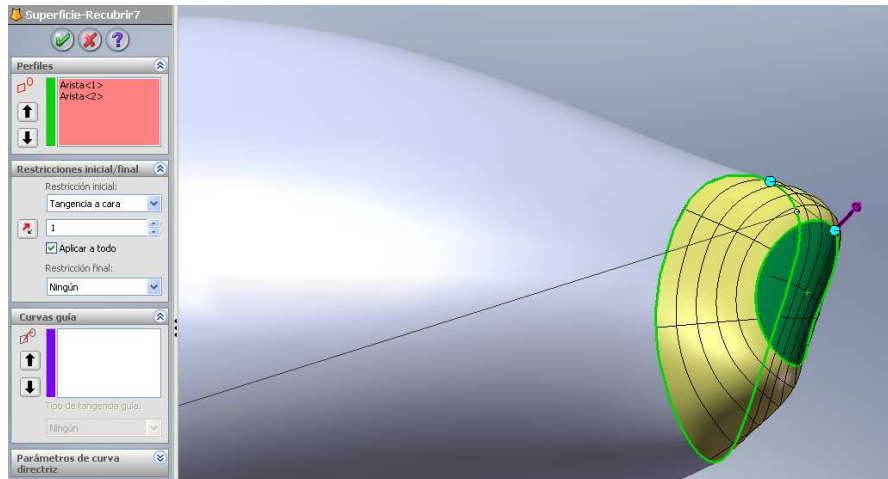


Figura 7.26. Recubrimiento del parche con el resto del cuerpo.

La superficie final se muestra en la figura (7.27) y (7.28).

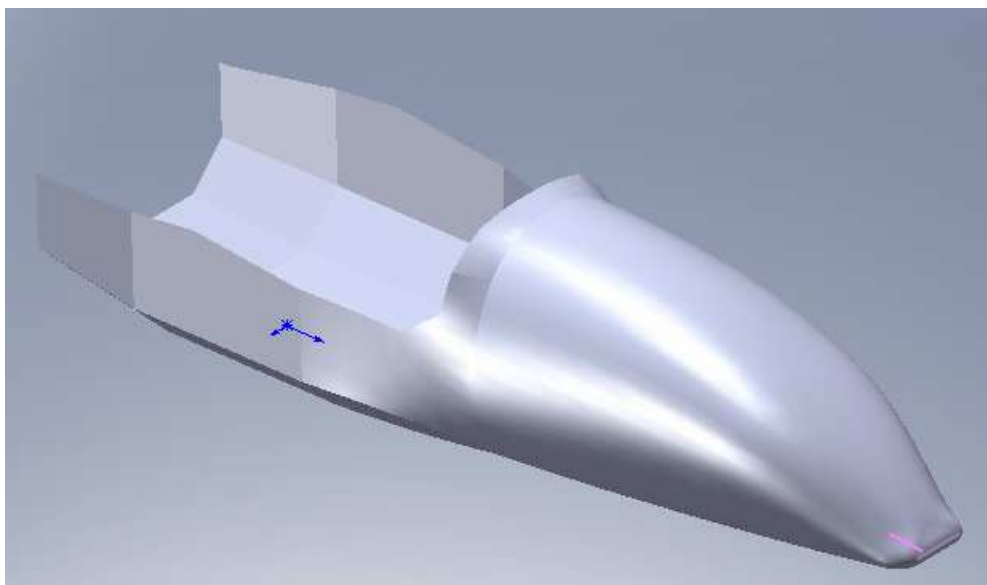
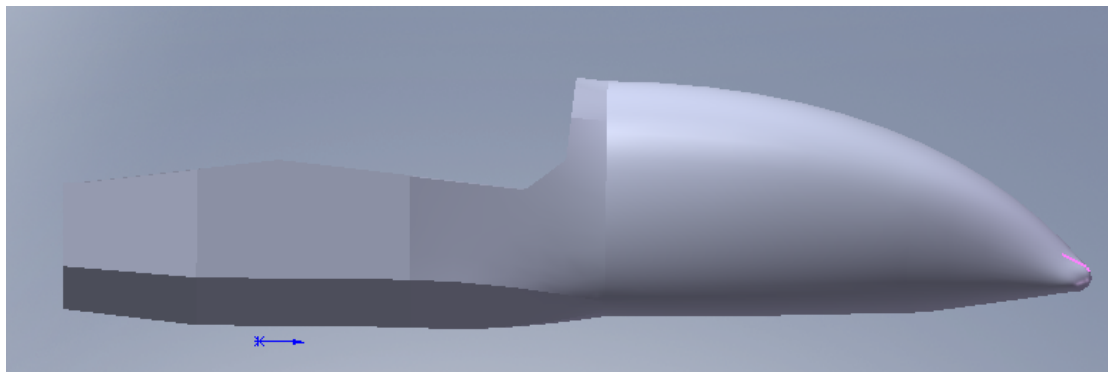


Figura 7.27. Vista lateral e isométrica del prototipo.

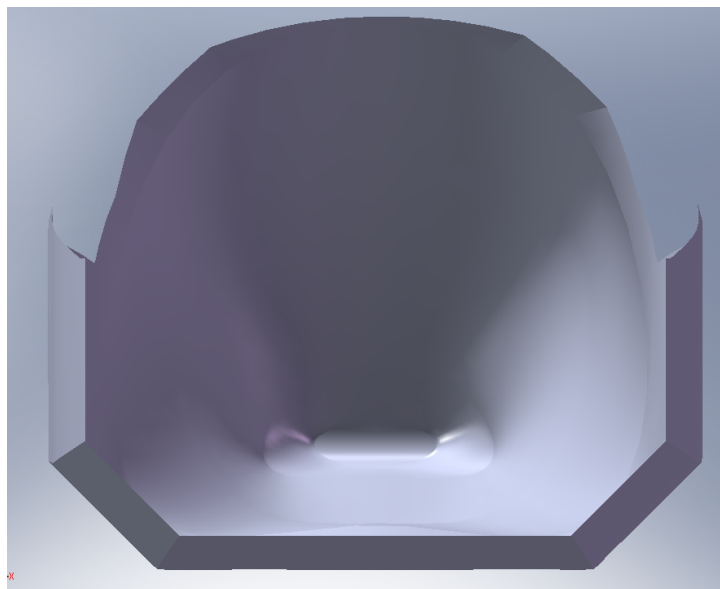


Figura 7.28. Vista superior y posterior del prototipo.

En la figura (7.29) se muestra el prototipo con cotas. Finalmente, en Solidworks se puede seleccionar un material adecuado, como por ejemplo la fibra de carbono en

matriz epóxica, lo que puede servir para visualizar la textura y las propiedades físicas del prototipo. El modelo definitivo de las figuras (7.29) y (7.30) es el que se someterá al análisis respectivo en Ansys.

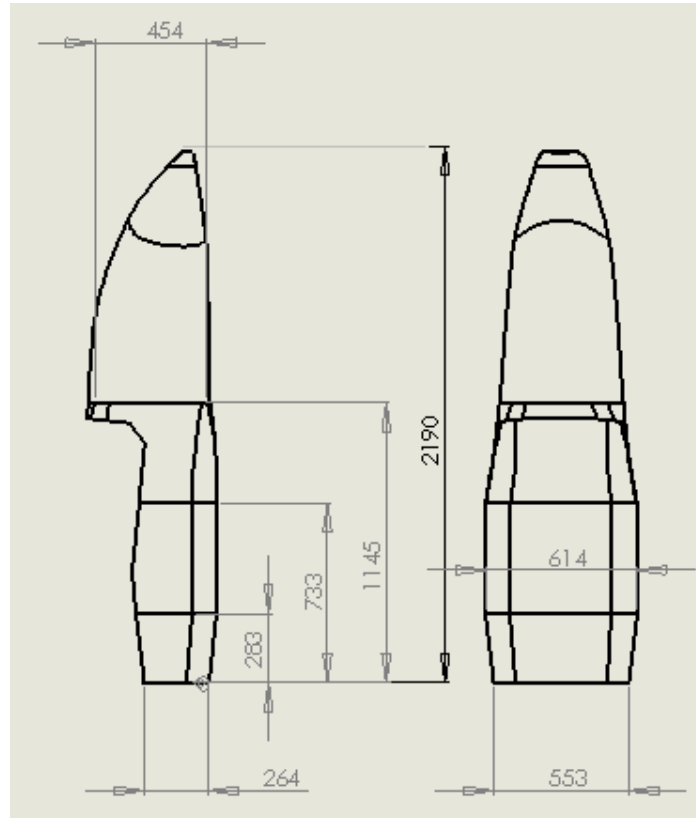


Figura 7.29. Prototipo con cotas.

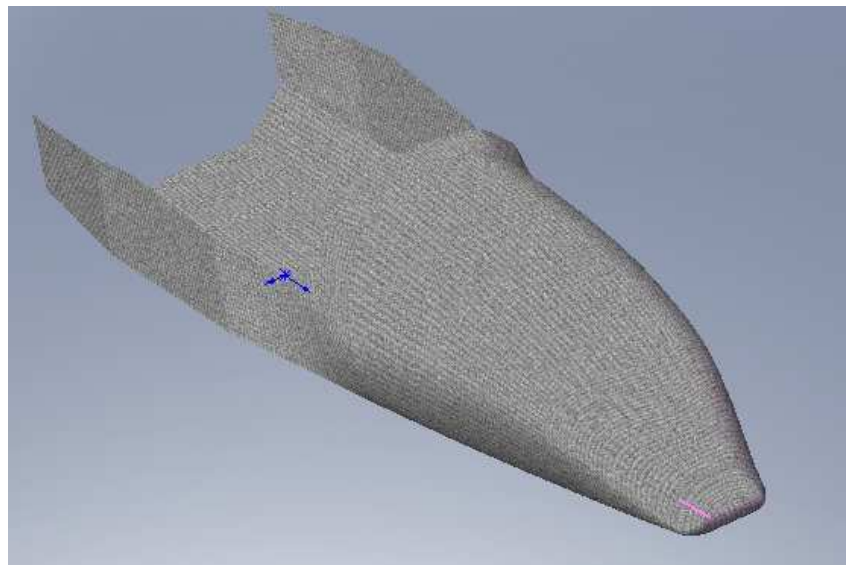


Figura 7.30. Modelo definitivo con textura tipo fibra de carbono.

7.5. SOLICITACIONES A LAS QUE SE SOMETE EL CHASIS

Debido a que en el reglamento de la Fórmula SAE no se especifica hipótesis de carga, se utilizarán hipótesis de carga de trabajos previos basados en chasis tubulares ^[7.10]. Específicamente, las pruebas realizadas en un prototipo construido en el Campus Tecnológico de la Universidad de Navarra (TECNUN). Gracias a los datos obtenidos en estas pruebas se establecieron tres hipótesis de carga que son:

- Frenada brusca en un trazado recto, lo máximo posible, es decir de 0 a 100 km/h en 1.33 s.
- Aceleración máxima en un trazado recto, lo máximo posible, es decir de 100 a 0 km/h en 2.3 s.
- Curva en un radio de 7m y a una velocidad de 30 km/h.

Adicionalmente, el chasis debe soportar una prueba de torsión estática, tener rigidez a la flexión y deberá soportar la torsión del motor. Aparte de esto, un requisito fundamental es el peso, el cual, según fuentes consultadas ^[7.10] no debe superar los 45 kg. Las fuerzas con las que se calcula cada hipótesis de carga fueron obtenidas mediante sensores de fuerza instaladas en el chasis tubular del prototipo desarrollado en el TECNUN y se hicieron pruebas específicas de cada hipótesis.

7.5.1. CARGAS DE TORSIÓN

Para verificar que un determinado chasis soporte las cargas a torsión que aparecen momentáneamente cuando se despega del suelo una rueda, o cuando se curva, se lo debe diseñar de tal modo que provea una determinada rigidez torsional. La rigidez torsional adicionalmente contribuye a mejorar el comportamiento dinámico del vehículo en pista, por ejemplo, cuando ingresa a una curva y se requiere de una base estable que sostenga el sistema de amortiguación. Por lo tanto, la prueba que marca el correcto funcionamiento del chasis es la de torsión.

En los autos convencionales se encuentran valores de rigidez torsional bastante dispares, desde los 40500 Nm/grado del Rolls-Royce Phantom hasta los modestos 2255 Nm/grado que ofrece un Saab 900 Cabrio. Los valores promedio de los prototipos SAE que son sometidos a pruebas reales de torsión se encuentran alrededor de los 3000 Nm/grado. Es decir, si se aplica un torque en los puntos de anclaje de las suspensiones delanteras de 3000 Nm, el chasis debe deformarse 1 grado. La distancia diametral en la zona de las suspensiones es de 460 mm. Por lo tanto, la carga del par a aplicarse en los extremos indicados será de 6522 Newtons.

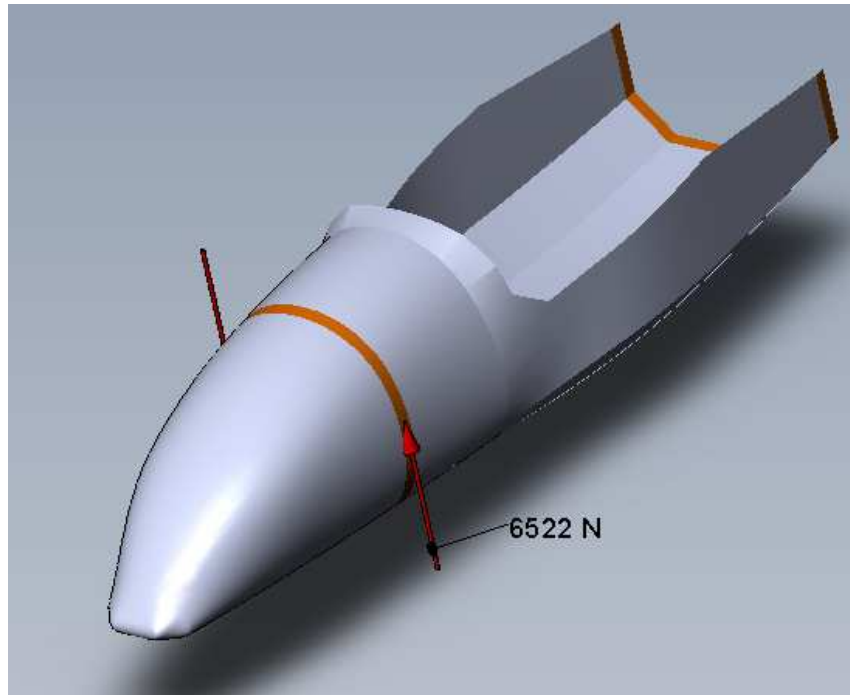


Figura 7.31. La zona donde se colocarán las fuerzas que generan la torsión.

La prueba de torsión se realiza atravesando una barra en los orificios correspondientes a los anclajes de la suspensión, fijando la parte trasera del chasis y colocando un peso en forma similar a la figura (7.32).



Figura 7.32. Experimento para medir la rigidez torsional. [7.10]

7.5.2. CARGAS DE FLEXIÓN

Las cargas más importantes que debe soportar el chasis son el peso del piloto y el peso del motor. Se utilizará las siguientes masas promedio para determinar el comportamiento del chasis a estas solicitaciones: 85 kg para el piloto y 55 kg para un motor de 599 cm^3 [7.10]. El peso del piloto se lo modelará como carga distribuida, mientras que las solicitaciones del motor se las modelarán como cargas puntuales en los respectivos apoyos.

7.5.3. FRENADA BRUSCA

En esta hipótesis de carga se supone que se frena lo máximo posible, mientras que el piloto se despega del asiento y es sujetado por el cinturón. Adicionalmente, interviene la inercia del motor. Por datos consultados en la bibliografía disponible [7.10], la desaceleración durante el frenado es de 1.2 g. Esta desaceleración equivaldría a detener el vehículo desde 100 km/h a 0 km/h en 2.3 s.

Este valor se lo determina al colocar acelerómetros triaxiales en modelos ya contruidos y someterlos a pruebas de frenada. Las fuerzas de frenado son entonces fuerzas horizontales y calculadas utilizando la Segunda Ley de Newton. Sin embargo, puesto que el piloto va sujeto con arneses al asiento, se genera en realidad un momento. Este momento es igual a la masa del piloto multiplicada por la distancia que va desde los anclajes del asiento hasta el centro de gravedad del cuerpo, en la posición indicada (ver figura 7.33).

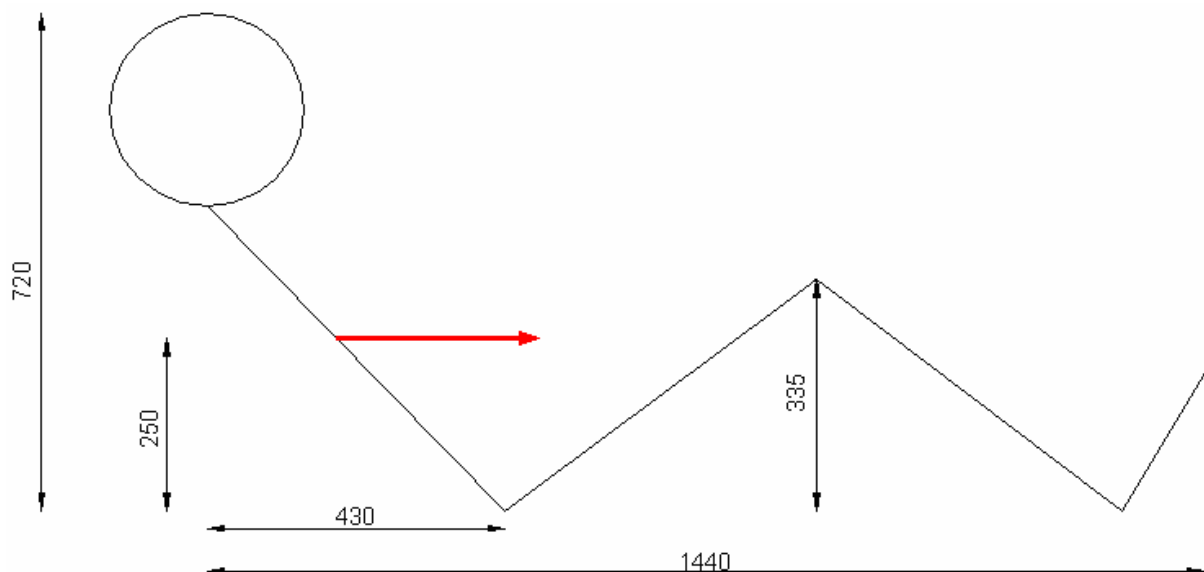


Figura 7.33. Croquis de la posición del piloto y medidas obtenidas en una persona sentada [7.8].

Para calcular las fuerzas inducidas en los apoyos se utiliza el siguiente diagrama de cuerpo libre del asiento con la carga de desaceleración (ver figura 7.34) en el instante del frenado. Este modelo se utiliza en mecánica de materiales para el cálculo de juntas empernadas.

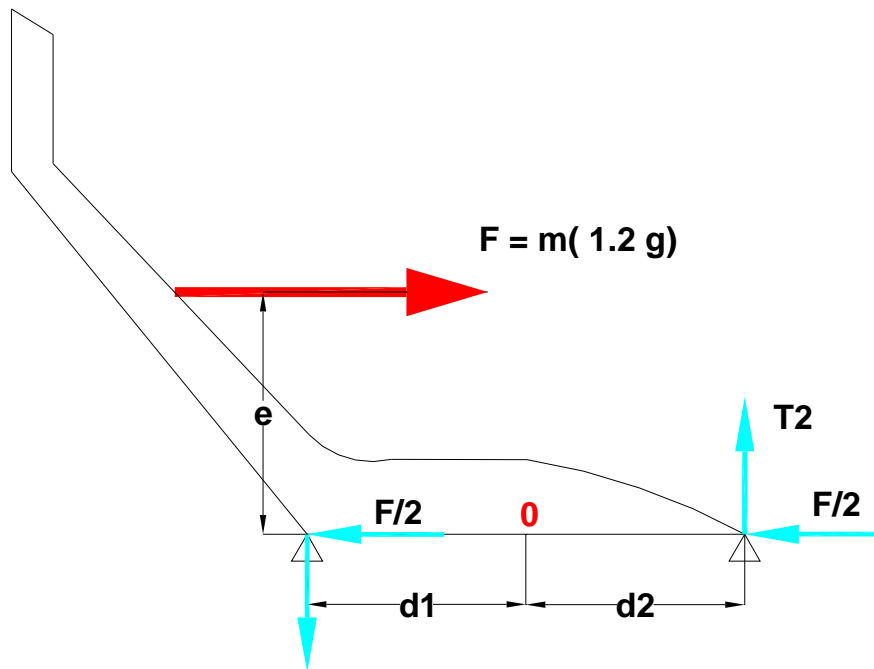


Figura 7.34. Diagrama de cuerpo libre del asiento sometido al frenado brusco.

Si se supone que cada apoyo toma una parte igual de carga, se puede trazar un vector fuerza a través de cada apoyo, actuando en dirección contraria de F , y con magnitud de $F/2$. El momento $F \cdot e$, induce las fuerzas T_i perpendiculares a las distancias d_i , trazadas desde el centro de gravedad de los apoyos hasta el centro de cada apoyo. Este momento trata de hacer girar a la silla en torno al centro de gravedad de los apoyos.

Haciendo sumatoria de momentos con respecto al punto 0 y sumatoria de fuerzas en el eje y , se obtiene:

$$\sum M = -F \cdot e + T_2 \cdot d_2 + T_1 \cdot d_1 = 0 \quad \sum F_y = T_2 - T_1 = 0 \quad (7.5)$$

Puesto que $d_2 = d_1$ se obtiene:

$$T_1 = T_2 = \frac{F \cdot e}{2 \cdot d_1} \quad (7.6)$$

De igual manera se procede con el motor. Este puede ser un motor de motocicleta Honda CBR 600 RR Type 2005 de 599 cm^3 , ya que las especificaciones de la Fórmula SAE solo limitan la cilindrada a un máximo de 610 cm^3 y ser de cuatro tiempos. Según los puntos de anclaje que tenga el motor se diseña una estructura de sujeción.

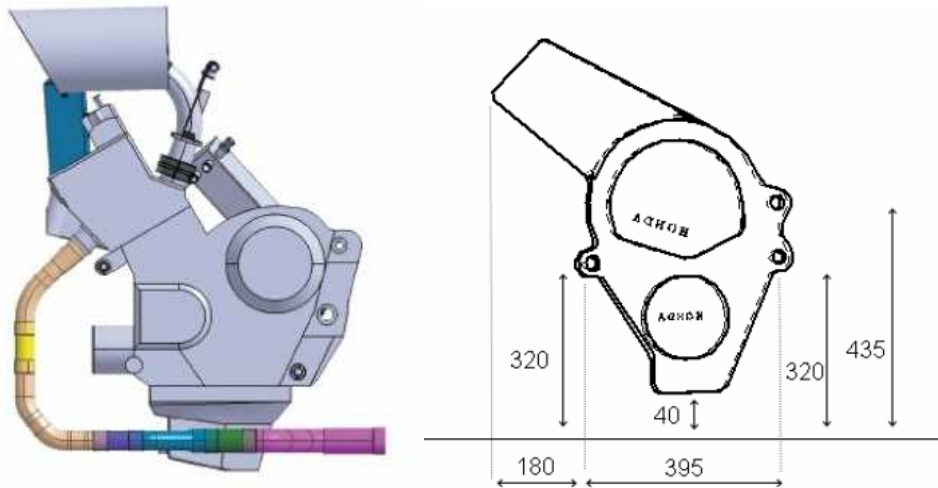


Figura 7.35. Posición de los apoyos del motor ^[7.8].

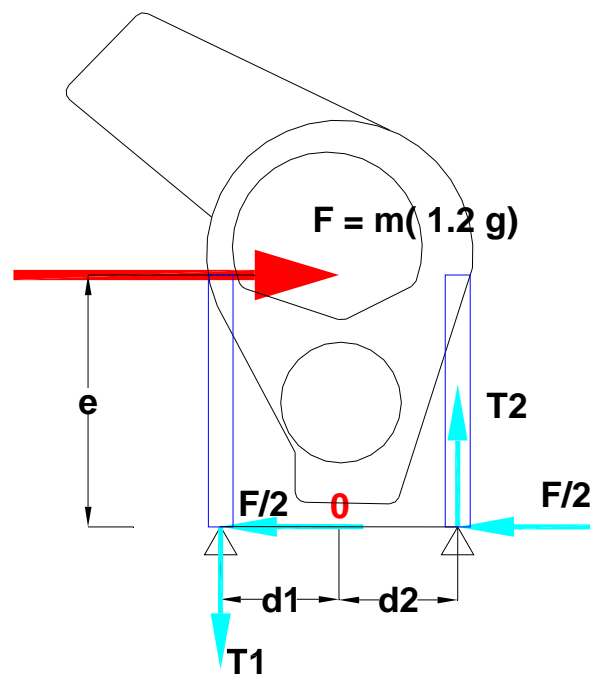


Figura 7.36. Diagrama de cuerpo libre del motor cuando se somete a frenado.

Utilizando la ecuación 7.6 se obtiene la tabla de cargas en el monocasco para la sollicitación de frenado. Para las condiciones de contorno se escogerá apoyos fijos en los pivotes del sistema de suspensión, debido a que se considera que en un frenado brusco las cuatro ruedas se detienen.

Tabla 7.1. Resumen de fuerzas producidas por la frenada.

Frenada brusca		
Magnitud	Piloto	Motor 599 cm³
Masa m	85 kg	55 kg
F = m (1.2 g)	1000.62 N	647.46 N
e	0.250 m	0.217 m
d1=d2	0.226 m	0.198 m
T1	553.44 N	356.513 N
T2	-553.44 N	-356.513 N
F/2	500.31 N	323.73 N

7.5.4. ACELERACIÓN MÁXIMA

Está es una hipótesis de carga similar a la frenada. La diferencia radica en que, durante la aceleración, el único eje que transmite fuerza a la estructura monocasco es el trasero, con lo que la modelización se hará fijando el eje trasero y los movimientos verticales y laterales del delantero, pero dejando en el eje delantero un grado de libertad para moverse paralelamente al suelo. El valor de la aceleración medida en el prototipo del TECNUN con acelerómetros es de 2.13 g. De igual manera las fuerzas de aceleración son fuerzas horizontales y calculadas mediante la Segunda Ley de Newton. Para calcular las fuerzas inducidas en los apoyos se utiliza el mismo diagrama de cuerpo libre pero en sentido contrario, tanto para el piloto como para el motor.

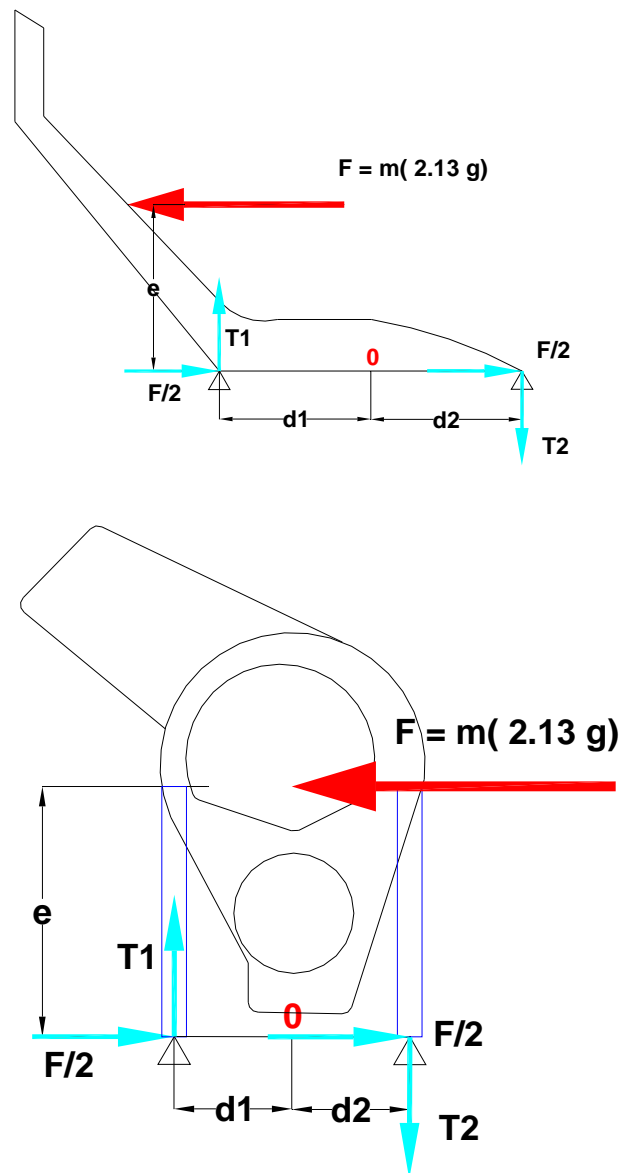


Figura 7.37. Diagrama de cuerpo libre del asiento y del motor sometido a una fuerza inercial producida por la aceleración máxima.

Utilizando las ecuaciones (7.5) y (7.6) se determina las reacciones siguientes.

Tabla 7.2. Resumen de fuerzas producidas por la aceleración máxima.

Aceleración máxima		
Magnitud	Piloto	Motor 599 cm ³
Masa m	85 kg	55 kg
$F = m(2.13 g)$	1776 N	1149 N
e	0.250 m	0.217 m

d1=d2	0.226 m	0.198 m
T1	-982.301 N	-632.667 N
T2	982.301 N	632.667 N
F/2	-888 N	-574.5 N

7.5.5. CURVA

Se necesita determinar las deformaciones y esfuerzos producidos en el chasis monocasco cuando pase por una curva de radio medio $r = 7$ m y a una velocidad constante de 30 km /h, siendo el valor del radio, el correspondiente a la pista de pruebas y la velocidad máxima segura para no perder estabilidad. Las variables importantes en este caso son las mismas que en la frenada y en la aceleración y los puntos de apoyo se consideran, al igual que en la frenada, fijos. De acuerdo a la cinemática se puede determinar la aceleración centrífuga de acuerdo a (7.7).

$$a_c = r \cdot \omega^2 = r \cdot \left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{v^2}{r} \quad (7.7)$$

La aceleración calculada por (7.7) es entonces igual a 1.011g. Para calcular las fuerzas inducidas en los apoyos se utiliza el mismo diagrama de cuerpo libre pero en sentido lateral, tanto para el piloto como para el motor.

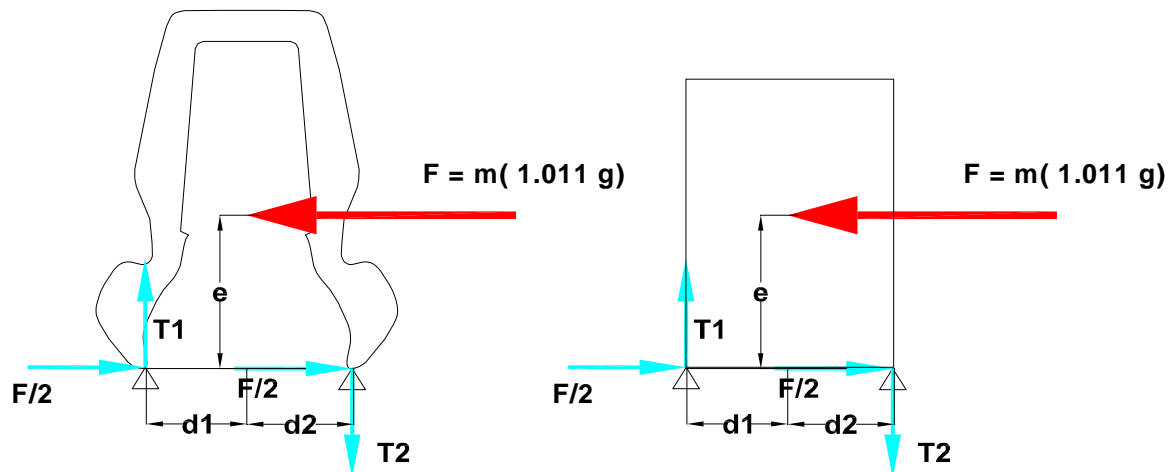


Figura 7.37. Diagrama de cuerpo libre del asiento y motor sometido a una fuerza inercial producida por la fuerza centrífuga.

Utilizando las mismas ecuaciones (7.5) y (7.6) se determinan las reacciones siguientes; note que se cambia las magnitudes d_1 y d_2 :

Tabla 7.3. Resumen de fuerzas producidas por la aceleración máxima.

Magnitud	Curva	
	Piloto	Motor 599 cm ³
Masa m	85 kg	55 kg
$F = m (1.011 g)$	843 N	545.5 N
e	0.250 m	0.217 m
$d_1=d_2$	0.207 m	0.207 m
T1	-509.05 N	-286.585 N
T2	509.05 N	286.585 N
F/2	-421.5 N	-272.725 N

7.5.6. TORQUE DEL MOTOR

Cuando el vehículo acelera, el motor produce torque el cual se amplifica por el tren cinemático y se transmite al pavimento por medio de las ruedas. Este torque tiene que ser equilibrado por el motor a través del chasis. Para diseñar el chasis es importante conocer el máximo torque estimado. Para estimar el torque se debe calcular el peor caso. El máximo torque producido por el motor puede ser encontrado de la carta torque vs. rpm mostrada en la figura (7.38). Este gráfico muestra que el motor produce un torque máximo de 45 ft-lbs el cual es equivalente a 61 N m a 8500 rpm. Este torque máximo será aplicado al vehículo cuando el vehículo acelere desde la línea de inicio en primera marcha. Como se ve, este torque es mucho menor que el torque de 3000 N m correspondiente a la prueba estática de rigidez torsional a la que debe ser sometido el chasis.

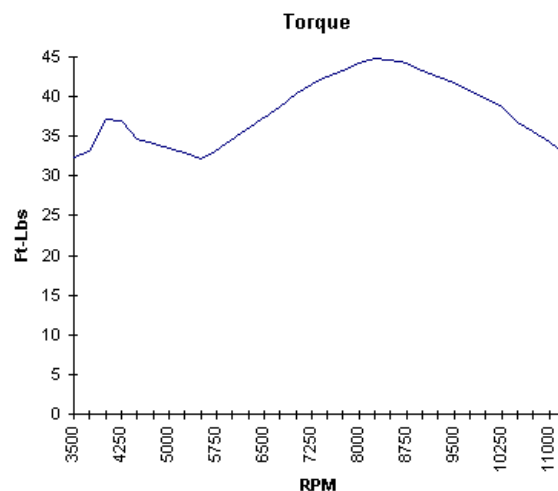


Figura 7.38. Diagrama de Torque vs. rpm para el motor Honda CBR 600 RR Type 2005. [7.22]

Este par equivaldría a colocar una fuerza en los apoyos del motor igual a 157 N según la figura (7.39)

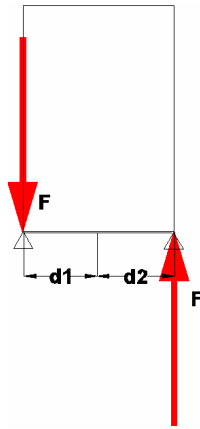


Figura 7.39. Diagrama de cuerpo libre correspondiente al torque producido por el motor.

7.6. PROPIEDADES DE LOS MATERIALES COMPUESTOS A UTILIZAR

Buscando la posibilidad de que este prototipo pueda construirse se probará con distintos materiales disponibles en el mercado local. Para esto se cuenta con las siguientes tablas de propiedades mecánicas, tanto de fibras (tabla 7.4) como de resinas (tabla 7.5). En el caso de que los materiales no ofrezcan la rigidez recomendada, será necesario cambiar el diseño del prototipo.

Para el diseño del prototipo se supondrá que se usará laminados con fibra de vidrio tejida bidireccionalmente (E-Glass) (ver figura 7.40) en matriz epóxica. La mayoría de las estructuras laminadas de compuestos se las hace utilizando paños tejidos en vez de laminados unidireccionales, ya que el paño facilita el laminado manual porque se adapta a superficies complejas y ha sido el material favorito del sector automotriz, el naval, etc., adicionalmente pueden soportar cargas en diferentes ejes, mientras que los preimpregnados unidireccionales son más costosos ^[7.11] y en el caso de un preimpregnado de fibra de vidrio en resina epóxica necesita temperatura de -18°C para almacenarse ^[7.28], si se lo va a almacenar por un período de un año. Finalmente, se ha podido observar en el Internet que los monocascos son construidos mediante láminas tejidas, cortadas y laminadas sobre un molde maquinado en madera (ver figura 7.41). Por lo tanto, el análisis del prototipo se lo realiza suponiendo que se usa laminados con fibra de vidrio tejida bidireccional, para lo cual se necesita determinar las propiedades mecánicas de los constituyentes.



Figura 7.40. Aspecto de fibra de vidrio tejida (woven). [7.12]



Figura 7.41. Construcción de un monocasco en la Universidad de Auckland. [7.13]

Existe abundante información sobre las propiedades mecánicas de los constituyentes tanto en literatura técnica como en el Internet. Las propiedades de la fibra de vidrio (E-Glass) se las puede tomar de la tabla (7.4) ^[7.14].

Datos que se compaginan con otras fuentes de información, como las dadas en el Volumen 21 del ASM Handbook, que da un valor entre 76 a 78 GPa para el módulo de elasticidad de las fibras ^[7.15].

Para las resinas se utilizarán las especificaciones de la misma referencia ^[7.14], reproducidas en la tabla 7.5. En este caso se seleccionará resina epoxi Der 332, cuyas propiedades coinciden con la resina de nombre comercial "System 2000 Epoxi Resin" cuyas propiedades se encuentran en la referencia ^[7.16].

La Resina System 2000 Epoxy es una resina de baja viscosidad que es diseñada para aplicaciones estructurales, y que se puede usar indistintamente con fibra de carbono, kevlar y fibra de vidrio. Además, esta resina se la puede encontrar en el mercado nacional en el centro de servicio automotriz "Interplas" (Av. Ñaquito y Villalengua).

Tabla 7.4. Propiedades mecánicas de fibras de refuerzo comunes, donde E_f es el módulo longitudinal, G_f es el módulo cortante, ν_f es el coeficiente de Poisson, s_f es la resistencia tensil, η_f es la elongación máxima y ρ_f es la densidad.

Propiedades de las fibras						
Material	E_f GPa	G_f GPa	ν_f	s_f MPa	η_f %	ρ_f g/cm ³
Fibra de vidrio						
E-Glass	72	33	0.09	3103	4.3	2.6
S-Glass	87	37	0.18	3792	4.4	2.49
Aramida						
Kevlar 29	83	29	0.44	3620	4.4	1.44
Kevlar 49	124	43	0.45	3620	2.9	1.44
Kevlar 149	172	65	0.33	3448	2.0	1.44
Grafito						
AS4	234	93	0.26	3930	1.7	1.8
IM6	276	109	0.26	5102	1.8	1.74
IM7	276	109	0.26	5309	1.9	1.77
IM8	303	120	0.26	5447	1.8	1.8
PANEX	228	-	0.25	3600	1.6	1.72
T300	231	91	0.27	3241	1.4	1.77
T40	283	107	0.32	5654	2.0	1.8
T50	393	159	0.24	2413	0.6	1.8
T55	379	142	0.33	1724	0.5	1.99

T75	517	204	0.27	2069	0.4	1.99
Boro						
Boron	400	-	0.2	3160	0.79	2.57

Tabla 7.5. Propiedades mecánicas de diferentes tipos de resinas.

Propiedades de la matriz						
Material	E_m GPa	G_m GPa	ν_m	S_m MPa	η_m %	ρ_m g/cm ³
Epoxi						
Der 332	3.4	1.2	0.35	64	1.9	1.22
934	4.1	1.5	0.35	83	2.0	1.3
Epon	2.8	1.0	0.35	83	3.0	1.30
3501	4.4	1.6	0.36	69	1.6	1.26
5208	3.9	1.4	0.35	50	1.3	1.27
1962	3.7	1.4	0.35	-	-	1.27
Vinilester						
1222	3.2	-	-	79	2.5	1.3
Poliéster						
7241	3.3	-	-	79	2.4	1.38

Una vez seleccionados los constituyentes, se necesita determinar las propiedades macromecánicas del laminado según lo visto en el capítulo 2. La resistencia de las fibras comparativamente con la resina varía en el rango dado en la tabla (7.6):

Tabla 7.6. Propiedades generales de fibras y resinas [7.17].

Materiales	Módulos de elasticidad	
	GPa	10 ⁶ psi
Resina	3.4	0.50
Fibra de vidrio	73.1-85.5	10.6-12.4
Fibra aramida	124-179	18-26
Fibra de carbono	204-414	30-60
Fibra de Grafito	414-965	60-140

7.6.1. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL LAMINADO

Utilizando de las tablas (7.4) y (7.5) los datos siguientes: $E_f = 72 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_f = 0.09$, $E_m = 3.4 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_m = 0.35$ y una fracción volumétrica de la fibra $\nu_f = 0.50$ se puede determinar las propiedades de la lámina unidireccional E_{11} , E_{22} , E_{33} , ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} , G_{12} , G_{13} , G_{23} , mediante las fórmulas (2.12), (2.17), (2.24) y (2.32).

$$E_1 = E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot (1 - \nu_f) = 3.78 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$E_2 = \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot (1 - \nu_f) + E_m \cdot \nu_f} = 6.857 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$E_3 = E_2 = 6.857 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot (1 - \nu_f) = 0.22$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \nu_{12} = 0.04$$

El valor de ν_{23} se lo toma de la tabla (7.9) y es igual a 0.4.

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + \nu_f)} = 3.303 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} = 1.333 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{12} = \frac{G_f \cdot G_m}{G_f \cdot \nu_m + G_m \cdot \nu_f} = 2.563 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{13} = G_{12} = 2.563 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2 \cdot (1 + \nu_{23})} = 2.449 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

A continuación se calculan los términos de la matriz reducida [Q] en base de la ecuación (2.63).

$$Q_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = 3.813 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$Q_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = 6.918 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = 1.522 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{66} = G_{12} = 2.563 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

Se necesitan determinar los invariantes U_1 , U_2 , U_3 , U_4 y U_5 según (2.68)

$$U_1 = \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot Q_{11} + 3 \cdot Q_{22} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) = 1.856 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot (Q_{11} - Q_{22}) = 1.561 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_3 = \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) = 3.97 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$U_4 = \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) = 5.491 \times 10^9 \cdot \text{N}$$

$$U_5 = \frac{1}{2} \cdot (U_1 - U_4) = 6.533 \times 10^9 \cdot \text{N}$$

A continuación se calcula los elementos de la matriz reducida transformada en función de un ángulo θ en base de (2.65).

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & \cos(2 \cdot \theta) & \cos(4 \cdot \theta) \\ U_1 & -\cos(2 \cdot \theta) & \cos(4 \cdot \theta) \\ U_4 & 0 & -\cos(4 \cdot \theta) \\ U_5 & 0 & -\cos(4 \cdot \theta) \\ 0 & \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{2} & \sin(4 \cdot \theta) \\ 0 & \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{2} & \sin(4 \cdot \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Si se combina la fibra y la resina para formar un tejido en el cual se tiene el mismo número de fibras en la dirección θ y $-\theta$, la rigidez se reduce drásticamente con respecto a la fibra unidireccional, debido a la flexión de la fibra alrededor de otras fibras para producir el tejido. La pérdida de rigidez es de aproximadamente un 37% (Vasiliev y Morozov, 2001) (ver tabla 7.7). Además, debido a las ondulaciones, es posible que absorba demasiada resina y que pierda resistencia a la compresión.

Tabla 7.7. Comparación entre fibras unidireccionales y tejidas. ^[7.17]

Material de una lámina	Módulo de elasticidad	
	GPa	10 ⁶ psi
Fibra de vidrio unidireccional	34	5
Tejido de fibra de vidrio	24	3.5
Aramida unidireccional	76	11
Tejido de aramida	38	5.6
Carbono unidireccional	124	18
Tejido de carbono	69	8.5

La matriz de rigidez para una lámina tejida es el promedio de las matrices unidireccionales y se calcula mediante la ecuación (7.8) según (Kollár y Springer, 2003), (ver figura 7.42):

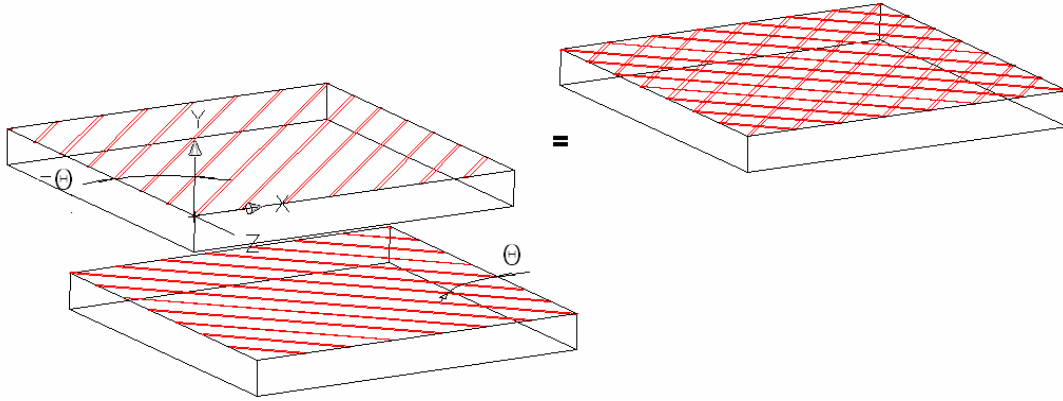


Figura 7.42. Modelado de un tejido (woven).

$$[\bar{Q}_{\text{woven}}] = \frac{[\bar{Q}(\theta)] + [\bar{Q}(-\theta)]}{2} = \frac{[\bar{Q}(0)] + [\bar{Q}(90)]}{2} \quad (7.8)$$

donde

$$[\bar{Q}(0)] = \begin{bmatrix} 3.813 \times 10^{10} & 1.522 \times 10^9 & 0 \\ 1.522 \times 10^9 & 6.918 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 2.563 \times 10^9 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

y

$$[\bar{Q}(90)] = \begin{bmatrix} 6.918 \times 10^9 & 1.522 \times 10^9 & 0 \\ 1.522 \times 10^9 & 3.813 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.563 \times 10^9 \end{bmatrix} \text{ Pa}$$

siendo el promedio:

$$[\bar{Q}_{\text{woven}}] = \begin{bmatrix} 2.253 \times 10^{10} & 1.522 \times 10^9 & 0 \\ 1.522 \times 10^9 & 2.253 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2.563 \times 10^9 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad es la inversa de $[\bar{Q}_{\text{woven}}]$:

$$[\bar{S}_{\text{woven}}] = [\bar{Q}_{\text{woven}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 4.46 \times 10^{-11} & -3.013 \times 10^{-12} & 0 \\ -3.013 \times 10^{-12} & 4.46 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 3.901 \times 10^{-10} \end{bmatrix}$$

y las constantes elásticas de la lámina en (Pa) son:

$$E_{1\text{woven}} = \frac{1}{S_{11}} = 2.242 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$E_{2\text{woven}} = \frac{1}{S_{22}} = 2.242 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$G_{12\text{woven}} = \frac{1}{S_{33}} = 2.563 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu_{12\text{woven}} = -E_{1\text{woven}} \cdot \bar{S}_{12} = 0.068$$

Las propiedades del tejido se resumen en la tabla (7.8):

Tabla 7.8. Propiedades mecánicas de la lámina, calculadas e experimentales.

Propiedades mecánicas de la lámina	Calculadas (Pa)	Experimentales Tabla 7.9 (Pa)
E_x	$2.242 \cdot 10^{10}$	$2.970 \cdot 10^{10}$
E_y	$2.242 \cdot 10^{10}$	$2.970 \cdot 10^{10}$
E_z	$2.242 \cdot 10^{10}$	$2.970 \cdot 10^{10}$
G_{xy}	$2.563 \cdot 10^9$	$5.3 \cdot 10^9$
G_{xz}	$2.563 \cdot 10^9$	-
G_{yz}	$8.007 \cdot 10^9$	-
PR_{xy}	0.068	0.17
PR_{yz}	0.4	-
PR_{xz}	0.068	-

Las propiedades calculadas de la tabla (7.8) son conservadoras con respecto a las experimentales dadas por la literatura técnica de la tabla (7.9) siendo la misma fracción volumétrica en ambos casos.

Tabla 7.9. Propiedades de láminas según (Kollár y Springer, 2003) [7.14].

Propiedades de las láminas							
Material	v_f %	E_1 GPa	E_2 GPa	G_{12} GPa	ν_{12}	ν_{23}	ρ_{com} g/cm ³
Grafito – Epoxi							
T300/5208	70	181	10.3	7.17	0.28	0.59	1.6
AS/3501	66	138	8.96	7.1	0.3	0.59	1.6
H-IM6/Epoxi		203	11.2	8.4	0.32	-	-
AS4/APC2		134	8.9	5.1	0.28	0.66	1.6
T300/934							
tape		148	9.65	4.55	0.3	0.6	-
Cloth(13mil)		74	74	4.55	0.05	-	-
Cloth(7mil)		66	66	4.1	0.04	-	-
Fibra de vidrio - Epoxi							
Scotchply 1002	45	38.6	8.27	4.14	0.26	-	1.8
S-glass/Epoxi	50	43	8.9	4.5	0.27	0.40	2.0
Woven GI/Epoxi	45	29.7	29.7	5.3	0.17	-	2.2
Aramida - Epoxi							
Kevlar 49	60	76	5.5	2.3	0.34	0.37	1.5
Boron - Epoxi							
B(4)/5505	50	204	18.5	5.59	0.23	-	2.0
B5.6/5505	50	201	21.7	5.4	0.17	-	2.0
E-glass - Vinylester							
E-glass - Vinylester		24.4	6.87	2.89	0.32	-	-

Es importante verificar las propiedades para diferentes fracciones volumétricas, por lo que se calcularon estas propiedades para $v_f = (0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6 \text{ y } 0.7)$ (ver tabla 7.10). Aquí se observa que la fracción volumétrica influye especialmente en el módulo de elasticidad de la lámina, el cual mejora con el incremento del porcentaje de fibras.

Si se utiliza preimpregnados comerciales se garantizaría que la fracción másica esté entre 40 y 45% del peso total. El límite práctico del porcentaje volumétrico es de

80% pero el estándar industrial es del 60%. Debido a que el laminado es manual, no se garantiza propiedades uniformes; sin embargo, se trabajará con un v_f de 45%. Se puede obtener experimentalmente las fracciones volumétricas adquiriendo los pesos de los constituyentes, tanto por el método de pérdida por ignición como por el método de digestión con ácido nítrico concentrado.

Tabla 7.10. Propiedades de láminas variando el porcentaje de fibras.

Propiedades mecánicas	Porcentaje volumétrico de fibra en la matriz						
	0.2	0.3	0.4	0.45	0.5	0.6	0.7
E_x	10.95	14.68	18.48	20.43	22.42	26.59	31.19
E_y	10.95	14.68	18.48	20.43	22.42	26.59	31.19
E_z	10.95	14.68	18.48	20.43	22.42	26.59	31.19
G_{xy}	1.65	1.87	2.164	2.347	2.563	3.143	4.062
PR_{xy}	0.122	0.094	0.078	0.072	0.068	0.061	0.058
PR_{yz}	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4	0.4
PR_{xz}	0.122	0.094	0.078	0.072	0.068	0.061	0.058

7.6.2. DETERMINACIÓN DEL ESPESOR DEL LAMINADO

Luego de laminar en forma manual, con los materiales disponibles en el mercado, y consultar con personal experimentado en la materia, se llegó a la conclusión de que el espesor de la lámina con resina sería de 1.25 mm. Se utilizaron 5 capas para alcanzar un espesor total de 6.25 mm, lo que dará un peso del prototipo de 40 kg.

7.7. MODELADO DEL PROTOTIPO DE FÓRMULA SAE EN ANSYS

7.7.1. PREPROCESADO, IMPORTACIÓN, ELEMENTOS Y MATERIALES

En el programa SolidWorks se debe grabar el modelo superficial con formato IGES según se muestra en la figura (7.43):

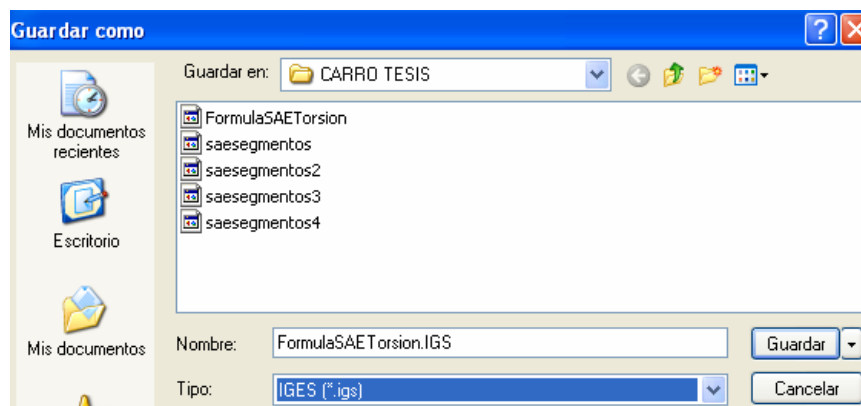


Figura 7.43. Cuadro de diálogo en SolidWorks.

A continuación se describirá detalladamente el procedimiento para modelar el prototipo en Ansys. En primer lugar, se importa el modelo en formato IGES. En el menú principal se activa: **File** → **Import** → **IGES**, según se observa en la figura (7.44):

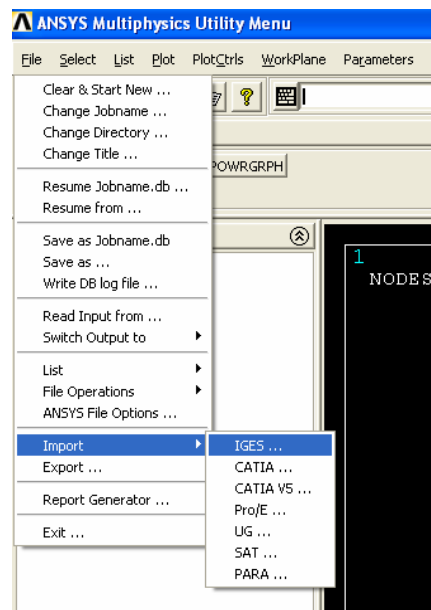
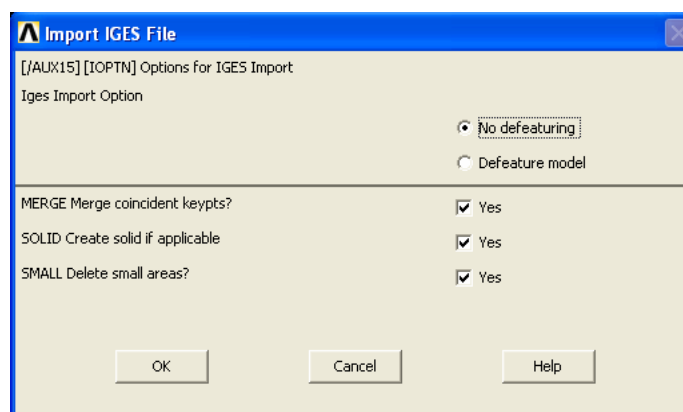


Figura 7.44. Importación en formato IGES.

Si el modelo no será deformado, el cuadro de diálogo resultante queda de esta manera y se busca el archivo en "Browse" (ver figura 7.45):



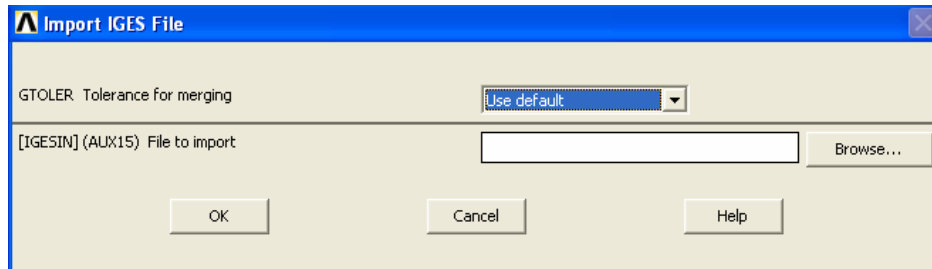


Figura 7.45. Opciones de importación en formato IGES y búsqueda de archivo IGES.

El prototipo se denomina: “FórmulaSAETorsión” y se lo busca, como se indica en la figura (7.46)

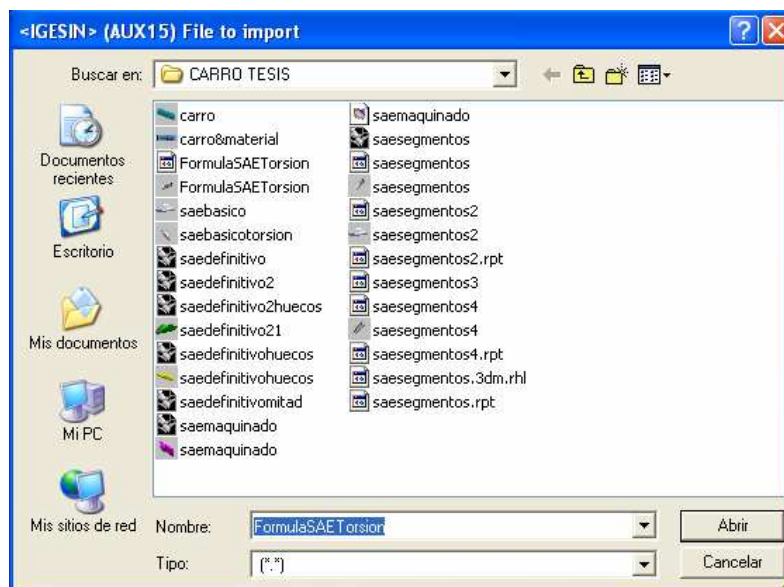


Figura7.46. Selección del archivo IGES.

Una vez que el modelo aparece en pantalla, se verifica que el modelo no presente deformaciones y se lo puede rotar utilizando los botones de rotación según la figura (7.47):

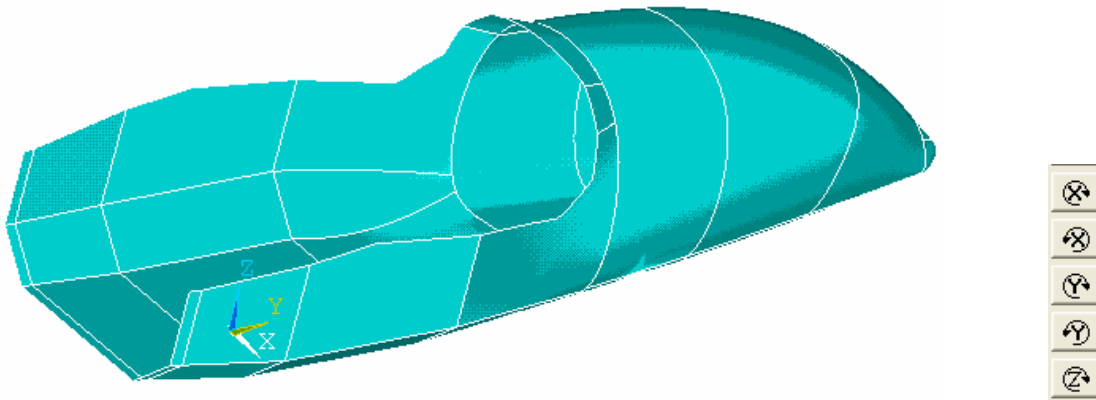


Figura 7.47. Modelo en Ansys y botones de rotación.

Se puede seleccionar las unidades de trabajo en **ANSYS Main Menu**, seleccionando **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Library** → **Select Units**. Se selecciona el sistema SI en el cuadro de diálogo siguiente (ver figura 7.48):

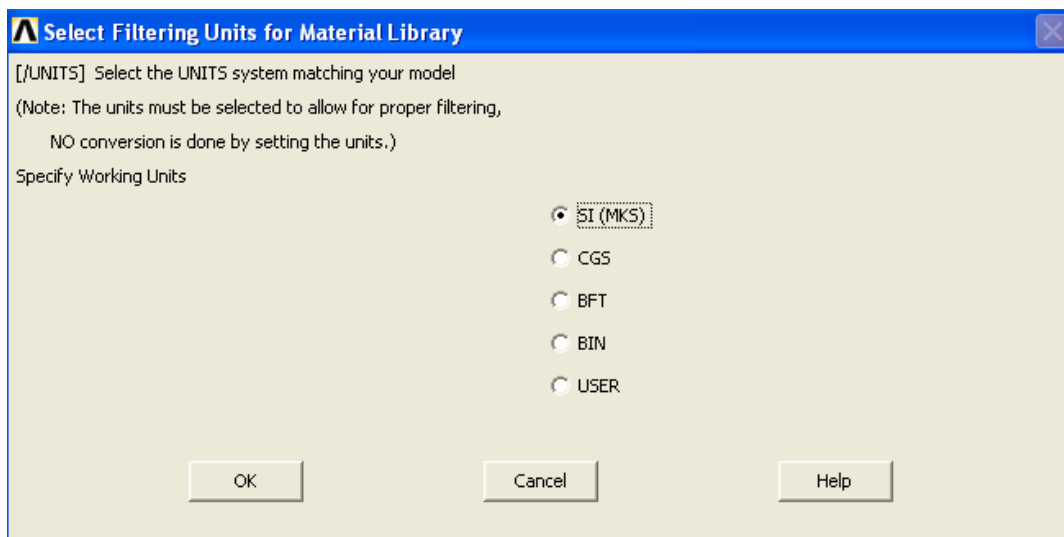


Figura 7.48. Selección de unidades.

Se da un título al modelo mediante **File** → **Change Title**, y se despliega la figura (7.49):

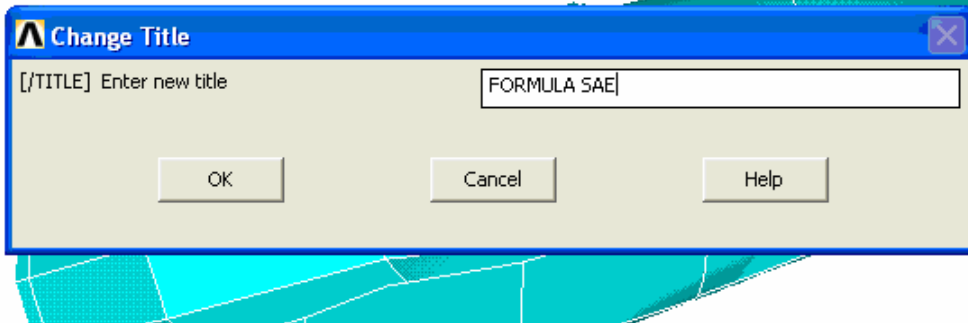


Figura 7.49. Cambio de título.

Para que se despliegue el título, en el menú principal se selecciona **Plot** → **Replot**. Adicionalmente se necesita ingresar los parámetros escalares de la tabla (7.11) que es ingresada al programa mediante: **Parameters** → **Scalar Parameters**.

Tabla 7.11. Parámetros escalares para Ansys.

Parámetros escalares		
LADO	$50 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	
ÁNGULO	0°	
ESPESOR	$1.25 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ según (7.6.2)	
FUERZA	6522 N según figura (7.31)	
E_x	$2.242 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	Tabla (7.8)
E_y	$2.242 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	
E_z	$2.242 \cdot 10^{10} \text{ Pa}$	
G_{xy}	$2.563 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	
G_{xz}	$2.563 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	
G_{yz}	$8.007 \cdot 10^9 \text{ Pa}$	
PR_{xy}	0.068	
PR_{yz}	0.4	
PR_{xz}	0.068	

Al activar **Scalar Parameters** se puede ingresar todas las constantes que definen el problema como son las orientaciones de la lámina, el espesor, las fuerzas, las propiedades mecánicas y el tamaño del elemento finito. Estos parámetros pueden ser fácilmente editados, (ver figura 7.50).

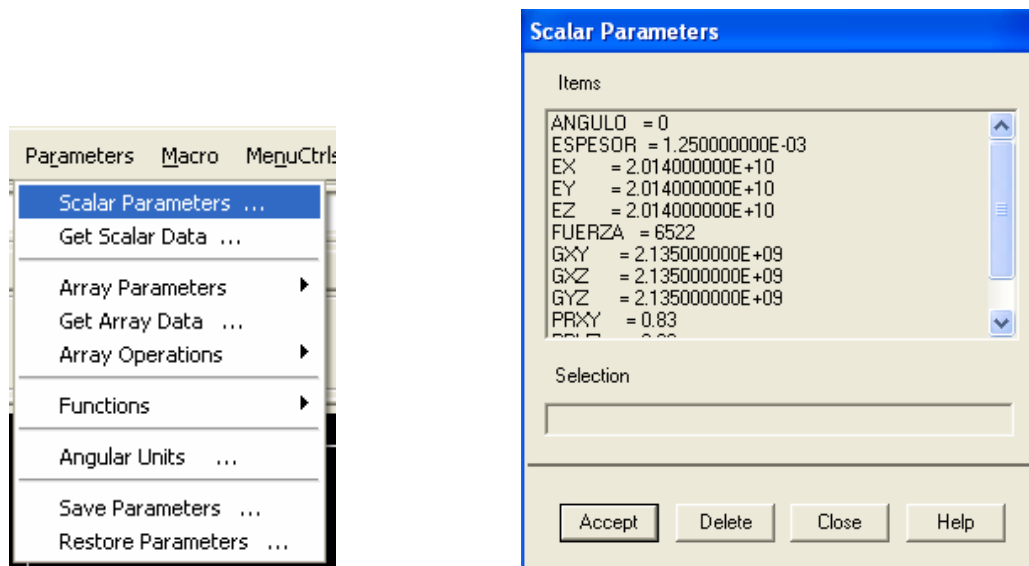


Figura 7.50. Parámetros escalares.

Se ingresan a continuación las propiedades del material en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Material Props** → **Material Models** según la figura (7.51)

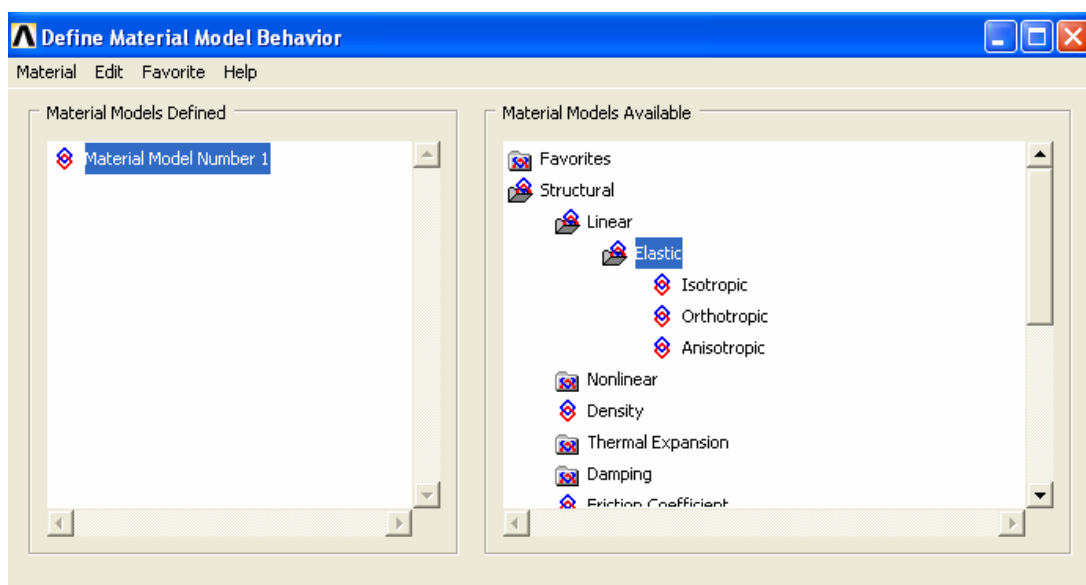


Figura 7.51. Modelos de material.

Al seleccionar material ortotrópico se despliega el siguiente cuadro de diálogo (ver figura 7.52), en el cual se ingresan los parámetros que se pide. Puesto que estos parámetros se encuentran definidos previamente solo se necesita ingresar las siglas que los representan.

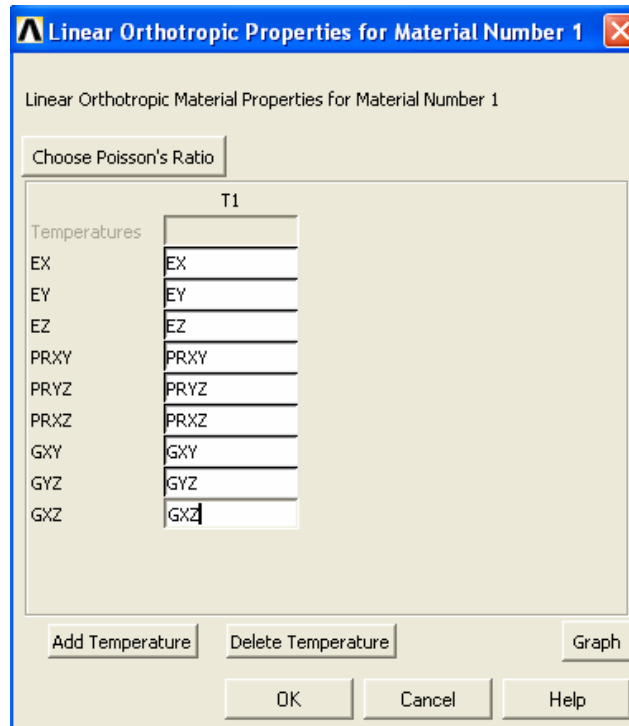


Figura 7.52. Propiedades de material ortotrópico.

A continuación se selecciona el tipo de elemento finito adecuado para láminas de materiales compuestos de espesor mucho menor que cualquiera de sus lados. Se puede utilizar el elemento membrana (**Shell Linear Layer 99**), elemento lineal que no soporta grandes deformaciones. Se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete**, en respuesta aparece el cuadro de diálogo y se selecciona **Add** (ver figura 7.53).

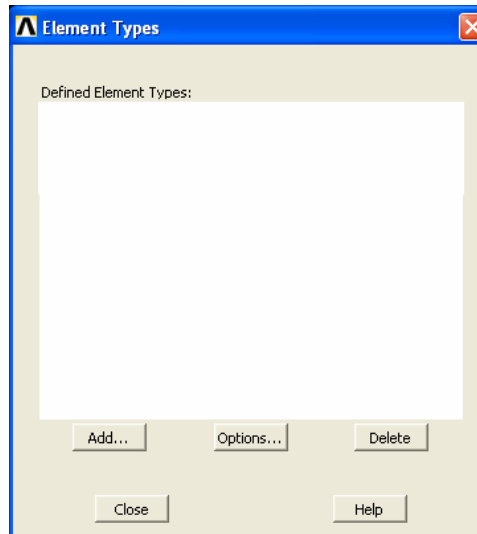


Figura 7.53. Definición de tipo de elementos a ser usado.

Se selecciona **Add** y aparece un nuevo cuadro de diálogo según se muestra en la figura (7.54):

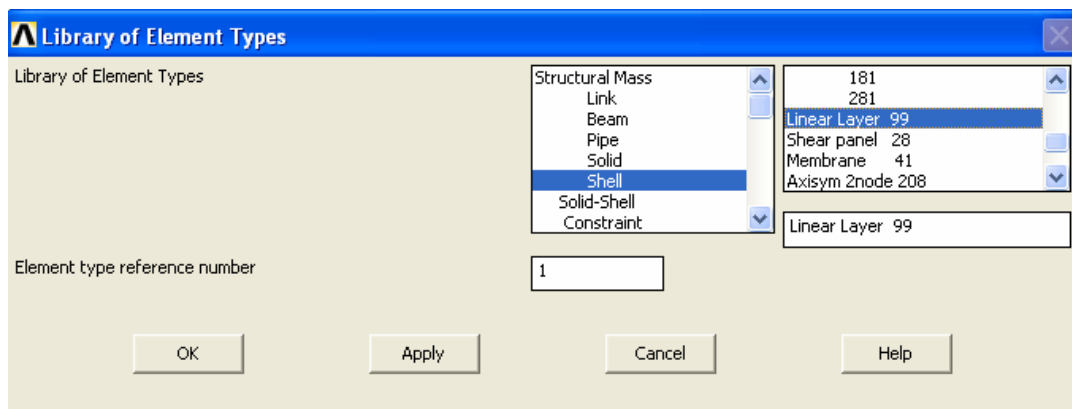


Figura 7.54. Selección de tipos de elementos de biblioteca.

El siguiente paso es asignar a este elemento las características mecánicas respectivas en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Real Constants** → **Add / Edit / Delete**, desplegándose el cuadro de la figura (7.55) donde se selecciona **Add**.

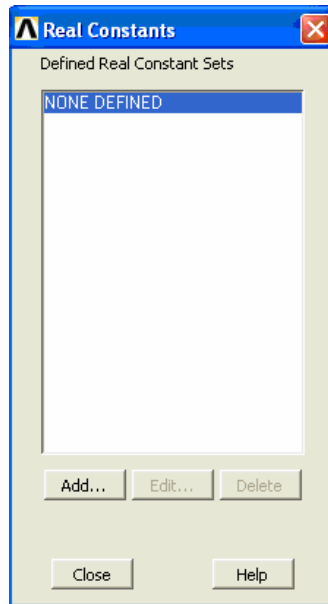


Figura 7.55. Selección de constantes del elemento.

Se activa **Add** y se despliega el cuadro de la figura (7.56), donde se verifica el tipo de elemento utilizado.

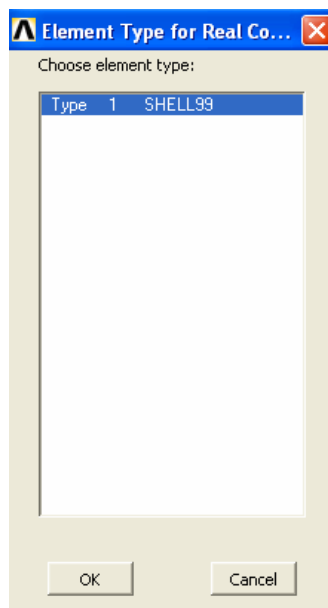


Figura 7.56. Tipo de elemento ingresado a Real Constants.

Se activa **OK** y se indica que el elemento seleccionado está definido por el numeral 1 (figura 7.57).

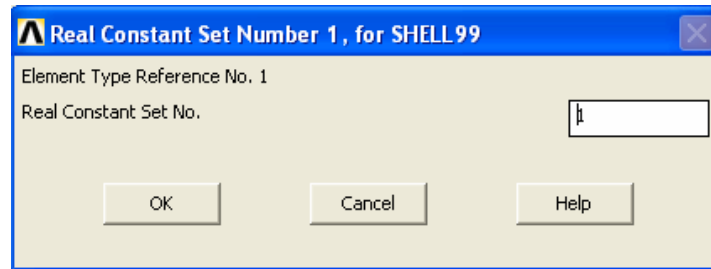


Figura 7.57. Constantes para el elemento 1.

Nuevamente se activa **OK** y se despliega el siguiente cuadro de diálogo (ver figura 7.58) donde se debe ingresar el número de capas, 5 para obtener un espesor total de 6.25 mm. En este caso no se necesita simetría, por lo tanto solo se ingresa los siguientes datos:

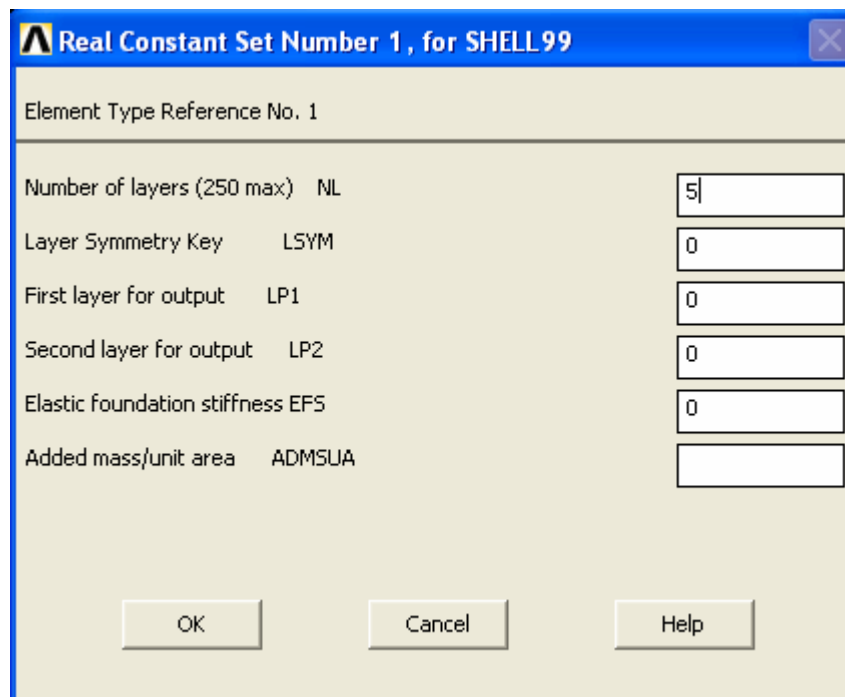


Figura 7.58. Constantes para el elemento 1.

Debido a que se selecciona lámina tejida, no se necesita ingresar los ángulos de rotación (figura 7.59):

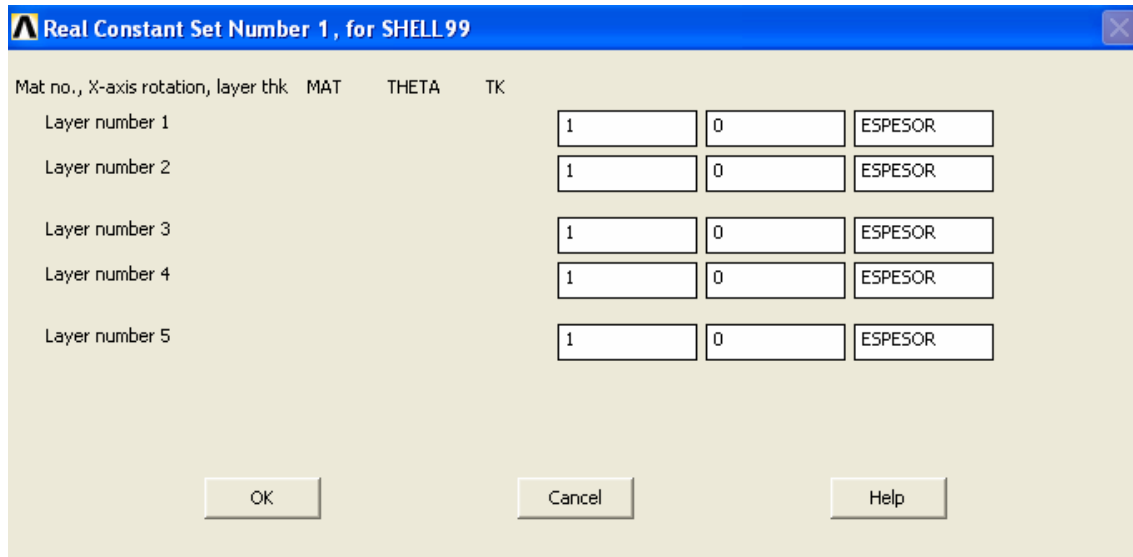


Figura 7.59. Determinación de las orientaciones de las capas.

Para efectuar el mallado se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Meshing** → **Size Cntrls** → **ManualSize** → **Areas** → **All Areas**. Se activa el cuadro de diálogo siguiente y se ingresa la dimensión del elemento finito que estaba dado por el parámetro escalar LADO (figura 7.60).

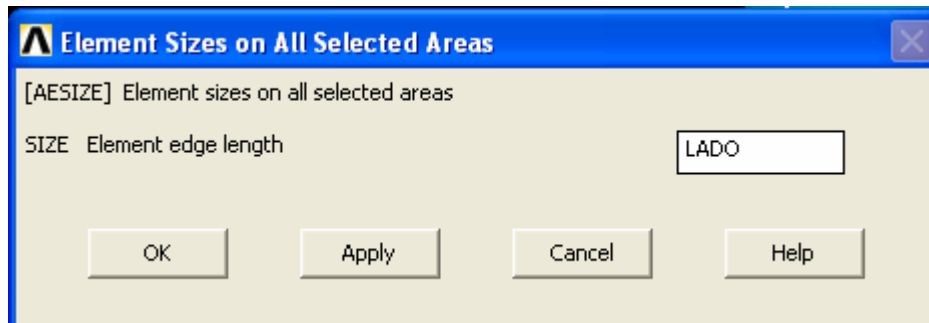


Figura 7.60. Magnitud del elemento finito.

Para mallar el modelo se activa **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Meshing** → **Mesh** → **Areas** → **Free** y se activa **Pick All** para seleccionar todas las áreas (figura 7.61).

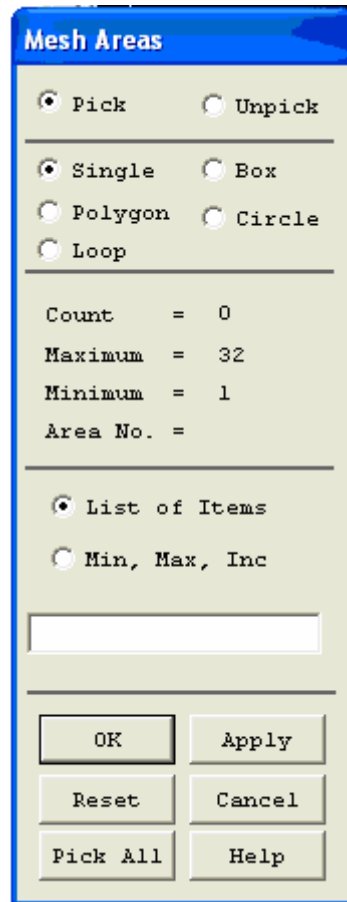


Figura 7.61. Seleccionar las áreas a ser malladas.

Después de unos instantes se despliega todas las superficies malladas, según la figura (7.62). El lado del elemento finito es de 50 mm.

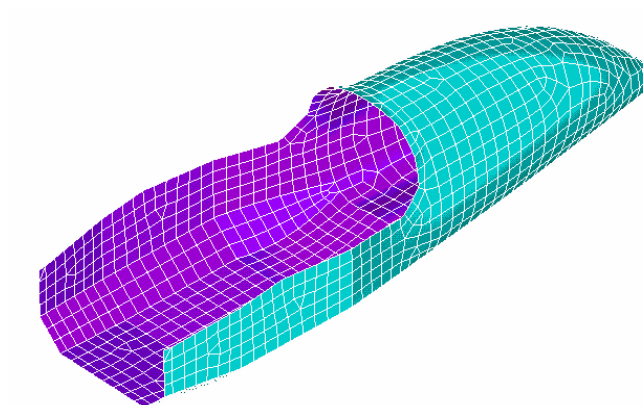


Figura 7.62. Mallado del modelo.

Para identificar las áreas donde se colocarán las restricciones se selecciona en la barra de menús la opción **PlotCtrls** → **Numbering** y se activa **AREA** (figura 7.63).

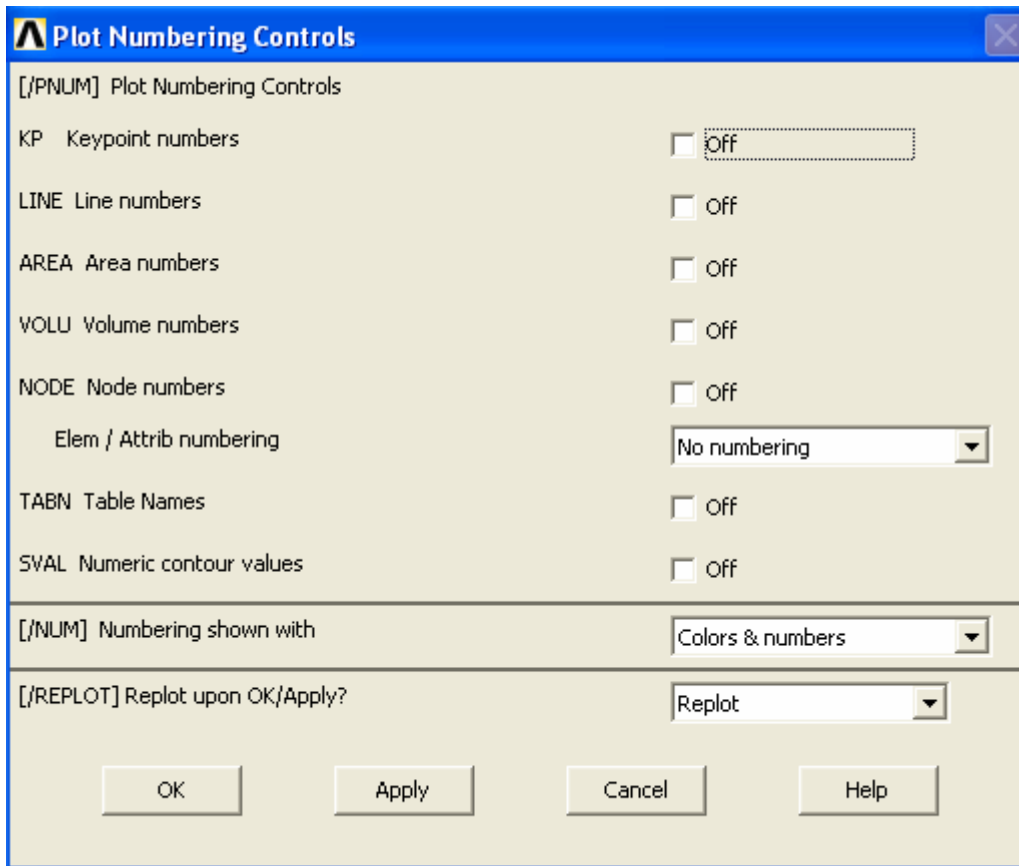


Figura 7.63. Control de numeración.

Luego se debe ir a la barra de menús a **Plot** → **Áreas**, y se despliegan las áreas numeradas (ver figura 7.64):

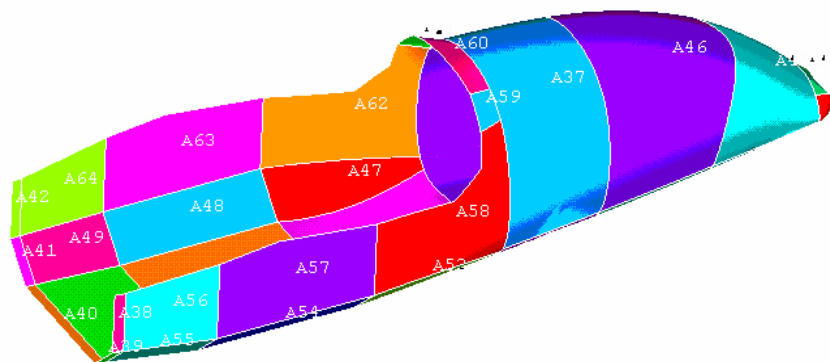


Figura 7.64. Identificación de áreas.

7.7.2. PREPROCESADO, RESTRICCIONES Y FUERZAS

En este paso se pretende simular la prueba de torsión, que es un ensayo que se lo realizaría en el taller donde el modelo se construye, para lo cual se ingresan las condiciones de contorno apropiadas del monocasco. Para el caso de la prueba de torsión se fija la parte posterior del monocasco y se colocan dos fuerzas que forman un par torsor en uno de los puntos de anclaje de las suspensiones delanteras, según se observa en la figura (7.32). El apoyo fijo se puede modelar en Ansys restringiendo todos los movimientos y rotaciones de las áreas seleccionadas en la figura (7.65). En **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Loads** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Displacement** → **On Areas**, se eligen las áreas a fijarse.

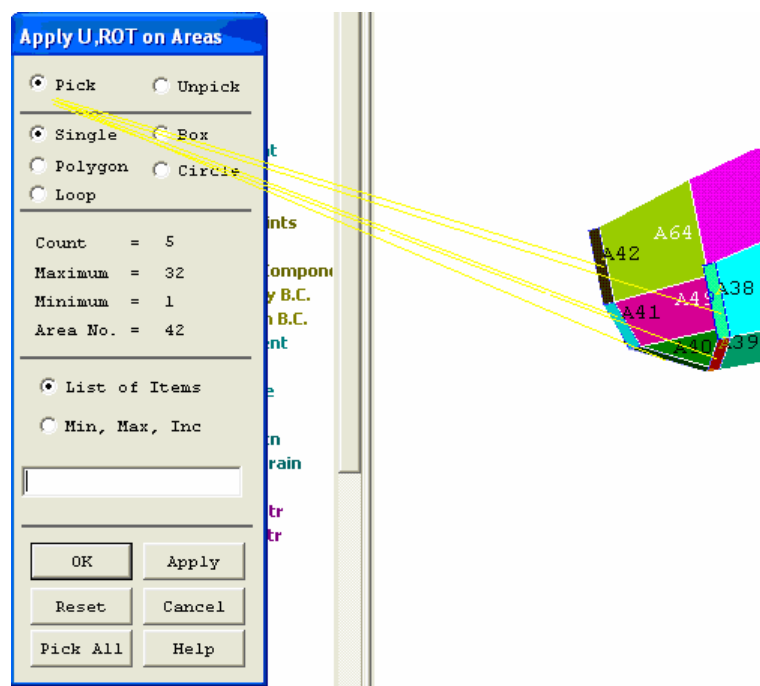


Figura 7.65. Selección de áreas a fijar.

Luego se despliega el siguiente cuadro de diálogo que indica cuales son los grados de libertad a ser restringidos en la superficie. Se seleccionan todos (figura 7.66).

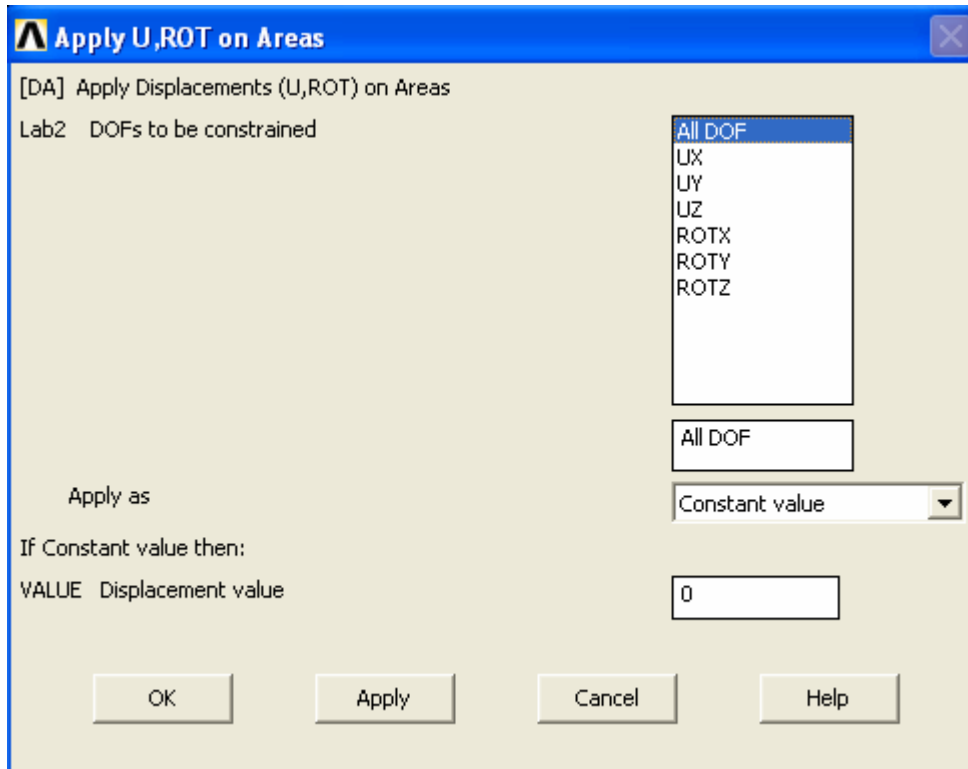


Figura 7.66. Grados de libertad a ser restringidos.

El resultado es el despliegue de los siguientes iconos (figura 7.67):

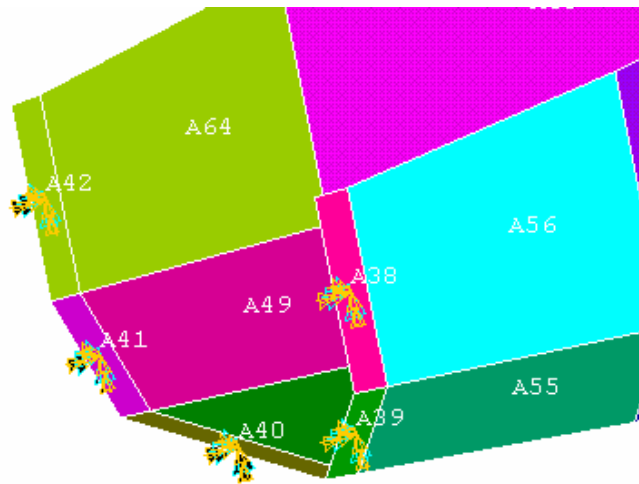


Figura 7.67. Símbolos de restricción.

Para ingresar las fuerzas se necesita identificar puntos de referencia donde aplicarlas. Por ello se necesita crear **Keypoints** y en **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Modeling** → **Create** → **Keypoints** → **On node**, se seleccionan los

dos puntos correspondientes a los brazos de las suspensiones donde se localizan las fuerzas que forman el par (figura 7.68).

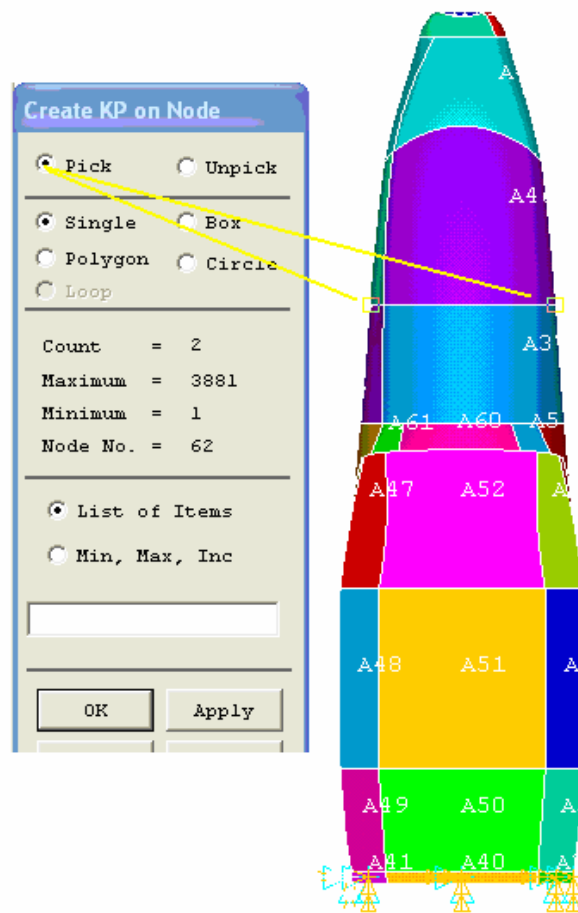


Figura 7.68. Definición de “keypoints”.

En estos puntos indicados se define el valor de la fuerza mediante: **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Loads** → **Define Loads** → **Apply** → **Structural** → **Force / Moment** → **On Keypoints**. En el cuadro de diálogos se ingresa el valor de la fuerza y su dirección (ver figura 7.69 y 7.70).

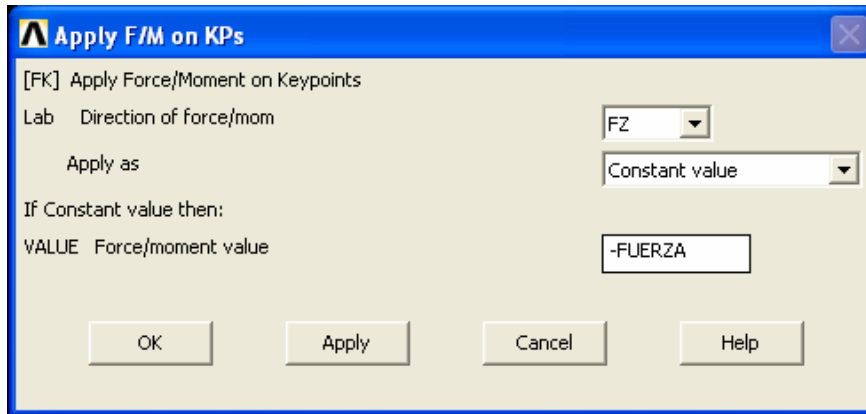


Figura 7.69. Ingreso de la fuerza negativa.

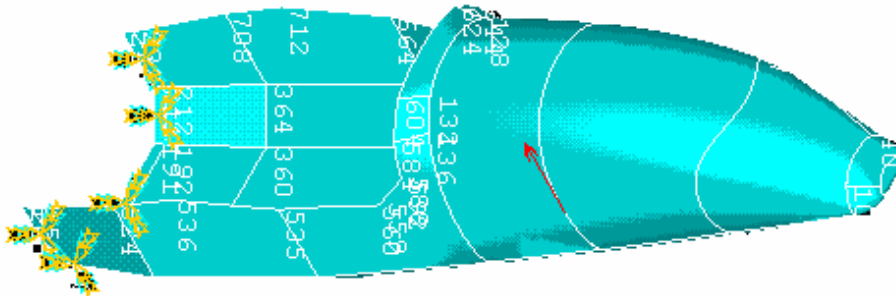


Figura 7.70. Imagen del vector fuerza en nuestro modelo.

De igual manera se procede con el otro nodo (figura 7.71 y 7.72).

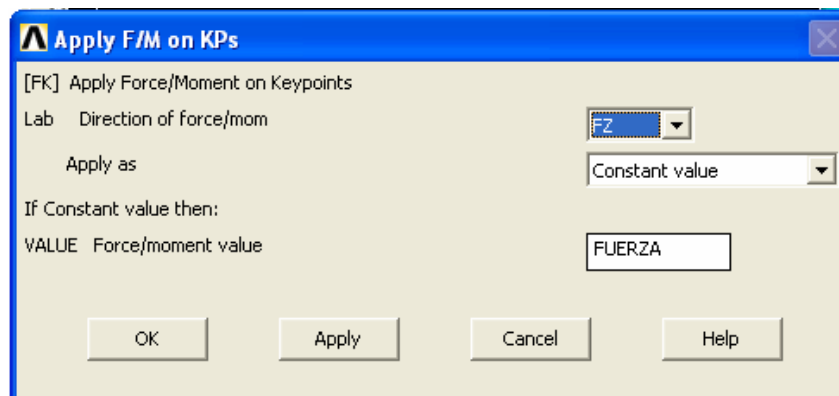


Figura 7.71. Ingreso de la fuerza positiva.

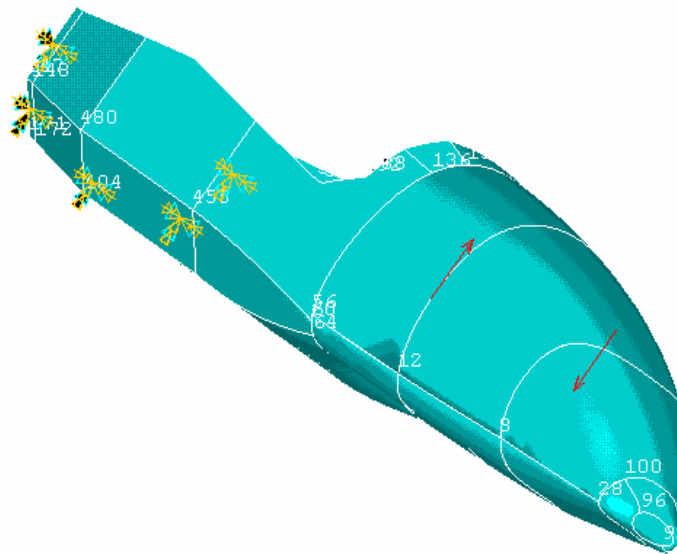


Figura 7.72. Imagen de los vectores de fuerza en el modelo.

7.7.3. ETAPA DE SOLUCIÓN

Para que el software inicie los cálculos que resolverán el problema se necesita ir a **ANSYS Main Menu** → **Solution** → **Solve** → **Current LS**. La ventana desplegada es la correspondiente a la figura (7.73), la cual se acepta.

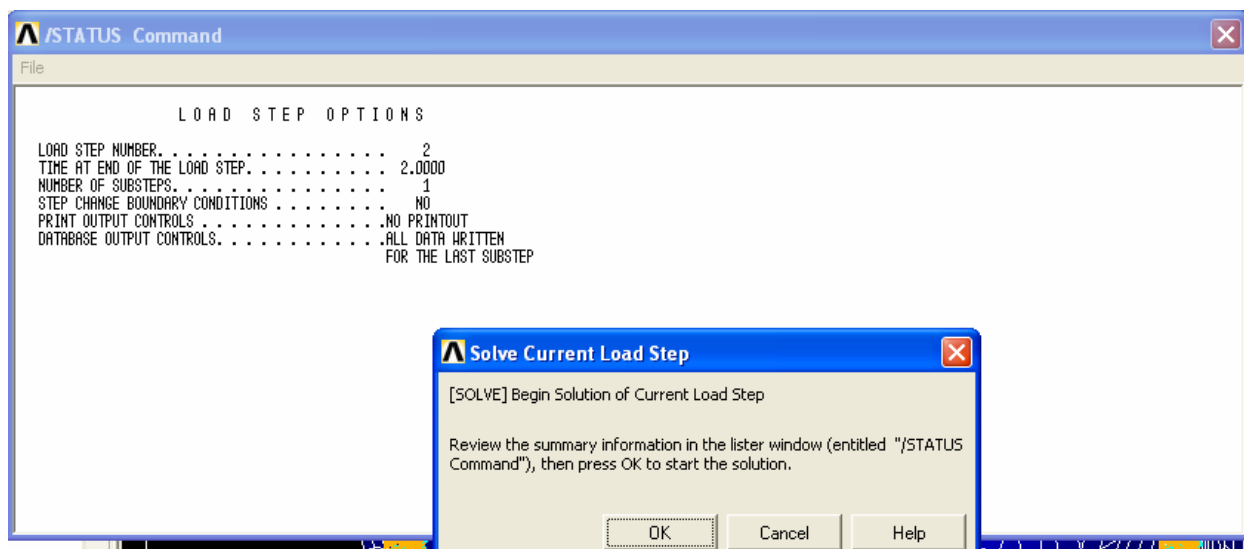


Figura 7.73. Inicio de la etapa de cálculo.

7.7.4. POSTPROCESADO

Luego de efectuado el cálculo, se puede revisar los resultados en el postprocesador de Ansys. Por el momento interesan los desplazamientos y verificar si el modelo cumple con la rigidez torsional estipulada.

Lo primero que se puede revisar es el desplazamiento en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Deformed Shape** (figura 7.74).

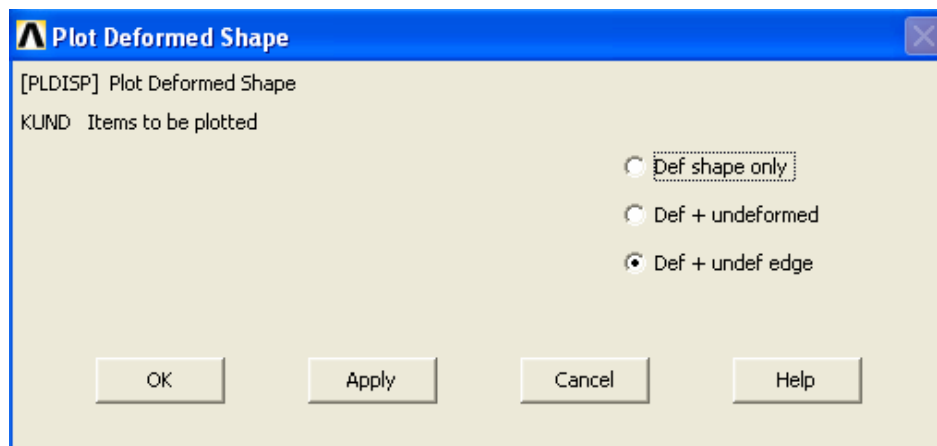


Figura 7.74. Cuadro de diálogos para graficar la deformada.

Se observa la vista lateral del modelo (ver figura 7.75)

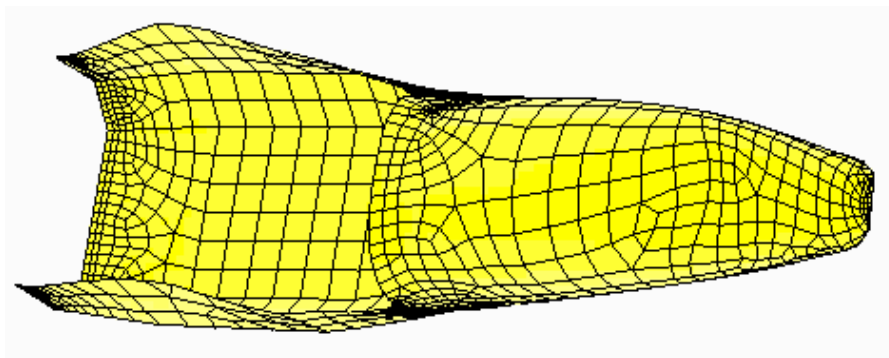


Figura 7.75. Vista lateral del modelo deformado.

También se puede observar la vista posterior del modelo deformado. Ansys también entrega el valor máximo de desplazamiento (ver figura 7.76).

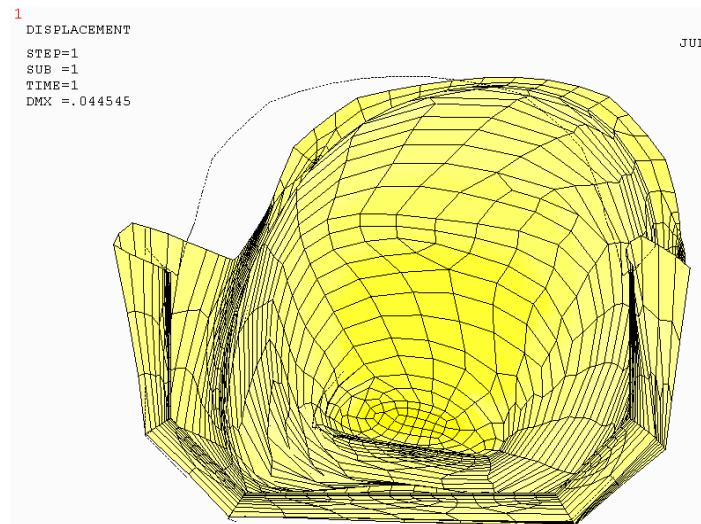


Figura 7.76. Vista frontal del modelo deformado.

Si se quiere cuantificar las zonas que han sufrido más o menos desplazamiento se debe ingresar en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solution** (figura 7.77).

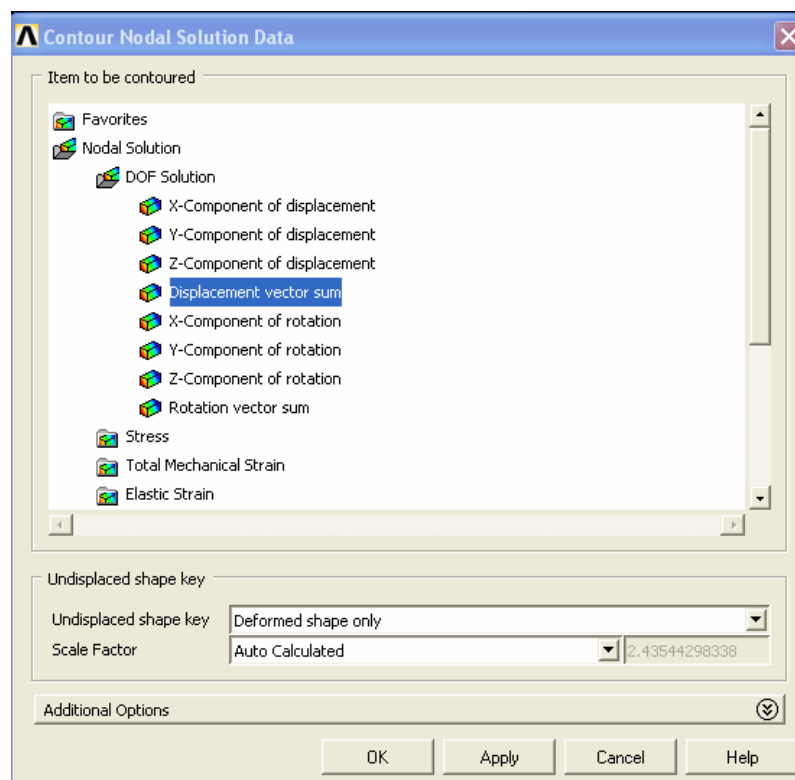


Figura 7.77. Ventana de soluciones de contorno, en nodos.

Desplegándose la siguiente ventana que indica que el modelo sufre un desplazamiento de **44.5 mm**. Este es un desplazamiento importante, que inhabilita el presente diseño para el propósito que se requiere (ver figura 7.78).

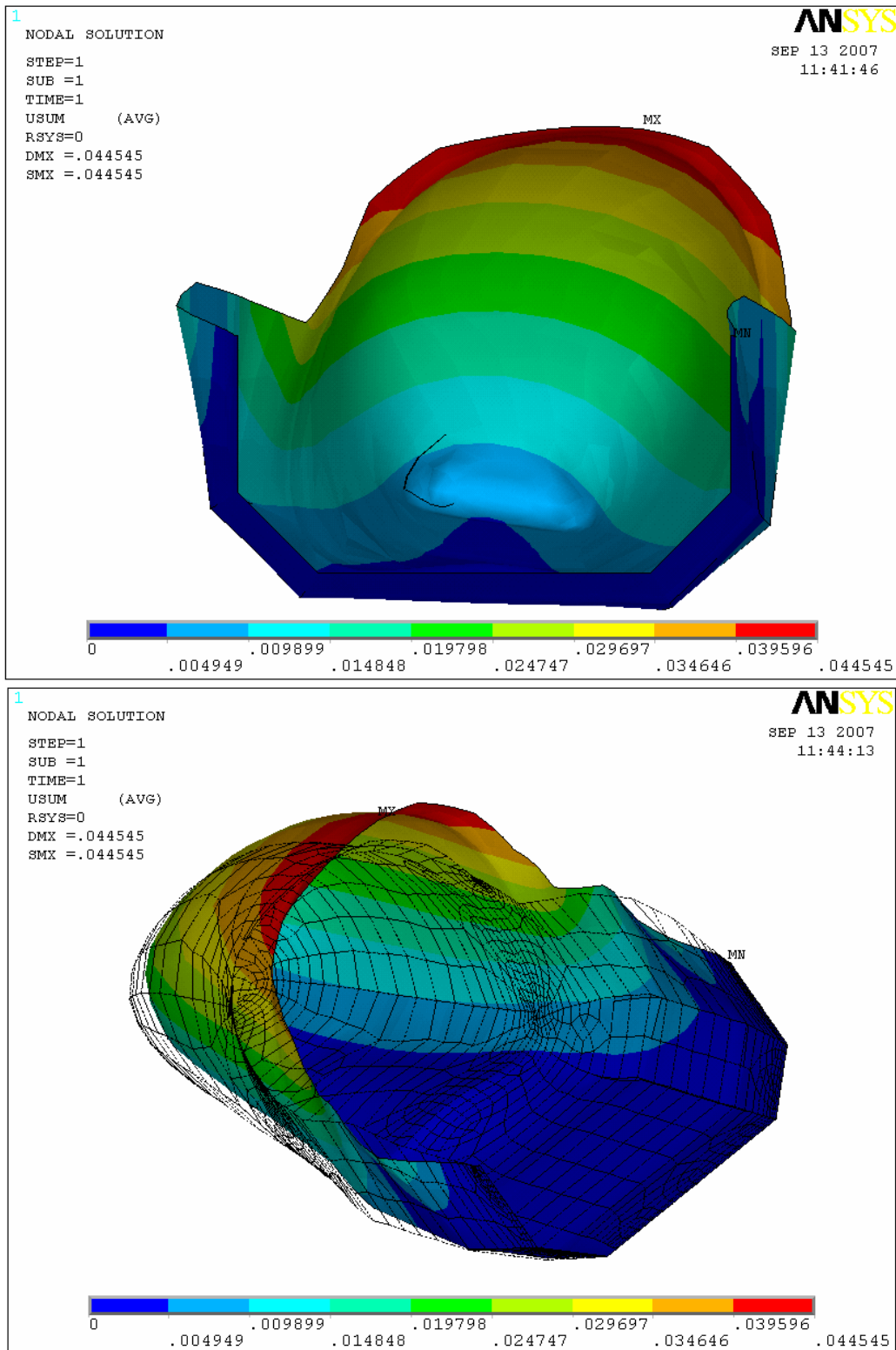


Figura 7.78. Cuantificación del desplazamiento en metros.

Si se activa en la misma ventana, **Rotation Vector Sum**, se obtiene el gráfico de las rotaciones angulares (ver figura 7.79).

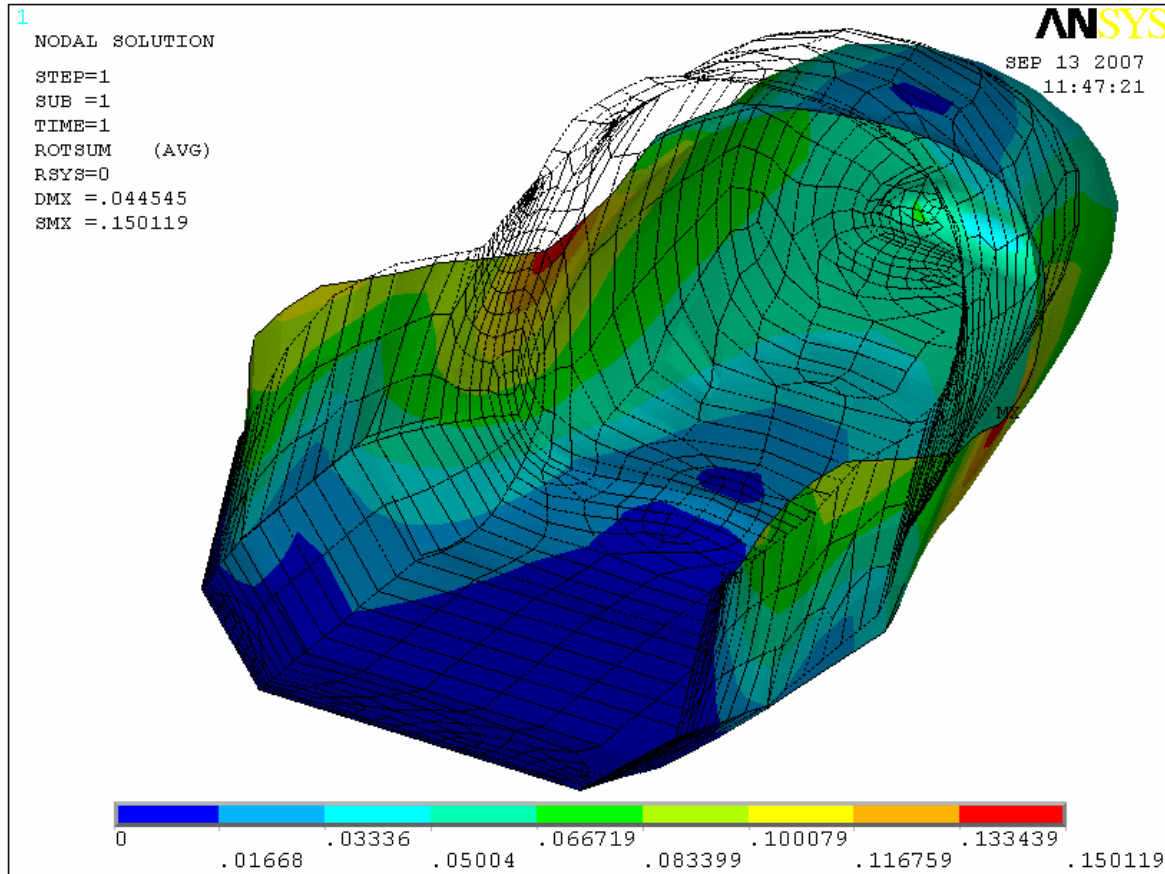


Figura 7.79. Cuantificación de la rotación angular.

La rotación máxima angular es de 0.150119 radianes, equivalente a 8.6° , es decir, ocho veces más de lo especificado. Es posible que la rigidez del chasis mejore si se aumenta las capas de laminado. Sin embargo, esto incrementaría el peso que actualmente está en 40 kg.

Por lo tanto, se tiene dos opciones, cambiar de material o cambiar de diseño. Es obvio que el principal problema se encuentra en la zona abierta para el piloto y por ello se seleccionará un nuevo material, que será fibra de carbono en matriz epoxi.

7.8. REDISEÑO CON FIBRA DE CARBONO EN MATRIZ EPÓXICA

Al contrario de otros mercados en Latinoamérica, la fibra de carbono en un insumo no muy común en Ecuador. Sin embargo, el Laboratorio de Resistencia de Materiales del DECEM (Departamento de Energía y Mecánica de la ESPE) pudo

conseguir localmente este material y trabajó con manta tejida de fibra de carbono bidireccional, de las especificaciones de la tabla 7.12:

Tabla 7.12. Características físicas de la fibra a utilizar.

Nombre comercial:	3k, 2 x 2 Twill Weave Graphite Fabric
Características Técnicas	
Ancho:	1270 mm (50")
Peso específico:	0.199 kg/m ² (5.7 Oz/Sq Yd)
Espesor:	0.31 mm (0.012")
Filamentos:	3000 filamentos por hebra
Precio:	\$59.95 la yarda

Esta manta se caracteriza por presentar un buen acabado y ser usada en aplicaciones automotrices. Consultando el documento técnico de propiedades en la bibliografía ^[7.18] se determinó que esta manta tiene especificaciones T300. Tomando los datos de las tablas 7.4 y 7.5, se seleccionan las propiedades mecánicas de la fibra y de la matriz epóxica. Una imagen ampliada del tejido se lo aprecia en la figura (7.80).

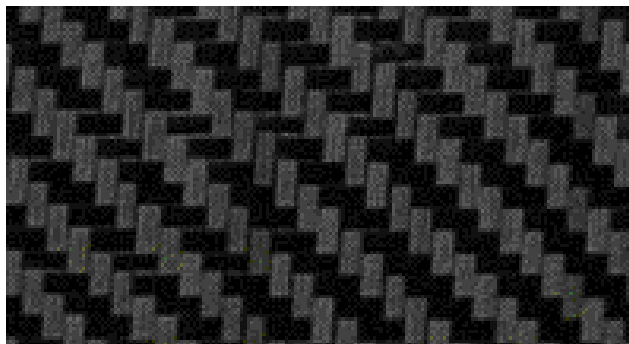


Figura 7.80. Aspecto del paño de fibra de carbono a utilizar.

7.8.1. DETERMINACIÓN DE LAS PROPIEDADES MECÁNICAS DEL LAMINADO CON FIBRA DE CARBONO Y EPOXI

Utilizando de las tablas (7.4) y (7.5) los datos siguientes: $E_f = 228 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_f = 0.2$, $E_m = 3.4 \cdot 10^9$ Pa, $\nu_m = 0.35$ y una fracción volumétrica de la fibra $\nu_f = 0.6$, se determina las propiedades de la lámina unidireccional E_{11} , E_{22} , E_{33} , ν_{12} , ν_{13} , ν_{23} , G_{12} , G_{13} , G_{23} , mediante las fórmulas (2.12), (2.17), (2.24) y (2.32).

$$E_1 = E_f \cdot \nu_f + E_m \cdot (1 - \nu_f) = 1.382 \times 10^{11} \cdot \text{Pa}$$

$$E_2 = \frac{E_f \cdot E_m}{E_f \cdot (1 - \nu_f) + E_m \cdot \nu_f} = 8.792 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$E_3 = E_2 = 8.792 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$\nu_{12} = \nu_f \cdot \nu_f + \nu_m \cdot (1 - \nu_f) = 0.26$$

$$\nu_{21} = \frac{E_2}{E_1} \cdot \nu_{12} = 0.017$$

El valor de ν_{23} se lo toma de la tabla (7.9) y es igual a 0.59.

$$G_f = \frac{E_f}{2 \cdot (1 + \nu_f)} = 9.5 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$G_m = \frac{E_m}{2 \cdot (1 + \nu_m)} = 1.333 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{12} = \frac{G_f \cdot G_m}{G_f \cdot \nu_m + G_m \cdot \nu_f} = 3.265 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{13} = G_{12} = 3.265 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$G_{23} = \frac{E_2}{2 \cdot (1 + \nu_{23})} = 2.765 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

A continuación se calculan los términos de la matriz reducida [Q] en base de la ecuación (2.63).

$$Q_1 = \frac{E_1}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = 1.388 \times 10^{11} \cdot \text{Pa}$$

$$Q_2 = \frac{E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = 8.83 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{12} \cdot E_2}{1 - \nu_{12} \cdot \nu_{21}} = 2.296 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

$$Q_{21} = Q_{12} \quad Q_{66} = G_{12} = 3.265 \times 10^9 \cdot \text{Pa}$$

Se necesita determinar los invariantes U_1 , U_2 , U_3 , U_4 y U_5 según (2.68)

$$U_1 = \frac{1}{8} \cdot (3 \cdot Q_{11} + 3 \cdot Q_{22} + 2 \cdot Q_{12} + 4 \cdot Q_{66}) = 5.758 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_2 = \frac{1}{2} \cdot (Q_{11} - Q_{22}) = 6.5 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_3 = \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} - 2 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) = 1.625 \times 10^{10} \cdot \text{Pa}$$

$$U_4 = \frac{1}{8} \cdot (Q_{11} + Q_{22} + 6 \cdot Q_{12} - 4 \cdot Q_{66}) = 1.855 \times 10^{10} \cdot \text{N}$$

$$U_5 = \frac{1}{2} \cdot (U_1 - U_4) = 1.952 \times 10^{10} \cdot \text{N}$$

A continuación se calcula los elementos de la matriz reducida transformada en función de un ángulo θ en base de (2.65).

$$\begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{66} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 & \cos(2 \cdot \theta) & \cos(4 \cdot \theta) \\ U_1 & -\cos(2 \cdot \theta) & \cos(4 \cdot \theta) \\ U_4 & 0 & -\cos(4 \cdot \theta) \\ U_5 & 0 & -\cos(4 \cdot \theta) \\ 0 & \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{2} & \sin(4 \cdot \theta) \\ 0 & \frac{\sin(2 \cdot \theta)}{2} & \sin(4 \cdot \theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ U_2 \\ U_3 \end{Bmatrix}$$

Se calcula la matriz de rigidez reducida transformada para $\theta = 0^\circ$ y para $\theta = 90^\circ$.

$$[\bar{Q}(0)] = \begin{bmatrix} 1.388 \times 10^{11} & 2.296 \times 10^9 & 0 \\ 2.296 \times 10^9 & 8.83 \times 10^9 & 0 \\ 0 & 0 & 3.265 \times 10^9 \end{bmatrix} \cdot \text{Pa}$$

$$[\bar{Q}(90)] = \begin{bmatrix} 8.83 \times 10^9 & 2.296 \times 10^9 & 0 \\ 2.296 \times 10^9 & 1.388 \times 10^{11} & 0 \\ 0 & 0 & 3.265 \times 10^9 \end{bmatrix} \cdot \text{Pa}$$

Siendo el promedio la matriz de rigidez de un paño o tejido.

$$[\bar{Q}_{\text{woven}}] = \begin{bmatrix} 7.383 \times 10^{10} & 2.296 \times 10^9 & 0 \\ 2.296 \times 10^9 & 7.383 \times 10^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 3.265 \times 10^9 \end{bmatrix} \text{Pa}$$

La matriz de flexibilidad es la inversa de $[\bar{Q}_{\text{woven}}]$:

$$[\bar{S}_{\text{woven}}] = [\bar{Q}_{\text{woven}}]^{-1} = \begin{bmatrix} 1.356 \times 10^{-11} & -4.215 \times 10^{-13} & 0 \\ -4.215 \times 10^{-13} & 1.356 \times 10^{-11} & 0 \\ 0 & 0 & 3.063 \times 10^{-10} \end{bmatrix} \text{Pa}^{-1}$$

Y las constantes de ingeniería de una lámina en (Pa) son:

$$E_{1\text{woven}} = \frac{1}{S_{11}} = 7.376 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$E_{2\text{woven}} = \frac{1}{S_{22}} = 7.376 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$G_{12\text{woven}} = \frac{1}{S_{33}} = 3.265 \times 10^9 \text{ Pa}$$

$$\nu_{12\text{woven}} = -E_{1\text{woven}} \cdot \bar{S}_{12} = 0.031$$

Las propiedades del tejido se resumen en la tabla (7.13):

Tabla 7.13. Propiedades mecánicas de la lámina de fibra de carbono en matriz epoxi.

Propiedades mecánicas de la lámina	Calculadas (Pa)	Experimentales (Pa)
------------------------------------	-----------------	---------------------

E_x	$7.376 \cdot 10^{10}$	$7.4 \cdot 10^{10}$
E_y	$7.376 \cdot 10^{10}$	$7.4 \cdot 10^{10}$
E_z	$7.376 \cdot 10^{10}$	$7.4 \cdot 10^{10}$
G_{xy}	$3.265 \cdot 10^9$	$5.3 \cdot 10^9$
G_{xz}	$3.265 \cdot 10^9$	-
G_{yz}	$3.265 \cdot 10^9$	-
PR_{xy}	0.031	0.05
PR_{yz}	0.6	-
PR_{xz}	0.031	-

Las propiedades calculadas son similares a las que se pueden apreciar en la tabla 7.9.

7.8.2. OBTENCIÓN Y MODIFICACIÓN DEL ARCHIVO DB LOG FILE

Ansys recuerda cada comando que se introduce, por lo que no es necesario volver a desarrollar todo el problema. Cuando se requiere cambiar los materiales solo se necesita crear la base de datos Log File mediante: **Utility Menu** → **File** → **Write DB log file**, y guardarla en una carpeta conveniente:

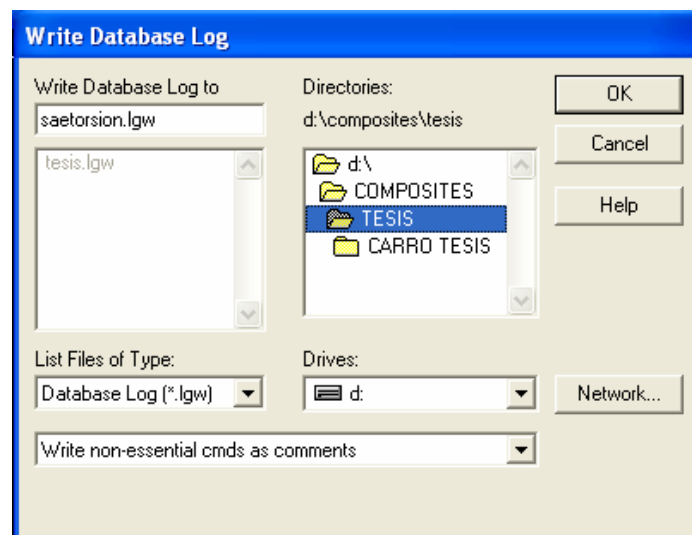


Figura 7.81. Escribir Database Log.

Se busca este archivo de texto modificable con cualquier editor de texto y se simplifica borrando principalmente los encabezamientos que son generados por

defecto, si solo se necesita cambiar el material se puede cambiar estos valores directamente en el archivo de texto.

Tabla 7.14. Archivo DB LOG FILE.

```

!/REPLOT,RESIZE
/AUX15
IOPTN,IGES,NODEFEAT
IOPTN,MERGE,YES
IOPTN,SOLID,YES
IOPTN,SMALL,YES
IOPTN,GTOLER,DEFA
IGESIN,'FormulaSAETorsion','IGS','D:\COMPOSITES\TESIS\CARRO TESIS'
! APLOT
*SET,EX,7.408E10
*SET,EY,7.408E10
*SET,EZ,EX
*SET,GXY,3.3369E9
*SET,GXZ,GXY
*SET,GYZ,GXY
*SET,PRXY,0.034
*SET,PRYZ,0.6
*SET,PRXZ,PRXY
*SET,ESPESOR,1.25/1000
*SET,LADO,55/1000
*SET,FUERZA,6522
FINISH
/PREP7
ET,1,SHELL99
*SET,_RC_SET,1,
R,1
RMODIF,1,1,5,0,0,0,0,0
RMODIF,1,13,1,0,ESPESOR,1,0,ESPESOR,
RMODIF,1,19,1,0,ESPESOR,1,0,ESPESOR,
RMODIF,1,25,1,0,ESPESOR,
*SET,_RC_SET,2,
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDATA,EX,1,,EX
MPDATA,EY,1,,EY
MPDATA,EZ,1,,EZ
MPDATA,PRXY,1,,PRXY
MPDATA,PRYZ,1,,PRYZ
MPDATA,PRXZ,1,,PRXZ
MPDATA,GXY,1,,GXY
MPDATA,GYZ,1,,GYZ
MPDATA,GXZ,1,,GXZ
MPTEMP,,,,,,,,
MPTEMP,1,0
MPDE,NUXY,1
MPDE,NUYZ,1
MPDE,NUXZ,1
MPDE,PRXY,1
MPDE,PRYZ,1
MPDE,PRXZ,1
MPDE,EX,1
MPDATA,EX,1,,7.408E+010
MPDE,EY,1
MPDATA,EY,1,,7.408E+010

```

```

MPDE,EZ,1
MPDATA,EZ,1,,7.408E+010
MPDATA,PRXY,1,,0.034
MPDATA,PRYZ,1,,0.6
MPDATA,PRXZ,1,,0.034
MPDE,GXY,1
MPDATA,GXY,1,,3.3369E+009
MPDE,GYZ,1
MPDATA,GYZ,1,,3.3369E+009
MPDE,GXZ,1
MPDATA,GXZ,1,,3.3369E+009
AESIZE,ALL,LADO,
MSHKEY,0
FLST,5,32,5,ORDE,2
FITEM,5,33
FITEM,5,-64
CM,_Y,AREA
ASEL,,,P51X
CM,_Y1,AREA
CHKMSH,'AREA'
CMSEL,S,_Y
AMESH,_Y1
CMDELE,_Y
CMDELE,_Y1
CMDELE,_Y2
FLST,2,5,5,ORDE,2
FITEM,2,38
FITEM,2,-42
DA,P51X,ALL,0
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,63
F,P51X,FZ,FUERZA
FLST,2,1,1,ORDE,1
FITEM,2,924
F,P51X,FZ,-FUERZA
FINISH
/SOL
!/STATUS,SOLU
SOLVE
FINISH

```

En esta tabla se reproducen los pasos comunes de un programa de elementos finitos que son: preprocesado, solución y postprocesado y se pueden identificar los siguientes comandos:

- REPLOT: Borra la pantalla
- IOPTN: Opciones de control relacionadas al modelo importado
- IGESIN: Transfiere datos de un archivo en formato IGES al programa Ansys
- APLOT: Despliega el dibujo
- SET: Define los datos de entrada al programa, estos datos pueden ser cambiados a voluntad
- FINISH: Sale del proceso
- PREP7: Procesador construcción del modelo

- ET1: Define tipo de elemento finito, en este SHELL 99
- R: Define los valores reales constantes del elemento (interpretados como área, momento de inercia, espesor)
- RMODIF: Modifica las constantes reales
- MPTEMP: Define tabla de temperaturas
- MPDATA: Define propiedades mecánicas elemento finito
- MPDE: Asigna propiedades al elemento finito
- AESIZE: Especifica el tamaño del elemento a ser mallado
- MSHKEY: Especifica mallado libre
- FLST : Especifica datos requeridos para operación de selección “picking”
- FITEM : Identifica ítems seleccionados por la operación de selección “picking”
- CM: Agrupa ítems geométricos
- ASEL: Selecciona un subgrupo de áreas
- CHKMSH: Revisa áreas y volúmenes para un mallado previo
- CMSEL: Selecciona un subgrupo de componentes
- AMESH: Genera nodos y elementos finitos dentro del área
- CMDELE: Borra un componente o ensamble
- DA: Define condiciones de frontera
- F: Especifica fuerzas en nodos
- FINISH: Sale normalmente del proceso
- SOL: Inicia la solución
- SOLU: Especifica sumario de solución
- SOLVE: Inicia la solución

En este archivo de texto se ingresan las nuevas propiedades del compuesto. Una vez que estén modificadas se copia el archivo y se lo pega en la siguiente ventana del programa Ansys (ver figura 7.82):

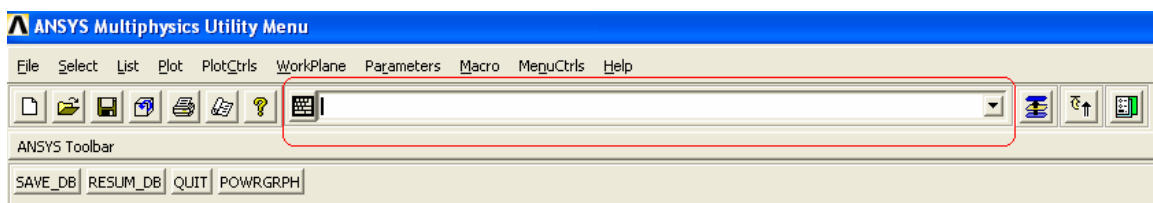


Figura 7.82. Ventana de Utility Menu, donde se ingresa el archivo Log File.

Se vuelve a procesar este archivo y se obtiene el nuevo desplazamiento y rotación del chasis.

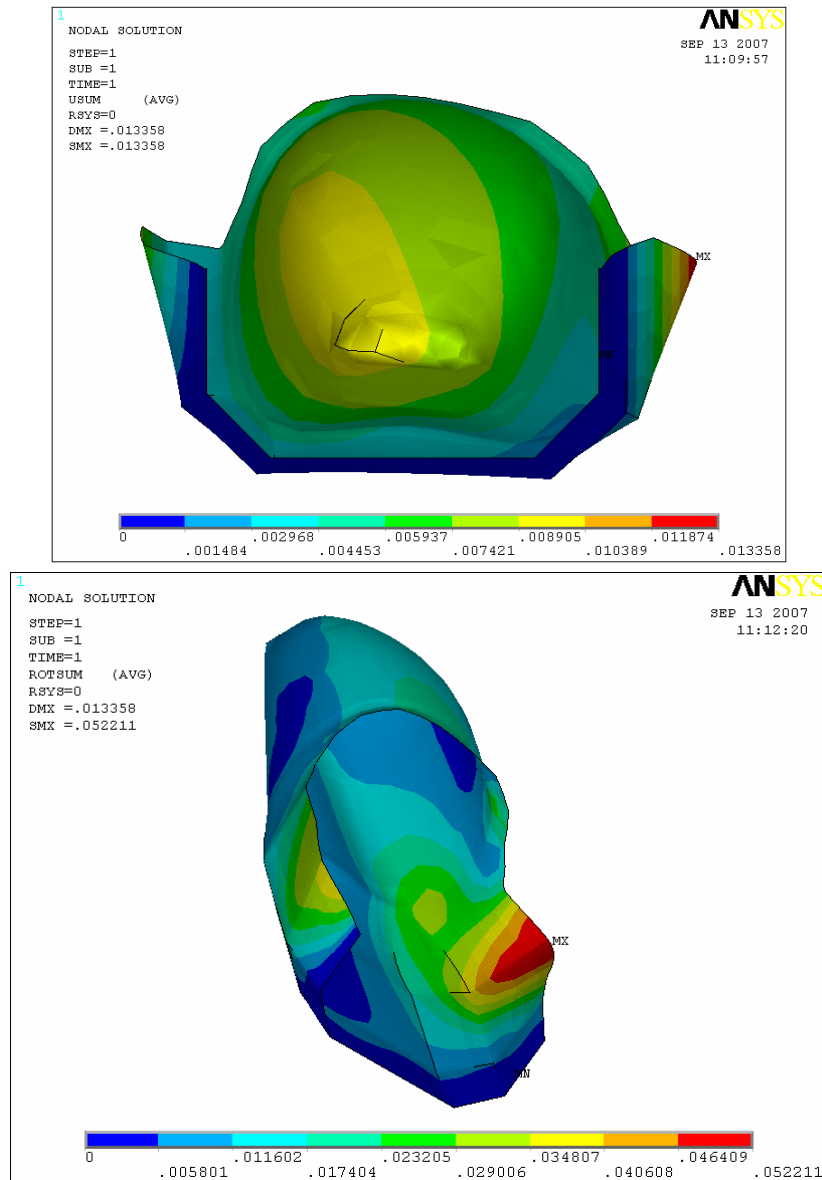


Figura 7.83. Desplazamiento y rotación del chasis.

El desplazamiento es ahora de 13.924 mm y la rotación es de 0.044 radianes equivalente a 2.52°. La mejoría con respecto al modelo construido usando fibra de vidrio y epoxi ha sido contundente, pero todavía no satisfacen las especificaciones. Por esto se necesita estratificar más capas donde se requiera para incrementar la rigidez.

Si se desea identificar plenamente la dirección del desplazamiento y rotación se puede obtener un gráfico vectorial seleccionando en: **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Vector Plot** → **Predefined**.

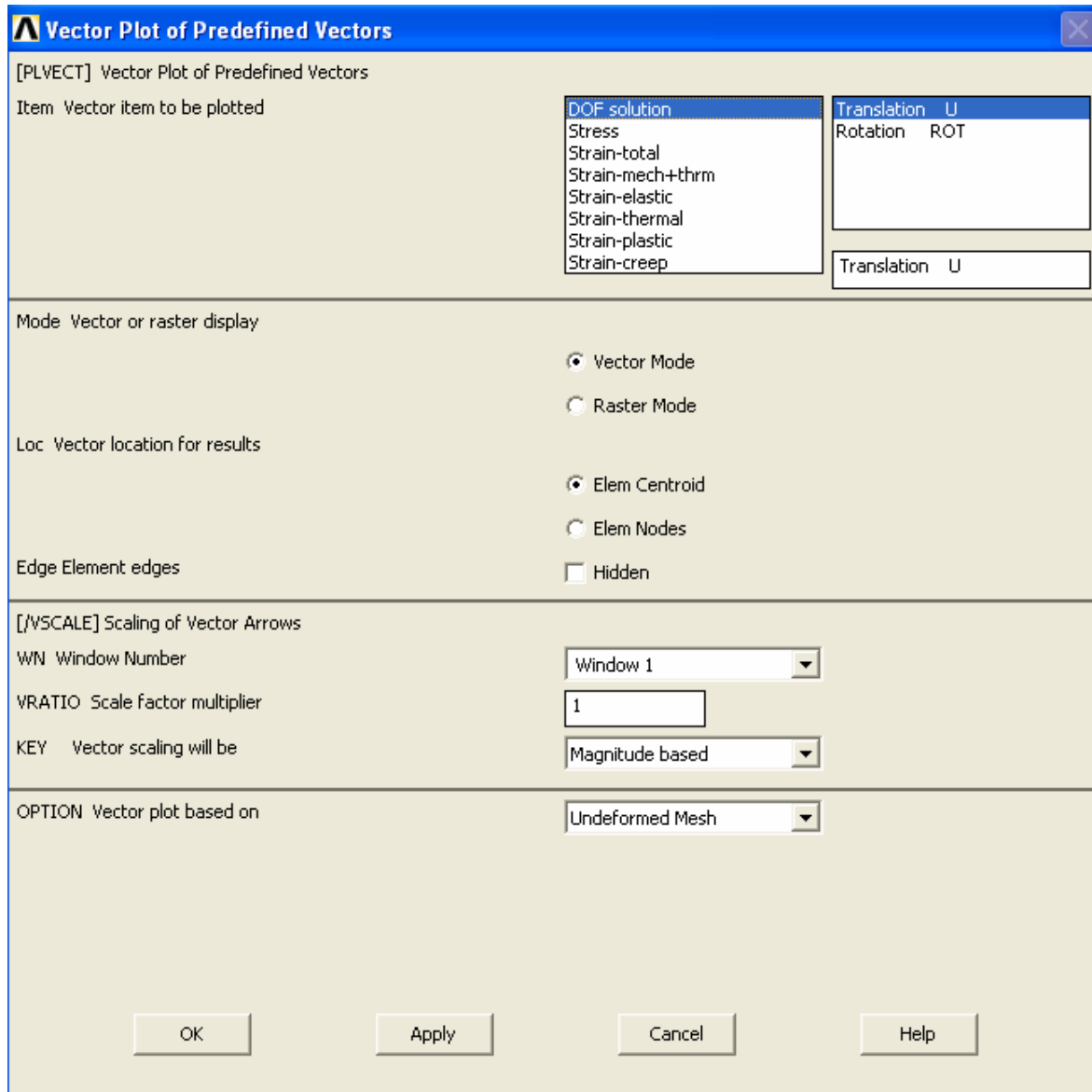


Figura 7.84. Cuadro de diálogo para la representación vectorial.

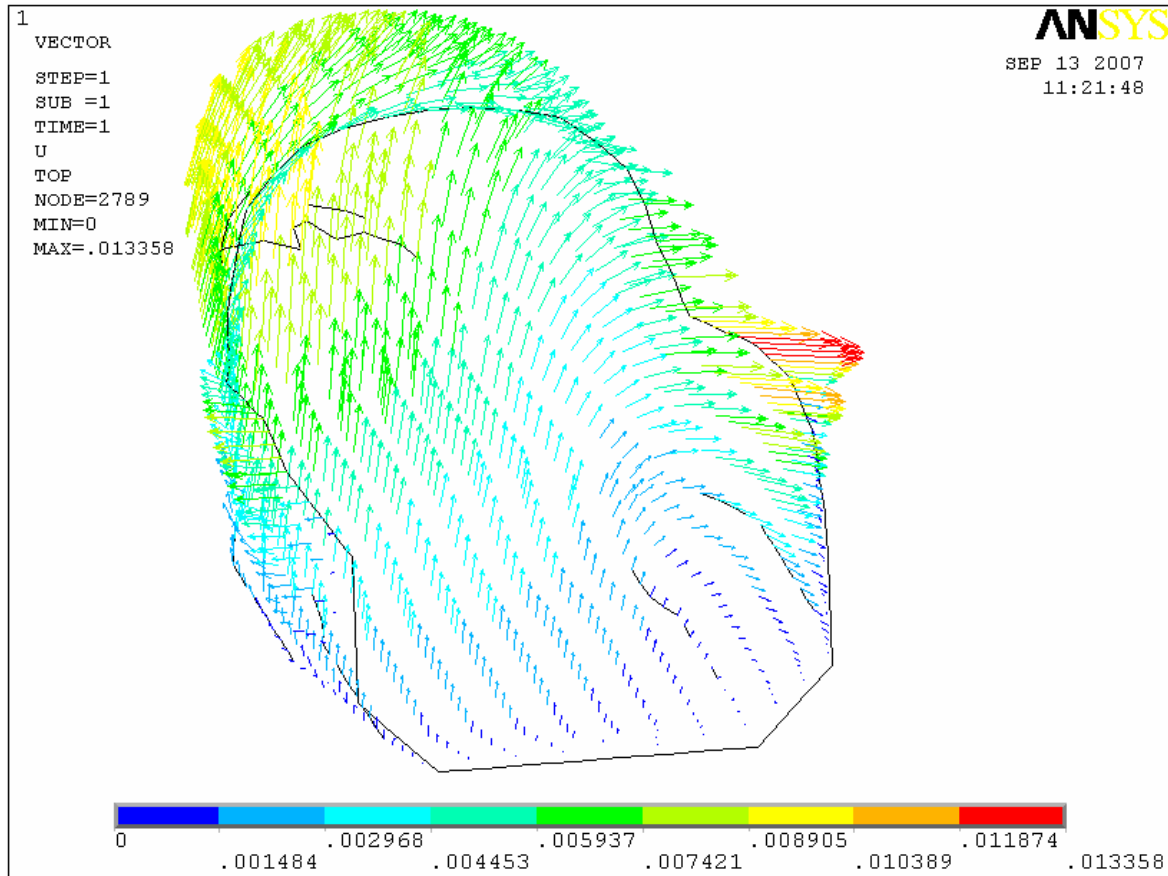


Figura 7.85. Representación vectorial del desplazamiento.

Para verificar que exista convergencia se puede correr el archivo Log File con distintos tamaños de elemento finito, obteniendo los resultados de la tabla (7.15):

Tabla 7.15. Análisis de convergencia.

Lado del elemento finito	Desplazamiento
55 mm	14.260 mm
50 mm	13.924 mm
40 mm	14.097 mm
30 mm	14.295 mm
20 mm	13.993 mm
15 mm	14.072 mm

La medida del lado del elemento finito con el que se trabajará es de 50 mm, valor que da un tiempo de proceso adecuado. Usando valores más pequeños no mejora la exactitud y se tiene un tiempo demasiado largo de cálculo.

7.8.3. ESTRATIFICACIÓN DE LÁMINAS

Para estratificar más capas en las zonas requeridas, se necesita editar las constantes del laminado. Mediante **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Real Constants** → **Add / Edit / Delete**, se coloca una capa adicional en la zona abierta del habitáculo del piloto. Para hacer esto se selecciona el área delimitada por las aristas producidas automáticamente al diseñar (ver Figura 7.89).

Layer number	Mat no.	X-axis rotation	layer thk	MAT	THETA	TK
Layer number 1	1	0	0.00125			
Layer number 2	1	0	0.00125			
Layer number 3	1	0	0.00125			
Layer number 4	1	0	0.00125			
Layer number 5	1	0	0.00125			
Layer number 6	1	0	0			

Layer number	Mat no.	X-axis rotation	layer thk	MAT	THETA	TK
Layer number 1	1	0	0.00125			
Layer number 2	1	0	0.00125			
Layer number 3	1	0	0.00125			
Layer number 4	1	0	0.00125			
Layer number 5	1	0	0.00125			
Layer number 6	1	0	0.00125			

Figura 7.86. Edición de las constantes estratificando capas adicionales.

Por lo tanto, se cuenta con dos laminados: uno denominado Set 1 compuesto de 7 capas, -la capa 8 tiene espesor cero – y uno denominado Set 2 con 8 capas. Luego, se malla individualmente los grupos de áreas con **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Meshing** → **Mesh Tool**, cuyo cuadro de diálogo se indica en la Figura 7.87.

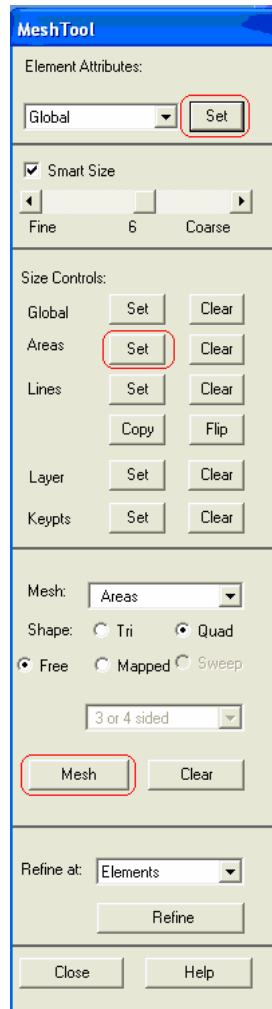


Figura 7.87. Cuadro de diálogos de Mesh Tool.

Con el botón **Set**, junto a **Element Attributes**, se actualiza el laminado a utilizar, si es el de 7 u 8 capas, según la Figura 7.88.

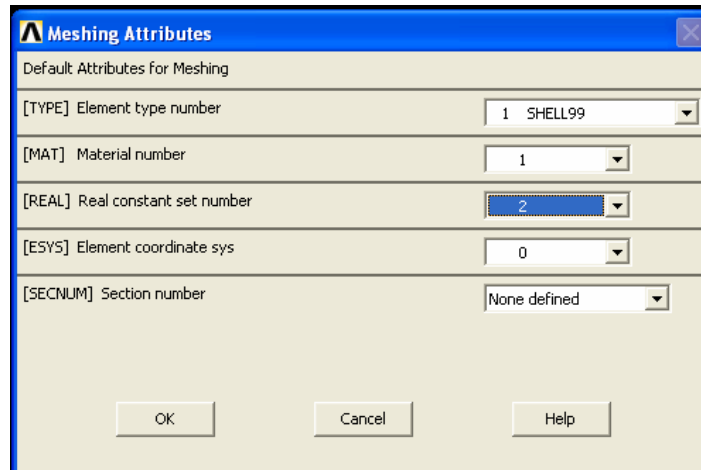


Figura 7.88. Cuadro de diálogo de Meshing Attributes.

Con el botón **Set** de **Areas**, se selecciona las áreas que van a tener tal o cual atributo (ver figura 7.89). Luego se malla con **Mesh**.

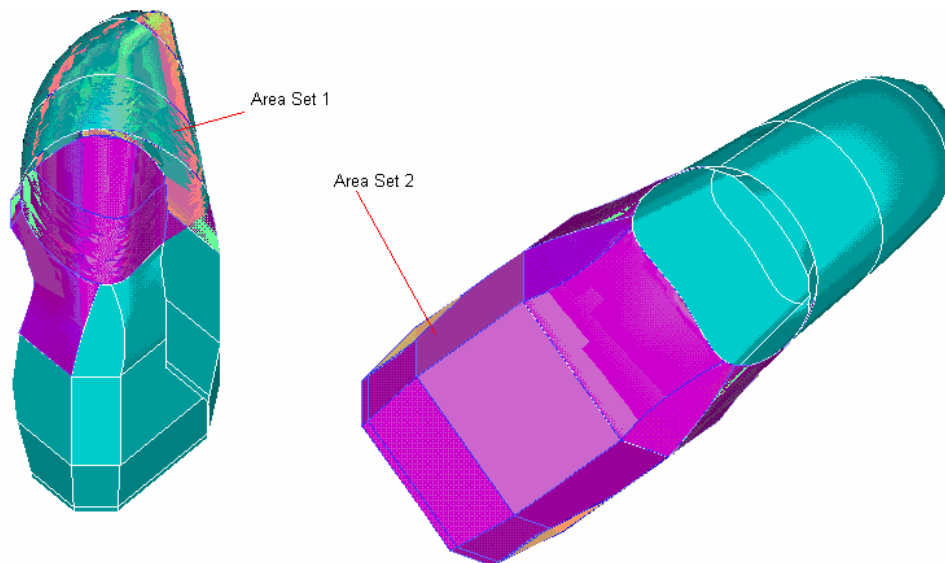


Figura 7.89. Selección de áreas.

El preproceso (ver figura 7.90) indica que efectivamente se mejora el comportamiento del chasis con una reducción en los desplazamientos.

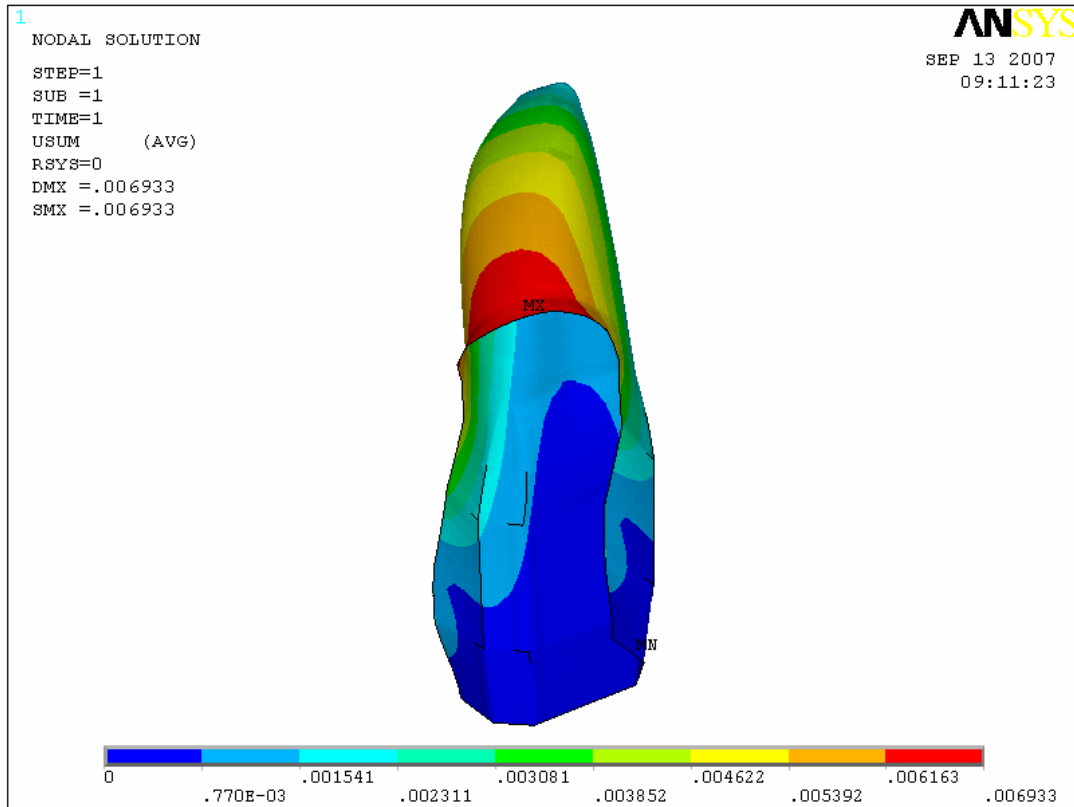


Figura 7.90. Preproceso con 6, 8 y 7 capas respectivamente.

Para continuar con este procedimiento se define los grupos de áreas individuales que van a recibir distinto número de capas, hasta alcanzar los resultados óptimos.

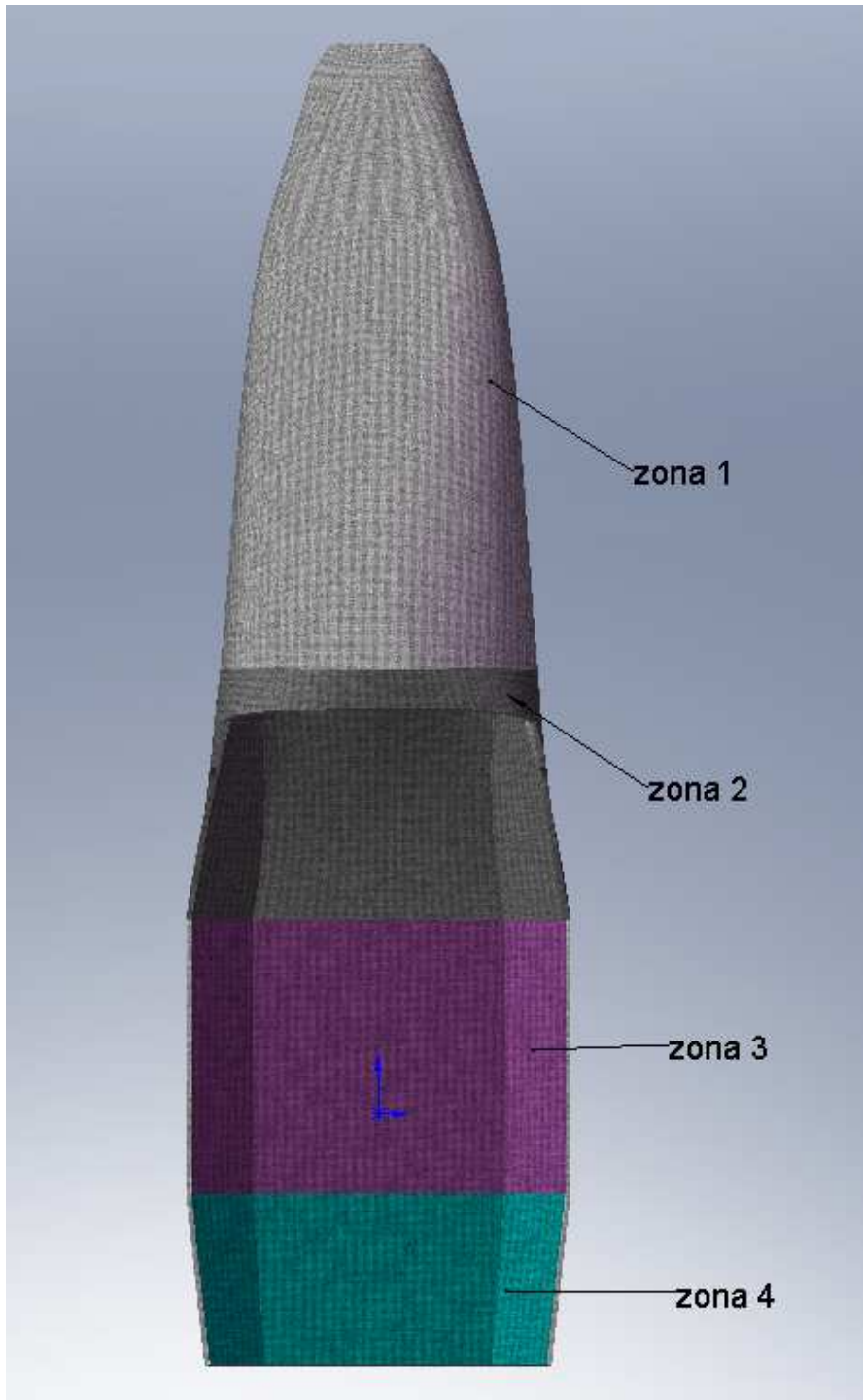


Figura 7.91. Áreas seleccionadas del monocasco.

Luego de efectuar varias pruebas, resumidas en la tabla (7.16), se llegó a determinar que la opción óptima corresponde a la prueba 6, en la que se puede apreciar que la zona que requirió más reforzamiento es la 2. En este caso se consiguió una rotación de 1.108° , que equivale a una rigidez torsional de 2707 N-m/grado . Cabe indicar que

existen elementos adicionales como el asiento del piloto, el arco antivuelco, e incluso el motor, que incrementarán sustancialmente la rigidez torsional.

Tabla 7.16. Deflexión y rotación máxima para diferentes estratificaciones.

Prueba	Zonas	Capas	Deflexión máxima	Rotación máxima	Fracción volumétrica V_f
Material : Fibra de vidrio - epoxi					
Prueba 1	Zona 1	5 capas	44.5 mm	8.6°	0.45
	Zona 2	5 capas			
	Zona 3	5 capas			
	Zona 4	5 capas			
Material : Fibra de carbono – epoxi					
Prueba 2	Zona 1	5 capas	13.9 mm	2.5°	0.6
	Zona 2	5 capas			
	Zona 3	5 capas			
	Zona 4	5 capas			
Prueba 3	Zona 1	5 capas	9.6 mm	1.9°	0.6
	Zona 2	6 capas			
	Zona 3	6 capas			
	Zona 4	6 capas			
Prueba 4	Zona 1	5 capas	8.7 mm	1.5°	0.6
	Zona 2	7 capas			
	Zona 3	7 capas			
	Zona 4	7 capas			
Prueba 5	Zona 1	5 capas	7.6 mm	1.2°	0.6
	Zona 2	8 capas			
	Zona 3	7 capas			
	Zona 4	7 capas			
Prueba 6	Zona 1	6 capas	6.9 mm	1.1°	0.6
	Zona 2	8 capas			
	Zona 3	7 capas			
	Zona 4	7 capas			

El peso del modelo final es de 40.4 kg

7.8.4. VERIFICACIÓN DE DATOS INGRESADOS

Ansyes provee diferentes opciones para verificar si el preproceso ha sido correctamente ingresado. Es así que se tiene las siguientes opciones:

Con la opción **Utility Menu** → **List** → **Elements** → **Layered Elements**, se puede listar las capas de todos los elementos, se obtiene la información de espesor, y módulo de elasticidad.

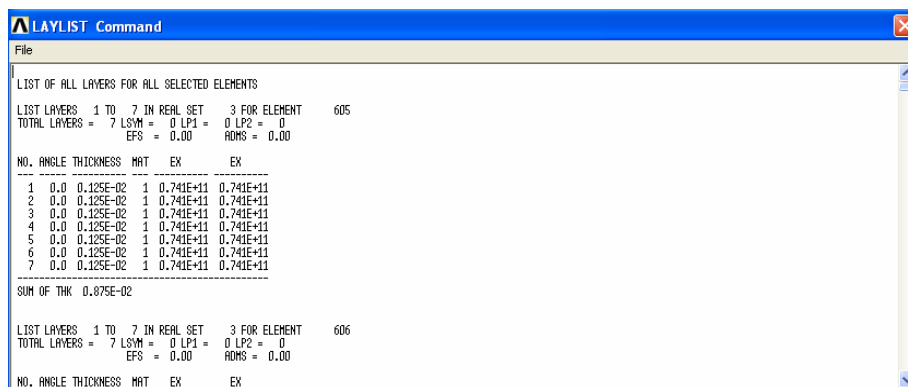


Figura 7.92. Listado de capas.

Con la siguiente opción **Utility Menu** → **Plot** → **Layered Elements** se visualiza la secuencia de estratificación en forma gráfica para cualquier elemento seleccionado.

```
1
  LAYER STACKING
  ELEM      = 1808
  TYPE      = 1
  REAL      = 2
  LAYERS :
  TOTAL     = 7
  SHOWN :
  FROM      1 TO 7
```

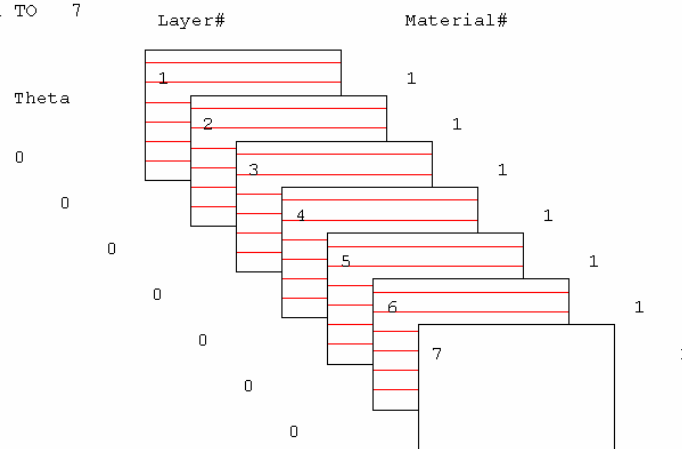


Figura 7.93. Resultado de la secuencia de estratificación en la punta del modelo, zona 1, la lámina 7 tiene espesor cero.

Las secuencias de la figura 7.94 corresponden a las zonas más reforzadas

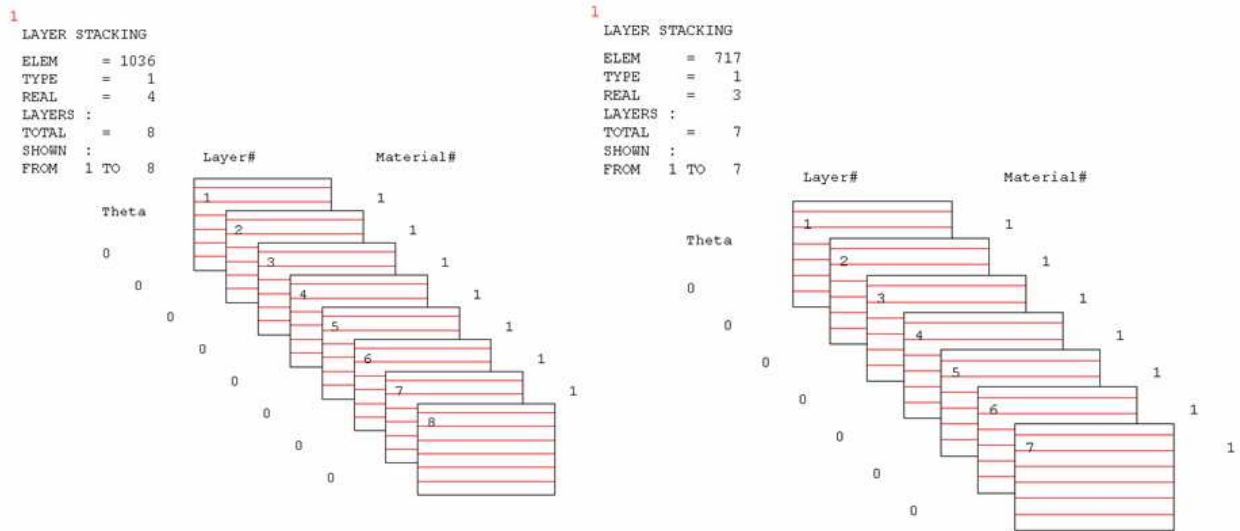


Figura 7.94. Resultado de la secuencia de estratificación en las zonas 2 y 3.

Como se puede observar, la secuencia es correcta.

Finalmente se da un aspecto sólido a la membrana si se ingresa el comando **/eshape, 1** en la ventana de **Utility menu** y se actualiza con **plot elements**. Como se puede observar en la figura 7.95 se despliegan las láminas estratificadas:

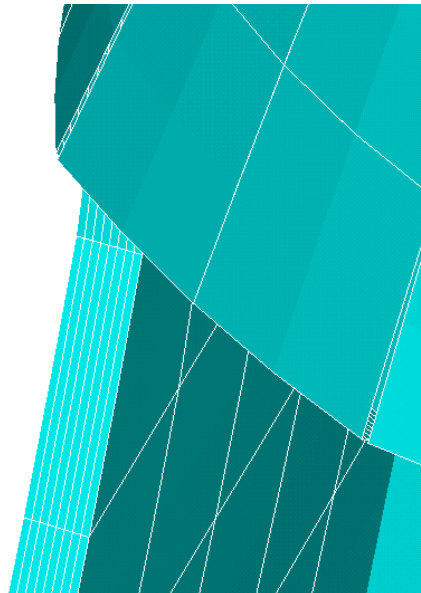


Figura 7.95. Visualización del espesor al utilizar eshape.

Para visualizar los esfuerzos interlaminares se necesita seleccionar **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add/Edit/Delete**, en el cuadro de diálogo que aparece, seleccionar **Options** y en **Storage of Layer data K8** se escoge **All layers**. Nuevamente se postprocesa el archivo.

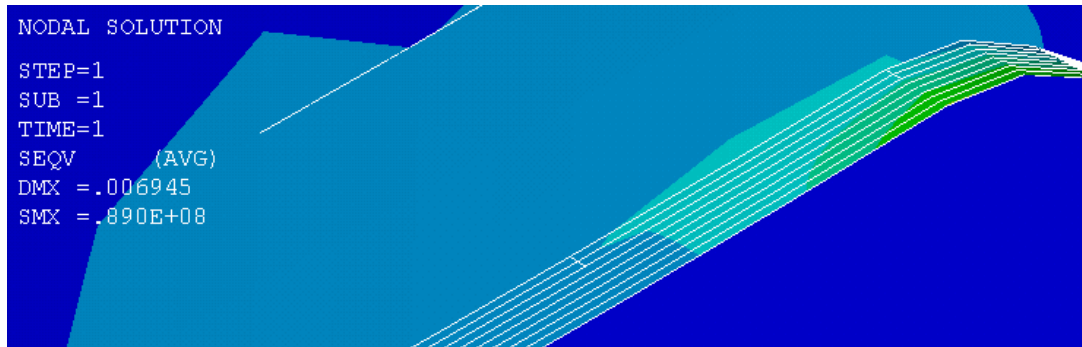


Figura 7.96. Visualización de los esfuerzos a través del espesor del laminado.

7.8.5. ANÁLISIS DE MASAS

El programa SolidWorks ofrece la posibilidad de determinar la masa del monocasco completo. Para ello simplemente en la barra de menús se selecciona **Herramientas** → **Propiedades físicas**. A continuación se presenta las figuras (7.97) y (7.98):

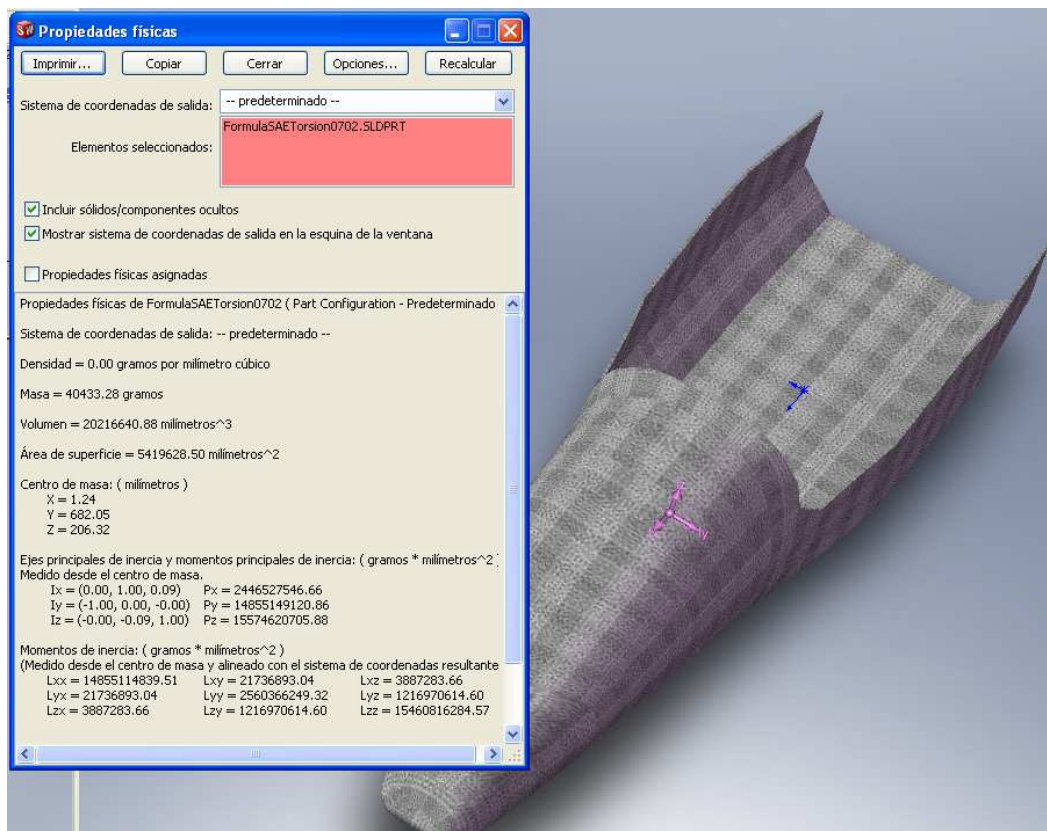


Figura 7.97. Propiedades físicas del monocasco en fibra de carbono.

Para comparar se procede igual con el modelo en fibra de vidrio

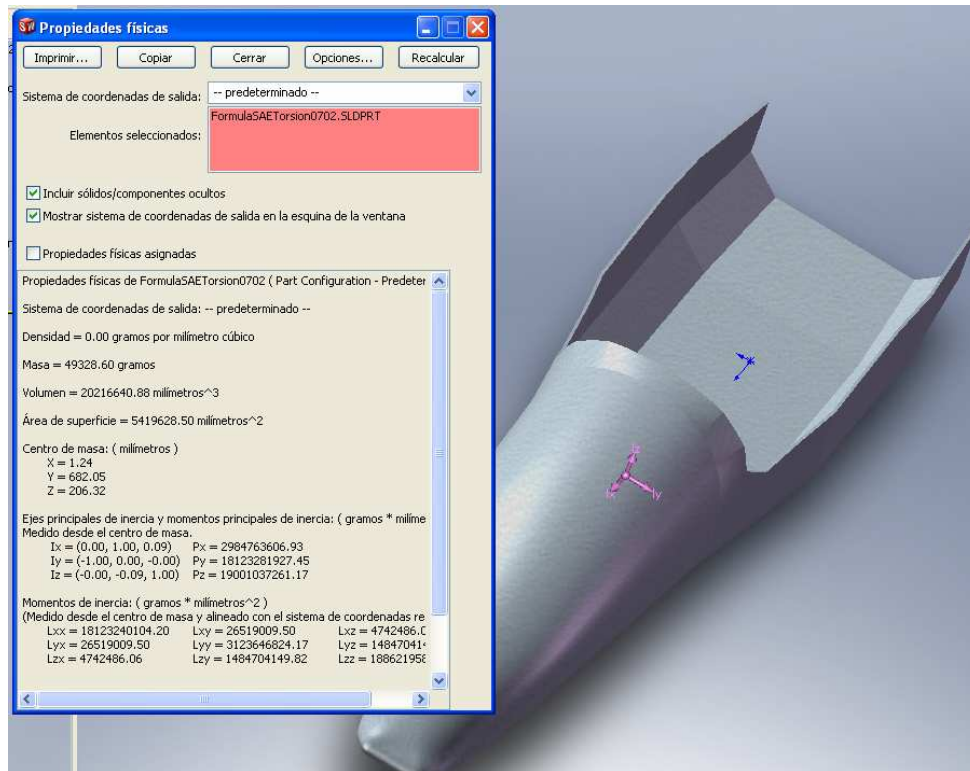


Figura 7.98. Propiedades físicas del monocasco en fibra de vidrio.

Del análisis anterior se desprende que el modelo realizado en fibra de vidrio-epoxi pesa 49 kg, mientras que el nuevo modelo en fibra de carbono - epoxi pesaría 40.4 kg.

7.8.6. ANÁLISIS DE ESFUERZOS Y CRITERIO DE FALLA

Se debe verificar en esta y en las restantes hipótesis de carga si las láminas no fallan cuando se aplique carga. Es decir, si los esfuerzos están dentro de un margen de seguridad. Como se ha visto, los materiales ortotrópicos usan diferentes criterios de falla y para aplicarlos se necesita hallar los esfuerzos admisibles del material, para lo cual se utiliza la tabla 7.17 de (Kollár y Springer, 2003). Adicionalmente, se necesita calcular los coeficientes de acoplamiento de la teoría de Tsai-Wu, que se calculan mediante las expresiones siguientes de (5.14) y la ecuación (7.9) ^[7.19].

$$F_{11} = \frac{1}{\sigma_{1T} \cdot \sigma_{1C}} \quad F_{22} = \frac{1}{\sigma_{2T} \cdot \sigma_{2C}}$$

$$C_{xy} = -2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot \sqrt{F_{11} \cdot F_{22}} = -2.722 \times 10^{-6} \quad (7.9)$$

Tabla 7.17. Resistencias admisibles de láminas según (Kollár y Springer, 2003).

Propiedades de las láminas					
Material	σ_{1T}	σ_{1C}	σ_{2T}	σ_{2C}	τ_{12F}
	MPa	MPa	MPa	MPa	MPa
Grafito – Epoxi					
T300/5208	1500	1500	40	246	68
AS/3501	1447	1447	52	206	93
H-IM6/Epoxy	3500	1540	56	150	98
AS4/APC2	2130	1100	80	200	160
T300/934					
tape	1314	1220	43	168	48
Cloth(13mil)	499	352	458	352	46
Cloth(7mil)	375	279	368	278	46
Glass - Epoxi					
Scotchply 1002	1062	610	31	118	72
S-glass/Epoxy	1280	690	49	158	69
Woven GI/Epoxy	367	549	367	549	97
Kevlar					
Kevlar 49	1400	235	12	53	0.34
Boron - Epoxi					
B(4)/5505	1260	2500	61	202	67
B5.6/5505	1380	1600	56	125	62
E-glass - Vinylester					
E-glass - Vinylester	548	803	43	187	64

Los datos del material T300/934 cloth (7mil) son ingresados al programa mediante:
ANSYS Main Menu → Preprocessor → Material Props → Failure Criteria → Add /

Edit. Se presenta el siguiente cuadro de diálogo y tabla subsiguiente de la figura (7.99):

The figure shows two screenshots of the ANSYS 'Add/Edit Failure Criteria' dialog box. The top screenshot shows the initial state where the material number is set to 1. The bottom screenshot shows the detailed failure criteria for material 1, including Strain in Tension, Strain in Compression, Strain in Shear, Stress in Tension, Stress in Compression, Stress in Shear, and Stress Coupling Coefficients.

	X	Y	Z
Strain in Tension			
Strain in Compression			
	XY	YZ	XZ
Strain in Shear			
	X	Y	Z
Stress in Tension	375e6	368e6	368e6
Stress in Compression	-279e6	-278e6	-278e6
	XY	YZ	XZ
Stress in Shear	46e6	46e6	46e6
	XY	YZ	XZ
Stress Coupling Coefficients	-2.722e-6	-2.722e-6	-2.72e-6

Figura 7.99. Cuadro de diálogo para ingresar los esfuerzos admisibles.

Postprocesando nuevamente se obtienen los esfuerzos de Von Mises seleccionando: **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Nodal Solution** (figura 7.100).

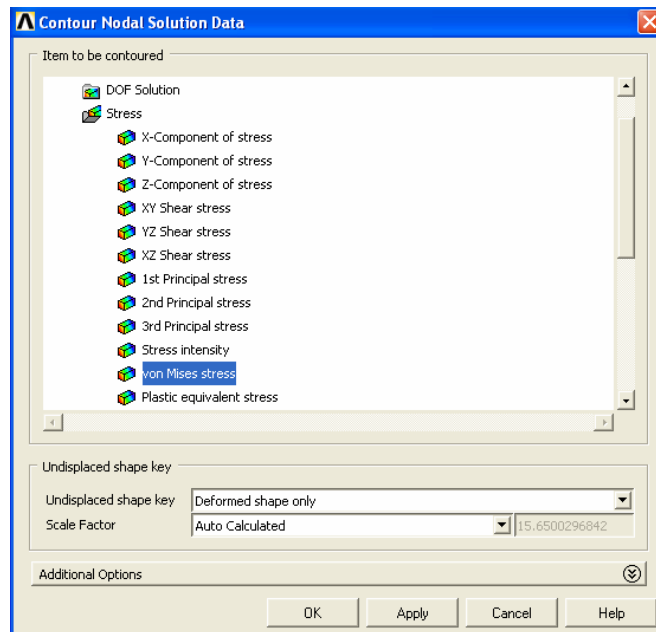


Figura 7.100. Selección de esfuerzos.

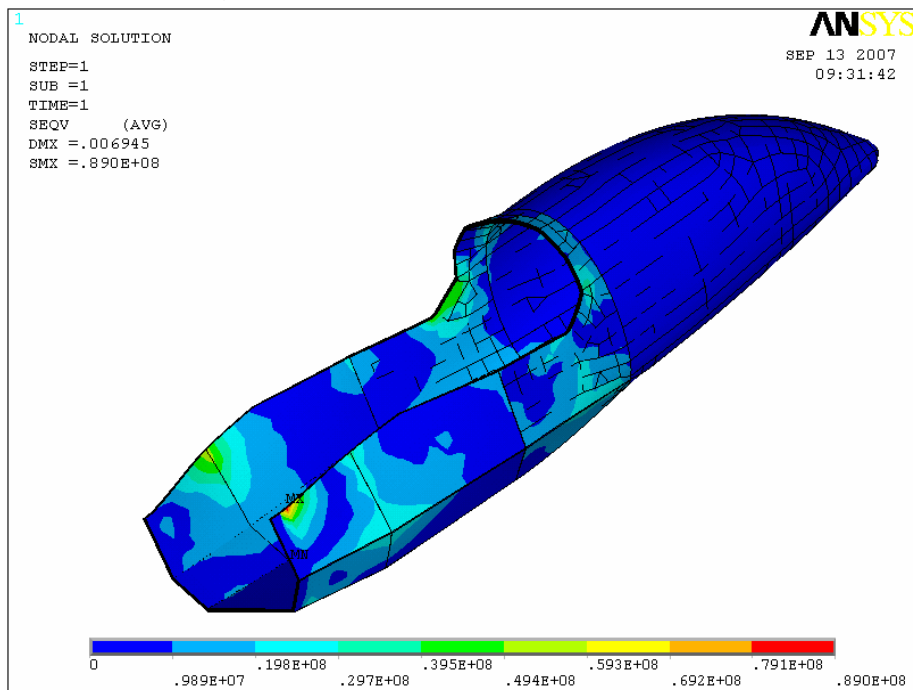


Figura 7.101. Visualización de esfuerzos de Von Mises en el modelo.

El esfuerzo máximo es de 89 MPa (figura 7.101), el índice de esfuerzo ξ de Tsai-Wu se lo halla de la misma forma, y se puede visualizar en la figura (7.102):

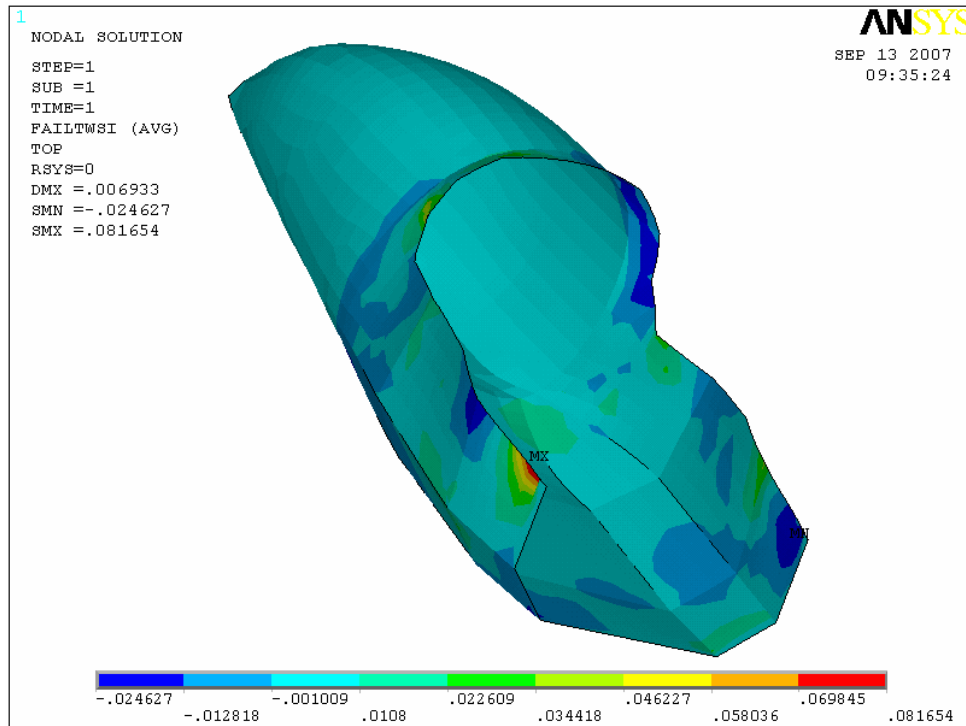


Figura 7.102. Índice de resistencia de Tsai-Wu.

El índice máximo de resistencia de Tsai-Wu es de 0.081, mucho menor que 1. Por lo tanto, el material del laminado no fallará cuando se someta el chasis a la prueba de torsión.

7.8.7. ESFUERZOS INTERLAMINARES

Los esfuerzos cortantes interlaminares en compuestos laminados pueden ser significativamente altos sobre una región igual al espesor del laminado cerca de los bordes libres del mismo. Como resultado de los altos esfuerzos interlaminares podría iniciarse la delaminación en los bordes, que no es otra cosa que el despegado de las láminas individuales. La falla por esfuerzo interlaminar es reconocida como uno de los modos críticos de falla de un compuesto laminado. La resistencia al esfuerzo interlaminar depende principalmente de las propiedades de la matriz en lugar de las propiedades de las fibras. La resistencia al esfuerzo interlaminar se incrementa aumentando la resistencia de la matriz. Se puede recomendar para una mejor adhesión el uso de resinas epóxicas en lugar de resinas de poliéster o vinílicas.

Para graficar los esfuerzos interlaminares en Ansys se selecciona **ANSYS Main Menu** → **Preprocessor** → **Element Type** → **Add / Edit / Delete** → **Options**, donde KEYOPT (6) se selecciona ≠ 0 (ver figura 103).

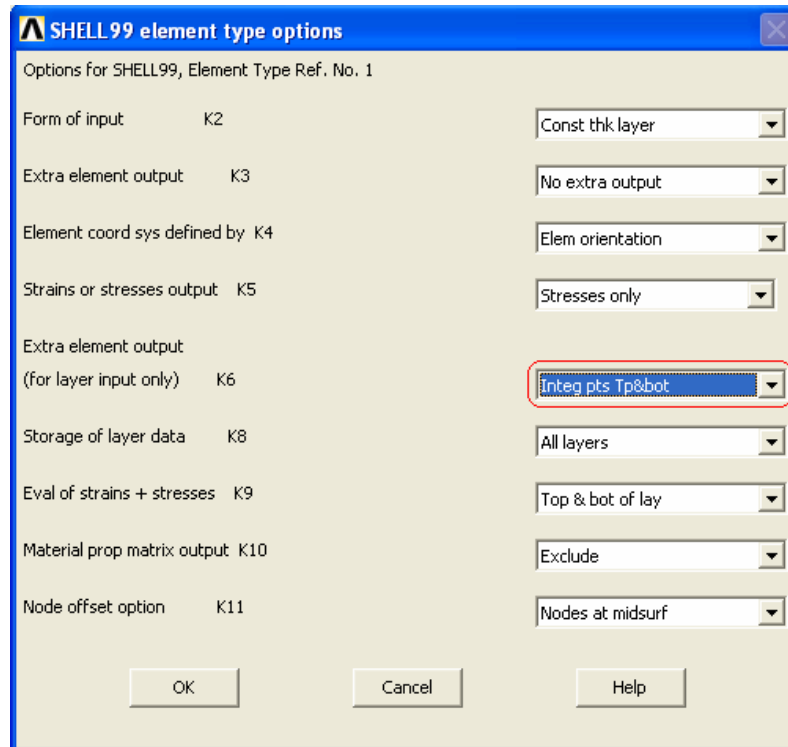


Figura 7.103. Cuadro de diálogo para graficar esfuerzos interlaminares.
 Este nuevo parámetro no se encuentra en las opciones disponibles en **contour nodal solution**, para visualizarla se debe ir a **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Element Table** → **Define Table** → **Add**.

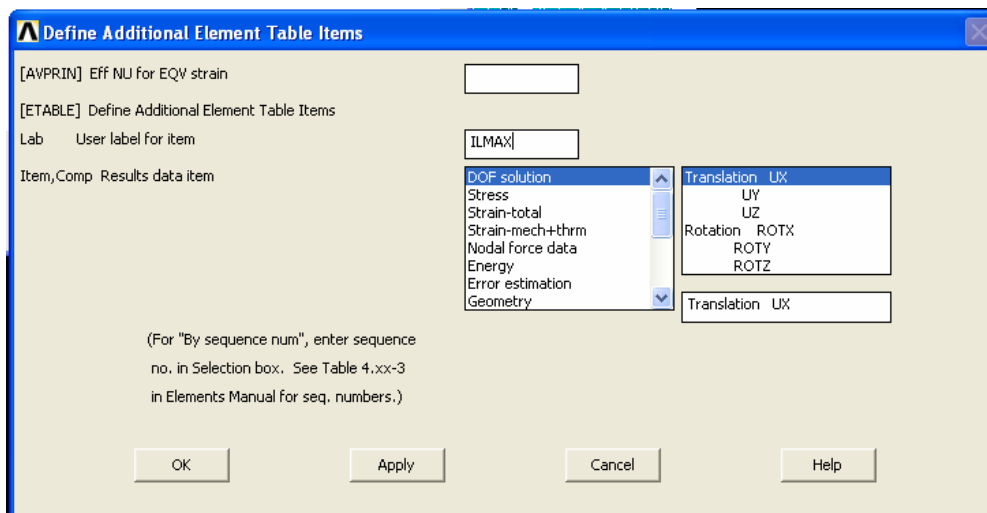


Figura 7.104. Cuadro de diálogo para definir elementos adicionales de usuario.

En el campo destinado al **(User label for item)** se escribe ILMAX que es el identificador del esfuerzo interlaminar máximo (Ver figura 7.104 y tabla 6.3).

Para graficar el resultado se selecciona en **ANSYS Main Menu** → **General Postproc** → **Plot Results** → **Contour Plot** → **Element Table** y **OK**, en el cuadro de la figura (7.105):

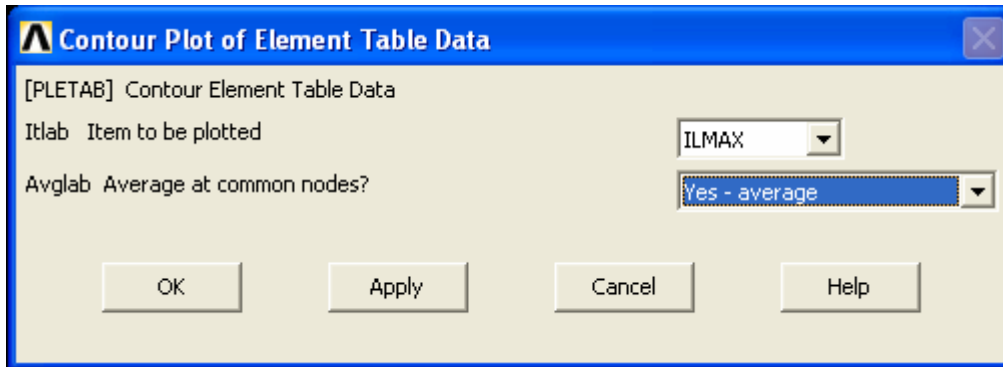


Figura 7.105. Cuadro de diálogo para graficación de los esfuerzos interlaminares.

La figura (7.106) se despliega donde se puede observar un valor bastante bajo, 0.006 Pa, de esfuerzo interlaminar y mucho menor que la resistencia de la resina que es de 64 MPa.

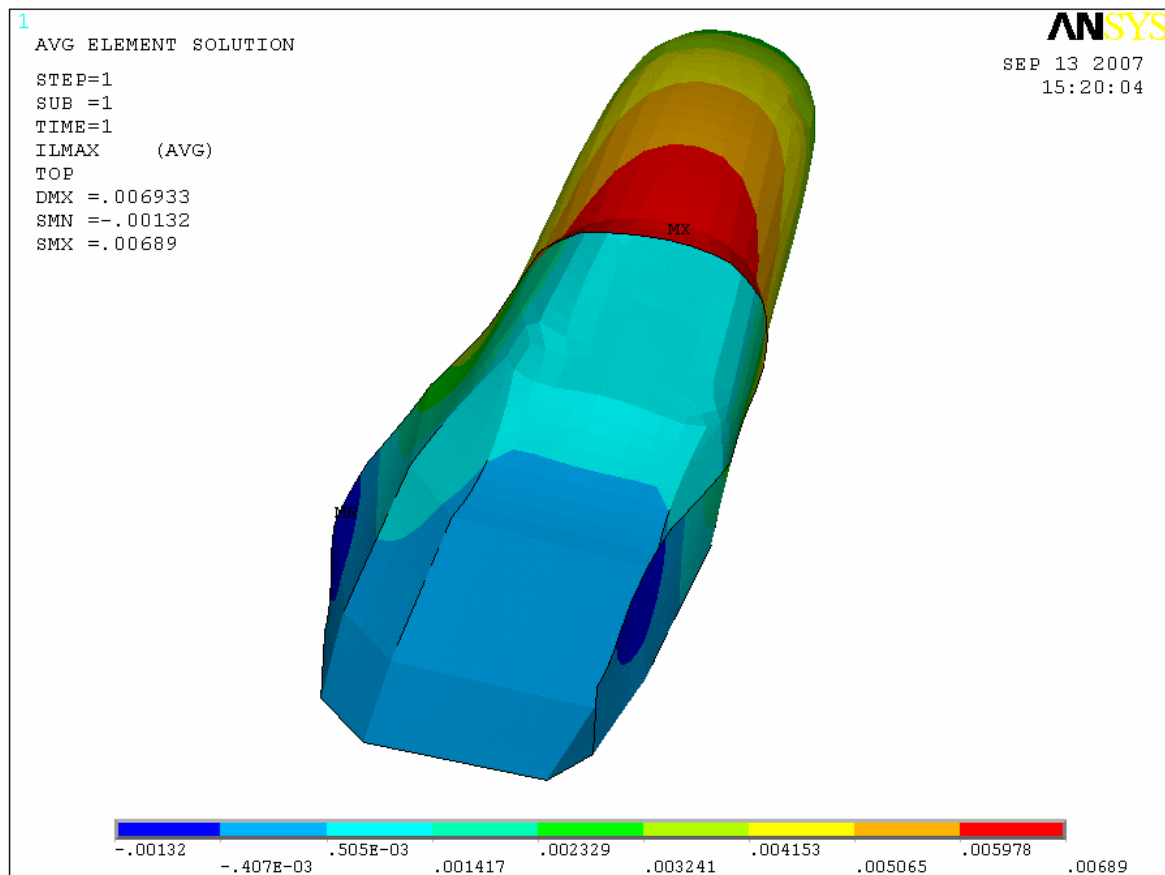


Figura 7.106. Esfuerzo interlaminar máximo.

7.9. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS A LA FLEXIÓN, DEBIDO AL PESO DEL PILOTO Y MOTOR

Una vez que se ha analizado el prototipo a torsión, se tiene una base para analizar las otras sollicitaciones, como son las que tienen que ver con el peso del piloto y del motor. Suponiendo un peso de piloto de 85 kg y calculando por medio de las herramientas de cálculo de mediciones, propiedades físicas y propiedades de sección de Solidworks el área de incidencia del asiento del piloto, indicada en la figura (7.107), la cual mide 0.041 m^2 , se puede determinar la presión ejercida en ese sector, que es de 20340 N/m^2 . Adicionalmente se necesita tomar en cuenta el peso del motor, que es de 55 kg, el cual va montado en apoyos en cuatro esquinas, según la figura 7.108.

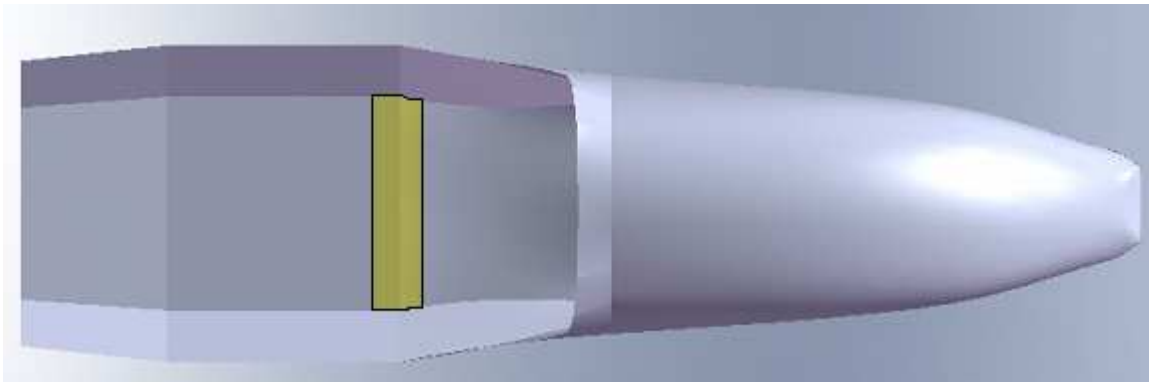


Figura 7.107. Área de incidencia del asiento del piloto.

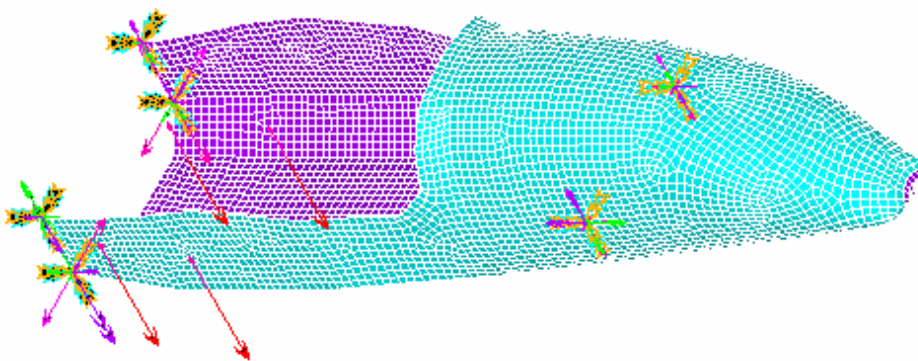


Figura 7.108. Postprocesado del modelo cuando está sollicitado a flexión.

Procesando se obtiene la deformada que se aprecia en las figura (7.109) y (7.110):

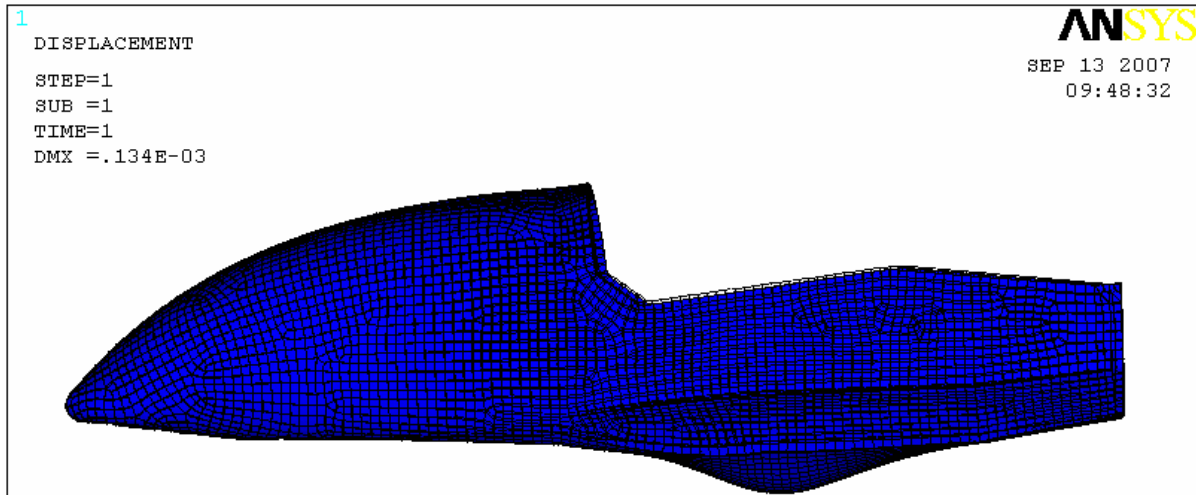


Figura 7.109. Deformada resultado de la carga del piloto y motor.

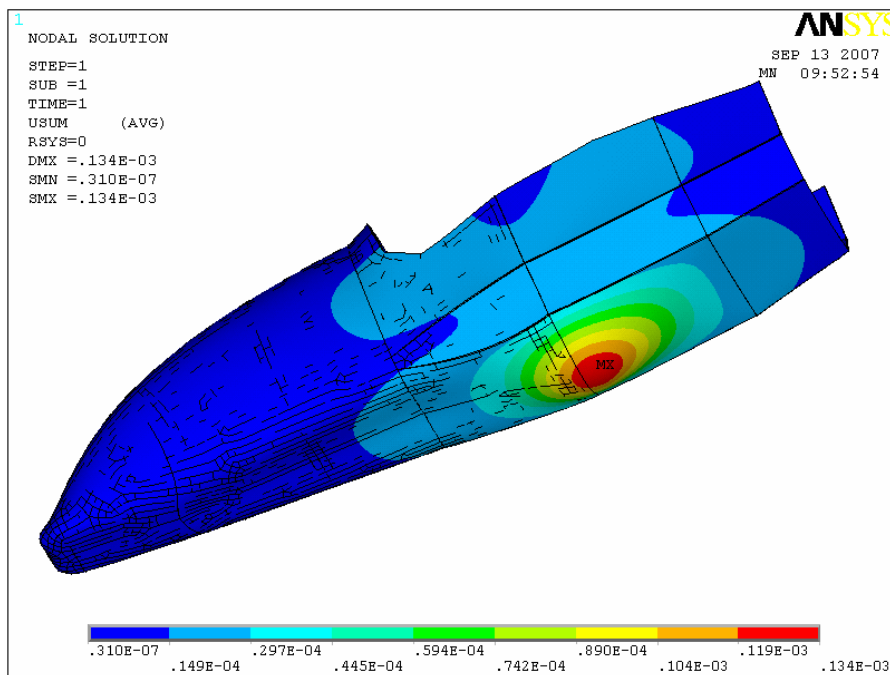


Figura 7.110. Valores de desplazamiento para el caso de flexión.

Como se puede apreciar en la figura 7.110, la flecha máxima es de 0.134 mm. Si se considera que la deflexión admisible en términos estructurales es igual a $1/360$ [7.20] de la longitud entre apoyos, lo cual da 4 mm, se ve que esta es insignificante. Por lo tanto, está garantizada la rigidez a la torsión y flexión.

7.9.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIO DE FALLA

De igual manera se determinarán los esfuerzos y si el material los soporta.

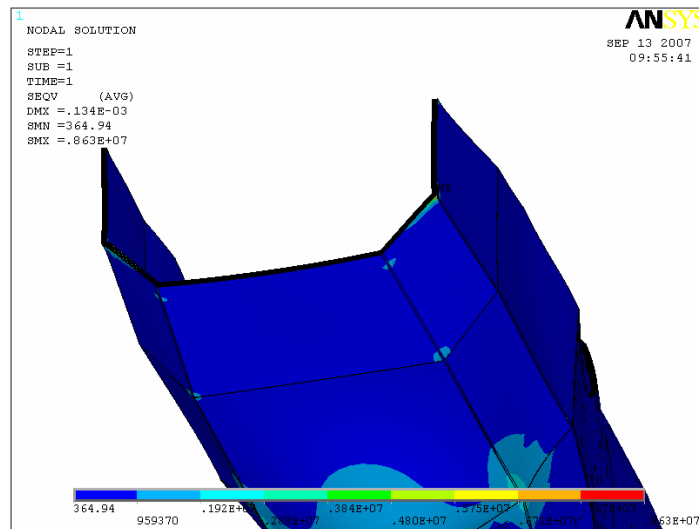


Figura 7.111. Esfuerzos de Von Mises para la flexión.

El esfuerzo de Von Mises máximo es de 8.63 MPa, y como se ve en la figura 7.111 ocurre en el sector de los apoyos posteriores. A continuación se evalúa el factor ξ de Tsai-Wu, cuyo valor máximo es de 0.0016, mucho menor que 1. Por lo tanto los esfuerzos no superan los esfuerzos admisibles (figura 112).

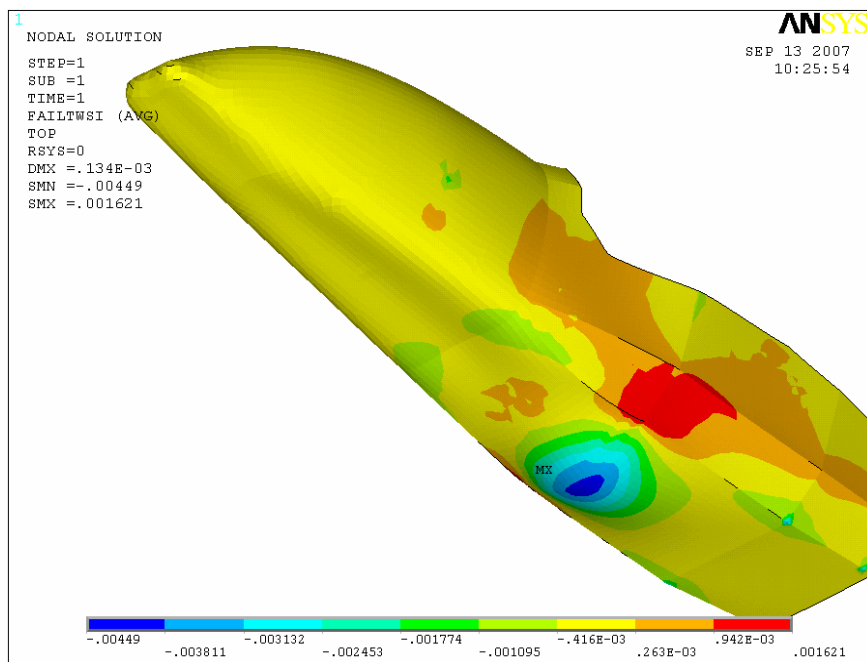


Figura 7.112. Índice de Tsai-Wu para la flexión.

7.9.2. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES PARA LA FLEXIÓN

Usando el método descrito anteriormente se obtiene el gráfico de esfuerzos interlaminares para la flexión (ver figura 7.113).

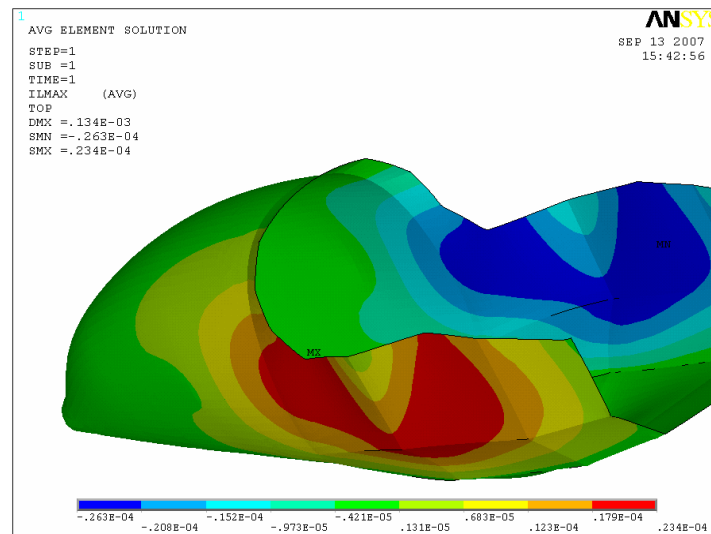
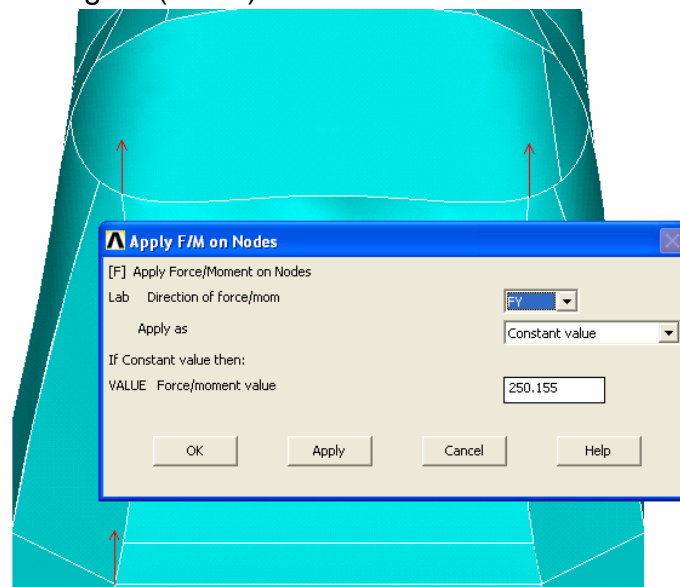


Figura 7.113. Tensión interlaminar del chasis sometido a la flexión del motor.

7.10. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS A LA FRENADA BRUSCA

El primer paso es aplicar las fuerzas inerciales producto de la frenada brusca. Por lo tanto nuevamente se preprocesa y se ingresa las cargas correspondientes al piloto (ver tabla 7.1) según la figura (7.114).



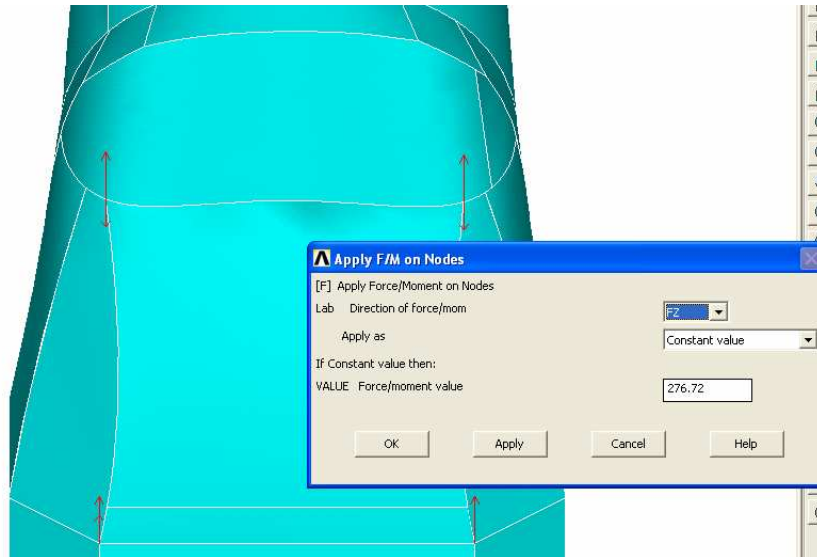
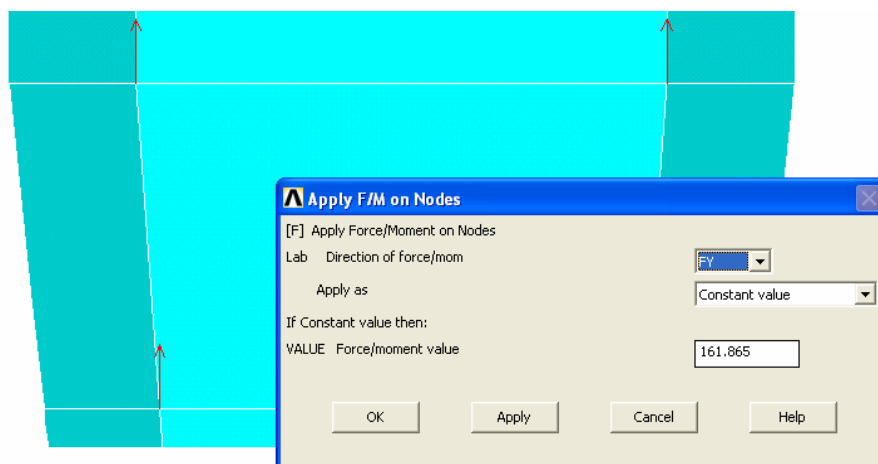


Figura 7.114. Asignación de cargas correspondientes al piloto en la dirección y, z (FX y FZ). Las direcciones x, y, z se la puede apreciar en la figura (7.47).

Luego se ingresan las cargas correspondientes al motor (figura 7.115) y las restricciones y cargas se pueden ver en la figura (7.116).



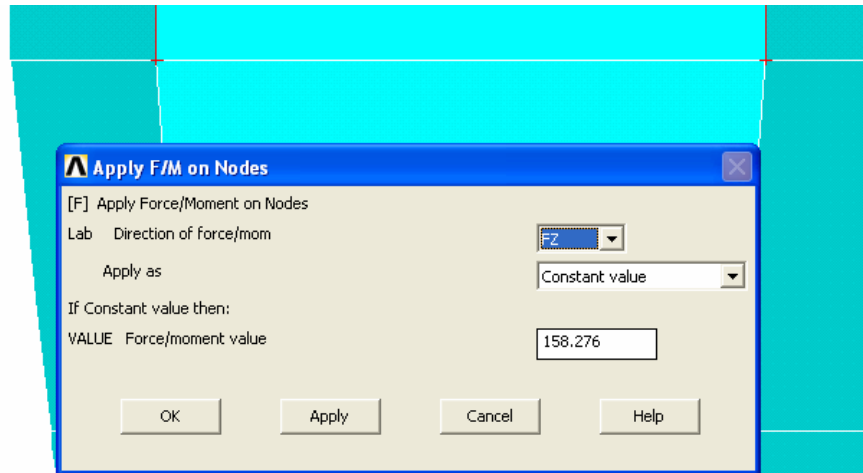


Figura 7.115. Asignación de cargas correspondientes al motor en la dirección y, z (FY y FZ). Las direcciones x, y, z se la puede apreciar en la figura (7.47).

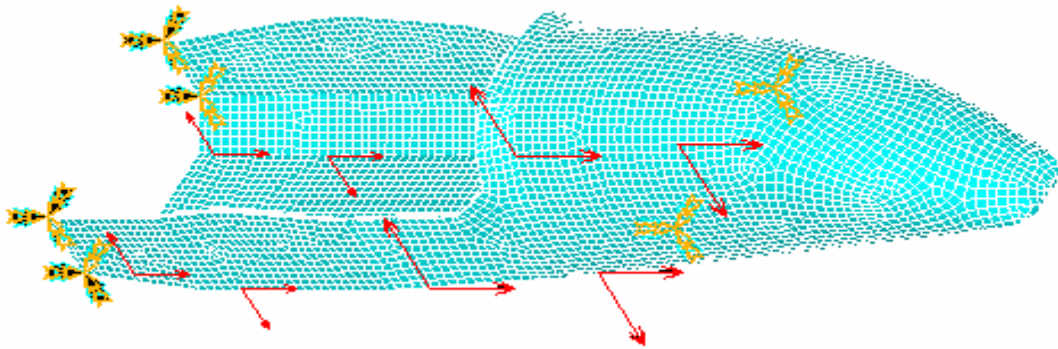


Figura 7.116. Cargas completas producto de una frenada brusca.

Procesando se obtiene la deformada que se aprecia en la figura (7.117) y cuyo valor máximo es de 0.03 mm

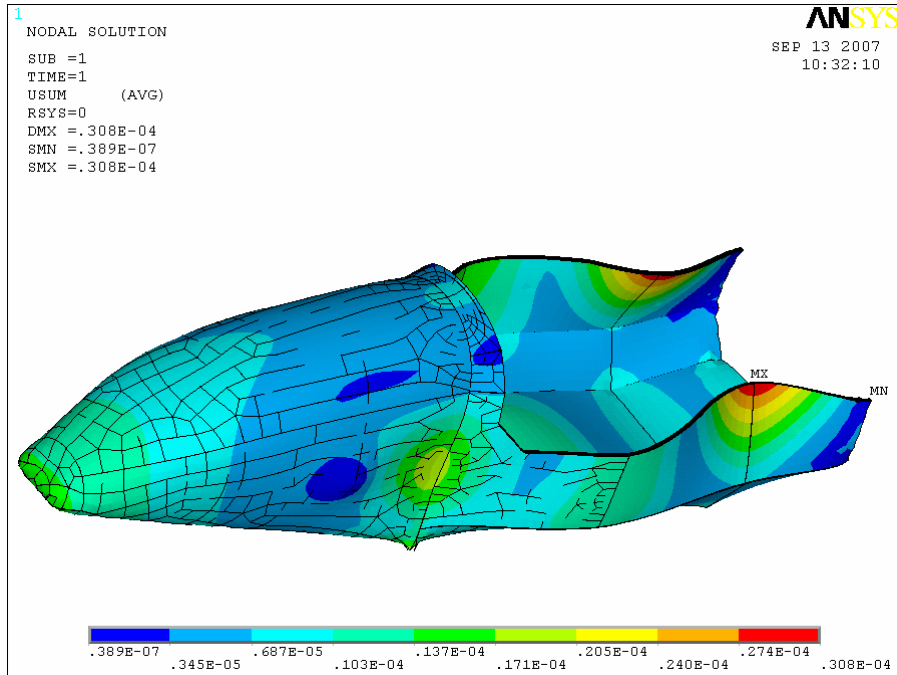


Figura 7.117. Deformada debido a la frenada brusca.

Debido al estado de cargas anterior se aprecia que cuando ocurre una frenada brusca el piso del prototipo tiende a hundirse y los laterales tienden a cerrarse como se aprecia en la figura (7.117):

7.10.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIO DE FALLA

De igual manera se puede apreciar los esfuerzos en la figura (7.118).

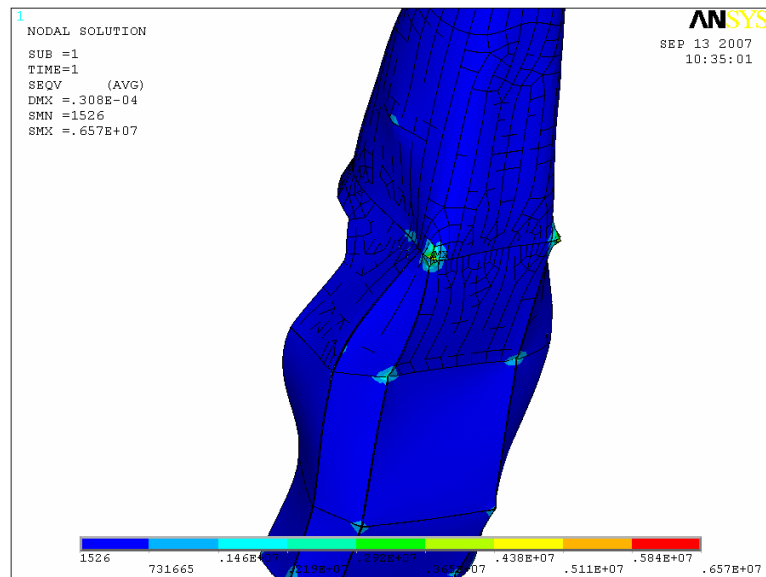


Figura 7.118. Esfuerzos de Von Mises para la frenada brusca.

El esfuerzo máximo de Von Mises es de 6.57 MPa y está localizado en los apoyos de los asientos del conductor.

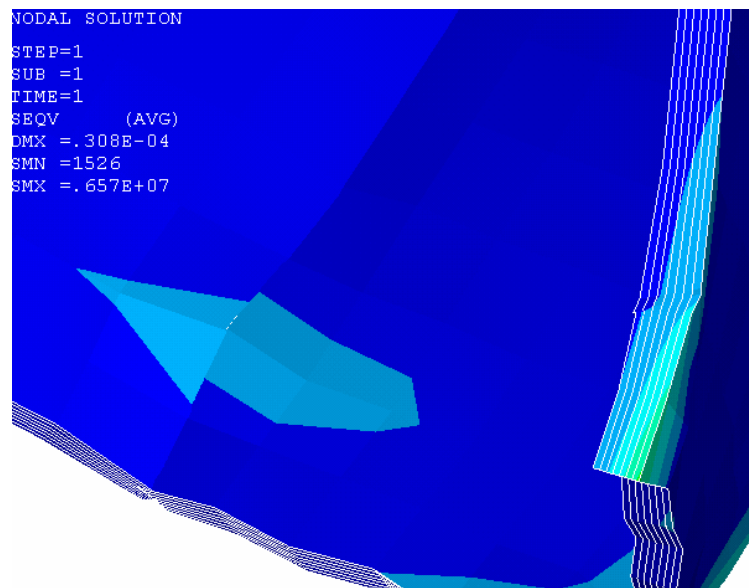


Figura 7.119. Esfuerzos de Von Mises en los bordes del laminado.

En la figura (7.119) se puede apreciar los esfuerzos en los bordes y se observa que las láminas exteriores son las más solicitadas. Finalmente se puede determinar para este caso el índice ξ de Tsai-Wu, que es de 0.004794 (ver figura 7.120).

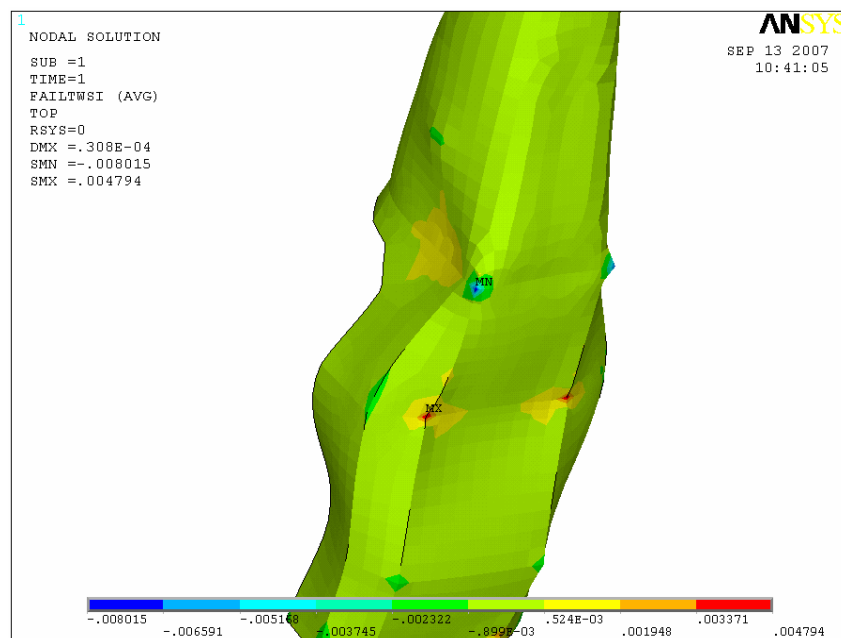


Figura 7.120. Índice de Tsai-Wu para la frenada brusca.

7.10.2. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS INTERLAMINARES

En la figura 7.121 se observa los esfuerzos interlaminares los cuales son máximos cerca de los bordes y de igual manera que en los otros casos, bastante reducidos.

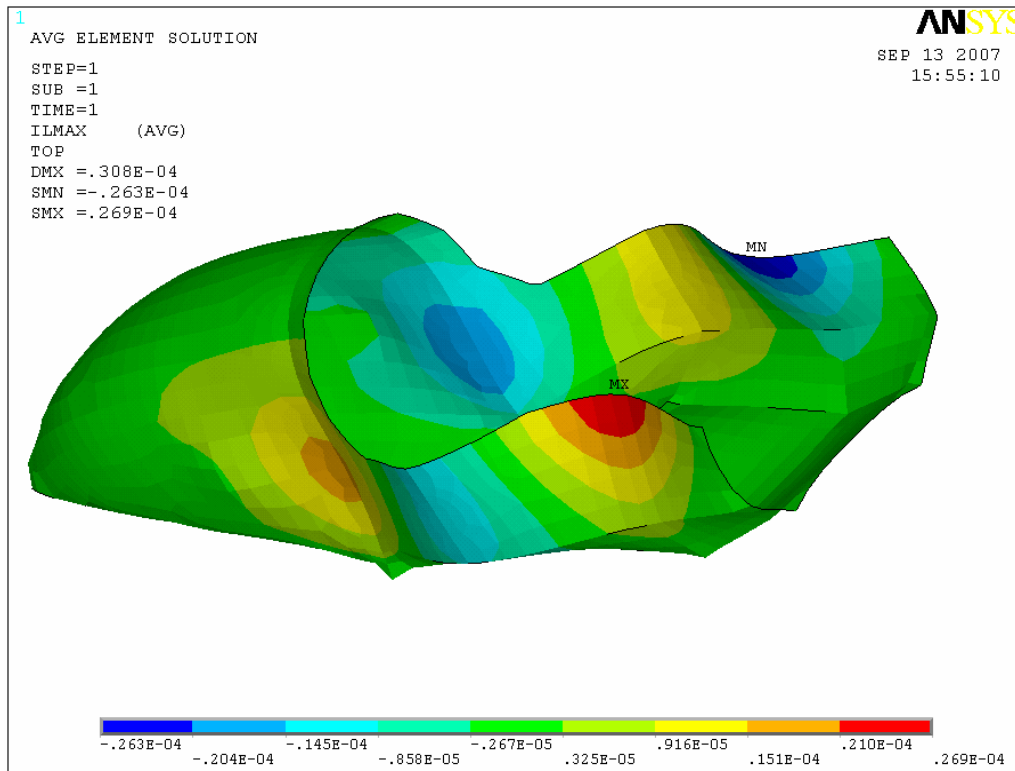


Figura 7.121. Esfuerzos interlaminares para el caso de sollicitación a frenada brusca.

7.11. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS A LA ACELERACIÓN MÁXIMA

Los valores calculados de las fuerzas inerciales se localizan en el chasis en los apoyos del asiento del piloto y en los apoyos del motor. La única variación es que se considera libertad de movimiento en el eje y , en los apoyos delanteros. Es decir, el eje delantero tiene posibilidad de desplazarse pero en el eje x permanece fijo porque no se quiere que el vehículo se desplace a los lados. Restricciones y fuerzas se selecciona según el cuadro de diálogo de la figura (7.122) y los resultados se ven en la figura (7.123).

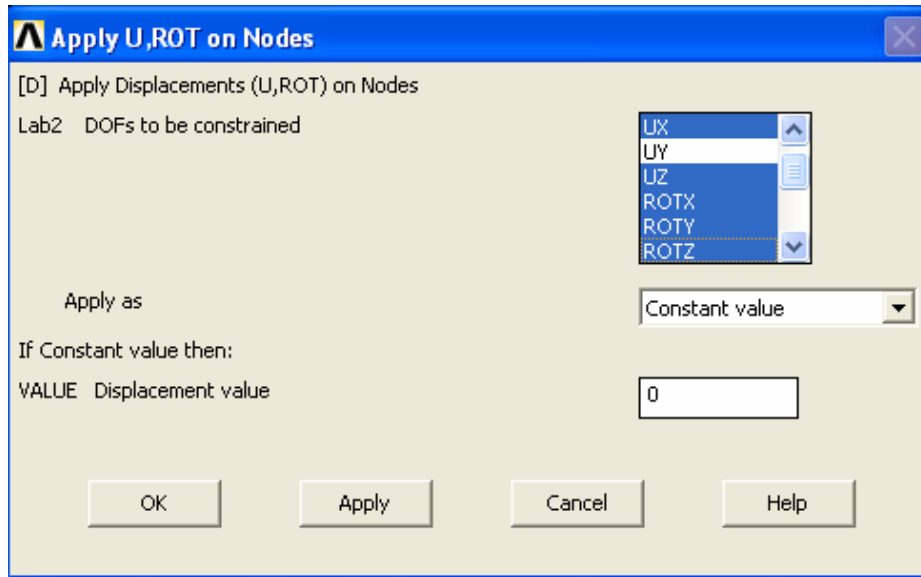


Figura 7.122. Cuadro de diálogo de restricciones en los nodos.

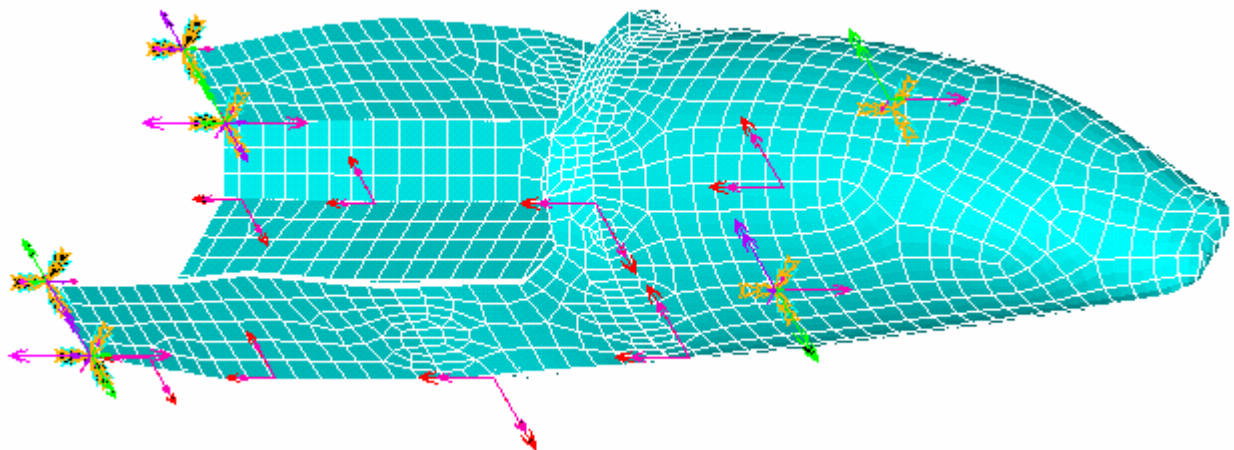


Figura 7.123. Diagrama de cargas y restricciones debido a la aceleración máxima.

Como se puede apreciar en este caso, las cargas aparecen en dirección contraria a las del frenado. La deformada se aprecia en la figura (7.124) y se observa que su valor máximo es de 0.164 mm.

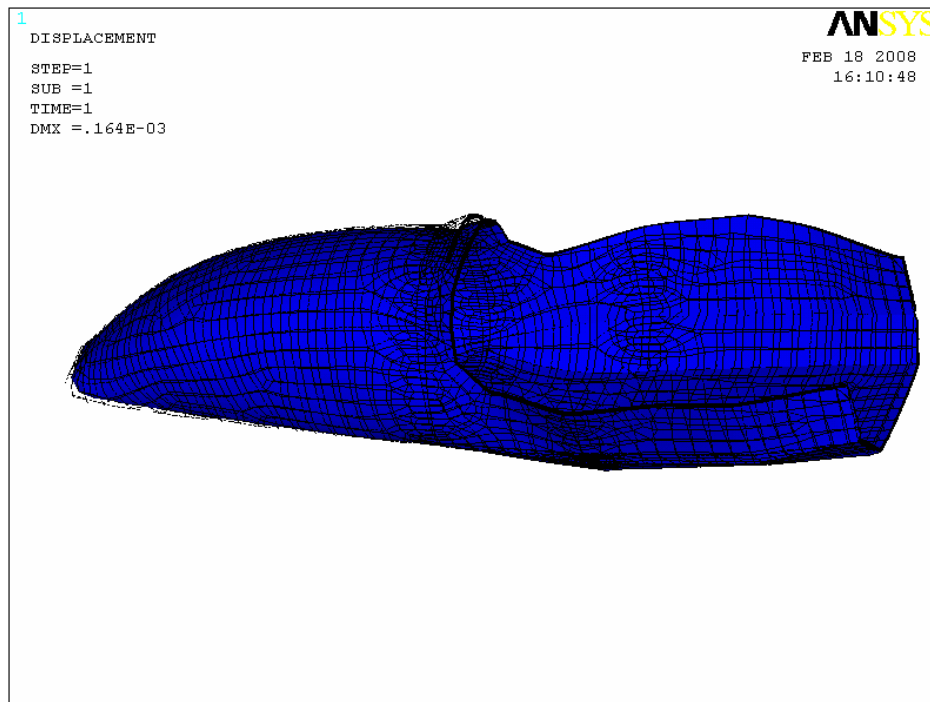


Figura 7.124. Deformada debido a la aceleración máxima.

Se observa una vista adicional de la deformada (ver figura 7.125) donde se aprecia que en este caso, el chasis tiende a abrirse.

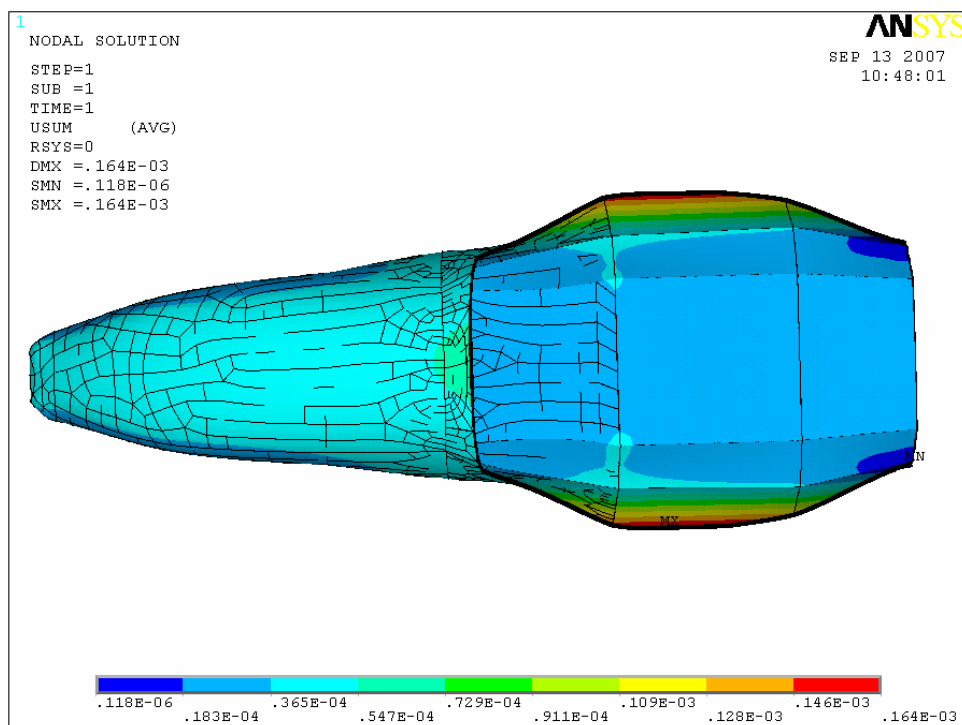


Figura 7.125. Deformada debido a la aceleración máxima.

7.11.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIO DE FALLA

Los esfuerzos de Von Mises pueden apreciarse en la figura (7.126), son máximas en los apoyos de la suspensión posterior y su valor es de 12.2 MPa.

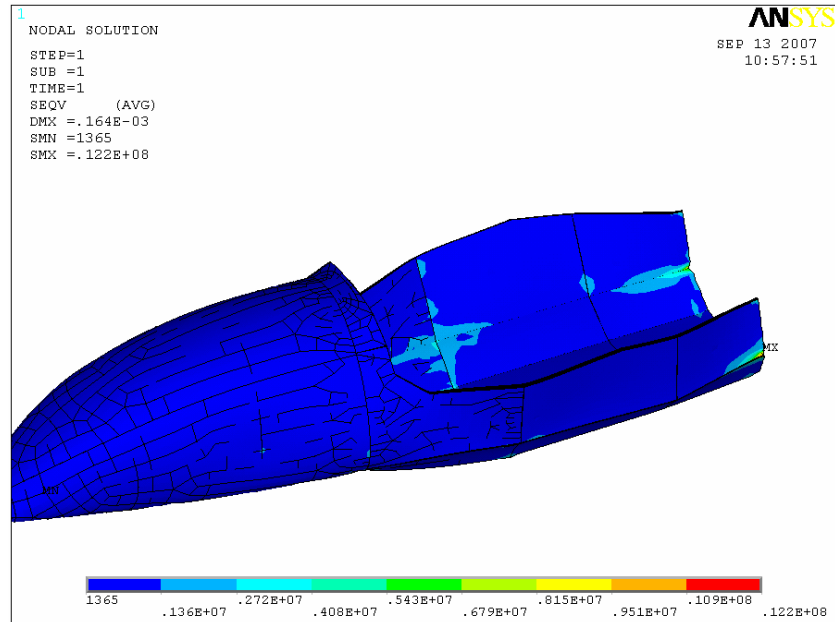


Figura 7.126. Esfuerzos de Von Mises debido a la aceleración máxima.

Finalmente, se puede determinar para este caso el índice ξ de Tsai-Wu que es de 0.01618 (figura 7.126).

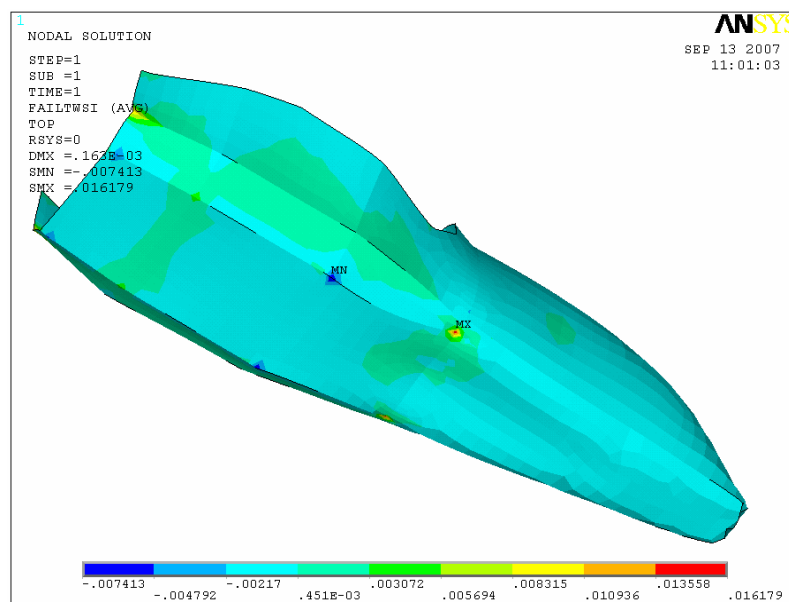


Figura 7.127. Índice de Tsai-Wu para la aceleración máxima.

7.11.2. DETERMINACIÓN DE LOS ESFUERZOS INTERLAMINARES

En la figura (7.128) se observan los valores de los esfuerzos interlaminares que son de 0.00145 Pa

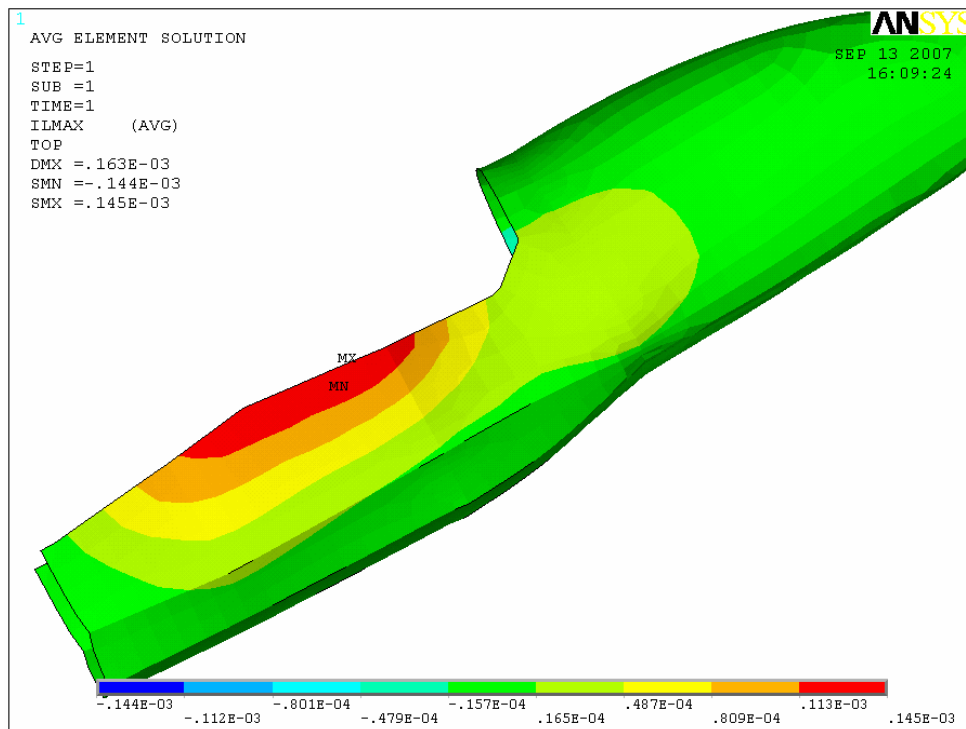


Figura 7.128. Esfuerzos interlaminares de aceleración máxima.

Como predice la teoría, los esfuerzos interlaminares son máximos en los bordes libres.

7.12. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS EN UNA CURVA

Los valores calculados de las fuerzas inerciales cuando se somete al chasis a una curva debido a la aceleración centrífuga se localizan en el chasis (ver tabla 7.3), de igual manera se considera libertad de movimiento en el eje y , en los apoyos delanteros, de igual modo no se quiere que el auto se desplace lateralmente (figura 7.129)

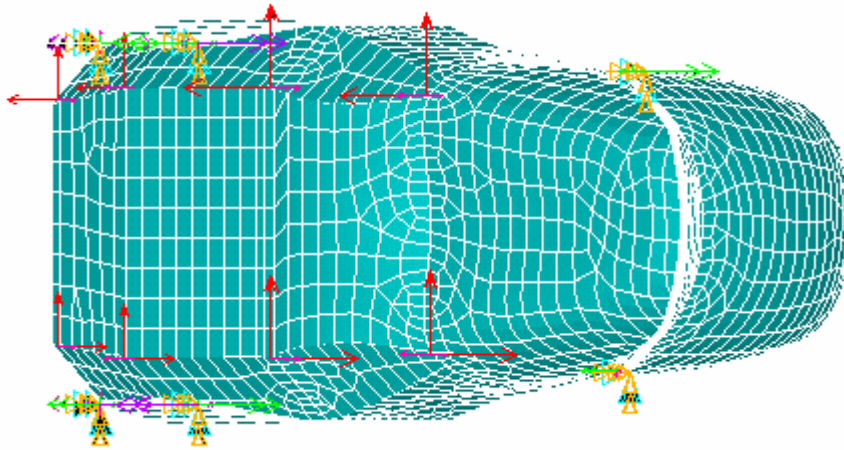


Figura 7.129. Diagrama de cargas y restricciones cuando el vehículo toma una curva.

Luego del postproceso se aprecia la deformada y su valor máximo de 0.353 mm (figura 7.130).

1
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =1
TIME=1
DMX =.353E-03

ANSYS
AUG 16 2007
08:21:42

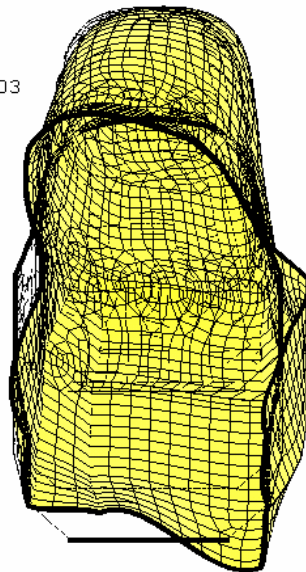


Figura 7.130. Deformada debido a la aceleración centrífuga.

Se observa una vista adicional de la deformada donde se aprecia el desplazamiento lateral del chasis (figura 7.131).

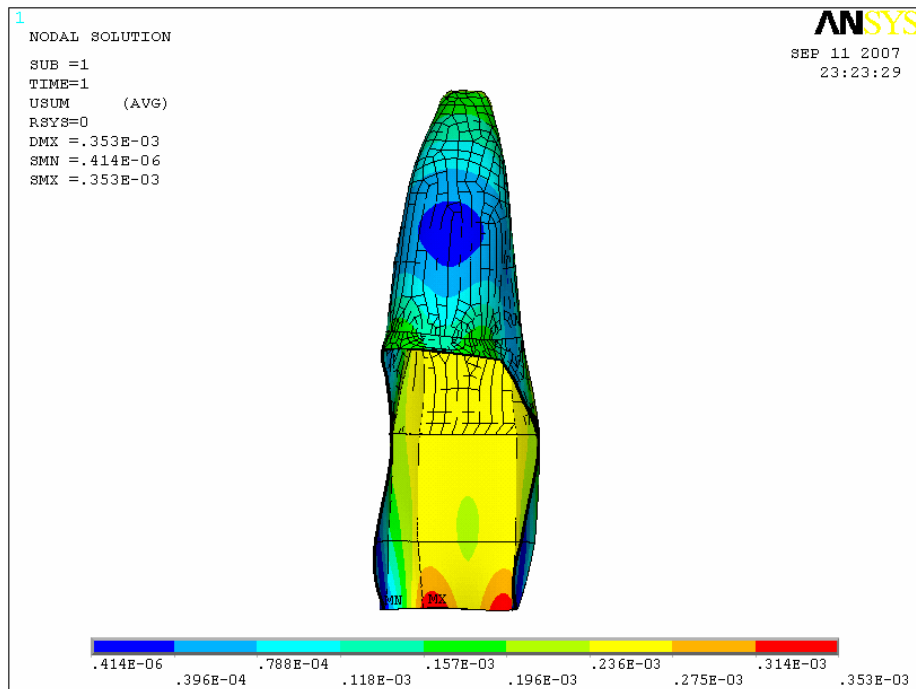


Figura 7.131. Deformada debido a la aceleración centrífuga.

7.12.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIO DE FALLA

Los esfuerzos de Von Mises pueden apreciarse en la figura (7.132), son máximos en los apoyos de la suspensión posterior y su valor es de 34.7 MPa.

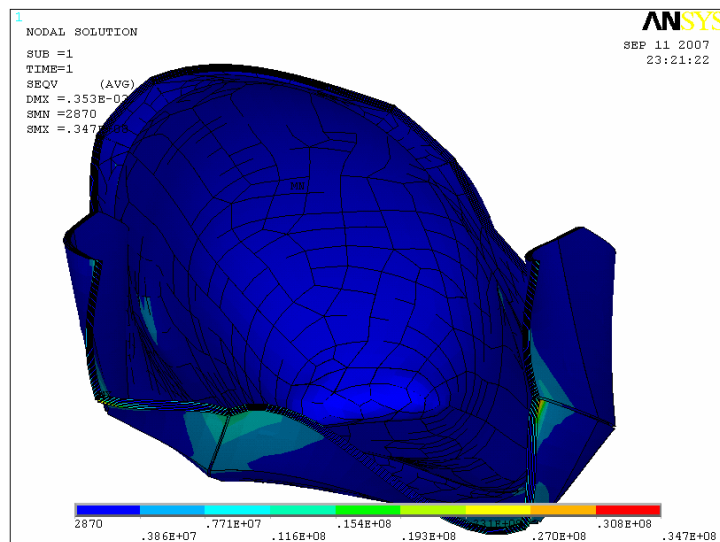


Figura 7.132. Esfuerzos de Von-Mises para el caso de curva.

Finalmente, se puede determinar para este caso el índice ξ de Tsai-Wu que es de 0.028016 en la figura (7.133).

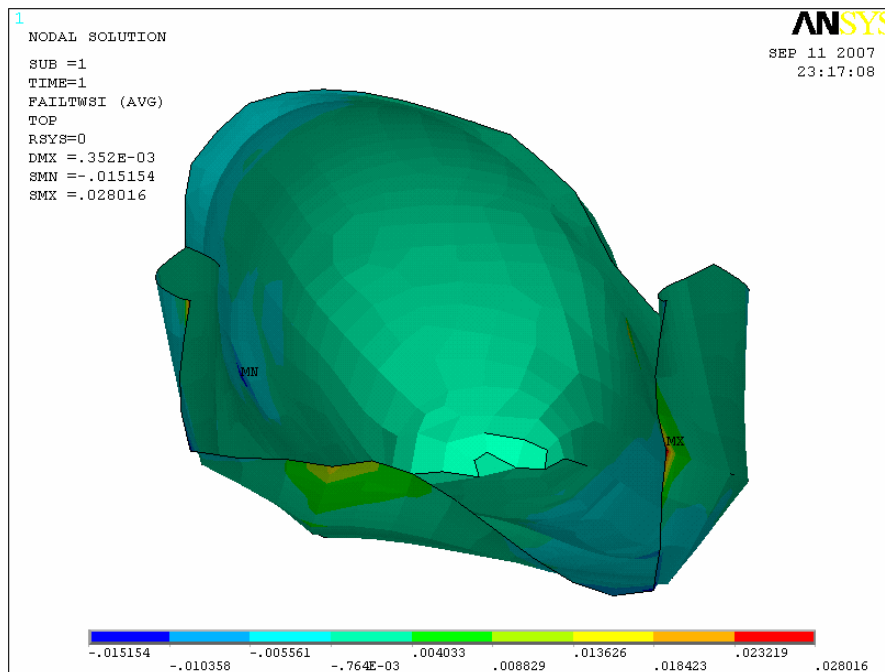


Figura 7.133. Índice de Tsai-Wu para el caso de curva.

7.12.2. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS INTERLAMINARES

Los esfuerzos interlaminares son sumamente bajos, el máximo para este caso es de 0.00265 Pa. El valor máximo ocurre en la base del modelo (figura 7.134).

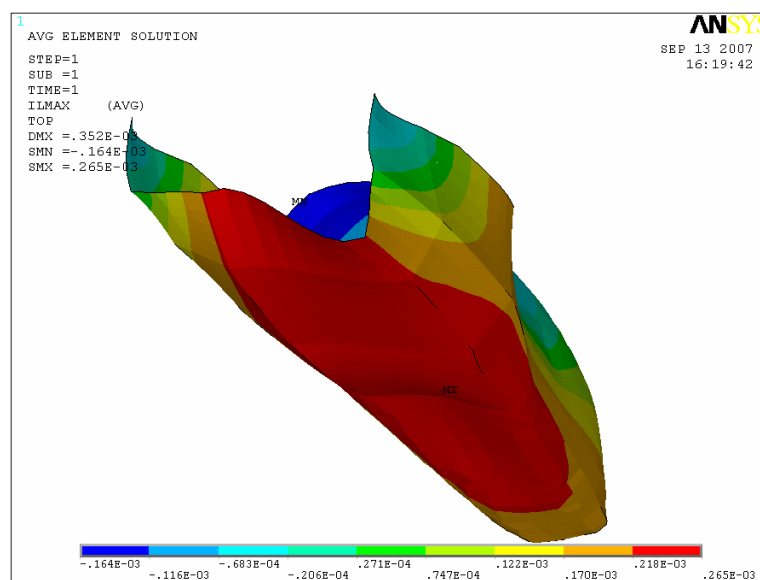


Figura 7.134. Tensiones interlaminares para el caso de curva.

7.13. DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA DEL CHASIS AL TORQUE PRODUCIDO POR EL MOTOR

Se necesita determinar la resistencia al chasis con respecto del torque producido por el motor. Para esto se va a suponer al chasis simplemente apoyado en las zonas de las suspensiones, y se va a utilizar las fuerzas determinadas en el punto 7.5.6 y que son ingresadas al modelo según (7.135).

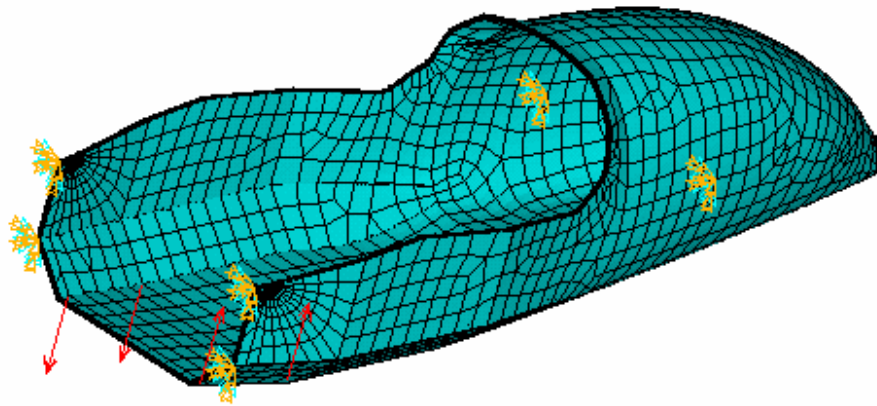


Figura 7.135. Diagrama de cargas de torsión del motor y restricciones.

Luego del postproceso se aprecia la deformada, siendo su valor máximo de 0.02 mm (figura 7.136).

```

1
DISPLACEMENT
STEP=1
SUB =1
TIME=1
DMX =.200E-04

```

ANSYS
FEB 20 2008
14:11:57

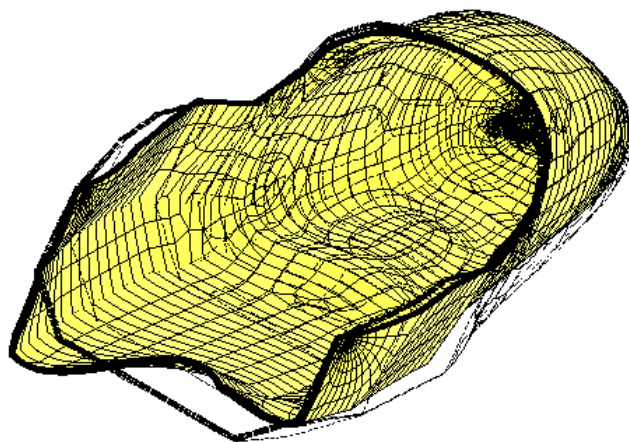


Figura 7.136. Deformada debido a la torsión del motor.

Se puede elegir un gráfico de contorno de los desplazamientos (figura 7.137).

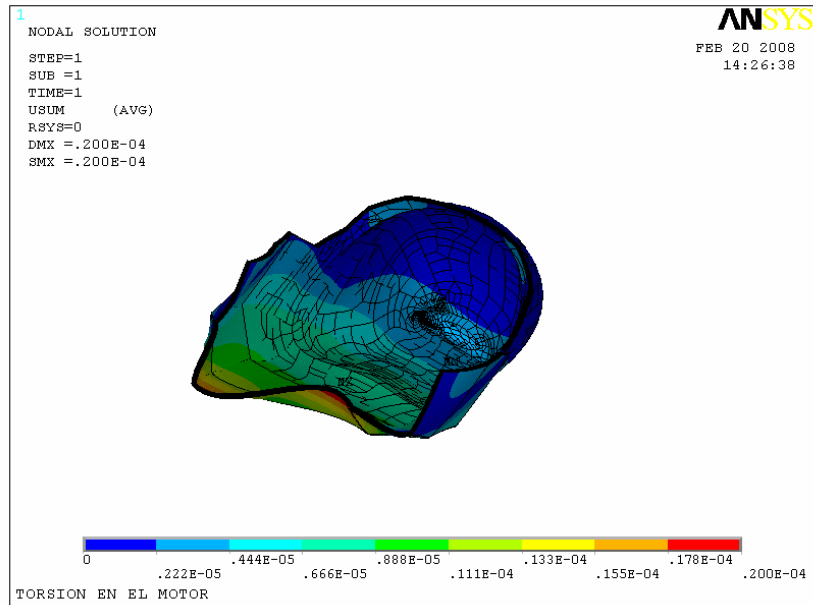


Figura 7.137. Gráfico de contorno de los desplazamientos para el caso de torsión del motor.

7.13.1. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS Y CRITERIO DE FALLA

Los esfuerzos de Von Mises pueden apreciarse en la figura (7.138) y son igualmente máximos en los apoyos de la suspensión posterior y su valor es de 5.12 MPa.

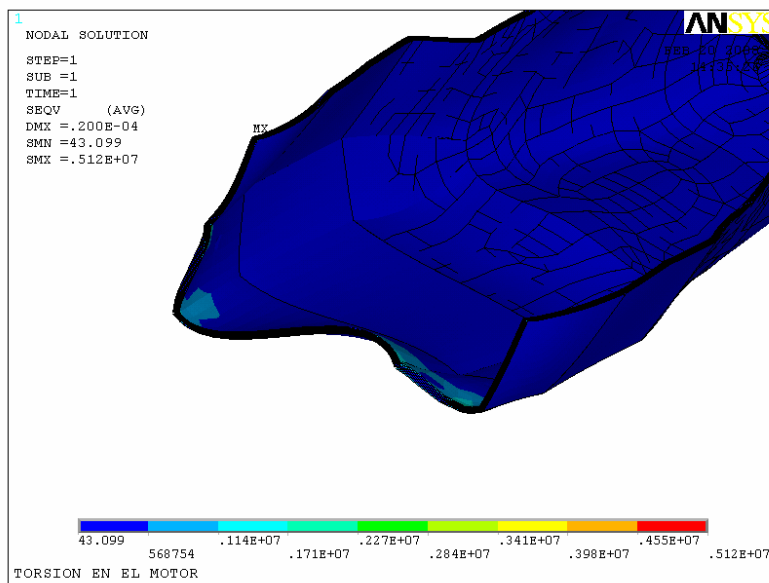


Figura 7.138. Esfuerzos de Von-Mises para el caso torsión del motor.

Finalmente, se puede determinar en la figura (7.139) que, para este caso el índice ξ de Tsai-Wu es de 0.001803.

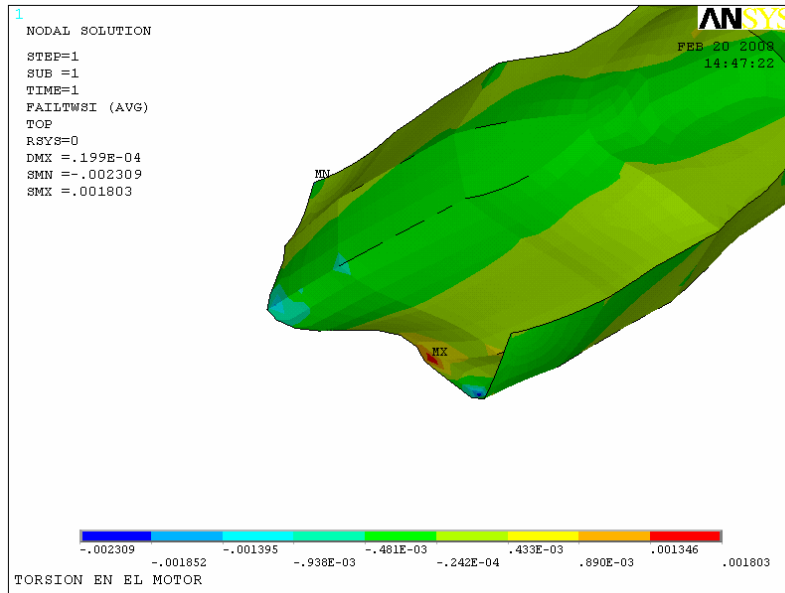


Figura 7.139. Índice de Tsai-Wu para el caso de torsión del motor.

7.13.2. DETERMINACIÓN DE ESFUERZOS INTERLAMINARES

Los esfuerzos interlaminares son sumamente bajos, el máximo para este caso es de 0.311 e-6 Pa. El valor máximo ocurre en los bordes del modelo como se aprecia en la figura (7.140).

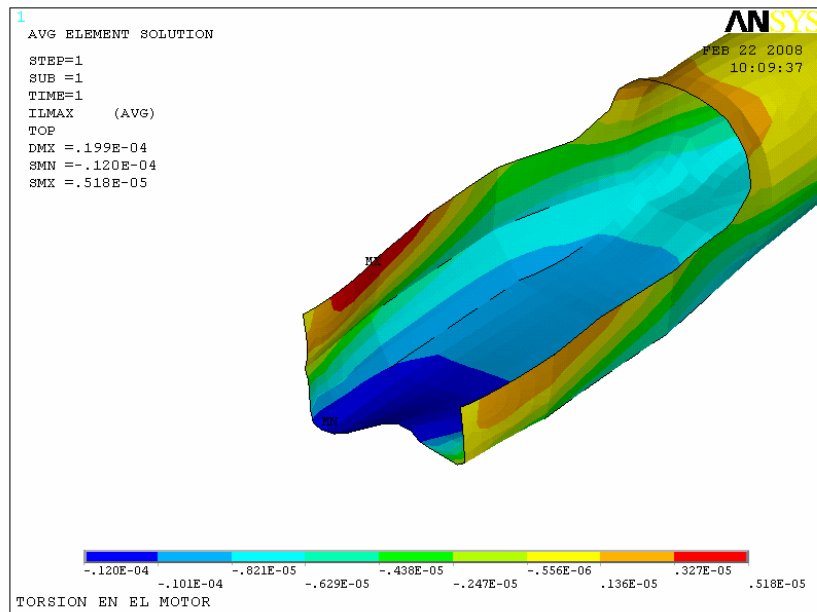


Figura 7.140. Esfuerzos interlaminares para el caso de torsión del motor.

7.14. RESUMEN

Para establecer cuales son las hipótesis de carga más críticas se establece la siguiente tabla de resultados.

Tabla 7.18. Resumen para todas las hipótesis de carga

Hipótesis de carga	Desplazamiento mm	Tensión de Von Mises [MPa]	Índice de Tsai-Wu	Esfuerzos interlaminares [Pa]
Prueba de torsión	6.933	89	0.081654	0.0689
Curva	0.353	34.7	0.028016	0.265e-03
Aceleración máxima	0.164	12.2	0.016179	0.145e-03
Peso piloto y motor	0.133	8.63	0.001621	0.234e-04
Frenado	0.0303	6.57	0.004794	0.296e-04
Torsión motor	0.02	5.12	0.0018	0.311e-06

Se observa que la mayor sollicitación a la que se somete el chasis monocasco es la prueba estática de torsión, seguida por la producida al tomar una curva de radio especificado. La menor sollicitación corresponde a la torsión del motor. Se establece así los lineamientos básicos para analizar un chasis monocasco utilizando la estratificación de capas de materiales compuestos y el método de los elementos finitos, utilizando un software comercial.

Con respecto a la confiabilidad del presente trabajo se puede decir que el análisis del modelo arroja resultados razonables y lógicos. Los desplazamientos del material son los que podría esperarse para cada hipótesis de carga, por ejemplo, se observa que la zona más débil es la parte abierta del espacio para el piloto y es donde se debe reforzar más. Llegando hasta un espesor de 10 mm en la zona 2 y hasta 7.5 mm en la zona 1 de la figura (7.91). Probablemente los valores de las hipótesis de carga no se ajusten a la realidad porque las fuerzas en un vehículo son sumamente variables y complejas. Una forma de obtener mayor exactitud sería modelando completamente el vehículo en el programa Adams que se utiliza para analizar la dinámica de vehículos completos y la otra forma sería construir un prototipo completo para someterlo a pruebas. El monocasco que ha sido modelado pesa 40 kg y soporta una carga torsional de 3000 N-m valores similares a diferentes diseños

que se ha encontrado en la bibliografía ^[7.8] ^[7.10], sin tomar en cuenta el arco antivuelco que contribuye también a la rigidez.

Las características dinámicas del prototipo real dependen de varios factores como son la geometría y parámetros de las suspensiones, los frenos, el motor e incluso el piloto. El chasis es una de las partes más importantes y se consiguió un buen prediseño, sin embargo la construcción de un prototipo funcional es algo más complicado que requiere el concurso de otras disciplinas según se puede ver en las páginas web de diferentes constructores ^[7.13] ^[7.9].

Para construir un chasis se requieren ruteadoras CNC para fabricar el respectivo molde de madera e inclusive autoclaves de curado, aparte de los materiales. Al suponer que se utiliza paño tejido y métodos manuales de estratificación y saturación del tejido con la resina, se introduce obligatoriamente variaciones impredecibles en las propiedades mecánicas, pero el tejido se adapta bien a cualquier forma complicada mientras que los preimpregnados que mantienen propiedades constantes y establecidas se usan en aplicaciones de mayor tecnología como la Formula 1 y en aplicaciones aeronáuticas. Adicionalmente se construyó un prototipo a escala con el fin de familiarizarse con las técnicas constructivas y los materiales locales

REFERENCIAS

- 7.1. AutoWeld Chassis & Components, [http:// autoweldchassis.com/cp.ivnu](http://autoweldchassis.com/cp.ivnu)
- 7.2. Caradvice, <http://www.caradvice.com.au/289/monocoque>
- 7.3. European Concours D'Elegance Schwetzingen 2003, *Class D, History of Jaguar and Daimler, pre 1970*, <http://www.madle.org/eec03d.htm>
- 7.4. Jesse's Webpage-AE86, KP61, and more, <http://www.sidewaystoyota.com/gallery.html>
- 7.5. Nancy Pottish, *Carbon fiber race car technology hits the streets*, <http://www.compositesworld.com/hpc/issues/2005/July/923>
- 7.6. Makoto Ouchi, *Masters in the Art of Airbrush Automotive Illustration*, http://www.khulsey.com/masters_makoto_ouchi.html
- 7.7. Jeremy Rutman, *Hybrid Car Proposal – series*, <http://physics.technion.ac.il/~rutman/series%20proposal%20details.htm>
- 7.8. Calvo, R. *Diseño y Análisis de un chasis para un prototipo de formula SAE .ICAI, Universidad Pontificia Comillas*
- 7.9. Delft University of Technology, *Dut Racing Team*, <http://www.dutracing.nl/>
- 7.10. Luis Unzueta Iruetia, *Diseño, construcción y cálculo estático de chasis tubulares para coches de competición*, <http://www.tecnium.es/automocion/proyectos/chasis/inicio.htm>
- 7.11. Guide To Composites, Unidirectional Fabrics, <http://www.netcomposites.com/education.asp?sequence=40>
- 7.12. Industrial Plastic & Paints, Fibreglass Reinforcement, <http://www.ippnet.com/EN/main/products/FIBREGLASS/4942/1001.html>
- 7.13. University of Auckland, *FSAE:47*, <http://www.fsae.co.nz/>
- 7.14. Kollár, L P. y Springer, G.S. (2003). *Mechanics of Composite Structures*. New York: Cambridge University Press.
- 7.15. ASME. (2001). *Volumen21: Composites*. ASM International.

- 7.16. Product Data Sheet, <http://www.fibreplast.com/documents/346.pdf>
- 7.17. Vasilev, V.V y Morozov, (2001). *Mechanics and Analysis of Composite Materials*. Oxford: Elsevier Science Ltd.
- 7.18. Product Data Sheet, <http://www.fibreplast.com/documents/491.pdf>
- 7.19. Tutorial del Software ANSYS: Release 11.0 Documentation for ANSYS
- 7.20. Canadian Building Digest, *CBD-54. Deflections of Horizontal Structural Members*, http://irc.nrc-cnrc.gc.ca/pubs/cbd/cbd054_e.html
- 7.21. University of Alberta-ANSYS *Tutorials*, <http://www.mece.ualberta.ca/tutorials/ansys/>
- 7.22. www.superbikes.net
- 7.23. Adams, H. *Chassis Engineering*. HPBooks.
- 7.24. Aird, F. (1997). *Race Car Chassis, Design and Construction*. Osceola: MBI Publishing Company.
- 7.25. Smith, S. (1992). *Mini Sprint / Micro Sprint Racing Technology*. Santa Ana: Steve Smith Autosports Publications.
- 7.26. Computer-Aided Engineering Center, Ansys Tutorial, <http://www.cae.wisc.edu/site/public/?title=ansystut>
- 7.27. Dr. A.-V. Phan, ANSYS TUTORIAL { 2-D Fracture Analysis, http://www.southalabama.edu/engineering/mechanical/faculty/phan/ANSYS_L_EFM01.pdf

CAPÍTULO 8

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

8.1. CONCLUSIONES

- El objetivo de esta tesis fue alcanzado, puesto que se logró crear un modelo digital de una estructura tipo membrana de material compuesto. Esta estructura pudo ser evaluada y diseñada por medio de un proceso iterativo utilizando un programa comercial de elementos finitos.
- Se pudo evaluar las posibilidades que brinda Ansys para abordar el análisis de estructuras en materiales compuestos tales como: una amplia biblioteca de elementos finitos especializados para composites, la facilidad de ingreso y edición de propiedades mecánicas, la facilidad para cambiar de orientación de fibras en láminas, las posibilidades de estratificación particularizada en diferentes zonas, el análisis con teorías de falla propias de estos materiales como la teoría de Tsai-Wu, el criterio de máxima de deformación y el de máximo esfuerzo. También se encontraron dificultades, ya que no siempre la importación de formas complejas se puede realizar con éxito.
- Ansys demostró ser una herramienta informática ideal de apoyo para el estudio de elementos finitos, ya que obliga al usuario a la profundización de la teoría, puesto que este debe seleccionar el tipo de elemento finito entre cientos de posibilidades, el tamaño del elemento finito, las opciones de mallado, el tipo de refinamiento h o p y diversas opciones de postprocesado.
- El paño tejido de fibras de alta resistencia es el material más asequible y más ampliamente usado para la fabricación de compuestos, pero, también tiene serios inconvenientes, como es el no garantizar propiedades uniformes ya que la saturación con la resina se la realiza en forma manual y la ondulación de sus fibras reduce la resistencia y la rigidez del material. Los preimpregnados tanto de tejido como de fibras unidireccionales ofrecen propiedades uniformes pero necesitan refrigeración en el caso de que la matriz sea termoestable ya que están parcialmente curados y son elementos más costosos.
- Los esfuerzos interlaminares son sumamente bajos en todas las hipótesis de carga, debido a que las ecuaciones constitutivas del paño tejido lo definen como un material prácticamente isotrópico y la estructura es tipo membrana,

es decir el laminado no es grueso. Como la teoría predice, los esfuerzos interlaminares son máximos cerca de los bordes del modelo.

- La teoría clásica de laminados es adecuada para el análisis de placas delgadas. Sin embargo, las placas de materiales compuestos por tener valores muy bajos de módulo cortante transversal G , son susceptibles a fallar por esfuerzos cortantes transversales o interlaminares. Por lo tanto se utiliza la teoría de Mindlin-Reissner que involucra las deformaciones cortantes transversales.
- Los elementos finitos basados en la teoría de Mindlin-Reissner son más prácticos y útiles ya que al estar desacopladas las rotaciones del desplazamiento solo necesita funciones de interpolación con continuidad C^0 y la matriz operador diferencial L es más simple.

8.2. RECOMENDACIONES

- Otra posibilidad a ser investigada para fabricar el chasis de un monocasco es mediante la utilización de la construcción tipo sándwich, en la que dos láminas delgadas de alta resistencia como aluminio, paño de fibra de vidrio o fibra de carbono están separadas por una estructura de relleno de baja densidad que puede ser balsa, espumas rígidas, laminas tipo panal, ya sea de aramida, de aluminio o de policarbonato. Ansys tiene también elementos finitos especializados para analizar estas estructuras como por ejemplo el elemento membrana no lineal SHELL 91 con la opción KEYOPT(9) = 1.
- Otro trabajo que complemente el presentado podría ser el analizar software de diseño para la manufactura de materiales compuestos como por ejemplo el software Catia, el cual permite encontrar el desarrollo plano de la lámina de acuerdo a la orientación de las fibras.
- Es importante materializar los nuevos conocimientos adquiridos para que exista una sinergia entre teoría y práctica. Es decir conjugar teoría y práctica mediante la construcción de elementos estructurales hechos en materiales compuestos que pueden luego ser sometidos a ensayos y contrastarlos con los resultados generados en Ansys.