

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**ANÁLISIS DE ESFUERZOS EN TRANSMISIONES DE ENGRANES  
CILÍNDRICOS HELICOIDALES MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS  
ELEMENTOS FINITOS**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MAGÍSTER (M.Sc.) EN  
MATERIALES, DISEÑO Y PRODUCCIÓN**

**ING. LUIS RICARDO SOTO AYMAR**

[ricardo.soto@epn.edu.ec](mailto:ricardo.soto@epn.edu.ec)

**DIRECTOR: ING. M.Sc. IVÁN ZAMBRANO OREJUELA**

[oscar.zambrano@epn.edu.ec](mailto:oscar.zambrano@epn.edu.ec)

**Quito, Marzo 2008**

## DECLARACIÓN

Yo, Luis Ricardo Soto Aymar, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría, que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normativa institucional vigente.

---

Ing. Luis Ricardo Soto Aymar

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el siguiente trabajo fue realizado en su totalidad por el Ing. Luis Ricardo Soto Aymar como requerimiento parcial a la obtención del título de Magíster en Materiales, Diseño y Producción.

---

Ing. M.Sc. Iván Zambrano Orejuela  
DIRECTOR DE TESIS

## **AGRADECIMIENTO**

Al Ing. M.Sc. Iván Zambrano Orejuela, por su acertada dirección y colaboración, fundamentales para culminar este proyecto.

Al Prof. Ing. Omar E. Mayer, por su desinteresada pero muy valiosa ayuda, sin la cual no habría sido posible la realización de este trabajo.

Al Dr. Ing. Gonzalo González Rey, por toda la invaluable documentación de trabajos realizados sobre engranajes, tan amablemente proporcionada.

Al Sr. Eugeny Kalney, creador del software gratuito “TrueGear”, que ha resultado imprescindible en la creación de los modelos.

A todas las personas que de una u otra forma han colaborado para la terminación exitosa de este trabajo.

## **DEDICATORIA**

A mi familia, pilar fundamental de todas las actividades que realizo.

## CONTENIDO

<b>DECLARACIÓN</b> .....	<b>ii</b>
<b>CERTIFICACIÓN</b> .....	<b>iii</b>
<b>AGRADECIMIENTO</b> .....	<b>iv</b>
<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>v</b>
<b>CONTENIDO</b> .....	<b>vi</b>
<b>LISTA DE FIGURAS</b> .....	<b>xi</b>
<b>LISTA DE TABLAS</b> .....	<b>xiv</b>
<b>SIMBOLOGÍA</b> .....	<b>xv</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>xix</b>
<b>PRESENTACIÓN</b> .....	<b>xx</b>
<b>CAPÍTULO 1</b> .....	<b>1</b>
<b>FUNDAMENTO TEÓRICO</b> .....	<b>1</b>
1.1 <b>INTRODUCCIÓN</b> .....	<b>1</b>
1.2 <b>ENGRANES</b> .....	<b>1</b>
1.2.1 <b>TIPOS DE ENGRANAJES</b> .....	<b>1</b>
1.2.2 <b>NOMENCLATURA</b> .....	<b>2</b>
1.2.3 <b>RELACIÓN DE CONTACTO</b> .....	<b>5</b>
1.3 <b>ENGRANES CILÍNDRICOS HELICOIDALES</b> .....	<b>7</b>
1.3.1 <b>NOMENCLATURA DE LOS ENGRANES HELICOIDALES</b> .....	<b>7</b>
1.3.2 <b>NÚMERO VIRTUAL DE DIENTES</b> .....	<b>9</b>
1.3.3 <b>RELACIÓN DE CONTACTO EN ENGRANES HELICOIDALES</b> .....	<b>10</b>
1.4 <b>ESFUERZOS EN LOS DIENTES</b> .....	<b>11</b>
1.4.1 <b>ECUACIÓN DE FLEXIÓN DE LEWIS</b> .....	<b>12</b>
1.4.2 <b>ANÁLISIS DE FUERZAS EN ENGRANES HELICOIDALES</b> .....	<b>13</b>
1.4.3 <b>ESFUERZOS DE CONTACTO DE HERTZ</b> .....	<b>15</b>

1.5	ESFUERZO DEBIDO A LA FLEXIÓN.....	17
1.5.1	FACTOR GEOMÉTRICO $J$ .....	17
1.5.2	FACTOR DINÁMICO $K'_v$ .....	18
1.5.3	FACTOR DE SOBRECARGA $K_O$ .....	18
1.5.4	FACTOR DE TAMAÑO $K_s$ .....	19
1.5.5	FACTOR DE DISTRIBUCIÓN DE CARGA $K_m$ .....	19
1.5.6	FACTOR DE ESPESOR DEL ARO $K_B$ .....	20
1.5.7	ESFUERZO FLEXIONANTE PERMISIBLE.....	20
1.5.7.1	Número de esfuerzo flexionante permisible $S_t$ .....	21
1.5.7.2	Factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la flexión $Y_N$ .....	21
1.5.7.3	Factor de confiabilidad $K_R$ .....	21
1.5.7.4	Factor de temperatura $K_T$ .....	22
1.6	ESFUERZO DE CONTACTO.....	22
1.6.1	COEFICIENTE ELÁSTICO $C_p$ .....	22
1.6.2	FACTOR GEOMÉTRICO $I$ .....	23
1.6.3	FACTOR DE CONDICIÓN SUPERFICIAL $C_f$ .....	24
1.6.4	OTROS FACTORES.....	24
1.6.5	ESFUERZO DE CONTACTO PERMISIBLE.....	24
1.6.5.1	Número de esfuerzo de contacto permisible $S_c$ .....	25
1.6.5.2	Factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la picadura $Z_N$ .....	25
1.6.5.3	Factor de la relación de la dureza $C_H$ .....	25
1.6.5.4	Factores $K_R$ y $K_T$ .....	26
1.6.5.5	Factores de Seguridad $S_F$ y $S_H$ .....	26
<b>CAPÍTULO 2.....</b>		<b>27</b>
<b>MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS.....</b>		<b>27</b>
2.1	BASES TEÓRICAS.....	27
2.2	ELASTICIDAD LINEAL.....	29
2.2.1	PLANTEAMIENTO FUERTE DEL PROBLEMA ELÁSTICO.....	34
2.2.2	PLANTEAMIENTO DÉBIL DEL PROBLEMA ELÁSTICO.....	35
2.3	MATRIZ DE RIGIDEZ Y VECTOR DE CARGAS.....	39
2.4	PROCEDIMIENTO DEL MEF.....	40

2.4.1	DISCRETIZACIÓN O MODELACIÓN.....	41
2.4.2	DEFINICIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL ELEMENTO .....	41
2.4.3	ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL.....	41
2.4.4	APLICACIÓN DE LAS CARGAS .....	41
2.4.5	DEFINICIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE.....	41
2.4.6	RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES.....	42
2.4.7	CALCULO DE LOS ESFUERZOS.....	42
2.5	ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL MEF.....	42
2.5.1	RELACIÓN DE ASPECTO DE LOS ELEMENTOS .....	43
2.5.2	CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN.....	44
<b>CAPITULO 3.....</b>		<b>46</b>
<b>DISEÑO ANALÍTICO DE LOS ENGRANES CILÍNDRICOS HELICOIDALES....</b>		<b>46</b>
3.1	ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DEL ENGRANE.....	46
3.2	DISEÑO DEL PIÑÓN.....	47
3.2.1	PARÁMETROS DE DISEÑO.....	47
3.2.2	DIMENSIONAMIENTO DEL PIÑÓN.....	47
3.2.3	ANÁLISIS DE FUERZAS EN EL PIÑÓN .....	48
3.2.4	ESFUERZO DEBIDO A LA FLEXION EN EL PIÑÓN.....	48
3.2.5	ESFUERZO DE CONTACTO EN EL PIÑÓN.....	51
<b>CAPITULO 4.....</b>		<b>54</b>
<b>MODELADO DE LA GEOMETRÍA Y MALLADO.....</b>		<b>54</b>
4.1	GEOMETRÍA DEL ENGRANE HELICOIDAL.....	54
4.2	GENERACIÓN DEL MODELO .....	56
4.2.1	CREACIÓN DEL PERFIL DE LOS DIENTES DEL PIÑÓN.....	56
4.2.2	GENERACIÓN DEL MODELO SÓLIDO DEL PIÑÓN.....	61
4.2.3	CREACIÓN DEL PLANO DE APLICACIÓN DE CARGA.....	63
4.2.4	EXPORTACIÓN DE LA GEOMETRÍA A FORMATO ACIS .....	67
4.3	IMPORTACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN FEMPRO.....	67



4.4	MALLADO DE LA GEOMETRÍA .....	69
<b>CAPITULO 5 .....</b>		<b>74</b>
<b>SIMULACIÓN Y ANALISIS DE RESULTADOS .....</b>		<b>74</b>
5.1	CONVERGENCIA DE LOS RESULTADOS.....	74
5.2	SIMULACIÓN Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS .....	77
5.2.1	SELECCIÓN DE UNIDADES PARA EL ANÁLISIS.....	77
5.2.2	INGRESO DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL .....	78
5.2.3	ASIGNACIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE .....	79
5.2.4	APLICACIÓN DE LA CARGA .....	81
5.2.5	EJECUCIÓN DEL ANÁLISIS .....	81
5.2.6	VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS .....	82
5.3	VARIACIONES EN LA GEOMETRÍA.....	84
5.3.1	VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE .....	85
5.3.2	VARIACIÓN DEL ANCHO DE CARA .....	87
5.3.3	VARIACIÓN DEL MÓDULO.....	88
5.4	VARIACIÓN EN LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS.....	90
5.5	COMPARACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS .....	92
5.5.1	VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE .....	93
5.5.2	VARIACIÓN DEL ANCHO DE CARA .....	94
5.5.3	VARIACIÓN DEL MÓDULO.....	96
5.5.4	VARIACIÓN EN LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS .....	97
5.5.5	ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS .....	99
<b>CAPITULO 6 .....</b>		<b>101</b>
<b>CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>		<b>101</b>
6.1	CONCLUSIONES .....	101
6.2	RECOMENDACIONES .....	103
<b>BIBLIOGRAFÍA .....</b>		<b>104</b>

<b>ANEXOS</b> .....	<b>106</b>
<b>ANEXO 1</b> .....	<b>107</b>
FACTORES DE FORMA DE LEWIS $Y$ .....	107
<b>ANEXO 2</b> .....	<b>109</b>
FACTORES GEOMÉTRICOS $J$ .....	109
<b>ANEXO 3</b> .....	<b>112</b>
NÚMERO DE ESFUERZO FLEXIONANTE PERMISIBLE.....	112
<b>ANEXO 4</b> .....	<b>115</b>
FACTOR DE CICLOS DE ESFUERZO DE RESISTENCIA A LA FLEXIÓN .....	115
<b>ANEXO 5</b> .....	<b>117</b>
RESISTENCIA A LA FATIGA POR CONTACTO .....	117
<b>ANEXO 6</b> .....	<b>119</b>
FACTOR DE CICLOS DE ESFUERZOS DE RESISTENCIA A LA PICADURA.....	119
<b>ANEXO 7</b> .....	<b>121</b>
TABLAS DE DATOS Y RESULTADOS DEL DISEÑO ANALÍTICO .....	121
<b>ANEXO 8</b> .....	<b>123</b>
GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE.....	123
<b>ANEXO 9</b> .....	<b>132</b>
GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL ANCHO DE CARA.....	132
<b>ANEXO 10</b> .....	<b>139</b>
GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL MÓDULO .....	139
<b>ANEXO 11</b> .....	<b>146</b>
GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE Y LA CARGA APLICADA EN VARIOS DIENTES.....	146

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Nomenclatura de los dientes de engranes rectos .....	3
Figura 1.2 Relación de Contacto .....	6
Figura 1.3 Parte de una cremallera helicoidal .....	8
Figura 1.4 Planos de engrane recto y helicoidal.....	10
Figura 1.5 Diente del engrane como viga en voladizo.....	12
Figura 1.6 Fuerzas que actúan en los dientes de un engrane helicoidal.....	13
Figura 1.7 Esfuerzo de contacto entre dos cilindros.....	15
Figura 1.8 Relación de apoyo.....	20
Figura 2.1 Sección de un engrane discretizada en elementos finitos.....	28
Figura 2.2 Desplazamientos y tensiones conocidas en la sección de un engrane	33
Figura 2.3 Clasificación de elementos de acuerdo a su relación de aspecto .....	43
Figura 2.4 Variación del tamaño de los elementos de la malla .....	44
Figura 2.5 Variación del grado de las funciones polinómicas de aproximación....	45
Figura 4.1 Helicoide desarrollable .....	54
Figura 4.2 Desplazamiento del perfil de un diente a lo largo de una hélice .....	55
Figura 4.3 Comparación de la geometría de “TrueGear” con la evolvente.....	56
Figura 4.4 Caja de diálogo “Acerca de” del programa “TrueGear” .....	57
Figura 4.5 Caja de diálogo principal del programa “TrueGear” .....	57
Figura 4.6 Perfil de un diente del piñón.....	59
Figura 4.7 Transformación de la polilínea del perfil del diente en spline .....	60
Figura 4.8 Creación del perfil de los dientes del piñón.....	60
Figura 4.9 Caja de diálogo del comando “boundary”.....	61
Figura 4.10 Generación del sólido desde el perfil de los dientes del piñón.....	62
Figura 4.11 Parte del desarrollo del cilindro de paso .....	62
Figura 4.12 Longitud de la línea de contacto .....	64
Figura 4.13 Trazado de la línea de acción .....	64
Figura 4.14 Trazado de la línea de contacto sobre el sólido .....	65
Figura 4.15 Trazado del rectángulo que define el área de contacto.....	65
Figura 4.16 Detalle del prisma rectangular que define el plano de carga.....	66
Figura 4.17 Modelo sólido de piñón con el plano de aplicación de carga .....	67
Figura 4.18 Caja de diálogo de “Tipo de Análisis” del programa “Fempro” .....	68

Figura 4.19 Pantalla del programa “Fempro”.....	68
Figura 4.20 Caja de diálogo de “Opciones de mallado del modelo...” .....	69
Figura 4.21 Modelo mallado con los parámetros por defecto.....	69
Figura 4.22 Caja de diálogo de parámetros para el mallado.....	70
Figura 4.23 Selección de la superficie del diente para refinar la malla.....	71
Figura 4.24 Caja de diálogo de puntos de refinado.....	72
Figura 4.25 Modelo con malla refinada para el análisis .....	73
Figura 5.1 Disminución del tamaño medio de los elementos .....	75
Figura 5.2 Convergencia de la solución en función de desplazamientos .....	76
Figura 5.3 Convergencia de la solución en función de esfuerzos .....	76
Figura 5.4 Caja de diálogo de “Unidades” del programa “Fempro” .....	78
Figura 5.5 Vista de árbol del programa “Fempro”.....	79
Figura 5.6 Ventana “Especificación material del elemento – Brick isotrópico” .....	79
Figura 5.7 Selección de superficies para aplicar los apoyos.....	80
Figura 5.8 Caja de diálogo de “Condición de contorno de superficie” .....	80
Figura 5.9 Caja de diálogo de “Fuerza de superficie”.....	81
Figura 5.10 Ventana “Tensión estática con modelos de materiales lineales”.....	82
Figura 5.11 Resultados de esfuerzo de von Mises.....	83
Figura 5.12 Resultados de desplazamiento .....	83
Figura 5.13 Visualización de cargas y restricciones.....	84
Figura 5.14 Resultados de desplazamiento con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	86
Figura 5.15 Resultados de esfuerzos con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	86
Figura 5.16 Resultados de desplazamiento con la variación del ancho de cara $F$ .....	88
Figura 5.17 Resultados de esfuerzos con la variación del ancho de cara $F$ .....	88
Figura 5.18 Resultados de desplazamiento con la variación del módulo $m$ .....	90
Figura 5.19 Resultados de esfuerzos con la variación del módulo $m$ .....	90
Figura 5.20 Resultados de desplazamiento con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	92
Figura 5.21 Resultados de esfuerzos con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	92
Figura 5.22 Esfuerzos de flexión con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	93
Figura 5.23 Esfuerzos de contacto con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	94

Figura 5.24 Esfuerzos de flexión con la variación del ancho de cara $F$ .....	95
Figura 5.25 Esfuerzos de contacto con la variación del ancho de cara $F$ .....	95
Figura 5.26 Esfuerzos de flexión con la variación del módulo $m$ .....	96
Figura 5.27 Esfuerzos de contacto con la variación del módulo $m$ .....	97
Figura 5.28 Esfuerzos de flexión con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	98
Figura 5.29 Esfuerzos de contacto con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	98

## LISTA DE TABLAS

Tabla 1.1 Factores de sobrecarga.....	18
Tabla 1.2 Factores de distribución de carga .....	19
Tabla 5.1 Convergencia de la solución .....	77
Tabla 5.2 Variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	85
Tabla 5.3 Resultados con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	86
Tabla 5.4 Variación del ancho de cara $F$ .....	87
Tabla 5.5 Resultados con la variación del ancho de cara $F$ .....	87
Tabla 5.6 Variación del módulo $m$ .....	89
Tabla 5.7 Resultados con la variación del módulo $m$ .....	89
Tabla 5.8 Resultados con la variación del ángulo de hélice $\psi$ .....	91
Tabla 5.9 Comparación de resultados con la variación del ángulo de hélice $\psi$ ....	93
Tabla 5.10 Comparación de resultados con la variación del ancho de cara $F$ .....	94
Tabla 5.11 Comparación de resultados con la variación del módulo $m$ .....	96
Tabla 5.12 Comparación de resultados con la variación del ángulo de hélice $\psi$ ..	97

## SIMBOLOGÍA

$a$	Cabeza del diente o “adendum”
$b$	Raíz del diente o “dedendum”
$b$	Semiancho del área de contacto
$c$	Distancia entre centros $O_1O_2$
$C_f$	Factor de condición superficial
$C_H$	Factor de la relación de la dureza
$C_p$	Coefficiente elástico
$d$	Diámetro de paso
$d_b$	Diámetro del círculo base
$d_1$	Diámetro del primer cilindro
$d_2$	Diámetro del segundo cilindro
$d_e$	Diámetro del eje
$d_G$	Diámetro de paso de la rueda
$d_P$	Diámetro de paso del piñón
$E_1$	Módulo de elasticidad del primer cilindro
$E_2$	Módulo de elasticidad del segundo cilindro
$E_G$	Módulo de elasticidad de la rueda
$E_P$	Módulo de elasticidad del piñón
$F$	Ancho de cara del engrane más angosto
$F$	Fuerza con que se presionan dos cilindros
$H$	Potencia
$H_B$	Dureza Brinell
$H_{BG}$	Dureza Brinell del piñón
$H_{BP}$	Dureza Brinell de la rueda o corona
$h_t$	Altura total del diente del engrane
$I$	Factor geométrico para resistencia a la picadura
$J$	Factor geométrico para resistencia a la flexión, incluye $K_f$
$K'_V$	Factor dinámico
$K_B$	Factor de espesor del aro
$K_f$	Factor de concentración de esfuerzo en el entalle de la raíz

$K_m$	Factor de distribución de carga
$K_O$	Factor de sobrecarga
$K_R$	Factor de confiabilidad
$K_s$	Factor de tamaño
$K_T$	Factor de temperatura
$l$	Longitud del área de contacto
$L_{ab}$	Línea de acción o segmento de engrane
$m$	Módulo del engrane
$m_t$	Módulo métrico transversal
$m_B$	Relación de apoyo
$m_c$	Relación de contacto
$m_G$	Relación de transmisión
$m_N$	Relación de repartición de carga
$n$	Velocidad angular del piñón
$N$	Número de dientes
$N_e$	Numero de dientes virtual o equivalente
$N_G$	Número de dientes de la rueda
$N_P$	Número de dientes del piñón
$P$	Paso diametral
$P_n$	Paso diametral normal
$P_t$	Paso diametral transversal
$p$	Paso circular
$p_b$	Paso base circular
$p_N$	Paso base normal
$p_n$	Paso circular normal
$p_t$	Paso circular transversal
$p_x$	Paso circular axial
$p_{máx}$	Presión máxima en el área de contacto
$Q_V$	Número de nivel de exactitud en la transmisión
$R$	Confiabilidad
$R_e$	Radio de la elipse del círculo primitivo
$r_1$	Radio de curvatura instantáneo en el perfil del piñón
$r_2$	Radio de curvatura instantáneo en el perfil de la rueda



$r$	Radio del círculo de paso
$r_b$	Radio del círculo base
$r_f$	Radio del entalle del diente
$r_G$	Radio de paso de la rueda
$r_P$	Radio de paso del piñón
$r_{aG}$	Radio de cabeza de la rueda
$r_{aP}$	Radio de cabeza del piñón
$r_{bG}$	Radio base de la rueda
$r_{bP}$	Radio base del piñón
$S_t$	Resistencia a la flexión AGMA
$S_c$	Resistencia a la fatiga por contacto AGMA
$S_F$	Factor de seguridad AGMA para flexión
$S_H$	Factor de seguridad AGMA para esfuerzos de contacto
$t_R$	Espesor del aro debajo del diente
$V$	Velocidad en la línea de paso
$\nu_1$	Coefficiente de Poisson del primer cilindro
$\nu_2$	Coefficiente de Poisson del segundo cilindro
$\nu_G$	Coefficiente de Poisson de la rueda
$\nu_P$	Coefficiente de Poisson del piñón
$W$	Fuerza total
$W_a$	Componente axial o carga de empuje
$W_r$	Componente radial
$W_t$	Componente tangencial o carga transmitida
$Y$	Factor de forma de Lewis
$Y_N$	Factor de ciclos de esfuerzo para resistencia a la flexión
$Z$	Longitud de la línea de acción en el plano transversal
$Z_N$	Factor de ciclos de esfuerzo para resistencia a la picadura
$\sigma$	Esfuerzo debido a la flexión
$\sigma_c$	Esfuerzo de contacto
$\sigma_{perm}$	Esfuerzo flexionante permisible
$\sigma_{c,perm}$	Esfuerzo de contacto permisible
$\sigma_H$	Esfuerzo de contacto de Hertz
$\phi$	Ángulo de presión

$\phi_n$	Ángulo de presión normal
$\phi_t$	Ángulo de presión transversal
$\psi$	Ángulo de hélice en el cilindro de paso
$\psi_b$	Ángulo de hélice en el cilindro base
$\Omega$	Ángulo de giro para la creación del sólido mediante el barrido
$A$	Matriz producto de $QS$ , o también, $QDH$
$D$	Matriz operacional que es función del material
$F$	Matriz operacional para obtener los desplazamientos
$G$	Matriz operacional para obtener las tensiones
$H$	Matriz operacional en términos de derivadas parciales
$Q$	Matriz transpuesta de la matriz $H$
$S$	Matriz producto de $DH$
$K_{ij}$	Matriz de rigidez del sólido
$a_i$	Vector de desplazamientos aproximados
$F_j$	Vector de cargas del sólido
$h$	Tamaño medio de los elementos en que se ha dividido el dominio
$p$	Grado de las funciones polinómicas de aproximación
$\bar{u}$	Campo de desplazamiento del sólido de componentes $u_x, u_y, u_z$
$\bar{\phi}$	Funciones de aproximación de componentes $\phi_x, \phi_y, \phi_z$
$\bar{\psi}$	Funciones de ponderación de componentes $\psi_x, \psi_y, \psi_z$
$\bar{\epsilon}$	Vector de deformaciones de componentes $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \epsilon_{xy}, \epsilon_{yz}, \epsilon_{xz}$
$\bar{f}$	Vector de fuerzas exteriores de componentes $f_x, f_y, f_z$
$\bar{\sigma}$	Vector de tensiones de componentes $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}$
$\Omega$	Volumen de la pieza en estudio
$\delta\Omega_2$	Trozo del contorno donde se conocen las tensiones
$\delta\Omega_1$	Trozo del contorno donde se conocen los desplazamientos
$\bar{u}$	Desplazamientos conocidos en el contorno $\delta\Omega_1$
$\bar{\sigma}$	Tensiones conocidas en el contorno $\delta\Omega_2$

## RESUMEN

La presente tesis utiliza el Método de los Elementos Finitos (MEF) para el análisis de esfuerzos en engranes cilíndricos helicoidales.

El primer capítulo trata sobre los conceptos básicos, geometría y nomenclatura de engranajes. Se expone primero los engranes rectos, para luego hablar sobre los engranes cilíndricos helicoidales, anotando las similitudes y diferencias que existen con los rectos. También se presenta lo referente a los esfuerzos en los dientes y a los esfuerzos de contacto.

El segundo capítulo muestra las bases teóricas y particularidades del Método de los Elementos Finitos. El procedimiento para el uso de los programas computacionales de elementos finitos. Y un análisis de los resultados obtenidos por el Método de los Elementos Finitos y su campo de aplicación.

El tercer capítulo se realiza el cálculo analítico de los esfuerzos en los engranes, tanto en la base del diente, como los esfuerzos superficiales. Para esto se usaran las ecuaciones del esfuerzo AGMA.

El cuarto capítulo detalla la creación del modelo espacial para la simulación, explicando cada uno de los pasos. La creación de la geometría del engrane cilíndrico helicoidal es uno de los pasos más complicados, se la ha realizado con la ayuda del software gratuito "TrueGear" en el programa "AutoCAD". También se explica los parámetros para la generación de la malla en el programa "ALGOR".

El quinto capítulo muestra todos los pasos posteriores a la creación del modelo para el análisis mediante el Método de los Elementos Finitos. Se realizan varias simulaciones con variaciones en la geometría y aplicación de las cargas y se van tabulando los resultados obtenidos. Además se realiza la comparación entre los resultados obtenidos de las simulaciones y los resultados analíticos.

## PRESENTACIÓN

El uso de los engranajes para la transmisión de movimiento se remonta hace cientos de años. Hay referencias en textos antiguos de los que se puede concluir que los griegos en el año 250 A.C. ya conocían estos elementos, en los bosquejos de máquinas realizados por Leonardo da Vinci nacido en el año de 1452, se observan engranes de diversos tipos. Con la Revolución Industrial se comienzan a crear máquinas que usan gran cantidad de engranajes, pero no es hasta el año de 1892 que Wilfred Lewis propone un método para el cálculo de los esfuerzos en la base del diente.

Para el cálculo de los esfuerzos Lewis toma uno de los dientes del engrane y lo considera como una viga en voladizo, corrigiendo las diferencias mediante unos factores de forma, de aplicación de las cargas, etc.

Las actuales fórmulas de AGMA (Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes) se basan en el trabajo inicial de Lewis, pero se han ido corrigiendo los factores para que los esfuerzos calculados se asemejen más a los reales.

AGMA realiza continuamente modificaciones a las fórmulas de cálculo para engranajes, para que estas se aproximen más a la realidad. Sin embargo los esfuerzos verdaderos varían de los calculados, ya que en el modelo real existe una distribución de esfuerzos espacial. Esto es más evidente aún en los engranes cilíndricos helicoidales debido a su compleja geometría.

Las fórmulas desarrolladas por AGMA son principalmente para engranes rectos y se realiza transformaciones para engranes helicoidales, es por esto que las fórmulas solo son válidas hasta cierto ángulo de hélice.

Es por todo esto que es totalmente válido el cálculo de los esfuerzos en los engranes por otros métodos. En los últimos años con la gran capacidad de los

equipos de cómputo se han desarrollado una variedad de programas que aplican el Método de los Elementos Finitos, que es una buena alternativa para el análisis de esfuerzos en todo tipo de geometrías complejas y en este caso en engranes cilíndricos helicoidales.

En la Escuela Politécnica Nacional no se dispone de equipos de pruebas para poder hacer ensayos con prototipos reales y así experimentar con variaciones en la geometría de los engranes. Por lo tanto el análisis mediante el MEF es una opción válida para realizar experimentos en los que se compruebe la teoría.

Si bien en la EPN existen ya trabajos de simulación en engranes rectos, este es el primero en engranes helicoidales. Esta tesis no tiene que ser un trabajo aislado, sino la primera en una serie de investigaciones en las que cada vez se vaya profundizando cada vez más en el tema.

La modelación y mallado de geometrías complejas muchas veces presenta inconvenientes que no se encuentran en las más simples. Es aquí donde se prueba la capacidad del software de análisis por el MEF.

La falta de acceso a las normas que rigen el comportamiento de los engranes, como son ISO y AGMA, hace que se limite la posibilidad de profundizar en el tema del cálculo analítico.

# CAPÍTULO 1

## FUNDAMENTO TEÓRICO

### 1.1 INTRODUCCIÓN

Los engranajes o ruedas dentadas son uno de los mejores medios para la transmisión de movimiento de rotación de un eje a otro. Es por eso que actualmente son uno de los elementos mecánicos más usados, prácticamente se los encuentra en cualquier máquina o equipo.

### 1.2 ENGRANES

Los engranes son elementos mecánicos dentados que se utilizan para transmitir potencia mecánica entre dos ejes a una distancia determinada mediante el contacto directo entre dos cuerpos sólidos unidos rígidamente a cada uno de los ejes. El *piñón* es el menor de dos engranes acoplados y por lo general transmite potencia; el mayor se llama *engrane, rueda* o *corona*.

Los engranajes están formados por dos ruedas dentadas. Si el sistema está compuesto de más de un par de ruedas dentadas, se denomina tren de engranajes.

#### 1.2.1 TIPOS DE ENGRANAJES

Existen diversas formas de clasificar los engranajes, la más utilizada es la que corresponde a la disposición espacial que presentan los ejes geométricos de rotación de las ruedas.<sup>1</sup>

---

<sup>1</sup> GONZÁLEZ REY Gonzalo; “Cálculo de Engranajes Cilíndricos”; Ciudad Habana; 2001; p.1.

Por la disposición de los ejes, los engranajes se clasifican en:

Ejes paralelos:

- Engranajes de ruedas cilíndricas con dientes rectos.
- Engranajes de ruedas cilíndricas con dientes helicoidales.
- Engranajes de ruedas cilíndricas con dientes bihelicoidales.
- Engranajes de ruedas elípticas.
- Engranajes de linterna.
- Engranajes beveloide.

Ejes concurrentes:

- Engranajes de ruedas cónicas con dientes rectos.
- Engranajes de ruedas cónicas con dientes tangenciales.
- Engranajes de ruedas cónicas con dientes circulares.
- Engranajes de ruedas cónicas con dientes cicloidales.
- Engranajes de ruedas cónicas con dientes evolventes.
- Engranajes de ruedas cónicas con dientes bihelicoidales.
- Engranajes de rueda cónica plana y rueda cilíndrica.

Ejes cruzados:

- Engranajes helicoidales.
- Engranajes de tornillo sinfín cilíndrico.
- Engranajes de tornillo sinfín globoidal.
- Engranajes hipoidales.
- Engranajes espiroidales.
- Engranajes helicón.

### **1.2.2 NOMENCLATURA**

Los engranes cilíndricos rectos son el tipo más simple y corriente que existe. Su contorno es de forma cilíndrica circular y sus dientes son paralelos al eje de rotación. En la Figura 1.1 se representa la geometría del engrane recto.

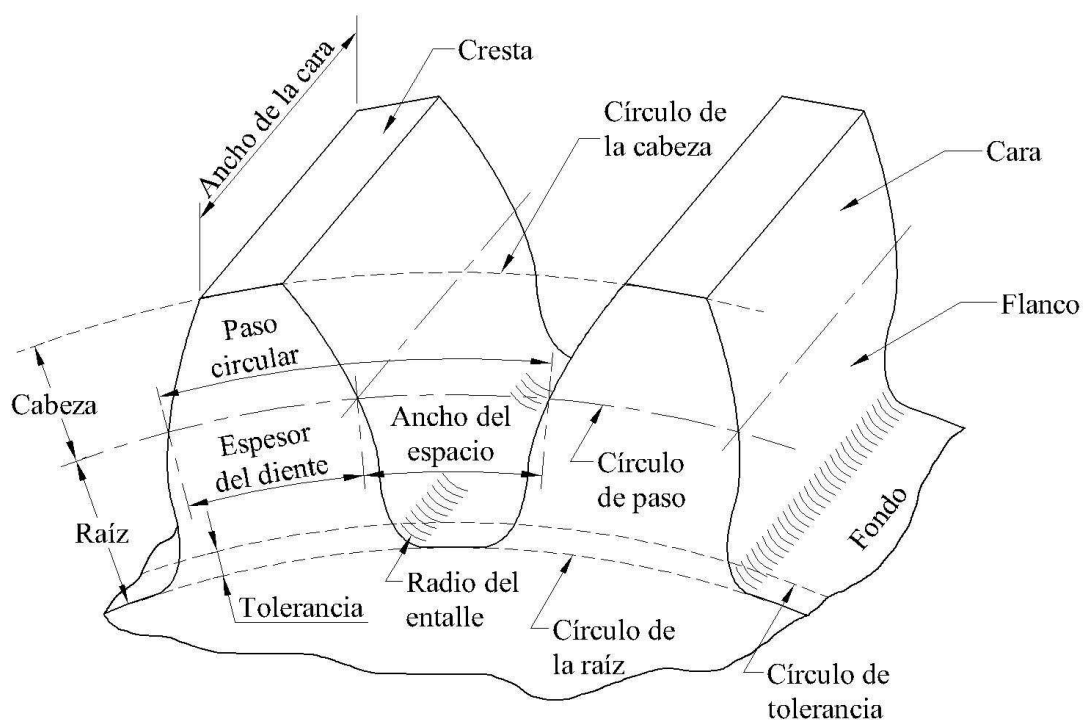


Figura 1.1 Nomenclatura de los dientes de engranes rectos<sup>2</sup>

El círculo primitivo o de paso es el círculo teórico a lo largo del cual engranan los dientes. Con relación al círculo primitivo se determinan todas las características que definen los diferentes elementos de los dientes de los engranajes. Los círculos primitivos de un par de engranes acoplados son tangentes entre sí.

Espesor del diente es el grosor del diente en la zona de contacto, o sea, del diámetro primitivo.

Ancho del espacio es la distancia entre dos dientes en el círculo de paso.

El paso circular  $p$  es la distancia, medida sobre el círculo de paso, desde un punto en un diente hasta un punto correspondiente en un diente adyacente.

$$p = \frac{\pi d}{N} \quad (1.1)$$

donde:  $d$  = diámetro de paso, [mm] o [pulg]

$N$  = número de dientes

<sup>2</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 842.



El módulo  $m$  de un engrane es una característica de magnitud que se define como la relación entre la medida del diámetro primitivo expresado en milímetros y el número de dientes.

$$m = \frac{d}{N} \quad (1.2)$$

donde:  $d$  = diámetro de paso, [mm]

$$p = \pi m \quad (1.3)$$

El módulo está indicado por números que corresponden a tamaños normalizados de los dientes. Dos engranes que engranen tienen que tener el mismo módulo.

En los países anglosajones se emplea otra característica llamada “diametral pitch”, que es inversamente proporcional al módulo.

El paso diametral  $P$  o “diametral pitch” es la relación entre el número de dientes y el diámetro de paso. Es el índice del tamaño del diente cuando se utilizan unidades del sistema inglés y se expresa en dientes por pulgada.

$$P = \frac{N}{d} \quad (1.4)$$

donde:  $d$  = diámetro de paso, [pulg]

$$pP = \pi \quad (1.5)$$

El diámetro exterior es el diámetro de la circunferencia que limita la parte exterior del engrane. El diámetro interior es el diámetro de la circunferencia que limita el pie del diente.

La cabeza del diente  $a$ , también conocida con el nombre de “adendum”, es la parte del diente comprendida entre el diámetro exterior y el diámetro primitivo. La

raíz  $b$ , también conocida con el nombre de “dedendum”, es la parte del diente comprendida entre la circunferencia interior y la circunferencia primitiva. La altura del diente es la suma de la altura de la cabeza más la altura de la raíz.

El ancho de cara  $F$  es la dimensión del diente medida en dirección axial.

La tolerancia es la cantidad por la que la raíz de un engrane dado excede la cabeza de su engrane acoplado. La holgura es la cantidad por la cual el ancho del espacio de un diente supera el espesor del diente de acoplamiento medido en círculos de paso.

### 1.2.3 RELACIÓN DE CONTACTO

La relación de contacto o duración del engrane es el número promedio de dientes en contacto cuando giran los engranes.

La línea de acción o segmento de engrane es la trayectoria perpendicular a los perfiles conjugados de un par de engranes, en la cual se representa la dirección de las fuerzas, así como el lugar geométrico de los puntos de contacto.

El ángulo de presión  $\phi$  es el formado por la línea de presión con la línea horizontal tangente a la circunferencia de paso, ( $20^\circ$  ó  $25^\circ$  son los ángulos normalizados).

En la Figura 1.2, se muestran la línea de acción y el ángulo de presión.

Los círculos tangentes a la línea de presión, se denominan círculos base. El diámetro del círculo base se determina por:

$$d_b = d \cos(\phi) \quad (1.6)$$

donde:  $d$  = diámetro de paso

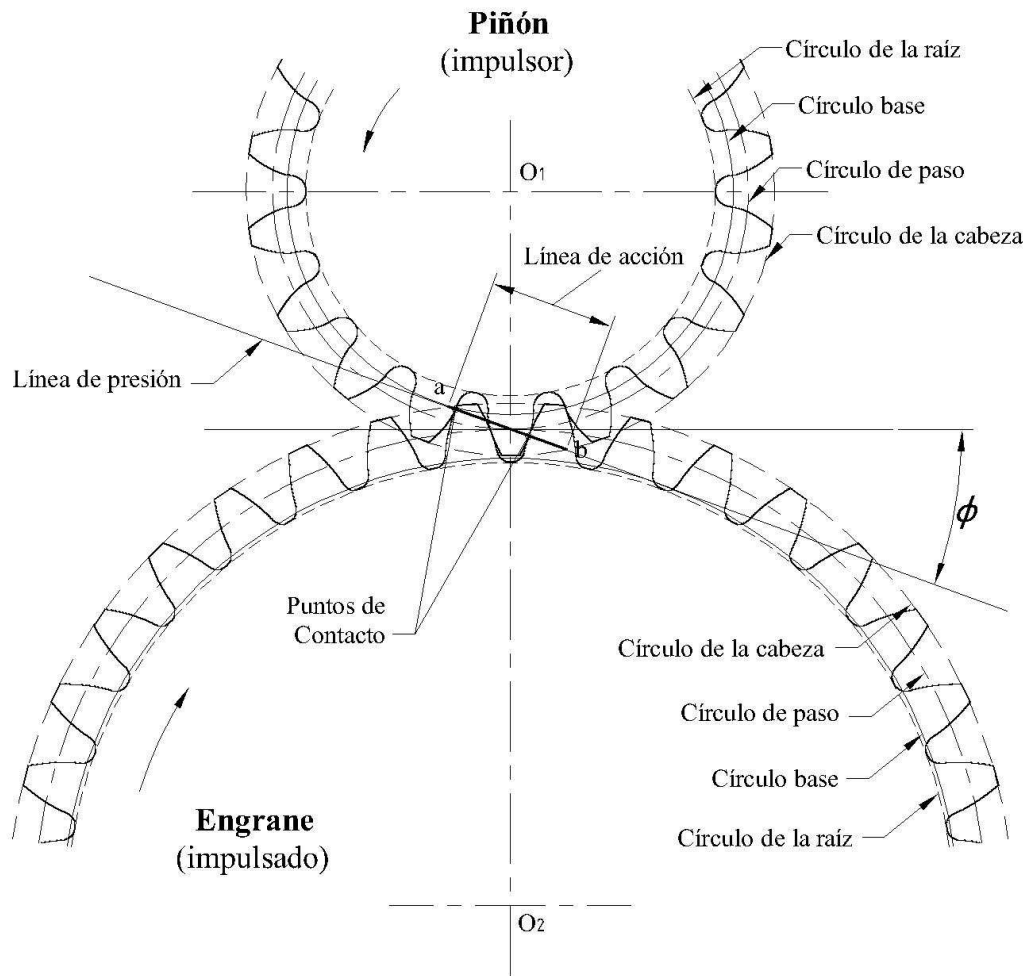


Figura 1.2 Relación de Contacto

El paso base es:

$$p_b = \frac{\pi d_b}{N} \quad (1.7)$$

Reemplazando:

$$p_b = p \cos(\phi) \quad (1.8)$$

La relación de contacto  $m_c$  es la relación entre la longitud del segmento  $ab$  o línea de acción y el paso base. Se puede calcular mediante la ecuación:<sup>3</sup>

$$m_c = \frac{L_{ab}}{p_b} = \frac{\sqrt{r_{aP}^2 - r_{bP}^2} + \sqrt{r_{aG}^2 - r_{bG}^2} - c \sin(\phi)}{p_b} \quad (1.9)$$

<sup>3</sup> JUVINALL Robert; Fundamentos de Diseño para Ingeniería Mecánica; Primera Edición; Limusa; México; 1993; p. 515.

donde:  $r_{aP}$  = radio de cabeza del piñón  
 $r_{bP}$  = radio base del piñón  
 $r_{aG}$  = radio de cabeza de la rueda  
 $r_{bG}$  = radio base de la rueda  
 $c$  = distancia entre centros  $O_1O_2$

### 1.3 ENGRANES CILÍNDRICOS HELICOIDALES

Los engranes cilíndricos de dentado helicoidal están caracterizados por su dentado oblicuo con relación al eje de rotación. En estos engranajes el movimiento se transmite de modo igual que en los cilíndricos de dentado recto, pero con mayores ventajas. Los ejes de los engranajes helicoidales pueden ser paralelos o cruzarse, generalmente a  $90^\circ$ . Para eliminar el empuje axial el dentado puede hacerse doble helicoidal.

Los engranes helicoidales tienen la ventaja que transmiten más potencia que los rectos, y también pueden transmitir mayor velocidad, son más silenciosos y más duraderos; además, pueden transmitir el movimiento de ejes que se corten. Entre sus inconvenientes se tiene que se desgastan más que los rectos, son más caros de fabricar y necesitan generalmente mayor lubricación que los rectos.

Lo más característico de un engrane cilíndrico helicoidal es la hélice que forma, siendo considerada la hélice como el avance de una vuelta completa del diámetro primitivo del engrane. De esta hélice deriva el ángulo  $\psi$  (ángulo de hélice) que forma el dentado con el eje axial. Este ángulo tiene que ser igual para las dos ruedas que engranan pero de orientación contraria.

#### 1.3.1 NOMENCLATURA DE LOS ENGRANES HELICOIDALES

Los parámetros que rigen a los engranes cilíndricos rectos como el paso circular y el ángulo de presión, se miden en los engranes cilíndricos helicoidales en el plano transversal o de rotación. Como ahora los dientes están inclinados, se debe

determinar estos parámetros para el plano normal al diente. En la Figura 1.3 se muestra el corte de una cremallera helicoidal para explicar como se mide el paso circular y el ángulo de presión en el plano normal.

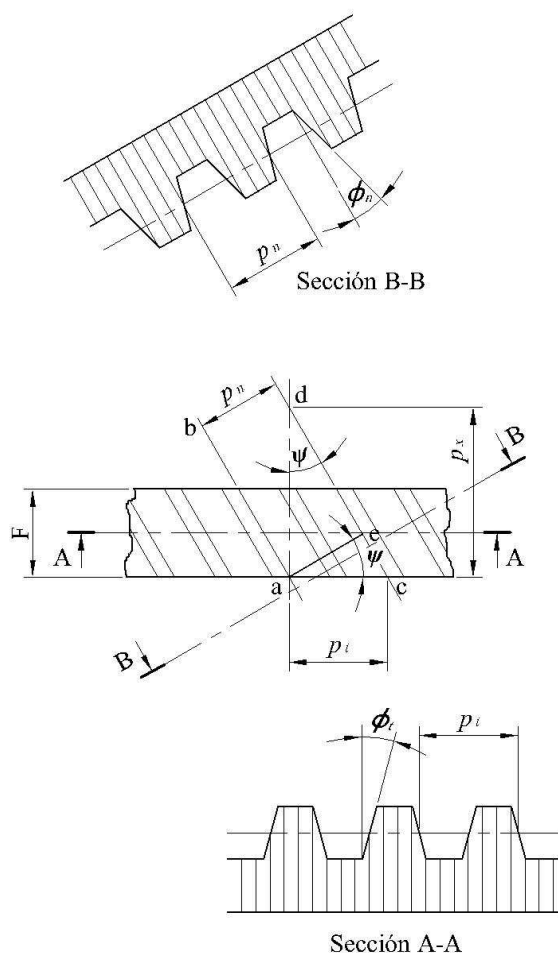


Figura 1.3 Parte de una cremallera helicoidal<sup>4</sup>

La distancia entre dos puntos correspondientes de dientes helicoidales adyacentes, medida en el plano normal, es el paso circular normal  $p_n$ . Este paso circular normal se relaciona con el paso circular transversal  $p_t$  de la siguiente fórmula:

$$p_n = p_t \cos \psi \quad (1.10)$$

Como el producto de los pasos circular y diametral es igual a  $\pi$ , tanto para el plano normal como para el plano transversal, el paso diametral normal  $P_n$  se calcula como:

<sup>4</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 861.

$$P_n = \frac{P_t}{\cos \psi} \quad (1.11)$$

Y como  $p = \pi m$ , se tiene:

$$m_t = \frac{m}{\cos \psi} \quad (1.12)$$

La distancia  $ad$  es el paso axial  $p_x$  y se calcula mediante la fórmula:

$$p_x = \frac{P_t}{\tan \psi} \quad (1.13)$$

El ángulo de presión en la dirección normal difiere del ángulo de presión en la dirección transversal o de rotación, debido a la inclinación de los dientes. Estos ángulos se relacionan entre si mediante la expresión:

$$\cos \psi = \frac{\tan \phi_n}{\tan \phi_t} \quad (1.14)$$

El ángulo normalizado de  $20^\circ$  o  $25^\circ$  es el medido en el plano normal.

### 1.3.2 NÚMERO VIRTUAL DE DIENTES

Para el cálculo de la resistencia a la flexión del diente helicoidal se trabaja con el número virtual de dientes o numero equivalente de dientes  $N_e$ . El plano normal de un engrane helicoidal interseca al cilindro primitivo formando una elipse. La forma del diente en el plano normal es casi la misma que la de un diente de engrane recto que tenga un radio del círculo primitivo igual al radio  $R_e$  de la elipse. Por geometría analítica se puede determinar este radio.<sup>5</sup>

$$R_e = \frac{d}{2 \cos^2 \psi} \quad (1.15)$$

El número virtual de dientes se define como el número de dientes en un engrane de radio  $R_e$ , y se puede determinar mediante la formula:

$$N_e = \frac{N}{R_e \cos^3 \psi} \quad (1.16)$$

---

<sup>5</sup> JUVINALL Robert; Fundamentos de Diseño para Ingeniería Mecánica; Primera Edición; Limusa; México; 1993; p. 554.

### 1.3.3 RELACIÓN DE CONTACTO EN ENGRANES HELICOIDALES

Para el cálculo de los esfuerzos en los dientes del engrane helicoidal la relación de contacto no reviste mayor importancia, sin embargo para la creación de la geometría (modelación) de los engranes es necesario conocer este valor.

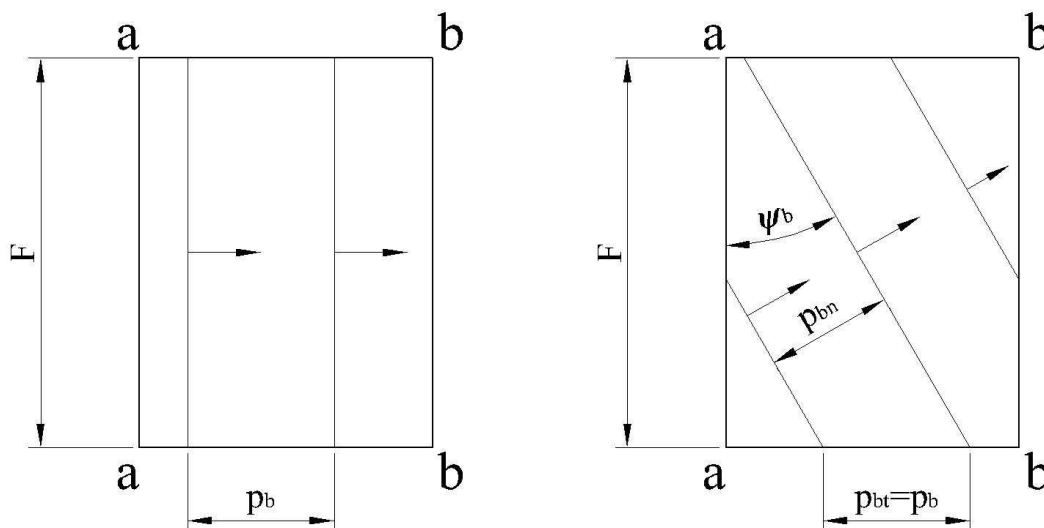


Figura 1.4 Planos de engrane recto y helicoidal

El “plano de engrane” es aquel plano que siendo tangente a ambos cilindros base, resulta acotado y de ancho igual a la línea de acción o segmento de engrane.

En la Figura 1.4 se representan dos planos de engrane de idénticas dimensiones y de el mismo paso base circular, en un mismo instante. Correspondiendo la figura de la izquierda a un dentado recto y la de la derecha a un dentado helicoidal con ángulo de hélice en el cilindro base  $\psi_b$ . Como se desprende de la comparación de las figuras, con el dentado helicoidal se aumenta la cantidad de dientes en contacto simultáneo, o sea se obtiene una relación de contacto mayor. Además al iniciar y terminar el contacto por un punto y no por una recta, como sucede en el dentado recto, se logra una suavidad de marcha mayor (menor vibración). Las flechas en las figuras señalan el sentido de marcha de las líneas de contacto sobre el plano.<sup>6</sup>

El ángulo de hélice en el cilindro base  $\psi_b$ , se lo calcula con la siguiente ecuación:

<sup>6</sup> MAYER Omar E.; “Engranes Helicoidales Teórico”; Universidad de Buenos Aires; 2002; p. 6.

$$\tan \psi_b = \tan \psi \cos \phi_t \quad (1.17)$$

La relación de contacto o duración para el engrane helicoidal es la relación de contacto del engrane recto más la longitud debida a la inclinación:

$$m_c = \frac{L_{ab}}{p_b} + \frac{F \tan \psi_b}{p_b} \quad (1.18)$$

Realizando el reemplazo de  $L_{ab}$  por la ecuación (1.9) y tomando en cuenta que esta distancia debe ser medida en el plano transversal:

$$m_c = \frac{\sqrt{r_{aP}^2 - r_{bP}^2} + \sqrt{r_{aG}^2 - r_{bG}^2} - c \sin(\phi_t) + F \tan \psi_b}{p_b} \quad (1.19)$$

## 1.4 ESFUERZOS EN LOS DIENTES

Para la comprobación de la capacidad de carga de los engranajes cilíndricos tanto rectos como helicoidales, existen dos criterios que han sido los más estudiados: *resistencia a las tensiones en la base del diente* debida a la flexión y *resistencia a los esfuerzos de contacto* debida a la picadura.<sup>7</sup>

Existen diferentes organizaciones internacionales que se dedican a la creación de normas para el cálculo de la capacidad de carga de engranajes cilíndricos de ejes paralelos. Entre estas se tienen ISO, AGMA, DIN y GOST. De todas estas organizaciones la que mayor desarrollo ha realizado en el área de engranes es la Asociación Americana de Fabricantes de Engranajes (AGMA). Las normas AGMA para el cálculo de la capacidad de carga en engranajes cilíndricos con dientes de evolvente son: ANSI/AGMA2001 (sistema inglés) y ANSI/AGMA2101 (sistema métrico).

El cálculo del esfuerzo en la base del diente debido a la flexión se fundamenta, aún para las normas actuales, en la ecuación de flexión de Lewis planteada en el año de 1892. El cálculo de los esfuerzos de contacto se basa en la ecuación de Hertz para el contacto entre dos cilindros.

<sup>7</sup> GONZÁLEZ REY Gonzalo; "Cálculo de Engranajes Cilíndricos"; Ciudad Habana; 2001; p.26.



### 1.4.1 ECUACIÓN DE FLEXIÓN DE LEWIS

Para la deducción de la ecuación de Lewis se toma al diente como una viga en voladizo con sección transversal  $F \times t$ , longitud  $l$  y una carga  $W_t$  uniformemente distribuida a lo largo del ancho de la cara  $F$ , como la mostrada en la Figura 1.5.

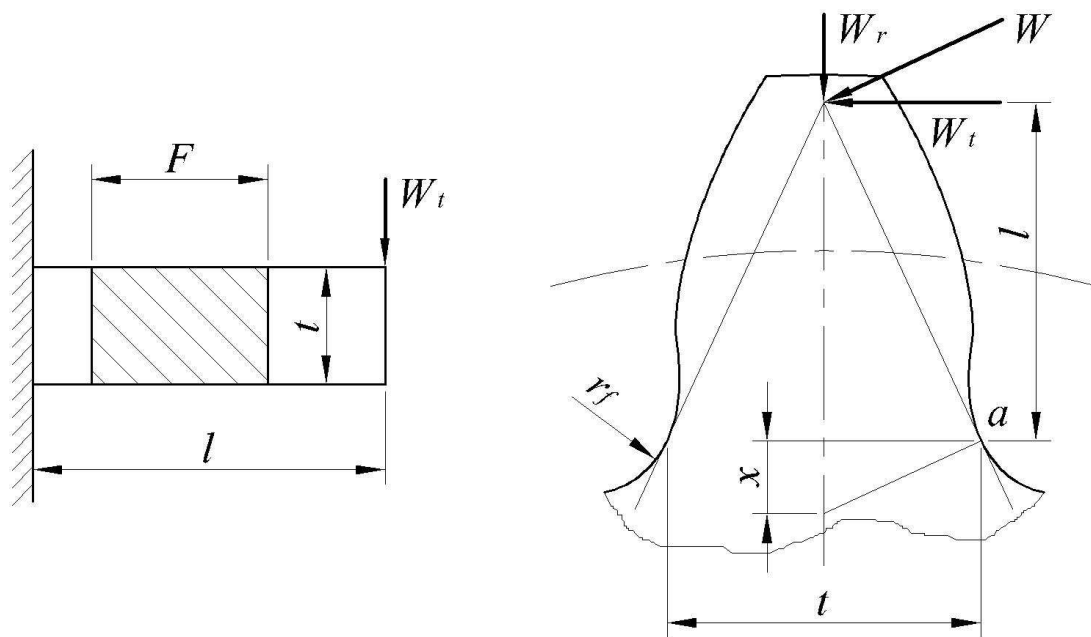


Figura 1.5 Diente del engrane como viga en voladizo<sup>8</sup>

Con la fórmula del esfuerzo de flexión en vigas:

$$\sigma = \frac{M}{I/c} = \frac{6W_t l}{Ft^2} \quad (1.20)$$

Se supone que el esfuerzo máximo en un diente de engrane se produce en el punto  $a$ . Reemplazando algunos términos, se obtiene la ecuación original de Lewis.

$$\sigma = \frac{W_t P}{FY} \quad (1.21)$$

Donde  $Y$  es el factor de forma de Lewis, tabulado en el Anexo 1 y  $P$  el paso diametral.

<sup>8</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 908.

### 1.4.2 ANÁLISIS DE FUERZAS EN ENGRANES HELICOIDALES

Para el diseño de engranes se utiliza las componentes de la fuerza total que tiene dos ángulos el de presión  $\phi$  y el ángulo de hélice  $\psi$ .

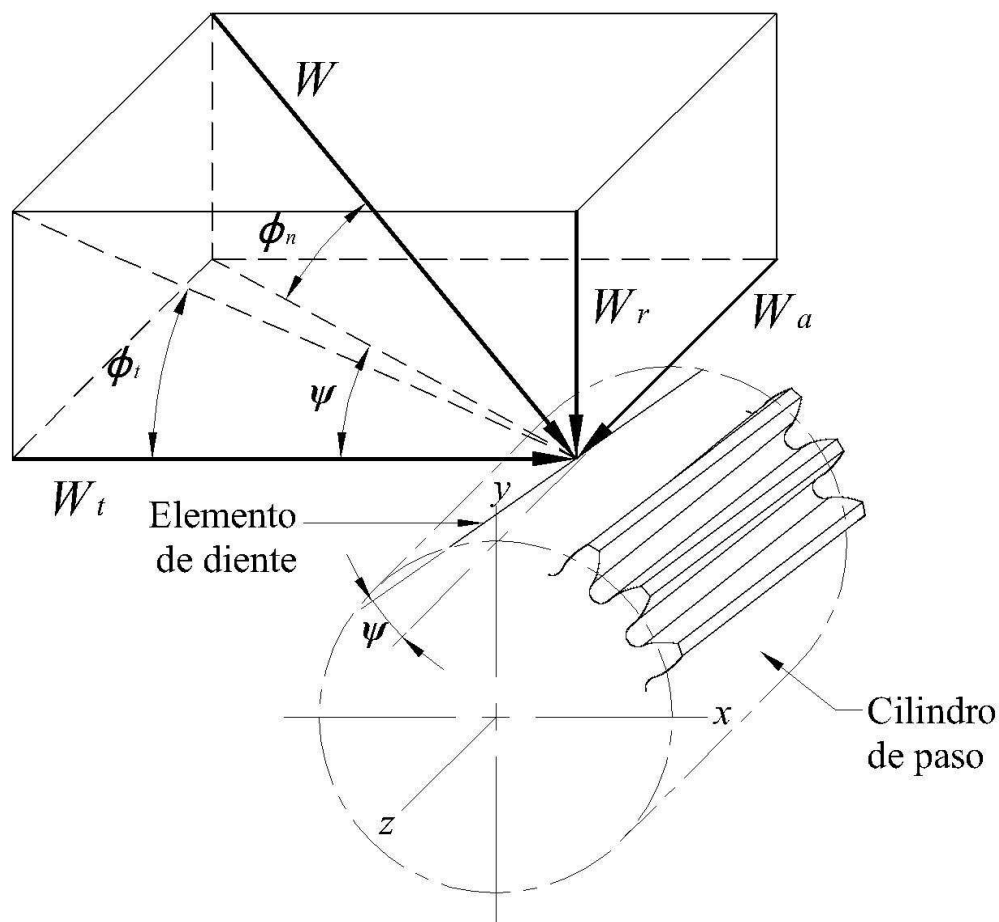


Figura 1.6 Fuerzas que actúan en los dientes de un engrane helicoidal

En la Figura 1.6 se muestra las fuerzas que actúan en los dientes de un engrane helicoidal con sentido a la derecha. El punto de aplicación de las fuerzas se encuentra en el plano de paso y en el centro de la cara del engrane. De la geometría se puede determinar que las tres componentes de la fuerza total normal  $W$  del diente son:<sup>9</sup>

$$\begin{aligned} W_r &= W \operatorname{sen} \phi_n \\ W_t &= W \cos \phi_n \cos \psi \\ W_a &= W \cos \phi_n \operatorname{sen} \psi \end{aligned} \quad (1.22)$$

<sup>9</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 874.

donde:  $W$  = fuerza total  
 $W_r$  = componente radial  
 $W_t$  = componente tangencial o carga transmitida  
 $W_a$  = componente axial o carga de empuje

En un caso real el dato conocido es la potencia y de ahí se puede calcular la componente tangencial  $W_t$ , por lo cual es necesario calcular las otras fuerzas.

$$\begin{aligned} W_r &= W_t \tan \phi_t \\ W_a &= W_t \tan \psi \\ W &= \frac{W_t}{\cos \phi_n \cos \psi} \end{aligned} \quad (1.23)$$

Para poder relacionar las componentes de la fuerza del engrane y la potencia asociada al eje, se debe conocer la velocidad en la línea de paso, esta se calcula con:

$$V = \frac{\pi dn}{60000} \quad (1.24)$$

donde:  $V$  = velocidad en la línea de paso, [m/s]  
 $d$  = diámetro de paso, [mm]  
 $n$  = velocidad angular, [rpm]

La potencia  $H$  es igual a:

$$H = W_t V \quad (1.25)$$

De donde se despeja  $W_t$ :

$$W_t = \frac{60000H}{\pi dn} \quad (1.26)$$

donde:  $W_t$  = carga transmitida, [kN]  
 $H$  = potencia, [kW]

### 1.4.3 ESFUERZOS DE CONTACTO DE HERTZ

Cuando dos cuerpos elásticos curvos se presionan entre sí, el contacto puntual o lineal cambia a un área de contacto, y los esfuerzos que se inducen en los dos objetos son tridimensionales. Esto ocurre por las deflexiones de los objetos, en el punto o línea de contacto. Estas áreas de contacto son sumamente pequeñas por lo cual los esfuerzos de compresión producidos son sumamente altos.

El análisis original de los esfuerzos elásticos de contacto fue publicado en 1881 por Heinrich Hertz, por lo cual este tipo de esfuerzos llevan su nombre.

En el caso de los engranes rectos se analiza el contacto entre dos cilindros de longitud  $l$  y diámetros  $d_1$  y  $d_2$ , cuyas constantes elásticas son  $E_1, \nu_1, E_2, \nu_2$ , como se muestra en la Figura 1.7.

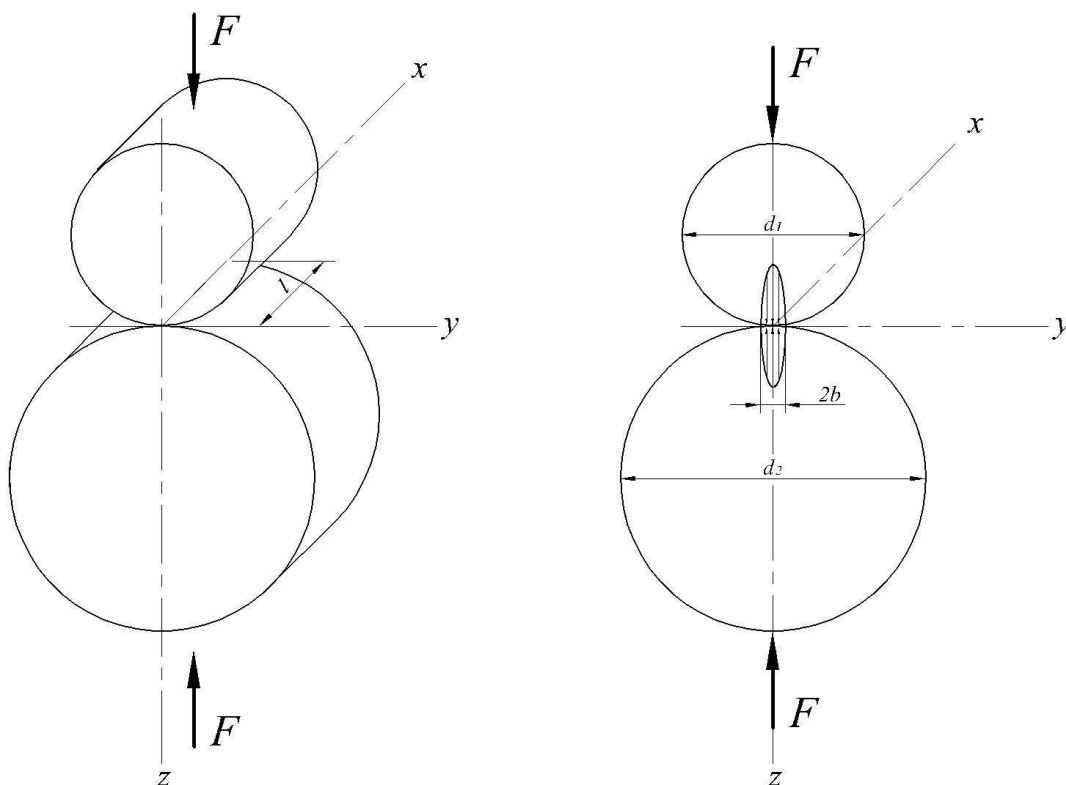


Figura 1.7 Esfuerzo de contacto entre dos cilindros<sup>10</sup>

<sup>10</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 147.

El área de contacto es un rectángulo angosto de ancho  $2b$  y longitud  $l$ , y la distribución de la presión es elíptica. El semiancho  $b$  está dado por la ecuación:

$$b = \sqrt{\frac{2F \left[ \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2} \right]}{\pi l \left( \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \right)}} \quad (1.27)$$

La presión máxima  $p_{m\acute{a}x}$  corresponde a:

$$p_{m\acute{a}x} = \frac{2F}{\pi b l} \quad (1.28)$$

En el caso de los engranes rectos, se sustituye a  $F$  por la fuerza normal  $W$  y a los diámetros por los valores instantáneos de curvatura en los perfiles del piñón y del engrane. Además suponiendo que los esfuerzos máximos se producen en la línea de paso, se tiene que los diámetros son iguales a:

$$\begin{aligned} d_1 &= d_p \operatorname{sen} \phi \\ d_2 &= d_G \operatorname{sen} \phi \end{aligned} \quad (1.29)$$

donde:  $d_p$  = diámetro de paso del piñón  
 $d_G$  = diámetro de paso de la rueda

Reemplazando en la ecuación (1.27), se puede calcular el semiancho de contacto  $b$  en engranes:

$$b = \sqrt{\frac{2W \left[ \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2} \right]}{\pi l \left[ \frac{1}{(d_p \operatorname{sen} \phi)} + \frac{1}{(d_G \operatorname{sen} \phi)} \right]}} \quad (1.30)$$

El esfuerzo de contacto  $\sigma_H$ , usando  $r_1$  y  $r_2$  como los valores instantáneos de los radios de curvatura en los perfiles del piñón y de la rueda y sustituyendo a  $l$  con el ancho de cara  $F$ , es igual a:<sup>11</sup>

$$\sigma_H = \sqrt{\frac{W_t \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)}{\pi F \cos \phi \left[ \frac{(1-\nu_1^2)}{E_1} + \frac{(1-\nu_2^2)}{E_2} \right]}} \quad (1.31)$$

En esta fórmula se basa AGMA para deducir la ecuación del esfuerzo de contacto que se describe más adelante.

<sup>11</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 915.

## 1.5 ESFUERZO DEBIDO A LA FLEXIÓN

AGMA plantea dos ecuaciones fundamentales del esfuerzo, una para el esfuerzo flexionante y otra para la resistencia a la picadura (esfuerzo de contacto). El uso de las normas AGMA es del todo voluntario.

La ecuación fundamental o *número de esfuerzo* para la flexión es:<sup>12</sup>

$$\sigma = W_t K_O K'_V K_s \frac{1}{F m_t} \frac{K_m K_B}{J} \quad (1.32)$$

donde:

- $W_t$  = carga tangencial transmitida
- $K_O$  = factor de sobrecarga
- $K'_V$  = factor dinámico
- $K_s$  = factor de tamaño
- $F$  = ancho de cara del elemento más angosto
- $m_t$  = módulo métrico transversal
- $K_m$  = factor de distribución de carga
- $K_B$  = factor de espesor del aro
- $J$  = factor geométrico para resistencia a la flexión  
(incluye el factor de concentración de esfuerzo en la raíz  $K_f$ )

### 1.5.1 FACTOR GEOMÉTRICO $J$

El factor geométrico  $J$  de AGMA se utiliza para introducir el efecto de la forma del diente en la ecuación del esfuerzo. Este factor utiliza un valor modificado del factor de forma de Lewis, que se denota también con  $Y$ ; un *factor de concentración de esfuerzo por fatiga*  $K_f$  y una *relación de repartición de carga*  $m_N$ .

$$J = \frac{Y}{K_f m_N} \quad (1.33)$$

Los valores de los factores geométricos  $J$  se muestran en las figuras del Anexo 2 y se calculan de la multiplicación de  $J'$  por el factor de modificación.

<sup>12</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 918.

### 1.5.2 FACTOR DINÁMICO $K'_V$

Los factores dinámicos se usan para tomar en cuenta imprecisiones en la fabricación y acoplamiento de dientes de engranes en movimiento.

AGMA define un conjunto de *números de control de calidad*. Los valores bajos de 3 a 7 corresponden a la mayoría de engranes de calidad comercial, los valores de 8 a 12 son de calidad de precisión. Estos números de control de calidad están relacionados con el *número de nivel de exactitud en la transmisión*  $Q_V$ .<sup>13</sup>

El factor dinámico  $K'_V$  es igual a:

$$K'_V = \left( \frac{A + \sqrt{200V}}{A} \right)^B \quad (1.34)$$

donde:  $V$  = velocidad en la línea de paso, [m/s]

$$\begin{aligned} A &= 50 + 56(1 - B) \\ B &= 0.25(12 - Q_V)^{2/3} \end{aligned} \quad (1.35)$$

### 1.5.3 FACTOR DE SOBRECARGA $K_O$

Este factor refleja la falta de uniformidad de los pares de torsión de transmisión y carga, en el funcionamiento de la máquina.

Los valores frecuentes para el factor de sobrecarga  $K_O$  se encuentran tabulados en la Tabla 1.1.

Tabla 1.1 Factores de sobrecarga<sup>14</sup>

Fuente de potencia	Máquina Impulsada		
	Uniforme	Impacto moderado	Impacto Pesado
Uniforme	1.00	1.25	1.75
Impacto ligero	1.25	1.50	2.00
Impacto medio	1.50	1.75	2.25

<sup>13</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 928.

<sup>14</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 939.

### 1.5.4 FACTOR DE TAMAÑO $K_s$

Este factor toma en cuenta la aparición de defectos por debajo de la superficie, debido a la ocurrencia de pequeños concentradores de tensión y a la influencia del tamaño en la calidad del material.<sup>15</sup>

AGMA sugiere  $K_s = 1$ , se puede usar también la siguiente ecuación:

$$K_s = 1.192 \left( \frac{F\sqrt{Y}}{P} \right)^{0.0535} \quad (1.36)$$

donde:  $Y$  = Factor de forma de Lewis

### 1.5.5 FACTOR DE DISTRIBUCIÓN DE CARGA $K_m$

El factor de distribución de carga también llamado *factor de montaje* refleja la precisión en la alineación de los engranes acoplados.

Existen diversos métodos para el cálculo de este factor. Algunos valores aproximados de este factor se encuentran en la Tabla 1.2.

Tabla 1.2 Factores de distribución de carga<sup>16</sup>

Características del soporte	Ancho de cara [pulg]			
	0 a 2	6	9	16 y más
Montaje preciso, claros pequeños de cojinete, deflexión mínima, engranes de precisión.	1.3	1.4	1.5	1.8
Montajes menos rígidos, engranes menos precisos, contacto en toda la cara.	1.6	1.7	1.8	2.2
Exactitud y montaje tal que el contacto existe en menos de la cara completa.	Más de 2.2			

<sup>15</sup> GONZÁLEZ REY Gonzalo; "Cálculo de Engranajes Cilíndricos"; Ciudad Habana; 2001; p.42.

<sup>16</sup> JUVINALL Robert; Fundamentos de Diseño para Ingeniería Mecánica; Primera Edición; Limusa; México; 1993; p. 528.



### 1.5.6 FACTOR DE ESPESOR DEL ARO $K_B$

Se usa cuando el espesor del aro no es suficiente para proporcionar soporte completo para la raíz del diente. Este factor depende de la relación de apoyo  $m_B$ , la cual es igual a:

$$m_B = \frac{t_R}{h_t} \quad (1.37)$$

donde:  $t_R$  = espesor del aro debajo del diente

$h_t$  = altura total del diente del engrane

En la Figura 1.8 se representa la geometría de la relación de apoyo. El factor del espesor del aro  $K_B$  está dado por:<sup>17</sup>

$$K_B = \begin{cases} 1.6 \ln \frac{2.241}{m_B} & m_B < 1.2 \\ 1 & m_B \geq 1.2 \end{cases} \quad (1.38)$$

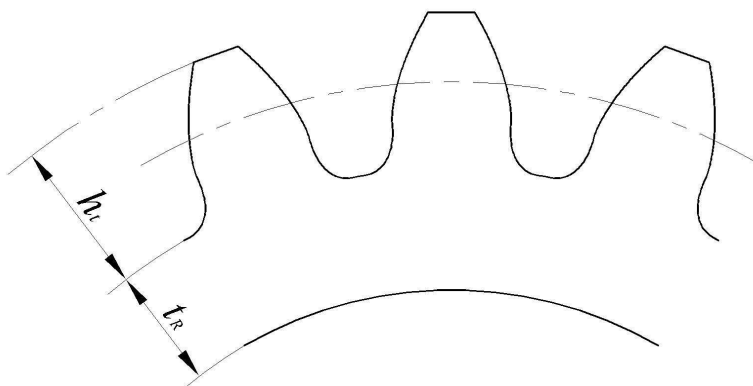


Figura 1.8 Relación de apoyo

### 1.5.7 ESFUERZO FLEXIONANTE PERMISIBLE

En el método AGMA la resistencia se modifica mediante diversos factores que producen valores limitantes del esfuerzo flexionante. La ecuación para el esfuerzo flexionante permisible es:<sup>18</sup>

$$\sigma_{perm} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{K_T K_R} \quad (1.39)$$

<sup>17</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 936.

<sup>18</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 921.

donde:  $S_t$  = resistencia a la flexión AGMA o  
 número de esfuerzo flexionante permisible  
 $Y_N$  = factor de ciclos de esfuerzo para resistencia a la flexión  
 $K_T$  = factor de temperatura  
 $K_R$  = factor de confiabilidad  
 $S_F$  = factor de seguridad AGMA a la flexión

#### 1.5.7.1 Número de esfuerzo flexionante permisible $S_t$

Los valores de la resistencia a la flexión AGMA se muestran en las figuras del Anexo 3.

La resistencia  $S_t$  es función del tipo de material y de la dureza Brinell  $H_B$ . Para aceros completamente endurecidos grado 1 es igual a:

$$S_t = 0.533H_B + 88.3 \text{ MPa} \quad (1.40)$$

y para grado 2:

$$S_t = 0.703H_B + 113 \text{ MPa} \quad (1.41)$$

#### 1.5.7.2 Factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la flexión $Y_N$

El objetivo del factor de ciclos de carga  $Y_N$  es modificar la resistencia a la flexión  $S_t$  para vidas que no sean  $10^7$  ciclos de carga aplicados de manera repetida.

Los valores del factor de ciclos de esfuerzo repetidamente aplicados de resistencia a la flexión se encuentran en la figura del Anexo 4.

#### 1.5.7.3 Factor de confiabilidad $K_R$

El factor de confiabilidad toma en cuenta el efecto de las distribuciones estadísticas de las fallas por fatiga del material. Las resistencias AGMA se basan en una confiabilidad del 99%.

La relación entre  $K_R$  y la confiabilidad  $R$  es no lineal, los valores de tablas son experimentales y aproximadamente iguales a:

$$\begin{aligned} 0.658 - 0.0759 \ln(1 - R) & \quad 0.5 \leq R \leq 0.99 \\ 0.50 - 0.109 \ln(1 - R) & \quad 0.99 \leq R \leq 0.9999 \end{aligned} \quad (1.42)$$

#### 1.5.7.4 Factor de temperatura $K_T$

Para temperaturas del disco del engrane de hasta 120 °C, se usa  $K_T = 1$ . Para temperaturas mayores, estos factores deben ser mayores que la unidad

## 1.6 ESFUERZO DE CONTACTO

La ecuación fundamental de AGMA para la resistencia a la picadura (esfuerzo de contacto) se expresa como:<sup>19</sup>

$$\sigma_c = C_p \sqrt{W_t K_O K'_V K_s \frac{K_m C_f}{d_p F I}} \quad (1.43)$$

donde:

- $C_p$  = coeficiente elástico
- $W_t$  = carga tangencial transmitida
- $K_O$  = factor de sobrecarga
- $K'_V$  = factor dinámico
- $K_s$  = factor de tamaño
- $K_m$  = factor de distribución de carga
- $C_f$  = factor de condición superficial
- $d_p$  = diámetro de paso del piñón
- $F$  = ancho de cara del elemento más angosto
- $I$  = factor geométrico para resistencia a la picadura

### 1.6.1 COEFICIENTE ELÁSTICO $C_p$

Por facilidad de cálculo se agrupa las constantes elásticas de la ecuación (1.31), definiendo el coeficiente elástico  $C_p$ , de acuerdo a la ecuación:

$$C_p = \sqrt{\frac{1}{\pi \left( \frac{1 - \nu_p^2}{E_p} + \frac{1 - \nu_G^2}{E_G} \right)}} \quad (1.44)$$

<sup>19</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 918.

donde:  $E_P$  = módulo de elasticidad del piñón  
 $\nu_P$  = coeficiente de Poisson del piñón  
 $E_G$  = módulo de elasticidad de la rueda  
 $\nu_G$  = coeficiente de Poisson de la rueda

También se encuentran los valores de  $C_p$  tabulados, para diferentes combinaciones de materiales para el piñón y la corona.

### 1.6.2 FACTOR GEOMÉTRICO $I$

El factor  $I$  de AGMA o *factor geométrico de resistencia a la picadura*, tiene un objetivo similar al factor  $J$ .

Se define la relación de las velocidades  $m_G$  como:

$$m_G = \frac{N_G}{N_P} = \frac{d_G}{d_P} \quad (1.45)$$

La relación de repartición de carga, es igual a:

$$m_N = \frac{P_N}{0.95Z} \quad (1.46)$$

donde:  $p_N$  = paso base normal  
 $Z$  = longitud de la línea de acción en el plano transversal  
 $m_N = 1$  para engranes rectos

El paso base normal es igual a:

$$p_N = p_n \cos \phi_n \quad (1.47)$$

La longitud de la línea de acción  $Z$  se puede obtener mediante la expresión:

$$Z = \left[ (r_P + a)^2 - r_{bP}^2 \right]^{1/2} + \left[ (r_G + a)^2 - r_{bG}^2 \right]^{1/2} - (r_P + r_G) \sin \phi_t \quad (1.48)$$

donde  $r_P$  y  $r_G$  son los radios de paso y  $r_{bP}$  y  $r_{bG}$  los radios del círculo base. El radio del círculo base está dado por:

$$r_b = r \cos \phi_t \quad (1.49)$$

Reemplazando estas variables en la ecuación (1.31) y agrupando los términos, se determina el factor geométrico de resistencia a la picadura para engranes rectos y helicoidales:

$$I = \begin{cases} \frac{\cos \phi_t \operatorname{sen} \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G + 1} & \text{engranes externos} \\ \frac{\cos \phi_t \operatorname{sen} \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G - 1} & \text{engranes internos} \end{cases} \quad (1.50)$$

### 1.6.3 FACTOR DE CONDICIÓN SUPERFICIAL $C_f$

Este factor depende del acabado superficial, esfuerzos residuales y efectos plásticos. Si estas causas producen un efecto perjudicial, AGMA sugiere un valor de  $C_f$  mayor que la unidad.

### 1.6.4 OTROS FACTORES

Los factores  $K'_V$ ,  $K_O$ ,  $K_s$  y  $K_m$  son los mismos que se calculan para el esfuerzo flexionante en las secciones 1.5.2, 1.5.3, 1.5.4 y 1.5.5 respectivamente.

### 1.6.5 ESFUERZO DE CONTACTO PERMISIBLE

En el método AGMA la ecuación para el esfuerzo de contacto permisible está dada por:<sup>20</sup>

$$\sigma_{c,perm} = \frac{S_c}{S_H} \frac{Z_N C_H}{K_T K_R} \quad (1.51)$$

donde:  $S_c$  = resistencia a la fatiga por contacto AGMA o

número de esfuerzo de contacto permisible

$Z_N$  = factor de ciclos de esfuerzo para resistencia a la picadura

$C_H$  = factor de la relación de la dureza

$K_T$  = factor de temperatura

<sup>20</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 922.

$K_R$  = factor de confiabilidad

$S_H$  = factor de seguridad AGMA a la picadura

### 1.6.5.1 Número de esfuerzo de contacto permisible $S_c$

Los valores de la resistencia a la fatiga por contacto AGMA se encuentran en la figura del Anexo 5.

La resistencia  $S_c$  es función del tipo de material y de la dureza Brinell  $H_B$ , para aceros completamente endurecidos grado 1 es igual a:

$$S_c = 2.22H_B + 200 \text{ MPa} \quad (1.52)$$

y para grado 2:

$$S_c = 2.41H_B + 237 \text{ MPa} \quad (1.53)$$

### 1.6.5.2 Factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la picadura $Z_N$

El objetivo del factor de ciclos de carga  $Z_N$  es modificar la resistencia a la picadura  $S_c$  para vidas que no sean  $10^7$  ciclos de carga aplicados de manera repetida.

Los valores correspondientes al factor de ciclos de esfuerzo de resistencia a la picadura se encuentran en la figura del Anexo 6.

### 1.6.5.3 Factor de la relación de la dureza $C_H$

El factor de la relación de la dureza  $C_H$  se usa solo para la rueda o corona. Su objetivo consiste en ajustar las resistencias superficiales entre el piñón y el engrane. Los valores de  $C_H$  se obtienen mediante la ecuación:

$$C_H = 1.0 + A'(m_G - 1.0) \quad (1.54)$$

donde:

$$\begin{aligned} A' &= 0 & \frac{H_{BP}}{H_{BG}} < 1.2 \\ A' &= 8.98(10^{-3}) \left( \frac{H_{BP}}{H_{BG}} \right) - 8.29(10^{-3}) & 1.2 \leq \frac{H_{BP}}{H_{BG}} \leq 1.7 \\ A' &= 0.00698 & \frac{H_{BP}}{H_{BG}} > 1.7 \end{aligned} \quad (1.55)$$

$H_{BP}$  y  $H_{BG}$  son los grados de dureza Brinell del piñón y del engrane respectivamente,  $m_G$  es la relación de velocidad.

#### **1.6.5.4 Factores $K_R$ y $K_T$**

Los factores  $K_T$  y  $K_R$  son los mismos que se calculan para el esfuerzo flexionante permisible en las secciones 1.5.7.3 y 1.5.7.4 respectivamente.

#### **1.6.5.5 Factores de Seguridad $S_F$ y $S_H$**

Los factores  $S_F$  y  $S_H$  son los factores de seguridad a flexión y picadura, se definen como la relación entre el esfuerzo permisible y el esfuerzo producido por las cargas aplicadas.

El esfuerzo producido en el caso de la flexión es lineal con la carga transmitida, pero en el caso de picadura se relaciona con la raíz de la carga. Por lo cual para comparar los factores de seguridad se debe comparar  $S_F$  con  $S_H^2$ , para determinar la amenaza de falla.<sup>21</sup>

---

<sup>21</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 937.

## CAPÍTULO 2

### MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

#### 2.1 BASES TEÓRICAS

El Método de los Elementos Finitos (MEF en castellano o FEM en inglés) es un método numérico muy general para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales parciales muy utilizado en diversos problemas de ingeniería y física.

El Método de los Elementos Finitos es, en la actualidad, la herramienta básica para resolver una gran cantidad de problemas de ingeniería, cuyas ecuaciones básicas se conocen, pero cuya resolución teórica es imposible o estaba restringida a casos extremadamente simples en geometría y condiciones de contorno.<sup>22</sup>

En la mecánica de sólidos las primeras publicaciones en las que se mostraba que se podían obtener soluciones razonablemente buenas del problema elástico reemplazando porciones de sólido por una barra elástica datan de los años cuarenta del pasado siglo. Sin embargo es en estos últimos años que el Método de los Elementos Finitos se ha extendido prácticamente a todas las ramas de la ingeniería.

El concepto básico de este método es el de dividir el continuo en un número finito de elementos, es decir discretizar el continuo y resolver sobre cada uno de los elementos las ecuaciones del sistema para después ensamblar la solución total.

La *malla* es el conjunto de elementos finitos en que se ha dividido el dominio del problema. Esta malla define un espacio de funciones de aproximación en el que

---

<sup>22</sup> ZURITA Jesús A.; El método de los elementos finitos; Universidad de Navarra; 2002, p 1.



se busca la mejor solución posible. En la Figura 2.1 se muestra una sección de un engrane helicoidal discretizada en elementos finitos.

Los puntos de interconexión de los elementos finitos se denominan *nodos*.

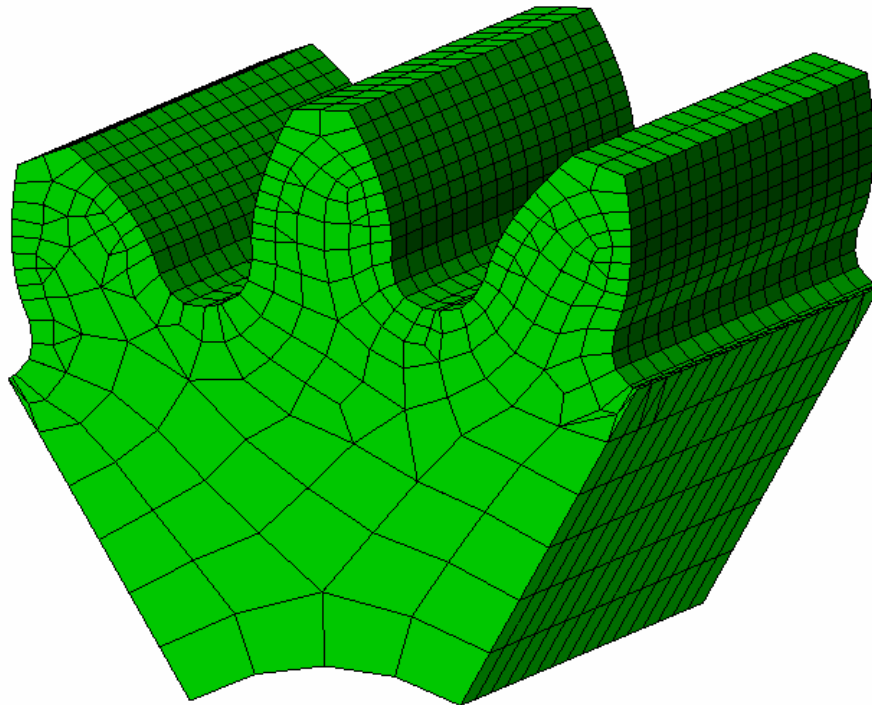


Figura 2.1 Sección de un engrane discretizada en elementos finitos

El Método de los Elementos Finitos, para un problema de mecánica de sólidos, se programa mediante el uso de computadoras para calcular el campo de desplazamientos, luego a través de relaciones cinemáticas y constitutivas las deformaciones y tensiones respectivamente.

Una importante propiedad del método es la convergencia; si se consideran particiones de elementos finitos sucesivamente más finas, la solución numérica calculada converge rápidamente hacia la solución exacta del sistema de ecuaciones.

## 2.2 ELASTICIDAD LINEAL<sup>23</sup>

La incógnita básica en elasticidad es el campo de desplazamientos del sólido que se denomina  $\vec{u}$  y posee, en el caso general de elasticidad tridimensional tres componentes.

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \quad (2.1)$$

Las variaciones de los desplazamientos generan deformación en los diferentes puntos del sólido. La deformación se expresa mediante una magnitud tensorial, el tensor de deformación, que es una matriz tres por tres simétrica, es decir, existen 6 valores diferentes de deformación. Estas seis cantidades se pueden organizar como un vector columna de seis componentes de la forma siguiente:

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Las relaciones existentes entre  $\vec{u}$  y  $\vec{\varepsilon}$  pueden expresarse como una matriz operacional  $H$  de la forma:

$$\vec{\varepsilon} = H\vec{u} \quad (2.3)$$

Por lo tanto la matriz  $H$  es una matriz de 6 filas y 3 columnas y en sus términos aparecerán derivadas parciales. Su forma será:

---

<sup>23</sup> ZURITA Jesús A.; El método de los elementos finitos; Universidad de Navarra; 2002, p2-22.

$$H = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.4)$$

El estado tensional de un cuerpo se representa también por un tensor, denominado "de tensiones", que también consiste, en el caso tridimensional, en una matriz simétrica de tres por tres. Estos seis términos se pueden ordenar en un vector de 6 componentes de la forma:

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

La relación entre deformaciones  $\vec{u}$  y tensiones  $\vec{\sigma}$  son unas relaciones lineales en cuyos coeficientes aparecen el módulo de elasticidad  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$  del material. Esas relaciones de comportamiento pueden definirse mediante una matriz de 6 filas y 3 columnas de la forma:

$$\vec{\sigma} = D\vec{\epsilon} \quad (2.6)$$

Donde la matriz  $D$  se expresa de la siguiente forma:

$$D = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{pmatrix} 1+\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1+\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1+\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

A diferencia de la matriz  $H$ , que era operacional al aparecer derivadas en sus términos, la matriz  $D$  es una matriz real, cuyos términos son perfectamente conocidos si es conocido el material del que está realizada la pieza en estudio.

Reemplazando la ecuación (2.3) en la (2.6) se puede expresar de forma sencilla las tensiones en función de los desplazamientos. Llamando  $S$  al producto  $DH$  se tiene:

$$\vec{\sigma} = D\vec{\epsilon} = DH\vec{u} = S\vec{u} \quad (2.8)$$

Los términos del tensor de tensiones están relacionados entre sí y con las fuerzas exteriores de volumen (peso propio) mediante lo que se denominan ecuaciones de equilibrio. El vector de fuerzas exteriores se denomina  $\vec{f}$  y tiene, en el caso tridimensional, tres componentes:

$$\vec{f} = \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \\ f_z \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

La relación entre el tensor de tensiones y las fuerzas exteriores puede agruparse en una matriz  $Q$  de forma que:

$$Q\vec{\sigma} + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.10)$$

Donde la matriz  $Q$  esta definida por una matriz de 3 filas y seis columnas, de la forma:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

La matriz  $Q$  es igual a la transpuesta de la matriz  $H$ , es decir:

$$Q = H^T \quad (2.12)$$

Las ecuaciones de equilibrio se las puede expresar en función de los desplazamientos, a esto se conoce como ecuaciones de Navier. Sustituyendo  $\vec{\sigma}$  en la ecuación (2.10) se tiene:

$$QS\vec{u} + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.13)$$

Se nombra como  $A$  a la matriz resultado de multiplicar  $QS$ , o también,  $QDH$  y se tiene la siguiente expresión:

$$A\vec{u} + \vec{f} = \vec{0} \quad (2.14)$$

Estas ecuaciones deberán cumplirse en cualquier punto de la pieza. Si se denomina  $\Omega$  al volumen de la pieza:

$$A\vec{u} + \vec{f} = \vec{0} \text{ en } \Omega \quad (2.15)$$

Las ecuaciones de Navier son en definitiva tres ecuaciones diferenciales de segundo grado con tres variables que son las funciones escalares  $u_x, u_y, u_z$  o con una variable que es la función vectorial  $\vec{u}$ .

Este sistema de ecuaciones debe resolverse para unas determinadas condiciones de contorno. Estas condiciones pueden ser de dos tipos: condiciones esenciales o condiciones naturales.

Las condiciones esenciales están dadas en las propias variables o sea en los desplazamientos. Suponiendo que existe una matriz  $F$  que sirve para obtener los desplazamientos en el contorno se tendrá:

$$F\bar{u} = \bar{u} \text{ en } \delta\Omega_1 \quad (2.16)$$

Donde  $\bar{u}$  son desplazamientos conocidos,  $\delta\Omega_1$  es el trozo del contorno donde se conocen los desplazamientos y  $F$  por lo general es igual la matriz identidad.

Las condiciones naturales están dadas en las derivadas de las incógnitas del problema, en este caso son valores de tensiones en el contorno. Suponiendo que existe una matriz  $G$  que permite conocer el valor de la tensión en el contorno se tiene:

$$G\bar{\sigma} = \bar{\sigma} \text{ en } \delta\Omega_2 \quad (2.17)$$

Donde  $\bar{\sigma}$  son tensiones conocidas y  $\delta\Omega_2$  es el trozo del contorno donde se conocen las tensiones. En este caso, la matriz  $G$  reúne los vectores normales a la superficie exterior de la pieza.

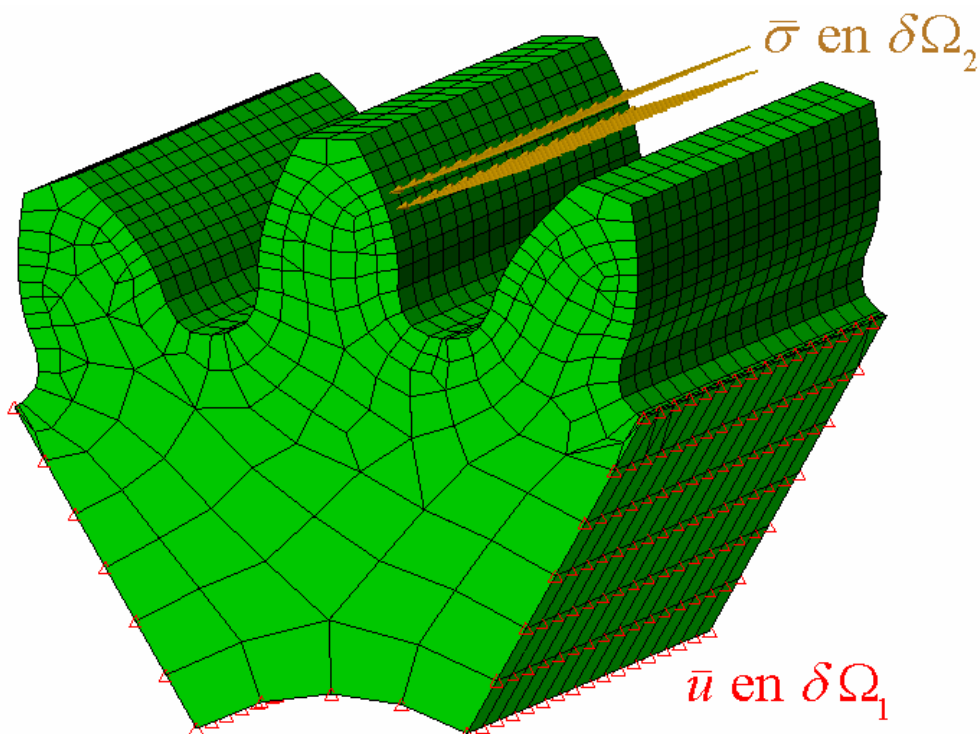


Figura 2.2 Desplazamientos y tensiones conocidas en la sección de un engrane

En la Figura 2.2 se muestra para una sección de un engrane recto que es el volumen  $\Omega$ , los desplazamientos conocidos  $\bar{u}$  que son las condiciones de borde y las tensiones conocidas  $\bar{\sigma}$  que corresponden a las fuerzas aplicadas.

La suma de  $\delta\Omega_1$  y  $\delta\Omega_2$  constituye el contorno completo de la pieza que se denomina como  $\delta\Omega$ .

### 2.2.1 PLANTEAMIENTO FUERTE DEL PROBLEMA ELÁSTICO

El problema elástico se lo puede resumir con las ecuaciones (2.15) a (2.17).

$$\begin{aligned}
 A\bar{u} + \bar{f} &= \bar{0} \text{ en } \Omega \\
 F\bar{u} &= \bar{u} \text{ en } \delta\Omega_1 \\
 G\bar{\sigma} &= \bar{\sigma} \text{ en } \delta\Omega_2 \\
 A &= QS = QDH
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

Donde  $A, H, D, S, Q, F, G$  son matrices que dependen del problema a resolver. En el desarrollo se ha considerado elasticidad tridimensional, en un planteamiento totalmente abstracto estas matrices cambiarán para cada problema.

En resumen, el problema es encontrar una función vectorial de desplazamientos  $\bar{u}$  que cumpla las ecuaciones de (2.18).

Evidentemente, la resolución del problema elástico en su planteamiento fuerte resulta un problema extremadamente difícil salvo para geometrías y cargas muy sencillas.

En un caso general, encontrar un campo de desplazamientos  $\bar{u}$ , que sea derivable al menos dos veces y que cumpla de forma exacta las ecuaciones anteriores resulta prácticamente imposible.

### 2.2.2 PLANTEAMIENTO DÉBIL DEL PROBLEMA ELÁSTICO

Debido a la dificultad de una solución exacta, se plantean métodos aproximados de resolución cuya aplicación se basa en transformar matemáticamente las ecuaciones del problema.

Se define una función vectorial  $\vec{\psi}$ , de igual dimensión que la incógnita del problema  $\vec{u}$ .

$$\vec{\psi} = \begin{pmatrix} \psi_x \\ \psi_y \\ \psi_z \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

A esta función se le denomina función de ponderación, y tiene un significado, de desplazamiento virtual.

Multiplicando la transpuesta de la función de ponderación por la ecuación (2.15), se obtiene:

$$\vec{\psi}^T (A\vec{u}) + \vec{\psi}^T \vec{f} = 0 \text{ en } \Omega \quad (2.20)$$

Esta nueva expresión tiene carácter escalar. Si se promedia la expresión anterior calculando la integral a lo largo de todo el volumen  $\Omega$  de la pieza se tiene:

$$\int_{\Omega} \vec{\psi}^T (A\vec{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\psi}^T \vec{f} d\Omega = 0 \quad (2.21)$$

Tomando el término de la izquierda e integrando por partes se obtiene la siguiente expresión:

$$\int_{\partial\Omega} (F\vec{\psi})^T (GS\vec{u}) d\delta\Omega - \int_{\Omega} (H\vec{\psi})^T (S\vec{u}) d\Omega + \int_{\Omega} \vec{\psi}^T \vec{f} d\Omega = 0 \quad (2.22)$$

Reordenando los términos se llega a:

$$\int_{\Omega} (H\vec{\psi})^T (S\vec{u}) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\psi}^T \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (F\vec{\psi})^T (GS\vec{u}) d\delta\Omega \quad (2.23)$$

La resolución con este planteamiento consiste en encontrar un campo de desplazamientos  $\vec{u}$  que por una parte cumpla las condiciones de contorno



esenciales, es decir, una función  $\bar{u}$  que valga  $\bar{u}$  en  $\delta\Omega_1$  y que además cumpla la ecuación (2.23) para cualquier función de ponderación  $\bar{\psi}$ .

La ventaja es que la función  $\bar{u}$  sólo debe ser derivable una vez. Estudios matemáticos aseguran que la solución del planteamiento débil del problema coincide con la solución del problema diferencial planteado de forma fuerte.

Los campos vectoriales  $\bar{u}$  y  $\bar{\psi}$  son campos de desplazamientos, el primero real y el segundo virtual. El término  $H\bar{\psi}$  constituye las deformaciones asociadas al campo de desplazamientos virtuales, se lo suele denominar  $\bar{\varepsilon}^\psi$ . El término  $S\bar{u}$  constituye el campo de tensiones real sobre el sólido, es decir,  $\bar{\sigma}$  real.  $F\bar{\psi}$  es el campo de desplazamientos virtual en el contorno. Y  $GS\bar{u}$  son las tensiones reales en el contorno.

Si se reemplaza  $H\bar{\psi}$  por  $\bar{\varepsilon}^\psi$  y  $S\bar{u}$  por  $\bar{\sigma}$  en la ecuación (2.23), se obtiene el teorema de los trabajos virtuales:

$$\int_{\Omega} \bar{\varepsilon}^\psi \bar{\sigma} d\Omega = \int_{\Omega} \bar{\psi}^T \bar{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (F\bar{\psi})^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega \quad (2.24)$$

El primer término de la ecuación es la energía de deformación virtual almacenada en la pieza, el segundo corresponde al trabajo virtual de las fuerzas de volumen y el tercero es el trabajo virtual de las fuerzas aplicadas en el contorno.

La energía de deformación virtual es igual al trabajo virtual de las fuerzas exteriores. El planteamiento débil de las ecuaciones que gobiernan la elasticidad lineal es otra forma de enfocar el principio de los trabajos virtuales.

Para la búsqueda de campos de desplazamientos que solucionen el planteamiento débil, se realiza una aproximación de la función  $\bar{u}$ . La aproximación de una función se realiza normalmente considerando la aproximación de los desplazamientos como una combinación lineal de campos de desplazamientos conocidos.

Sean,  $n$  campos de desplazamiento de la forma:

$$\vec{\phi}_i = \begin{Bmatrix} (\phi_i)_x \\ (\phi_i)_y \\ (\phi_i)_z \end{Bmatrix} \quad (2.25)$$

Se plantea la siguiente posibilidad:

$$\vec{u} \approx \bar{u} = a_1 \vec{\phi}_1 + a_2 \vec{\phi}_2 + \dots + a_n \vec{\phi}_n = \sum_{i=1}^n a_i \vec{\phi}_i \quad (2.26)$$

Mediante este proceso de aproximación, se ha cambiando el planteamiento del problema de tener que buscar una función  $\vec{u}$  que cumpla las ecuaciones a tener que buscar un vector de parámetros  $a_i$  que hagan que la aproximación cumpla las ecuaciones "de la mejor manera posible".

Parece lógico pensar que puesto que en la parte del contorno  $\delta\Omega_1$  se conoce los desplazamientos, la aproximación de los desplazamientos cumpla de forma exacta esas condiciones.

Una forma sencilla de que esta condición se cumpla es considerar que las funciones  $\vec{\phi}$  sean nulas en  $\delta\Omega_1$  y a la aproximación anterior sumar una función  $\hat{u}$  que cumpla las condiciones de contorno en  $\delta\Omega_1$ . De esta forma se obtiene:

$$\vec{u} \approx \bar{u} = \hat{u} + a_1 \vec{\phi}_1 + a_2 \vec{\phi}_2 + \dots + a_n \vec{\phi}_n = \hat{u} + \sum_{i=1}^n a_i \vec{\phi}_i \quad (2.27)$$

Si se sustituye la aproximación en el primer término de la ecuación (2.23), se tiene:

$$\int_{\Omega} (H\vec{\psi})^T \left( S \left( \hat{u} + \sum_{i=1}^n a_i \vec{\phi}_i \right) \right) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\psi}^T \vec{f} d\Omega + \int_{\alpha\Omega} (F\vec{\psi})^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega \quad (2.28)$$

Operando y reordenando los términos:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} (H\vec{\psi})^T (S\vec{\phi}_i) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\psi}^T \vec{f} d\Omega + \int_{\alpha\Omega} (F\vec{\psi})^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega - \int_{\Omega} (H\vec{\psi})^T (S\hat{u}) d\Omega \quad (2.29)$$

Esta es una ecuación algebraica en la que aparecen como incógnitas los valores de los parámetros reales  $a_i$  que definen la aproximación. Para cada función de ponderación  $\vec{\psi}$  diferente se puede obtener una ecuación algebraica distinta. Si se usa un conjunto de  $n$  funciones diferentes se puede obtener un sistema de  $n$  ecuaciones con  $n$  incógnitas.

En el caso de elementos finitos las funciones de ponderación  $\vec{\psi}$  se toman iguales a las utilizadas para la aproximación, es decir, iguales a las funciones  $\vec{\phi}$ . Sustituyendo  $\vec{\psi}$  por  $\vec{\phi}_j$  en la ecuación (2.29).

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} (H\vec{\phi}_j)^T (S\vec{\phi}_i) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\phi}_j^T \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega - \int_{\Omega} (H\vec{\phi}_j)^T (S\hat{u}) d\Omega \quad (2.30)$$

para  $j = 1 \dots n$

El segundo término de la parte derecha de la ecuación es una integral que se puede calcular como suma de las dos partes en las que se ha dividido el contorno.

$$\int_{\partial\Omega} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega = \int_{\partial\Omega_1} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega + \int_{\partial\Omega_2} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega \quad (2.31)$$

Las funciones  $\vec{\phi}_j$  se han elegido de forma que sean nulas en  $\delta\Omega_1$ , por lo tanto la primera integral es nula al ser integrales de funciones nulas en el dominio de integración.

$$\int_{\partial\Omega} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega = \int_{\partial\Omega_2} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega \quad (2.32)$$

Pero además en  $\delta\Omega_2$  el término  $GS\bar{u}$  es conocido pues son las tensiones conocidas en el contorno, que se han llamado  $\bar{\sigma}$ . Por lo tanto:

$$\int_{\partial\Omega} (F\vec{\phi}_j)^T (GS\bar{u}) d\delta\Omega = \int_{\partial\Omega_2} (F\vec{\phi}_j)^T \bar{\sigma} d\delta\Omega \quad (2.33)$$

Reemplazando la ecuación (2.33) en la (2.30), se obtiene:

$$\sum_{i=1}^n a_i \int_{\Omega} (H\vec{\phi}_j)^T (S\vec{\phi}_i) d\Omega = \int_{\Omega} \vec{\phi}_j^T \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} (F\vec{\phi}_j)^T \bar{\sigma} d\delta\Omega - \int_{\Omega} (H\vec{\phi}_j)^T (S\hat{u}) d\Omega \quad (2.34)$$

para  $j = 1 \dots n$

Esto constituye un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$K_{ij}a_i = F_j \quad (2.35)$$

Donde  $K_{ij}$  es la matriz de rigidez del sólido,  $a_i$  es el vector de desplazamientos aproximados y  $F_j$  es el vector de cargas del sólido.

## 2.3 MATRIZ DE RIGIDEZ Y VECTOR DE CARGAS

La matriz de rigidez del sólido es igual a:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} (H\vec{\phi}_j)^T (S\vec{\phi}_i) d\Omega \quad (2.36)$$

Esta matriz sólo depende de la geometría ( $\Omega$ ), del material de la pieza en estudio y de las funciones de aproximación utilizadas.

El vector de cargas es igual a la parte derecha de la ecuación (2.34):

$$F_j = \int_{\Omega} \vec{\phi}_j^T \vec{f} d\Omega + \int_{\partial\Omega_2} (F\vec{\phi}_j)^T \bar{\sigma} d\Omega - \int_{\Omega} (H\vec{\phi}_j)^T (S\hat{u}) d\Omega \quad (2.37)$$

El vector de cargas tiene tres términos. El primero corresponde a las cargas de volumen sobre el sólido (generalmente el peso propio). El segundo término son las cargas sobre el contorno aplicadas exteriormente. Y el último término son cargas sobre la estructura ocasionadas por desplazamientos impuestos en el contorno.

Se puede precisar el concepto de elemento como el trozo del dominio de la pieza en el que están definidas el mismo conjunto de funciones no nulas. Las matrices de rigidez elementales son simétricas y en su cálculo sólo intervienen las funciones de aproximación adscritas a los nudos que definen el elemento. La matriz de rigidez global también es simétrica y tiende a agruparse en banda.

Para el cálculo de  $K_{ij}$  y  $F_j$  es necesario conocer:

- La geometría de la pieza, definida por el dominio  $\Omega$  y su contorno  $\delta\Omega = \delta\Omega_1 + \delta\Omega_2$ .
- El problema a resolver, determinado por las matrices  $H$ ,  $S$  y  $F$  que gobiernan el problema.
- Las fuerzas de volumen, dadas por el vector  $\vec{f}$  de fuerzas de volumen.
- Las condiciones de contorno, establecidas por el valor de  $\vec{\sigma}$  en  $\delta\Omega_2$  y las condiciones necesarias para elegir una función  $\hat{u}$  que en  $\delta\Omega_1$  valga  $\bar{u}$ .
- Las funciones de aproximación  $\vec{\phi}_j$ , definidas por la aproximación a realizar con el campo de desplazamientos  $\vec{u}$ .

## 2.4 PROCEDIMIENTO DEL MEF

Los pasos para resolver un problema mediante un programa que use el Método de los Elementos Finitos son siete, algunos de estos pasos requieren la interacción del usuario y otros los realiza automáticamente el programa computacional.<sup>24</sup>

Estos siete pasos son los siguientes:

- Discretización o modelación de la estructura.
- Definición de las propiedades del elemento.
- Ensamblaje de la matriz de rigidez global.
- Aplicación de las cargas.
- Definición de las condiciones de borde.
- Resolución del sistema de ecuaciones lineales.
- Calculo de los esfuerzos.

---

<sup>24</sup> SPYRAKOS C. Constantine; "Finite Element Modeling in Engineering Practice"; Algor Inc.; p 2.

### **2.4.1 DISCRETIZACIÓN O MODELACIÓN**

La estructura se divide en elementos finitos. Este es uno de los pasos más importantes en la determinación de la precisión de la solución del problema. Para la creación de la malla de elementos finitos existen programas computacionales llamados malladores. Estos programas por lo general son parte de un *preprocesador* y siguen una serie de reglas con el fin de no solo crear la malla, sino de optimizarla para obtener resultados con la mayor precisión posible.

### **2.4.2 DEFINICIÓN DE LAS PROPIEDADES DEL ELEMENTO**

En este paso se debe seleccionar el tipo de elemento más apropiado para el modelo físico a simular y definir las propiedades del elemento. Existen diversos tipos de elementos finitos, estos pueden ser de acuerdo a su geometría lineales, planos o sólidos. Las propiedades a definir serán distintas para cada tipo de elemento.

### **2.4.3 ENSAMBLAJE DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ GLOBAL**

Es necesario ensamblar cada una de las matrices de rigidez halladas de cada uno de los elementos, en una sola matriz de rigidez global para toda la estructura. Este paso lo realiza el programa computacional de forma automática.

### **2.4.4 APLICACIÓN DE LAS CARGAS**

Las cargas externas aplicadas a la estructura deben tener similitud con las cargas reales tanto en su magnitud como en su forma de aplicación. Esto no siempre es tan sencillo, ya que en los métodos analíticos de cálculo por lo general se utiliza cargas aproximadas con el fin de simplificar el modelo.

### **2.4.5 DEFINICIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE**

Las condiciones de borde son los valores conocidos que se tiene para ciertos nodos del modelo. Por ejemplo en un análisis de esfuerzos se conoce los desplazamientos posibles en los apoyos.

#### **2.4.6 RESOLUCIÓN DEL SISTEMA DE ECUACIONES LINEALES**

Los pasos anteriores conducen al planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales, donde las incógnitas son los desplazamientos de los nodos. Es importante recordar que estos desplazamientos son aproximaciones a los valores reales.

#### **2.4.7 CALCULO DE LOS ESFUERZOS**

Posterior al cálculo de los desplazamientos y por medios puramente analíticos se puede calcular esfuerzos, reacciones, etc. Para este paso por lo general se usa un *postprocesador* que es un programa que permite ver los resultados obtenidos de forma gráfica.

### **2.5 ANÁLISIS DE RESULTADOS EN EL MEF**

Existen en la actualidad un sinnúmero de programas que aplican el Método de los Elementos Finitos y por lo general son bastante fáciles de usar. La persona que maneja estos programas no necesita tener un conocimiento profundo de las matemáticas aplicadas al MEF, pero si debe tener un conocimiento básico de los conceptos del MEF y de las capacidades y limitaciones del programa que esta utilizando. Solo con estos conocimientos el usuario del programa será capaz de decidir que tipo de elementos se va ha usar, que cantidad de detalles físicos es necesario representar en el modelo, como se puede simplificar el modelo, que tipo de análisis se debe usar, etc.

Además solo una persona que comprenda el fenómeno físico que se está simulando, puede juzgar si los resultados obtenidos son válidos o no. A pesar de tener un modelo correcto existen diversos aspectos que pueden determinar que se obtenga una solución errónea para un determinado problema.

Uno de los principales aspectos que determinan que tan buena es la solución obtenida es el tipo de malla creada para el modelo. Esto depende principalmente

de la *relación de aspecto* de los elementos y de que tan fina o gruesa es la malla. De que tan fina o gruesa es la malla se deriva lo que se conoce como *convergencia de la solución*.

### 2.5.1 RELACIÓN DE ASPECTO DE LOS ELEMENTOS

La relación de aspecto se define como la relación entre la dimensión más grande y más pequeña del elemento.<sup>25</sup> La Figura 2.3 muestra tres tipos de elementos clasificados como conformes, pobres e ilegales. Los elementos clasificados como conformes se caracterizan por una relación de aspecto cercana a la unidad y ángulos de aproximadamente 90°. Los elementos pobres se deben evitar, desde que estos podrían conducir a resultados inexactos. Los elementos ilegales son inaceptables, y no deben ser usados en la modelación por elementos finitos.

Si el campo de esfuerzos tiene similares gradientes en todas las direcciones, se debe tratar mantener la relación de aspecto en uno. Elementos con alta relación de aspecto deben ser evitados, a menos que el gradiente de esfuerzos varíe de forma muy lenta a lo largo de la longitud más larga.

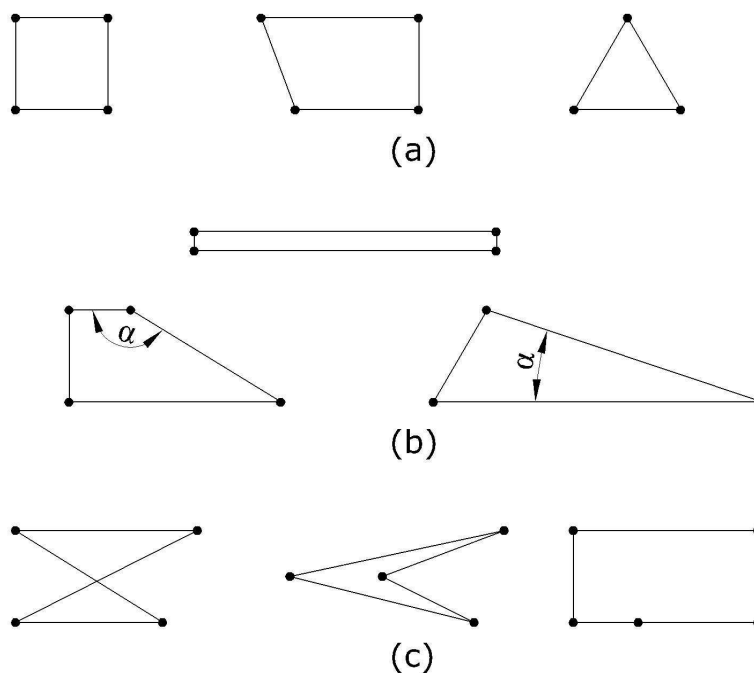


Figura 2.3 Clasificación de elementos de acuerdo a su relación de aspecto  
(a) Conformes; (b) Pobres; (c) Ilegales

<sup>25</sup> SPYRAKOS C. Constantine; "Finite Element Modeling in Engineering Practice"; Algor Inc.; p 54.



No se debe modelar cambios rápidos en el tamaño de los elementos. Cuando se use elementos de diferentes tamaños, se debe crear una transición gradual entre los elementos de distinto tamaño.

Los ángulos agudos u obtusos en extremo, en las esquinas de los elementos, deben ser evitados ya que estos también producen resultados erróneos.

### 2.5.2 CONVERGENCIA DE LA SOLUCIÓN

La convergencia de la solución de elementos finitos viene asegurada por las condiciones de complitud y compatibilidad de los elementos utilizados. A los elementos que cumplen ambas condiciones se les denomina elementos conformes.<sup>26</sup>

Se entiende por convergencia la obtención de una solución más aproximada a la real cuando se vaya aumentando el número de grados de libertad o de parámetros que definen la interpolación de los desplazamientos.

Existen dos métodos fundamentales de aumentar la convergencia de la solución. El primero de ellos consiste en aumentar el número de elementos en los que se divide el dominio. Si se denomina  $h$  a un parámetro que mida el tamaño medio de los elementos en que se ha dividido el dominio, cuanto menor sea este tamaño más cerca se encuentra de la solución real del problema. En la Figura 2.4 se muestra un modelo en el que se reduce el tamaño de los elementos.

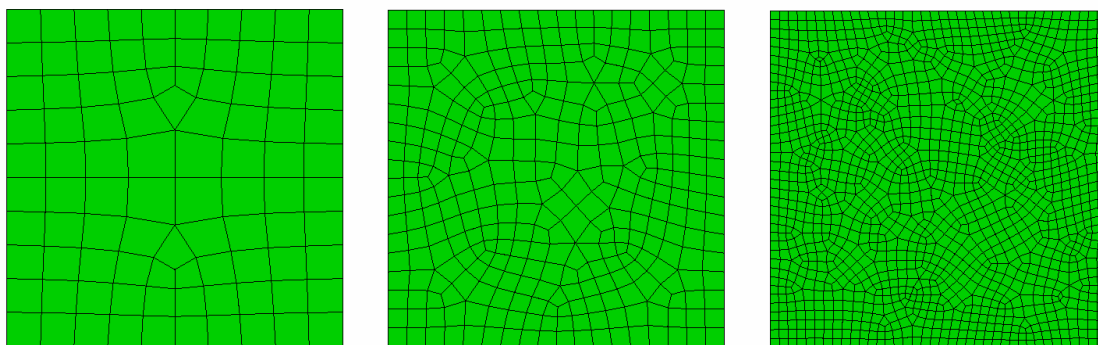


Figura 2.4 Variación del tamaño de los elementos de la malla

<sup>26</sup> ZURITA Jesús A.; El método de los elementos finitos; Universidad de Navarra; 2002, p56, 57, 58.

La segunda forma de aumentar la convergencia, consiste en aumentar el grado  $p$  de las funciones polinómicas de aproximación. En la Figura 2.5 se muestra este tipo de variación.

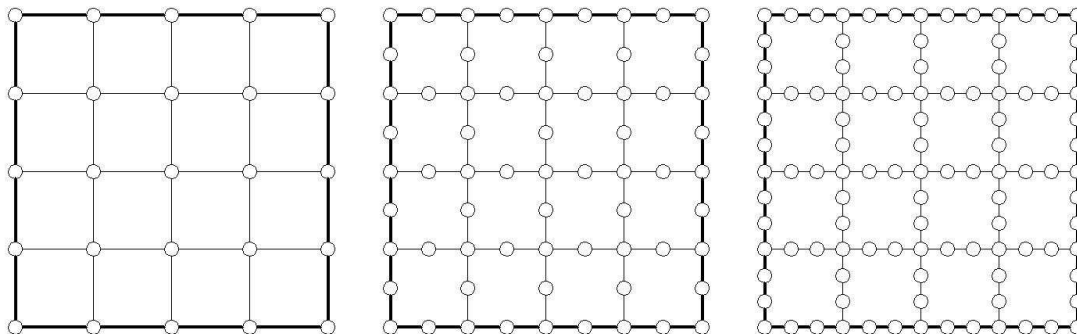


Figura 2.5 Variación del grado de las funciones polinómicas de aproximación

Estas dos alternativas dan origen a lo que se denomina comúnmente convergencia tipo  $h$  y convergencia tipo  $p$ . En general, la convergencia tipo  $p$  es más rápida para el mismo incremento de grados de libertad introducido en el análisis.

Ambas alternativas dan origen al concepto de elementos finitos adaptativos como aquellos programas que son capaces de detectar en que partes de la pieza se está cometiendo un mayor error e introducir en esas zonas bien un mayor tipo de elementos (adaptabilidad tipo  $h$ ) o un incremento del grado de las funciones de aproximación (adaptabilidad tipo  $p$ ).

Como se describió anteriormente la aproximación de elementos finitos consiste en encontrar un mínimo entre todas las posibles funciones generables a partir del espacio de aproximación. En definitiva, la convergencia se va a establecer, también, en energía potencial. Es decir, soluciones obtenidas con un número de grados de libertad creciente darán valores de la energía potencial total cada vez más pequeños pero siempre por encima de la energía potencial total de la solución exacta. En definitiva, soluciones con mejor aproximación darán desplazamientos más grandes y deformaciones mayores en la pieza.

## **CAPITULO 3**

# **DISEÑO ANALÍTICO DE LOS ENGRANES CILÍNDRICOS HELICOIDALES**

El diseño de engranes se lo realiza tomando en cuenta la pareja de engranes, es decir el engranaje. No es posible diseñar un solo engrane sin conocer las características del elemento acoplado. En este capítulo se realiza solo el cálculo del piñón, pero siempre tomando en cuenta las propiedades de la rueda acoplada.

### **3.1 ESTIMACIÓN DEL TAMAÑO DEL ENGRANE**

La primera dificultad con que se inicia un proyecto de transmisiones por engranajes coincide con el hecho de que es necesario conocer todas las dimensiones fundamentales de las ruedas, así como la forma y tamaño de los dientes, antes de que se puedan determinar con exactitud las fuerzas y esfuerzos.

La práctica generalizada del cálculo de engranajes ha hecho necesario estimar la dimensión de los engranes utilizando métodos simplificados y luego comprobar esta estimación, empleando las ecuaciones básicas para verificar la capacidad de carga del engranaje según las diversas normas vigentes.

Por lo tanto se necesita tomar una serie de decisiones, algunas de forma previa, como es la forma del diente que implica el ángulo de presión, el ángulo de hélice, el radio del entalle, etc. Luego de estas decisiones es necesario elegir un paso diametral o módulo y examinar sus implicaciones sobre el ancho de cara, diámetros de paso y propiedades del material. Si no son satisfactorias se elige otro paso o módulo y se repite el proceso.

## 3.2 DISEÑO DEL PIÑÓN

En este caso de estudio, el objetivo no es diseñar una transmisión por engranes, sino realizar una comparación entre el método de cálculo analítico y el Método de los Elementos Finitos. Por lo cual se plantean una serie de datos en base a recomendaciones de los libros y se realizan variaciones en el ángulo de hélice  $\psi$ , en el ancho de cara  $F$  y en el módulo  $m$ . Con estos valores se procede al cálculo analítico y se comparan estos resultados con los obtenidos mediante el MEF.

### 3.2.1 PARÁMETROS DE DISEÑO

Se toma los siguientes datos como parámetros de diseño, estos valores se mantienen para todas las variaciones de la geometría del piñón.

Potencia Transmitida:  $H = 10 \text{ [Hp]} = 7.46 \text{ [kW]}$

Velocidad:  $n = 1725 \text{ [rpm]}$

Relación de transmisión:  $m_G = 2$

Ángulo de Presión:  $\phi = 20^\circ$

Diámetro del eje:  $d_e = 20 \text{ [mm]}$

### 3.2.2 DIMENSIONAMIENTO DEL PIÑÓN

Como un ejemplo de cálculo se plantean los siguientes valores:

Módulo del engrane:  $m = 3 \text{ [mm]}$

Número de dientes del piñón:  $N_p = 18$

Ángulo de hélice:  $\psi = 30^\circ$

Ancho de cara del piñón:  $F = 10 \text{ m} = 30 \text{ [mm]}$

En el Anexo 7 se encuentran las tablas con todos los datos y resultados obtenidos para las variaciones de la geometría del piñón.

Con uso de la fórmula (1.2) se calcula el diámetro de paso, hay que notar que se usa el módulo transversal.

Módulo transversal:  $m_t = m/\cos(\psi) = 3/\cos(30^\circ) = 3.46$  [mm]

Diámetro de paso del piñón:  $d_p = 62.35$  [mm]

Diámetro de paso de la rueda:  $d_G = 124.71$  [mm]

El paso circular como se observa en la ecuación (1.3) no depende del ángulo de hélice.

Paso circular del piñón:  $p = 9.42$

Algunos cálculos se basan en el círculo base, por lo tanto con la ecuación (1.6):

Diámetro base del piñón:  $d_{bp} = 57.48$  [mm]

Diámetro base de la rueda:  $d_{bG} = 114.97$  [mm]

### 3.2.3 ANÁLISIS DE FUERZAS EN EL PIÑÓN

Conocida la potencia y la velocidad angular, mediante la ecuación (1.26) se puede calcular la componente tangencial de la fuerza o carga transmitida  $W_t$ .

$$W_t = \frac{60000H}{\pi d_p n} = \frac{60000 * 7.46 \text{ [kW]}}{\pi * 62.35 \text{ [mm]} * 1725 \text{ [rpm]}}$$

Carga transmitida:  $W_t = 1.32$  [kN]

### 3.2.4 ESFUERZO DEBIDO A LA FLEXION EN EL PIÑÓN

Para determinar el esfuerzo de flexión se deben calcular previamente una serie de factores que establecen las condiciones geométricas, de funcionamiento, de trabajo, etc. Muchos de estos factores deben ser tomados igual a la unidad ya que en el Método de los Elementos Finitos, no se toman en cuenta.

El factor geométrico  $J$  es uno de los más importantes, este se lo establece mediante las figuras del Anexo 2.

Factor geométrico para resistencia:  $J = 0.42$

El factor dinámico  $K'_V$  se lo calcula mediante las ecuaciones (1.34) y (1.35), tomando un número de nivel de exactitud  $Q_V$  igual al máximo valor, se tiene:

Factor dinámico:  $K'_V = 1$

El factor de sobrecarga  $K_O$  en el caso de fuente de potencia y máquina impulsada uniforme se lo encuentra en la Tabla 1.1 y es igual a la unidad.

Factor de sobrecarga:  $K_O = 1$

AGMA sugiere que el factor de tamaño se tome igual a la unidad.

Factor de tamaño:  $K_S = 1$

Al no considerarse desalineación en el montaje, el factor de distribución de carga es el mínimo valor posible, mediante la Tabla 1.2 se tiene:

Factor de distribución de carga:  $K_m = 1.3$

La relación entre el espesor del aro y la altura del diente es mayor que 1.2 por lo cual el factor de espesor del aro es igual a uno.

Factor de espesor del aro:  $K_B = 1$

Con estos factores y mediante la ecuación (1.32) se calcula el esfuerzo flexionante en el piñón:

$$\sigma = W_t K_O K'_V K_s \frac{1}{F m_t} \frac{K_m K_B}{J} = 1.32 \text{ [kN]} * 1 * 1 * 1 * \frac{1}{30 \text{ [mm]} * 3.46 \text{ [mm]}} \frac{1.3 * 1}{0.42}$$

Esfuerzo debido a la flexión:  $\sigma = 39.16 \text{ [MPa]}$

Para determinar el esfuerzo flexionante permisible del piñón se requiere determinar algunos factores que influyen en su cálculo.

La resistencia a la flexión AGMA  $S_t$  es función del tipo de material, en este caso considerando acero completamente endurecido grado 1 y una dureza Brinell  $H_B=240$ , mediante la ecuación (1.40) se tiene:

Resistencia a la flexión AGMA:  $S_t = 216.22$  [MPa]

Considerando una vida media de  $10^7$  ciclos de carga:

Factor de ciclos de esfuerzo para resistencia a la flexión:  $Y_N = 1$

Tomando una confiabilidad del 99%, el factor de confiabilidad es igual a la unidad.

Factor de confiabilidad:  $K_R = 1$

Para temperaturas menores a 120 °C, el factor de temperatura es uno.

Factor de temperatura:  $K_T = 1$

Con estos valores, con un factor de seguridad igual a uno y mediante la ecuación (1.39) se determina el esfuerzo flexionante permisible del piñón:

$$\sigma_{perm} = \frac{S_t}{S_F} \frac{Y_N}{K_T K_R} = \frac{216.22 \text{ [MPa]}}{1} \frac{1}{1*1}$$

Esfuerzo flexionante permisible:  $\sigma_{perm} = 216.22$  [MPa]

Por lo cual el factor de seguridad a flexión es:

$$S_F = \frac{\sigma_{perm}}{\sigma} = \frac{216.22 \text{ [MPa]}}{39.16 \text{ [MPa]}}$$

Factor de seguridad AGMA a la flexión:  $S_F = 5.52$

### 3.2.5 ESFUERZO DE CONTACTO EN EL PIÑÓN

De igual manera que en la flexión, para determinar el esfuerzo de contacto se deben calcular previamente una serie de factores que establecen las condiciones geométricas, de funcionamiento, de trabajo, dureza superficial, etc. Algunos de estos factores ya se calcularon en la sección anterior.

El coeficiente elástico  $C_p$  depende de los materiales del piñón y de la rueda considerando a ambos engranes de acero con módulo de elasticidad  $E = 207$  [GPa]<sup>27</sup> y coeficiente de Poisson  $\nu \approx 0.3$ , mediante la ecuación (1.44), se tiene:

Coeficiente elástico:  $C_p = 190.3$  [MPa]<sup>1/2</sup>

Para determinar el factor geométrico  $I$  son necesarios los siguientes valores:

Ángulo de presión transversal:  $\phi_t = 22.80^\circ$  Ec. (1.14)

Longitud de la línea de acción:  $Z = 13.35$  [mm] Ec. (1.48)

Paso base normal:  $p_N = 8.86$  [mm] Ec. (1.47)

Relación de repartición de carga:  $m_N = 0.6985$  [mm] Ec. (1.46)

Con estos valores y mediante la ecuación (1.50), para engranes internos se calcula  $I$ .

$$I = \frac{\cos \phi_t \operatorname{sen} \phi_t}{2m_N} \frac{m_G}{m_G - 1} = \frac{\cos 22.80^\circ \operatorname{sen} 22.80^\circ}{2 * 0.6985} \frac{2}{2 - 1}$$

Factor geométrico para resistencia a la picadura:  $I = 0.1705$

Como no es posible simular el acabado superficial:

Factor de condición superficial:  $C_f = 1$

Los factores  $K'_V$ ,  $K_O$ ,  $K_s$  y  $K_m$  son los mismos calculados para el esfuerzo debido a la flexión.

<sup>27</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 1183.



Con estos factores y mediante la ecuación (1.43), se calcula el esfuerzo de contacto en el piñón:

$$\sigma_c = C_p \sqrt{W_t K_o K'_v K_s \frac{K_m C_f}{d_p F I}} = 190.3 [\text{MPa}]^{1/2} \sqrt{1.32 [\text{kN}] * 1 * 1 * 1 \frac{1.3}{62.35 [\text{mm}] * 30 [\text{mm}] 0.1705}}$$

Esfuerzo de contacto:  $\sigma_c = 442.08 [\text{MPa}]$

Para determinar el esfuerzo de contacto permisible del piñón se requiere determinar algunos factores que influyen en su cálculo.

La resistencia a la fatiga por contacto AGMA  $S_t$  es función del tipo de material, en este caso considerando acero completamente endurecido grado 1 y una dureza Brinell  $H_B=240$ , mediante la ecuación (1.52) se tiene:

Resistencia a la fatiga por contacto AGMA:  $S_c = 732.80 [\text{MPa}]$

Considerando una vida media de  $10^7$  ciclos de carga:

Factor de ciclos de esfuerzo para resistencia a la picadura:  $Z_N = 1$

Como el cálculo se está realizando para el piñón:

Factor de la relación de la dureza:  $C_H = 1$

Tomando una confiabilidad del 99%, el factor de confiabilidad es igual a la unidad.

Factor de confiabilidad:  $K_R = 1$

Para temperaturas menores a  $120^\circ\text{C}$ , el factor de temperatura es uno.

Factor de temperatura:  $K_T = 1$

Con estos valores, con un factor de seguridad igual a uno y mediante la ecuación (1.51) se determina el esfuerzo de contacto permisible del piñón:

$$\sigma_{c,perm} = \frac{S_c}{S_H} \frac{Z_N C_H}{K_T K_R} = \frac{732.80}{1} \frac{1*1}{1*1}$$

Esfuerzo de contacto permisible:  $\sigma_{c,perm} = 732.80$  [MPa]

Por lo cual el factor de seguridad para esfuerzos de contacto es:

$$S_H = \frac{\sigma_{c,perm}}{\sigma_c} = \frac{732.80 \text{ [MPa]}}{442.08 \text{ [MPa]}}$$

Factor de seguridad AGMA para esfuerzos de contacto:  $S_H = 1.66$

Para determinar la amenaza de falla se debe comparar  $S_F$  con  $S_H^2$ , de acuerdo a lo explicado en la sección 1.6.5.5, en este caso  $S_F = 5.52$  y  $S_H^2 = 2.75$ , por lo cual el caso crítico corresponde a la falla por desgaste.

## CAPITULO 4

### MODELADO DE LA GEOMETRÍA Y MALLADO

El programa seleccionado para realizar el análisis por elementos finitos es el software de la casa ALGOR. Este programa computacional si bien tiene herramientas básicas de dibujo, no son suficientes para la creación del modelo. Por esta razón se ha usado AutoCAD 2007 para la creación de la geometría del engrane y el programa ALGOR para la generación de la malla y el posterior análisis.

#### 4.1 GEOMETRÍA DEL ENGRANE HELICOIDAL

La geometría de los dientes del engrane cilíndrico helicoidal es parte de un “helicoide desarrollable”, geometría que resulta bastante compleja de crear. Este helicoide desarrollable se genera a partir del cilindro base y está conformado por las sucesivas líneas rectas tangentes a una hélice cilíndrica base de diámetro  $d_b$ , como se observa en la Figura 4.1.<sup>28</sup>

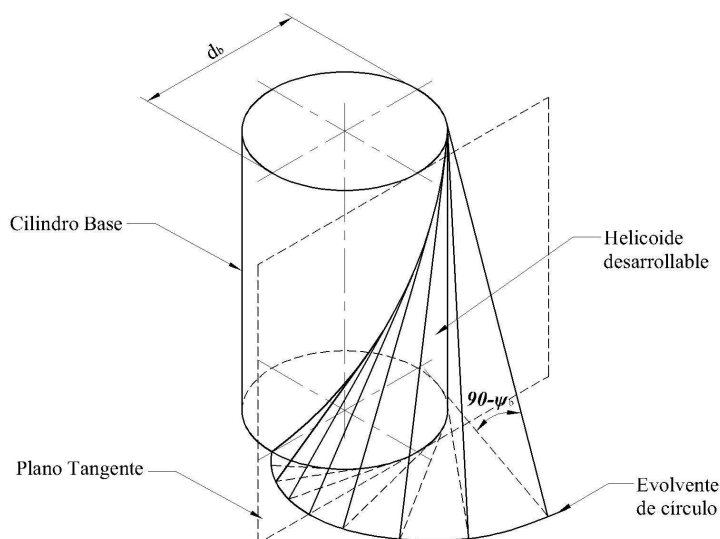


Figura 4.1 Helicoide desarrollable

<sup>28</sup> MAYER Omar E.; “Engranajes Helicoidales Teórico”; Universidad de Buenos Aires; 2002; p. 2.

La intersección del helicoides por cualquier plano normal a la superficie cilíndrica que la sustenta, resulta en una curva evolvente de círculo y todas las tangentes al helicoides forman con dicho plano el mismo ángulo, que es el complementario del ángulo de hélice en el cilindro base.

La intersección del helicoides con un plano tangente al cilindro base, forma la misma generatriz del helicoides, tangente a la hélice base y comprendida por el plano.

Un helicoides desarrollable se puede concebir también como una superficie doblemente curva, que se forma por el desplazamiento de un perfil de evolvente a lo largo de una hélice que pertenece al cilindro base, como se muestra en la Figura 4.2.<sup>29</sup>

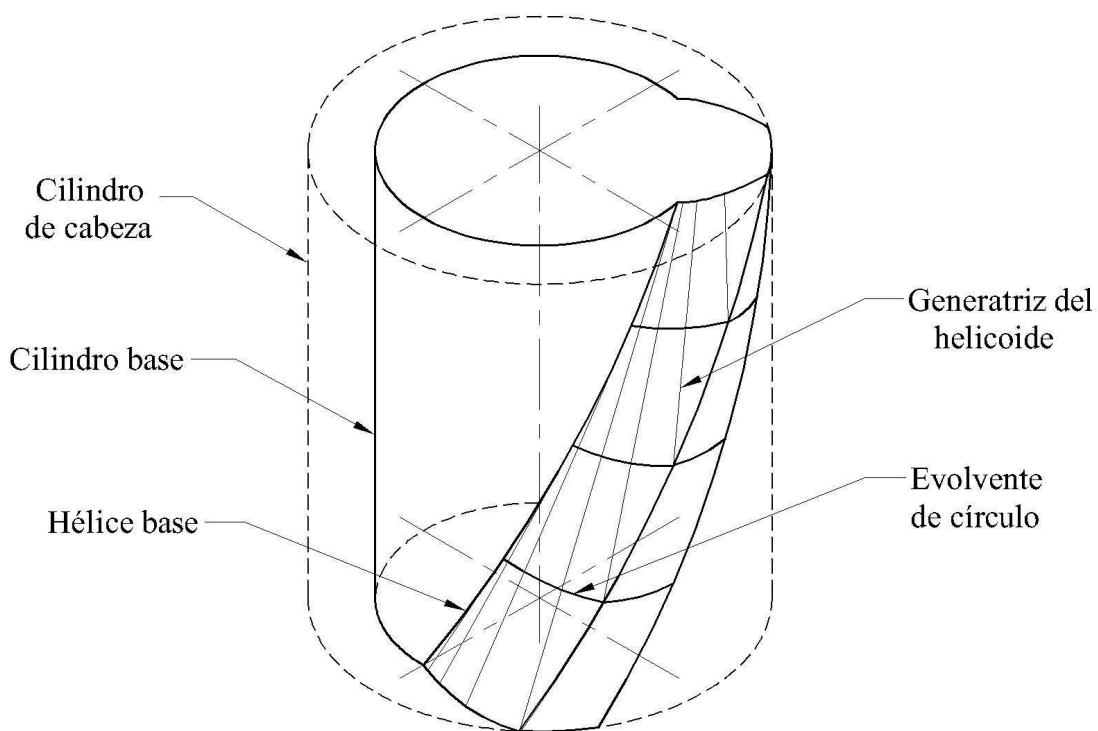


Figura 4.2 Desplazamiento del perfil de un diente a lo largo de una hélice

En esta forma se genera la geometría del piñón, haciendo desplazar el perfil de los dientes a lo largo de una hélice.

<sup>29</sup> MAYER Omar E.; “Engranajes Helicoidales Teórico”; Universidad de Buenos Aires; 2002; p. 4.

## 4.2 GENERACIÓN DEL MODELO

La generación del modelo consta de los siguientes pasos:

1. Creación del perfil de los dientes del piñón.
2. Generación del modelo sólido del piñón.
3. Creación del plano de aplicación de carga.
4. Exportación de la geometría a formato ACIS.

### 4.2.1 CREACIÓN DEL PERFIL DE LOS DIENTES DEL PIÑÓN

La creación del perfil de los dientes del piñón se la efectúa en el plano transversal, al variar el ángulo de hélice  $\psi$ , varían todos los parámetros del engrane como son los diámetros del cilindro de paso, base, de cabeza, de raíz, radio de fondo, etc.

Para facilitar la creación del perfil se usa el programa gratuito “TrueGear” realizado por Eugeny Kalney. Este programa realiza la geometría del perfil del diente de forma sumamente precisa. Para comprobar la validez del programa se comparó la geometría generada por el programa con la evolvente del círculo creada mediante su ecuación, encontrándose que no existe diferencia, como se observa en la Figura 4.3.

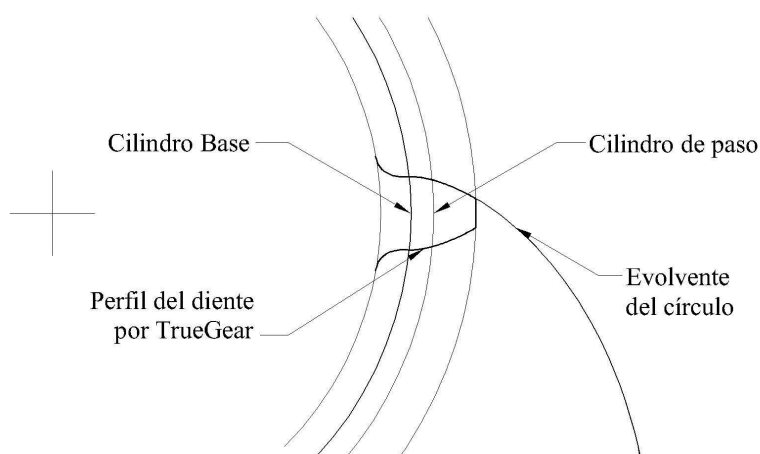


Figura 4.3 Comparación de la geometría de “TrueGear” con la evolvente

TrueGear es un software que funciona dentro de AutoCAD y esta constituido por rutinas de AutoLisp que crean el perfil del diente del engrane como objetos de AutoCAD, los cuales pueden ser editados. Para usar el programa es necesario cargarlo con el comando “apload” y llamarlo desde la línea de comando con la instrucción “tooth”.

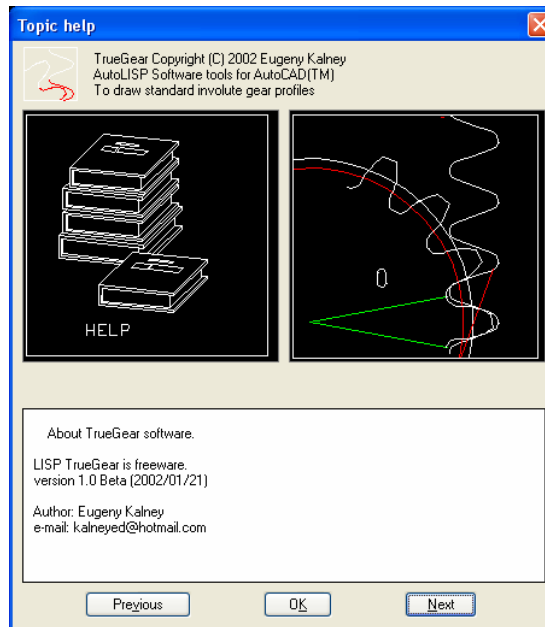


Figura 4.4 Caja de diálogo “Acerca de” del programa “TrueGear”

La caja de diálogo principal del programa pide todos los parámetros necesarios para dibujar el perfil del diente del engrane, como se observa en la Figura 4.5.

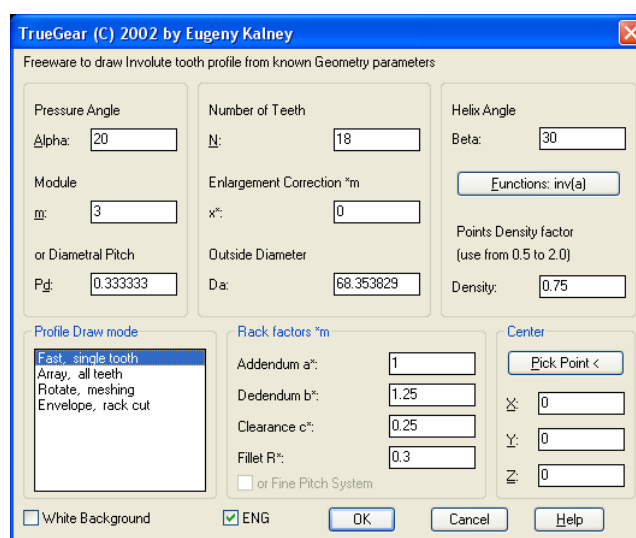


Figura 4.5 Caja de diálogo principal del programa “TrueGear”

En esta ventana se solicita los siguientes parámetros:

Ángulo de presión (Alpha), por defecto  $20^\circ$ .

Módulo (m) o paso diametral (Pd), solo uno de los dos al ser el uno el inverso del otro. No tiene importancia las unidades.

Número de dientes (N).

Factor del coeficiente de corrección del diente ( $x^*$ ), como es función del módulo es adimensional.

Diámetro exterior o de cabeza (Da), no es necesario ingresar el valor, el programa lo calcula y sirve de referencia.

Ángulo de hélice (Beta), el valor del ángulo de inclinación del diente medido en el cilindro de paso.

Factor de densidad de puntos (Density), valor que determina la cantidad de puntos para la polilínea del perfil de un diente. Depende de los parámetros anteriores, para el ejemplo de cálculo del Capítulo 3, con una densidad de 0.75 se generan 180 vértices.

Modo de dibujo del perfil, se puede escoger 4 opciones. Dibujo rápido de un solo diente, dibujo de arreglo de todos los dientes del engrane, rotación con la cremallera y evolvente con la herramienta de corte, las dos últimas producen una animación.

Factores de las proporciones del diente: factor de altura de cabeza ( $a^*$ ), factor de altura de raíz ( $b^*$ ), factor de holgura radial ( $c^*$ ) y factor de radio del entalle del diente ( $R^*$ ). Todos los factores son en función del módulo por lo cual son adimensionales.

Estos parámetros, para el ejemplo de cálculo del Capítulo 3, son los siguientes:

Ángulo de presión:	$\text{Alpha} = 20^\circ$
Módulo del piñón:	$m = 3$
Número de dientes:	$N = 18$
Factor del coeficiente de corrección:	$x^* = 0$
Diámetro de cabeza:	$D_a = 68.353829$ (Valor calculado)
Ángulo de hélice	$\text{Beta} = 30$
Factor de densidad de puntos:	$\text{Density} = 0.75$
Modo de dibujo del perfil:	Fast, single tooth
Factor de altura de cabeza:*	$a^* = 1$
Factor de altura de raíz:*	$b^* = 1.25$
Factor de holgura radial:*	$c^* = 0.25$
Factor de radio del entalle del diente:*	$R^* = 0.30$

\* AGMA 201.02-68<sup>30</sup>

Para la creación del perfil del diente del piñón simplemente se ingresa los parámetros anteriores y se hace clic en el botón OK, con lo cual se dibuja la geometría mostrada en la Figura 4.6. Esta consta de una marca de centro, el perfil del diente y unos arcos con la medida del radio de cabeza, de paso y de raíz.

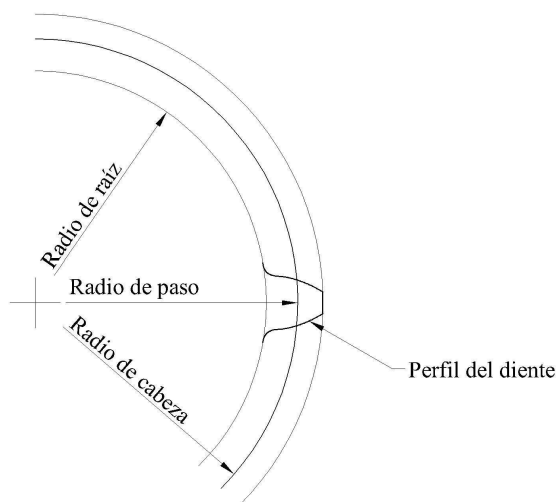


Figura 4.6 Perfil de un diente del piñón

<sup>30</sup> GONZÁLEZ REY Gonzalo; "Cálculo de Engranajes Cilíndricos"; Ciudad Habana; 2001; p.3.



El perfil del diente se crea con una polilínea. Cuando se construye sólidos en base a una polilínea se crea una arista por cada vértice, con los parámetros anteriores se tiene 180 vértices, lo cual para un solo diente generaría un sólido con 180 aristas. La malla generada en el Método de los Elementos Finitos, respeta estas aristas lo cual produce una malla sumamente densa.

Por este motivo es necesario transformar la polilínea a splines, las que tienen la misma geometría, pero no contienen vértices sino puntos de control. Para esto se corta el perfil a la altura del radio de cabeza para obtener cada lado del diente, con el fin de evitar las esquinas. Estos lados del diente se los transforma a splines ajustadas con el comando “pedit” opción “spline”. Estas curvas todavía no son verdaderas splines, para crearlas se usa el comando “spline” opción “object”.

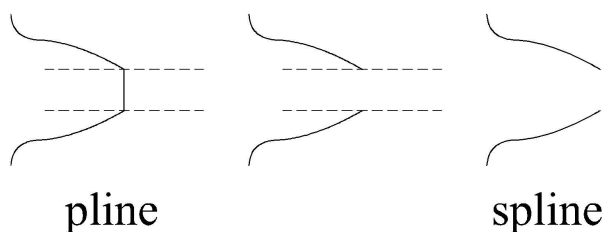


Figura 4.7 Transformación de la polilínea del perfil del diente en spline

Con estas splines se completa la geometría para construir el sólido, esto se lo hace dibujando los círculos del eje y de cabeza, girando y copiando las splines, dibujando los radios en los extremos y recortando la geometría mediante el comando “trim”, como se muestra en la Figura 4.8.

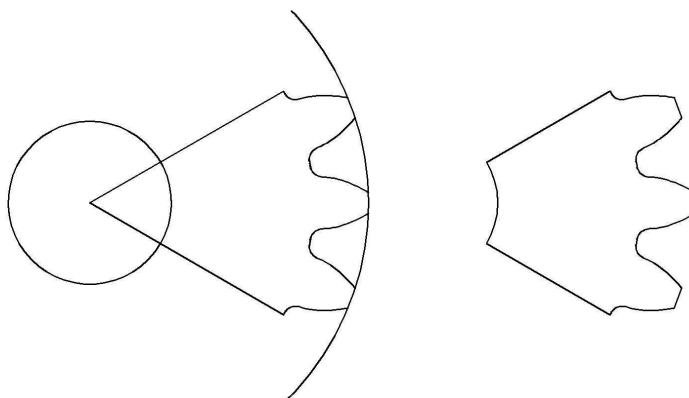


Figura 4.8 Creación del perfil de los dientes del piñón

Aunque se podría generar el perfil completo del piñón, no es necesario ya que la influencia de la carga afecta a una pequeña zona adicional al diente con la carga

aplicada, por lo cual se va a realizar solamente una sección del engrane. El análisis en esta sección tiene los mismos resultados que en el engrane completo, con la ventaja que se utiliza menos recursos.

Para carga aplicada en un solo diente se crea el perfil con tres dientes, para carga aplicada en varios dientes se crea el perfil con cuatro o cinco dientes. Esto es para que siempre exista un diente sin carga a cada lado de los dientes con la carga aplicada.

La geometría final creada en la Figura 4.8 esta formada por líneas, arcos y splines y no se puede usar con los comandos de generación de sólidos. Para que estas curvas sirvan para la creación del sólido es necesario convertirlas en una sola entidad y para esto se usa el comando “boundary” que genera una polilínea o región desde un borde. El funcionamiento de “boundary” es bastante simple se escoge el tipo de borde, en este caso “Region” y selecciona un punto interior al borde.



Figura 4.9 Caja de diálogo del comando “boundary”

#### 4.2.2 GENERACIÓN DEL MODELO SÓLIDO DEL PIÑÓN

Para la generación del modelo sólido de la sección del piñón, se usa el comando de AutoCAD “sweep” este permite crear un sólido mediante barrido de una curva a lo largo de un camino. Se puede generar la hélice del engrane y realizar el barrido del perfil a lo largo de esta hélice.

Con el comando “sweep” también es posible girar el perfil “twist” a lo largo del camino, si se toma el eje del engrane como camino y se gira el perfil alrededor de este eje se obtiene el mismo efecto que efectuar el barrido a lo largo de una hélice. La geometría resultante se observa en la Figura 4.10.

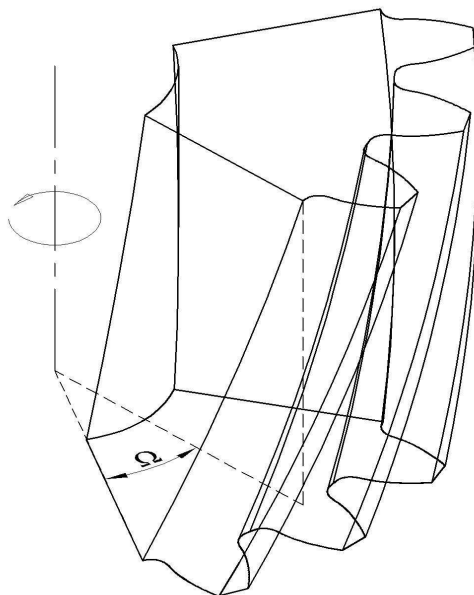


Figura 4.10 Generación del sólido desde el perfil de los dientes del piñón

El ángulo de giro  $\Omega$  se lo puede calcular mediante una relación trigonométrica en función del ancho de cara  $F$ , del ángulo de hélice  $\psi$  y del diámetro de paso del engrane  $d$ . En la Figura 4.11 se grafica una parte del desarrollo del cilindro de paso, con los respectivos ángulos.

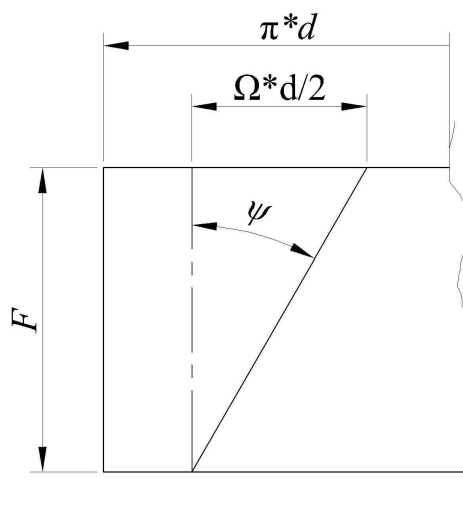


Figura 4.11 Parte del desarrollo del cilindro de paso

De la Figura 4.11 se tiene que:

$$\tan(\psi) = \frac{\Omega d/2}{F} \quad (4.1)$$

despejando  $\Omega$ :

$$\Omega = \frac{\tan(\psi)F}{d/2} \quad (4.2)$$

Para el caso del ejemplo de cálculo, se invoca al comando “sweep” y se selecciona la región con el perfil de los dientes. Se escoge la opción “twist”, con la ecuación (4.2) se calcula el ángulo de giro  $\Omega = 31.830989^\circ$ . Se escoge la opción “base point” se selecciona el centro del piñón y finalmente se pica sobre el eje del engrane que tiene una altura igual al ancho de cara  $F = 30$ .

### 4.2.3 CREACIÓN DEL PLANO DE APLICACIÓN DE CARGA

El contacto entre los dientes de los engranes helicoidales se realiza en unas líneas que coinciden con las generatrices del helicoides. Al ser la superficie de contacto doblemente curva, resulta complejo mantener estas líneas en la superficie del sólido para el posterior mallado. Por esta razón se va a crear una superficie plana de contacto que tenga a la línea de contacto como eje.

Según Heinrich Hertz el área de contacto entre dos cilindros es un rectángulo angosto de ancho  $2b$  y longitud  $l$ . El ancho  $b$  se lo calcula con la ecuación (1.30) y la longitud se la puede calcular por relaciones trigonométricas o gráficamente dibujando el plano del engrane.

El plano del engrane es un rectángulo de base igual a la línea de acción  $L_{ab}$  y alto igual al ancho de cara  $F$ . En este plano se dibuja las líneas con la inclinación del ángulo de hélice en el cilindro base  $\psi_b$ , ya que la línea de presión es tangente al círculo base y separadas entre si por el paso base circular  $p_b$ . El segmento de línea comprendido dentro del rectángulo es la longitud de la línea de contacto, como se observa en la Figura 4.12.

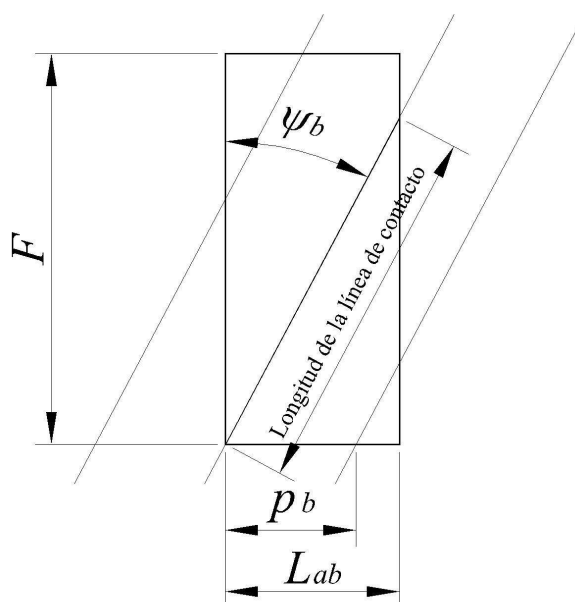


Figura 4.12 Longitud de la línea de contacto

Para la creación de la superficie de contacto se toma la máxima longitud ya sea de una o varias líneas, según el caso de carga aplicada en uno o varios dientes.

Calculadas las dimensiones del semiancho y de longitud de la línea de contacto, se puede proceder a la creación de la superficie rectangular, donde se aplicará la carga. Se dibuja un círculo de radio  $b$  en la esquina del diente del engrane a la altura del círculo de cabeza. Se traza el círculo base del piñón. Desde el centro del círculo de radio  $b$  se dibuja una tangente al círculo base, esta es la dirección de la línea de presión y sobre esta se transporta la medida de la línea de acción. El resultado se muestra en la Figura 4.13.

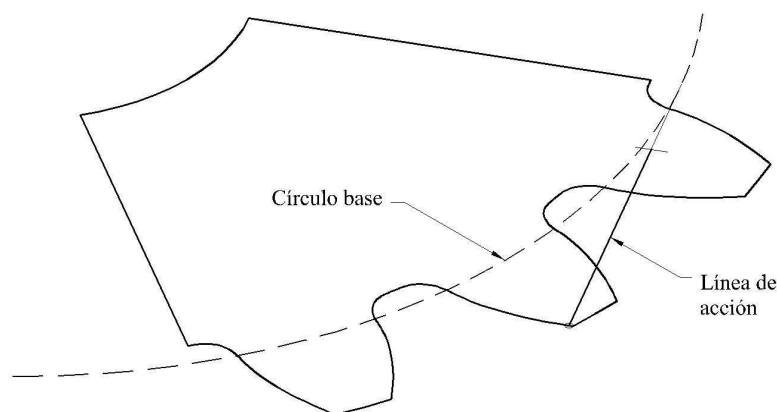


Figura 4.13 Trazado de la línea de acción

Con el plano del engrane formado por la dirección línea de acción y una paralela al eje del piñón, se halla una sección de corte del sólido con el comando "section". Esto se lo hace para determinar la línea de contacto sobre el sólido, esta sección de corte contiene las líneas de contacto, como se ve en la Figura 4.14.

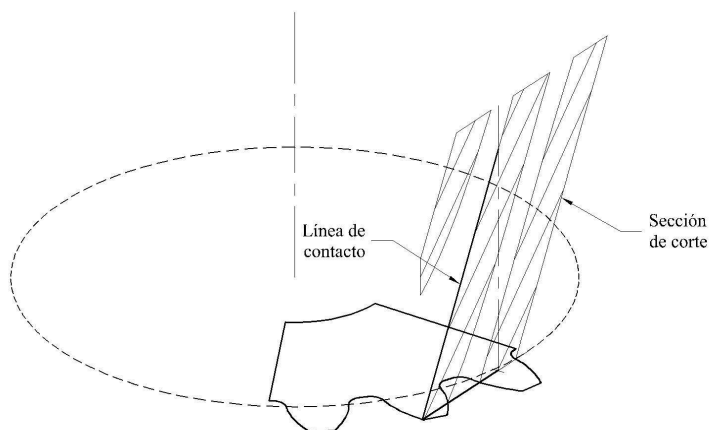


Figura 4.14 Trazado de la línea de contacto sobre el sólido

Se modifica el sistema de coordenadas "UCS" de tal forma que el eje Z sea perpendicular a esta línea, con lo cual se puede dibujar un rectángulo con las dimensiones indicadas y cuyo eje es la línea de contacto. El resultado se observa en la Figura 4.15.

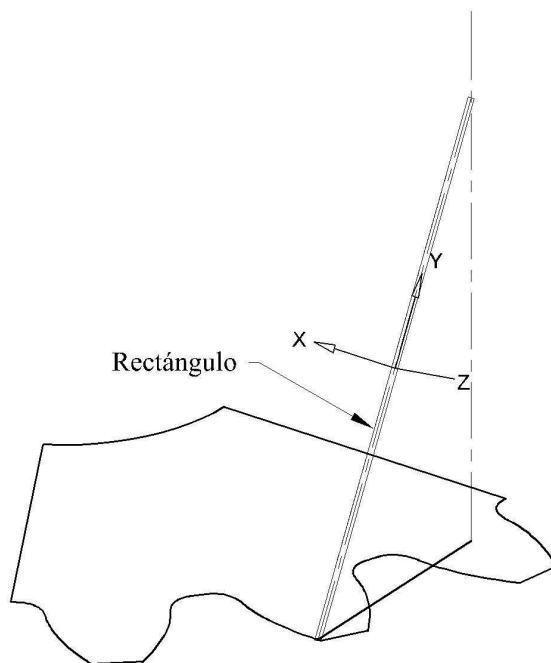


Figura 4.15 Trazado del rectángulo que define el área de contacto

Hay que hacer notar que solo la línea de contacto forma parte de la superficie del diente del engrane, el rectángulo aunque sea por una distancia muy pequeña esta fuera de esta superficie.

Para formar el plano de aplicación de carga se extruye el rectángulo en un prisma rectangular mediante el comando “extrude” en ambas direcciones del eje Z con una altura de 0.05 [mm]. Se tomó esta altura de 0.05 [mm] que es muy pequeña para que no influya al resto de la geometría del engrane. Se observa un detalle en la Figura 4.16.

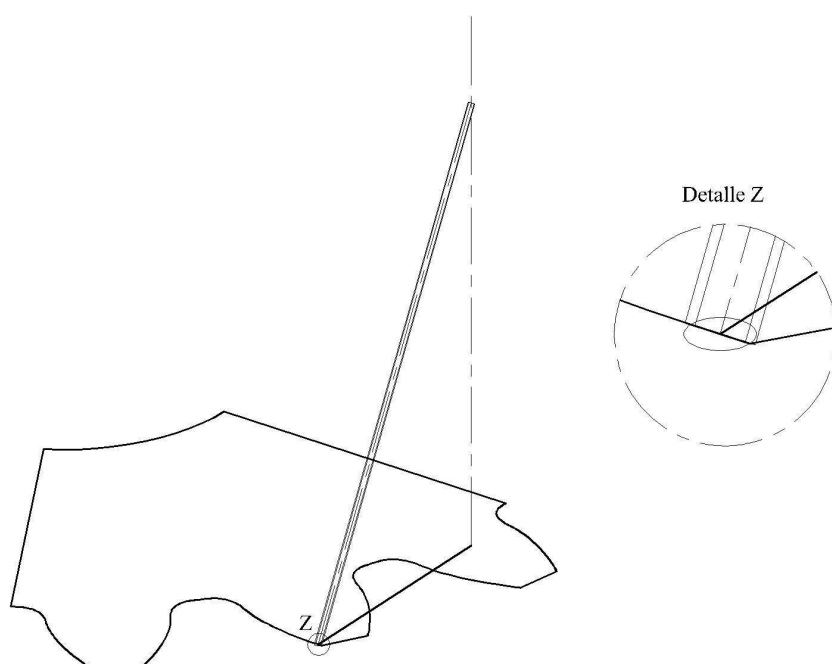


Figura 4.16 Detalle del prisma rectangular que define el plano de carga

Mediante el comando “union” se une el prisma rectangular al sólido del perfil de los dientes del piñón creado previamente. Finalmente mediante el comando “slice” se elimina un pequeño prisma triangular que sobresale en la parte inferior. En la Figura 4.17 se muestra la geometría final que se exporta al programa de la casa ALGOR.

El plano de carga es la superficie más grande del prisma rectangular, esta es una superficie plana, donde se puede colocar una fuerza distribuida o presión.

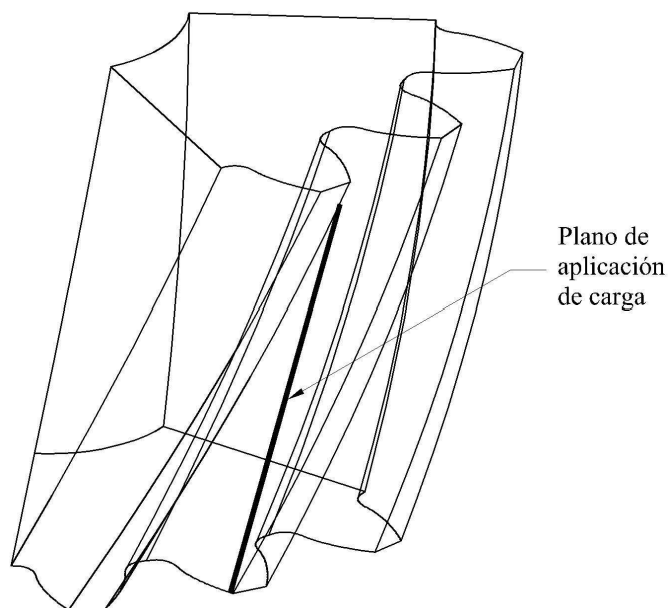


Figura 4.17 Modelo sólido de piñón con el plano de aplicación de carga

#### 4.2.4 EXPORTACIÓN DE LA GEOMETRÍA A FORMATO ACIS

Para poder transferir la geometría del modelo sólido del piñón a otros programas computacionales como son los de análisis por elementos finitos, es necesario exportar estos sólidos a un formato compatible.

Uno de los formatos más conocidos es el ACIS con extensión \*.sat que tiene gran precisión y garantiza que no se modifique la geometría al transferir los datos.

Para exportar el sólido a formato ACIS, en AutoCAD se usa el comando "acisout", el cual pide seleccionar los objetos a exportar y luego el nombre del archivo a crear con los datos transformados. En caso de existir algún problema se puede variar la versión del archivo ACIS mediante la variable "acisoutver".

#### 4.3 IMPORTACIÓN DE LA GEOMETRÍA EN FEMPRO

Una vez que se ha guardado el sólido en formato ACIS, ya se lo puede abrir en el programa "Fempro V21" de la casa comercial "ALGOR". En el programa "Fempro" se elige el menú "Archivo", "Abrir". En la caja de diálogo se cambia el



tipo de archivo a “Archivos de CAD”, “ACIS (\*.sat)” y se selecciona el archivo exportado desde el AutoCAD en este formato. Se pide seleccionar el tipo de análisis a realizar, en este caso se escoge “Tensión estática con modelos de material lineales” como se muestra en la Figura 4.18.

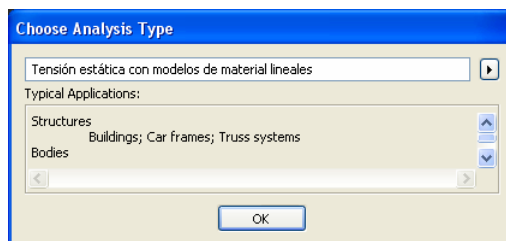


Figura 4.18 Caja de diálogo de “Tipo de Análisis” del programa “Fempro”

La pantalla del programa con la geometría importada se observa en la Figura 4.19. En la vista de árbol en la parte izquierda se observan algunas líneas en rojo debido a que todavía no se han asignado los parámetros para el análisis. Para realizar el análisis por el Método de los Elementos Finitos, no tiene que existir ninguna línea con color rojo.

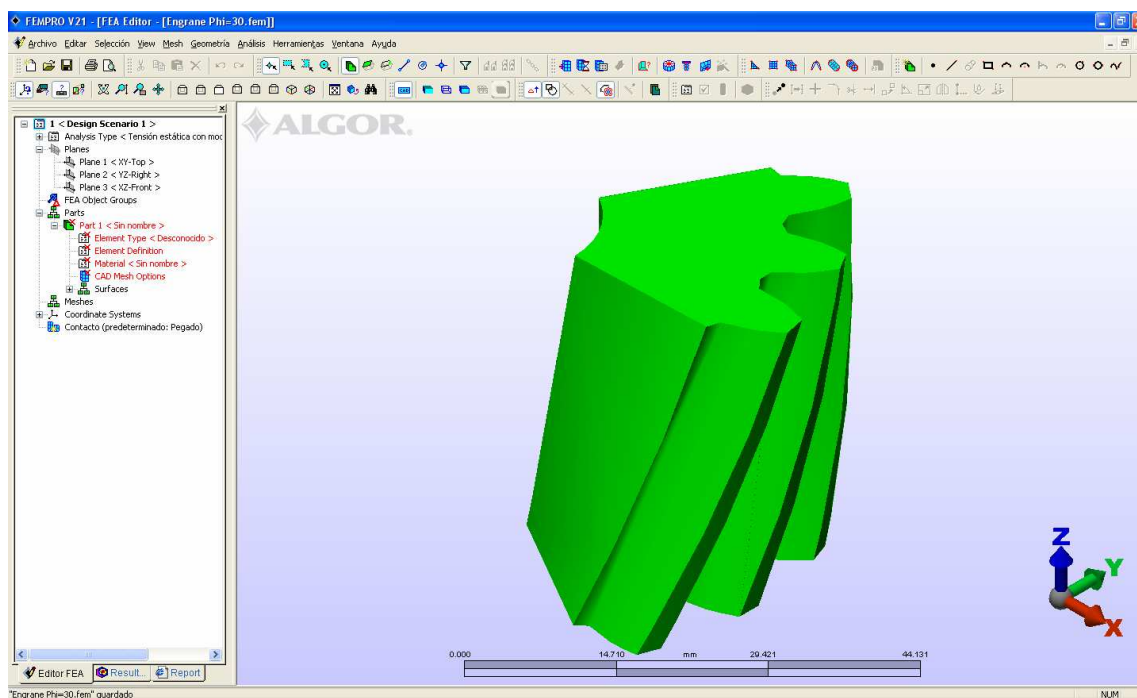


Figura 4.19 Pantalla del programa “Fempro”

## 4.4 MALLADO DE LA GEOMETRÍA

El programa “Fempro” tiene gran cantidad de opciones para el mallado de elementos sólidos. Estas opciones tienen el objetivo de que el mallado sea el mejor posible para el posterior análisis.

Para generar la malla se va al menú “Mesh: Opciones de mallado del modelo...”. Este menú abre la caja de diálogo que se muestra en la Figura 4.20.

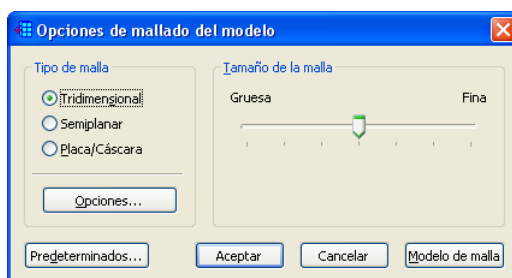


Figura 4.20 Caja de diálogo de “Opciones de mallado del modelo...”

Para realizar la malla con las opciones por defecto, solo se hace clic en el botón “Modelo de malla”, con lo cual se genera un malla con los parámetros por defecto. El resultado se lo observa en la Figura 4.21.

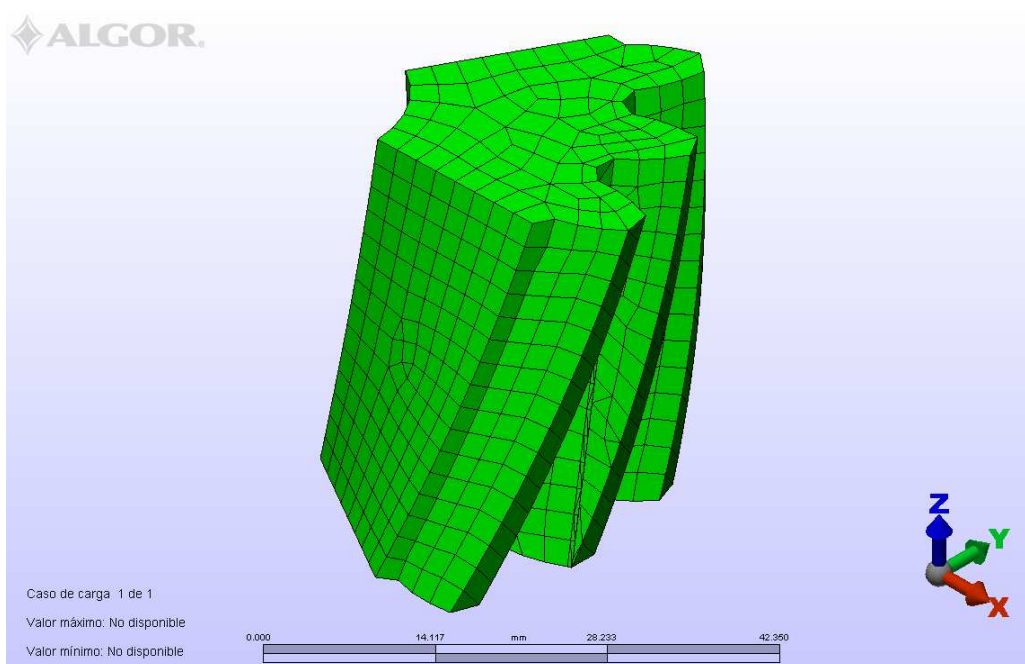


Figura 4.21 Modelo mallado con los parámetros por defecto

Esta malla creada es bastante gruesa, por lo general se la usa para un análisis preliminar, más no para obtener resultados definitivos. La forma más simple de refinar la malla es cambiar el “Tamaño de malla” mediante la barra de desplazamiento de la caja de diálogo. Este cambio en el tamaño tiene un rango de 190% (gruesa) a 10% (fina).

En algunos casos es preferible realizar el cambio de tamaño de la malla definiendo el tamaño absoluto de las líneas de la malla que se va a generar. Para esto se hace clic en el botón de “Opciones” de la caja de diálogo, con lo que se abre la ventana mostrada en la Figura 4.22.

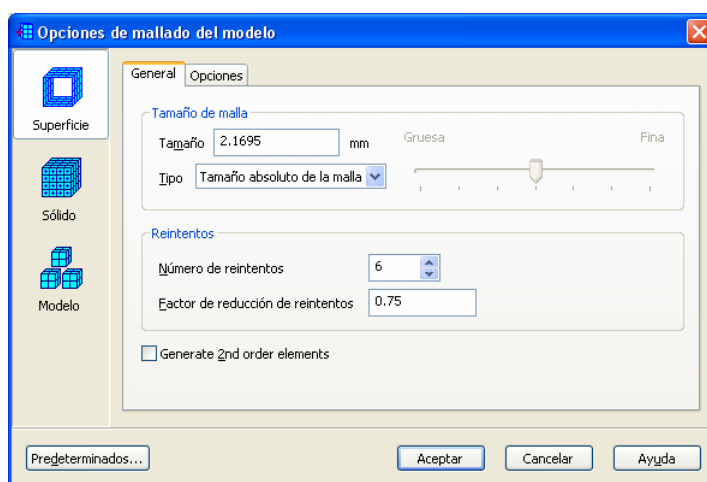


Figura 4.22 Caja de diálogo de parámetros para el mallado

En el recuadro de “Tamaño de malla” se cambia el tipo a “Tamaño absoluto de la malla” con lo cual se puede fijar el tamaño promedio de los elementos a generar. En el caso del ejemplo de cálculo se escogió 1 [mm] y se forma una malla como la que se muestra en la Figura 4.23.

Generalmente no se requiere una malla fina en todo el modelo sino en zonas específicas donde se desea analizar los resultados, en el caso del piñón sería la franja de contacto y la franja correspondiente al radio del entalle del diente. Para esto es necesario crear “Puntos de refinado” en las zonas que se desea mejorar la malla. Los puntos de refinado se pueden generar automáticamente o

se pueden especificar de forma manual, ya sea ingresando las coordenadas o seleccionando un punto existente en el modelo.

En el caso del piñón se va a seleccionar todos los puntos del lado del diente que contenga al plano de carga. Para esto se usa el menú “Selección: Forma: Punto” y “Selección: Seleccionar: Superficies”. Se selecciona la superficie deseada como se muestra en la Figura 4.23.

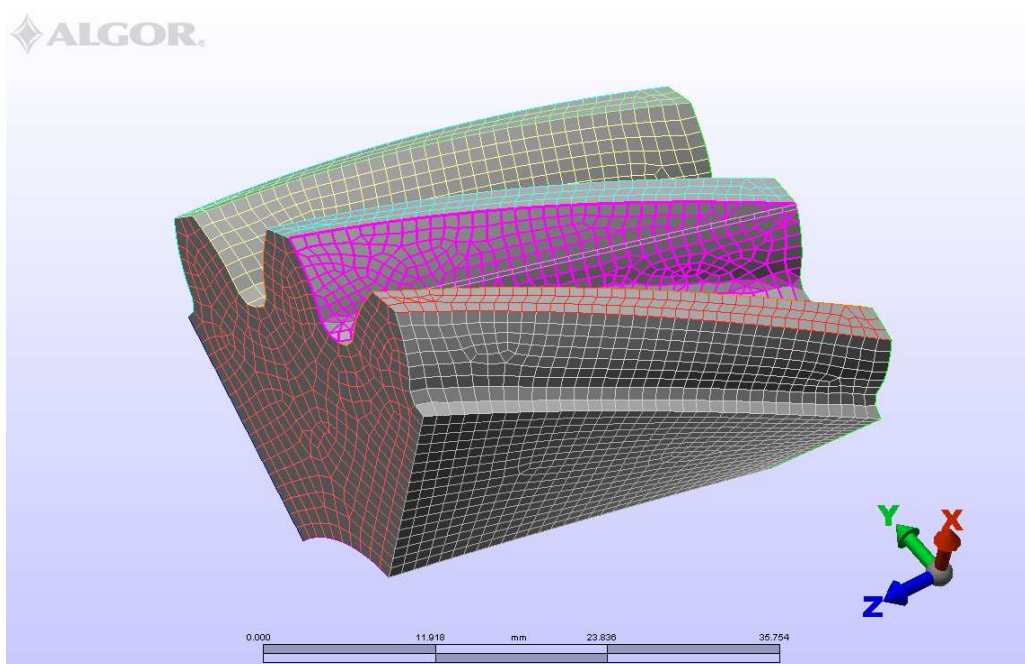


Figura 4.23 Selección de la superficie del diente para refinar la malla

Se usa el menú “Selección: Invert”, con lo cual se invierte la selección. Haciendo clic en cualquier parte del área de trabajo con el botón de la derecha del ratón aparece un menú contextual y se selecciona “Ocultar”, con lo cual solo permanece visible solo la superficie a refinar.

Se cambia el tipo de selección usando el menú “Selección: Forma: Rectángulo” y “Selección: Seleccionar: Vértices”. Realizando una selección por ventana quedarán marcadas todas las juntas de la malla en esta superficie. Se hace clic en cualquier parte del área de trabajo con el botón de la derecha del ratón y del menú contextual se utiliza “Añadir: Refinement Points...”, con lo cual se muestra la caja de diálogo de la Figura 4.24.

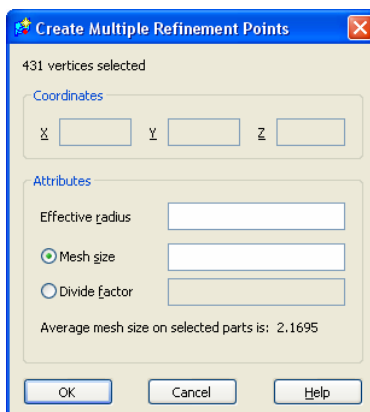


Figura 4.24 Caja de diálogo de puntos de refinado

En esta ventana se muestra el tamaño promedio de la malla actual “Average mesh size on selected parts”. Hay que ingresar el valor del radio de una esfera de cobertura desde el vértice seleccionado “Effective radius” y el tamaño de malla “Mesh size” que debe ser menor que el tamaño promedio de la malla. También es posible escoger el factor de división “Divide factor” que tiene que ser mayor que la unidad.

Dando clic en el botón “OK” se generan unos puntos negros en los vértices de la malla. Si se desea modificar los parámetros se selecciona estos puntos y se hace clic en cualquier parte del área de trabajo con el botón de la derecha del ratón y del menú contextual se escoge “Modificar...”.

Con el objetivo de volver a visualizar todas las superficies del modelo se utiliza la vista de árbol de la parte izquierda, se hace clic con el botón de la derecha en “Surfaces: Mostrar todas las superficies”.

Para generar la malla con los puntos de refinado se usa el menú “Mesh: Generar malla” o preferible “Mesh: Enhance Surface Mesh...”, ya que realiza el proceso de forma más rápida.

En el ejemplo de cálculo se tomo el radio de cobertura “Effective radius” = 0.5 [mm] y el tamaño de malla “Mesh size” = 0.5 [mm], obteniéndose la malla mostrada en la Figura 4.25.

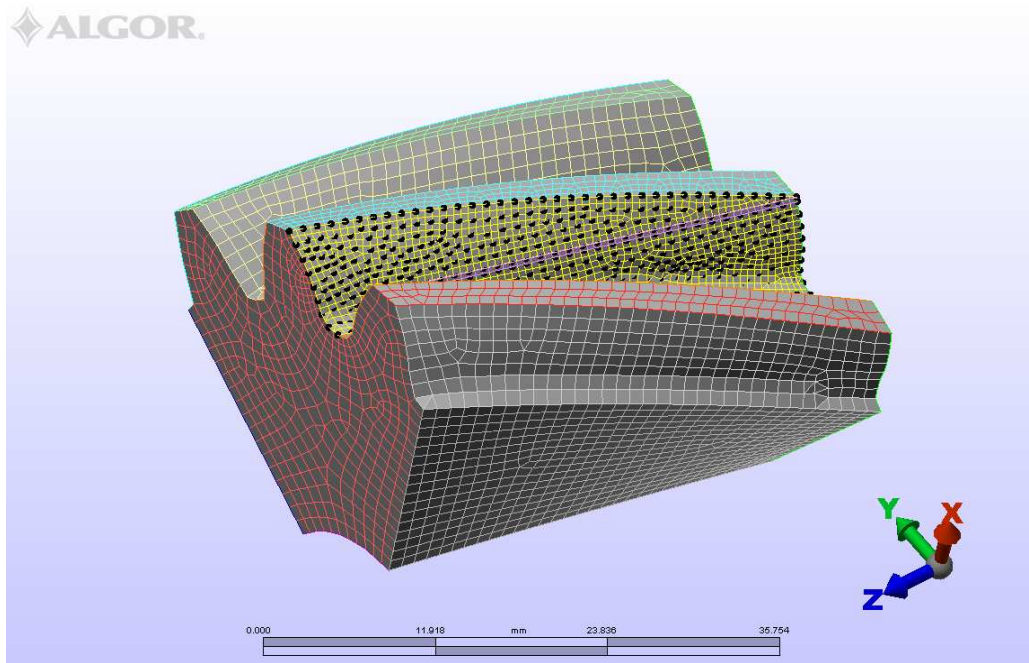


Figura 4.25 Modelo con malla refinada para el análisis

## CAPITULO 5

### SIMULACIÓN Y ANALISIS DE RESULTADOS

#### 5.1 CONVERGENCIA DE LOS RESULTADOS

Con el fin de determinar si los resultados que proporciona el análisis por el Método de los Elementos Finitos son confiables es necesario comprobar la convergencia de los resultados.

En la sección 2.5.2 se expresó que existen dos formas de aumentar la convergencia de la solución, disminuyendo el tamaño medio de los elementos en que se ha dividido el modelo o incrementando el grado de las funciones polinómicas de aproximación.

A pesar de que el segundo método produce una convergencia más rápida, es bastante difícil de implementar, ya que se necesita modificar el tipo de elemento usado. El programa Fempro permite para los elementos tipo "Brick" colocar un nodo intermedio, con lo cual se incrementaría en un grado la función polinómica de aproximación. Lamentablemente no se puede seguir aumentando el número de nodos intermedios. Por lo cual para verificar la convergencia de la solución, se usa el método de disminuir el tamaño medio de los elementos.

Para esto se procede a realizar varias veces el análisis, con el mismo modelo y con las mismas condiciones, pero reduciendo el tamaño medio  $h$  de los elementos.

La convergencia de los resultados se comprueba usando un modelo que represente unas dimensiones promedio en las variaciones de la geometría que se han realizado.

Se tomó un piñón con los siguientes parámetros:

Potencia Transmitida:	$H = 10$ [Hp] = 7.46 [kW]
Velocidad:	$n = 1725$ [rpm]
Ángulo de Presión:	$\phi = 20^\circ$
Diámetro del eje:	$d_e = 20$ [mm]
Número de dientes del piñón:	$N_p = 18$
Ángulo de hélice:	$\psi = 20^\circ$
Módulo del engrane:	$m = 3$ [mm]
Ancho de cara del piñón:	$F = 10$ m = 30 [mm]
Factores con valores estándar:	$a^* = 1, b^* = 1.25, c^* = 0.25, R^* = 0.30, x^* = 0$

En la Figura 5.1 se observa la variación en el tamaño de los elementos para el modelo del piñón.

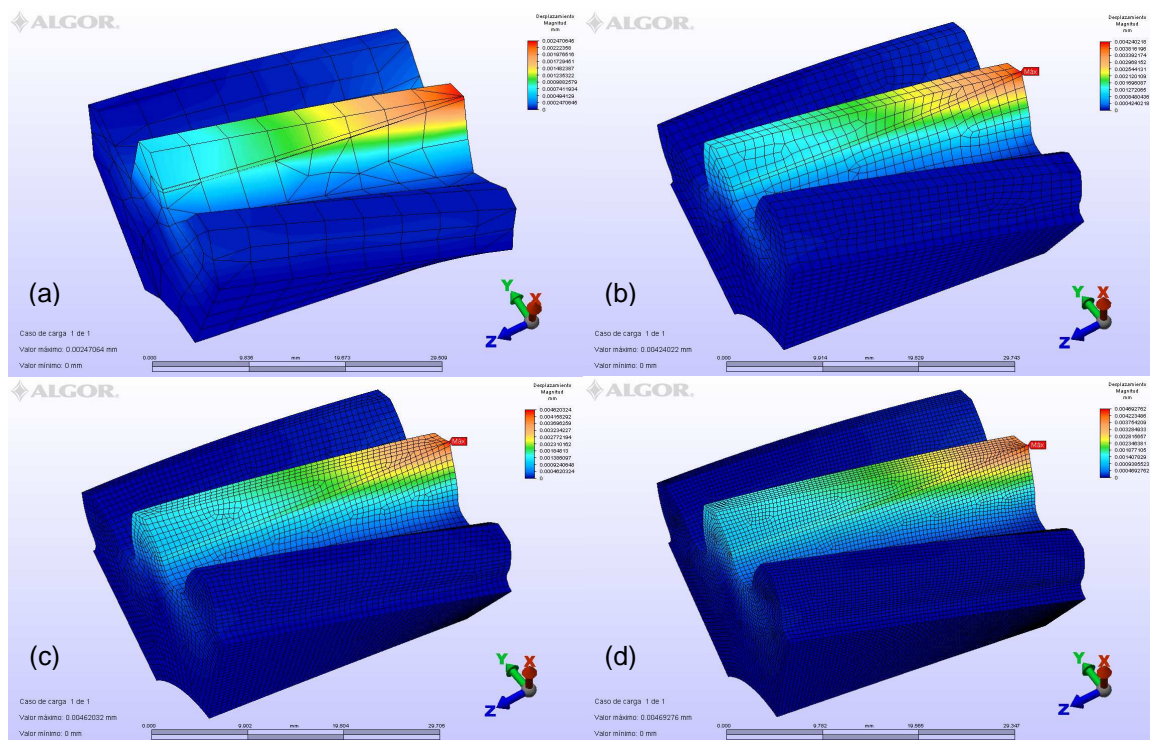


Figura 5.1 Disminución del tamaño medio de los elementos  
(a)  $h=4$ ; (b)  $h=1$ ; (c)  $h=0.6$ ; (d)  $h=0.4$



En la Figura 5.2, Figura 5.3 y en la Tabla 5.1 se observan los resultados de los análisis realizados incrementando el número de elementos y por lo tanto disminuyendo su tamaño.

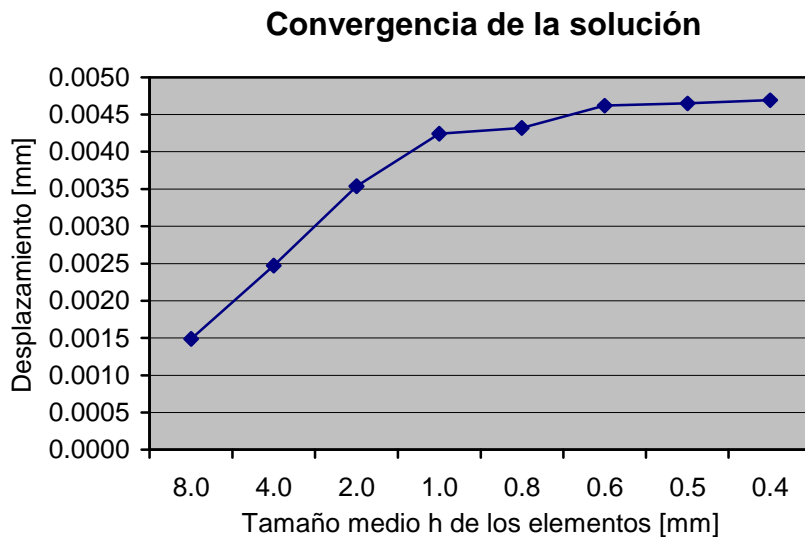


Figura 5.2 Convergencia de la solución en función de desplazamientos

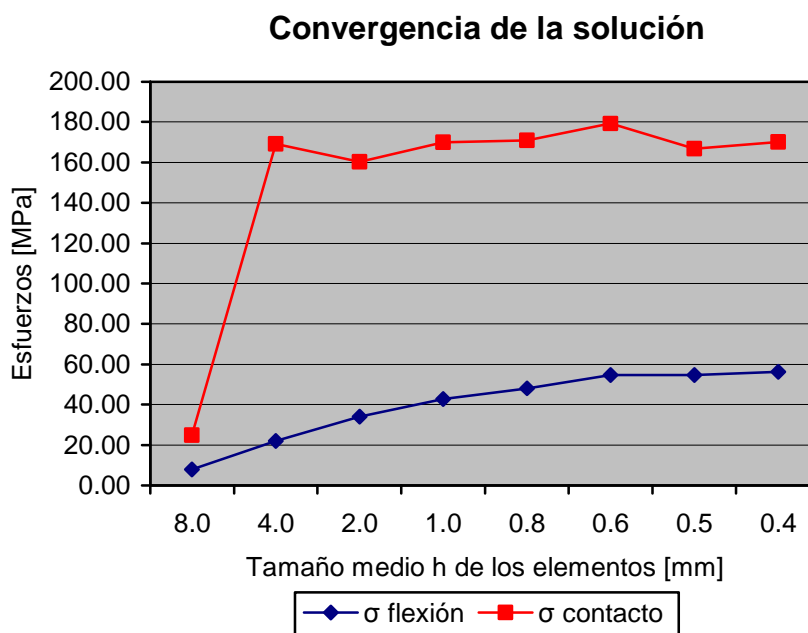


Figura 5.3 Convergencia de la solución en función de esfuerzos

Tabla 5.1 Convergencia de la solución

Tamaño $h$ [mm]	Número de Elementos	$u$ [mm]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
8.0	402	0.001486	7.8528	24.7919
4.0	1054	0.002471	22.0627	169.1590
2.0	3645	0.003540	33.9794	160.2581
1.0	23642	0.004240	42.6938	169.9623
0.8	43921	0.004317	48.0403	170.8520
0.6	91879	0.004620	54.6881	179.3403
0.5	169531	0.004650	54.7616	166.8235
0.4	296746	0.004693	56.3477	170.1225

Como se observa en la Figura 5.2 y Figura 5.3 la solución comienza a converger con un tamaño medio de los elementos de 0.6.

Como ya se anotó anteriormente por lo general no se realiza toda la malla de un solo tamaño sino que esta se refina en las zonas donde se desea analizar los resultados. Por lo cual se va a generar mallas de tamaño general de 1 [mm] y refinadas con tamaño de 0.5 a 0.6 [mm] en el lado del diente que contenga al plano de carga.

Para los modelos que tengan un tamaño distinto, por ejemplo para un módulo más grande, se realiza una malla y un refinado de tamaño proporcional, para que los resultados sean uniformes.

## 5.2 SIMULACIÓN Y OBTENCIÓN DE RESULTADOS

Una vez que se ha realizado el mallado del modelo se puede proceder a la fase de simulación.

### 5.2.1 SELECCIÓN DE UNIDADES PARA EL ANÁLISIS

Lo primero es fijar el sistema de unidades con el cual se va a trabajar. El programa Fempro cuando se importa modelos desde algún sistema CAD, automáticamente define las unidades de longitud en milímetros y las unidades de

fuerza en dinas. Se cambia las unidades de fuerza a Newtons, con lo cual se tiene la presión en  $[N/mm^2]$  que es igual a megapascales [MPa].

Para realizar el cambio de unidades se usa el menú “Herramientas: Unidades” con lo cual se muestra la ventana de la Figura 5.4. En esta caja de diálogo en la línea “Force” se procede a cambiar las unidades de fuerza a Newtons [N]. Al realizar esto aparece una caja de dialogo de advertencia a la que se responde afirmativamente.

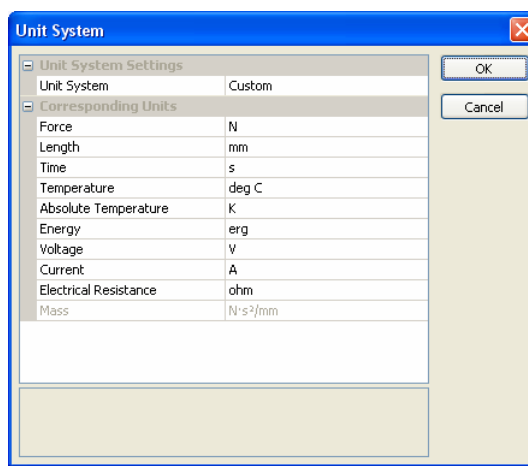


Figura 5.4 Caja de diálogo de “Unidades” del programa “Fempro”

## 5.2.2 INGRESO DE LAS PROPIEDADES DEL MATERIAL

En la vista de árbol en la parte izquierda de la pantalla como se muestra en la Figura 5.5, las líneas “Element Type” y “Element Definition” ya no se encuentran en rojo, ya que al crear la malla automáticamente se asigna el tipo de elemento, en este caso “Brick”. No es necesario modificar los parámetros por defecto que fija el programa. La única línea que permanece en rojo es la de “Material”.

Para establecer las propiedades del material se hace doble clic sobre la línea de “Material” de la vista de árbol, con lo cual se presenta la caja de diálogo de “Selección del material del elemento”, donde se puede escoger un material de la librería o ingresar los valores manualmente. Se ingresa las propiedades manualmente con el botón “Editar propiedades” mediante el cual se muestra la ventana de la Figura 5.6.

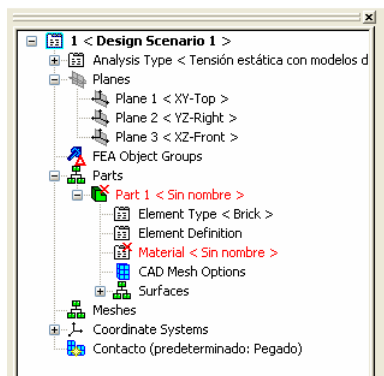


Figura 5.5 Vista de árbol del programa “Femro”

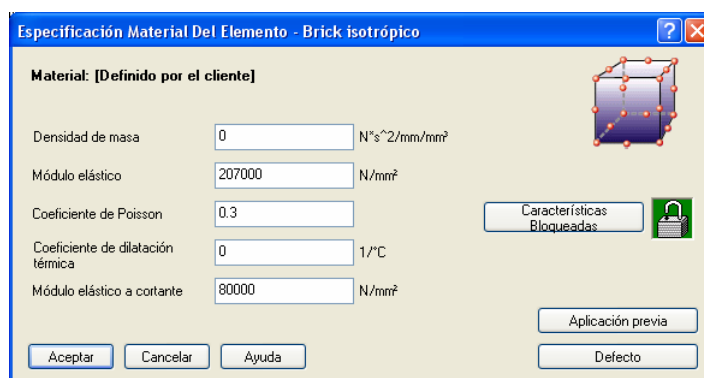


Figura 5.6 Ventana “Especificación material del elemento – Brick isotrópico”

En esta caja de diálogo se ingresa los valores del “Módulo elástico”, “Coeficiente de Poisson” y “Módulo elástico a cortante. Al ser el peso propio despreciable en el análisis no es necesario ingresar el valor de “Densidad de masa”, de igual forma al no considerarse el efecto de la temperatura no se requiere el “Coeficiente de dilatación térmica.

El material es acero con módulo de elasticidad  $E = 207000 \text{ [MPa]}^{31}$ , coeficiente de Poisson  $\nu \approx 0.3$  y módulo de elasticidad al corte  $G \approx 80000 \text{ [MPa]}$ .

### 5.2.3 ASIGNACIÓN DE LAS CONDICIONES DE BORDE

Una vez definido el material se procede a colocar las condiciones de borde, en este caso son los apoyos. Para esto se selecciona las superficies correspondientes al eje y al corte de la sección. Se utiliza el menú “Selección:

<sup>31</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 1183.

Forma: Punto” y “Selección: Seleccionar: Superficies”. Se selecciona las superficies requeridas como se muestra en la Figura 5.7.

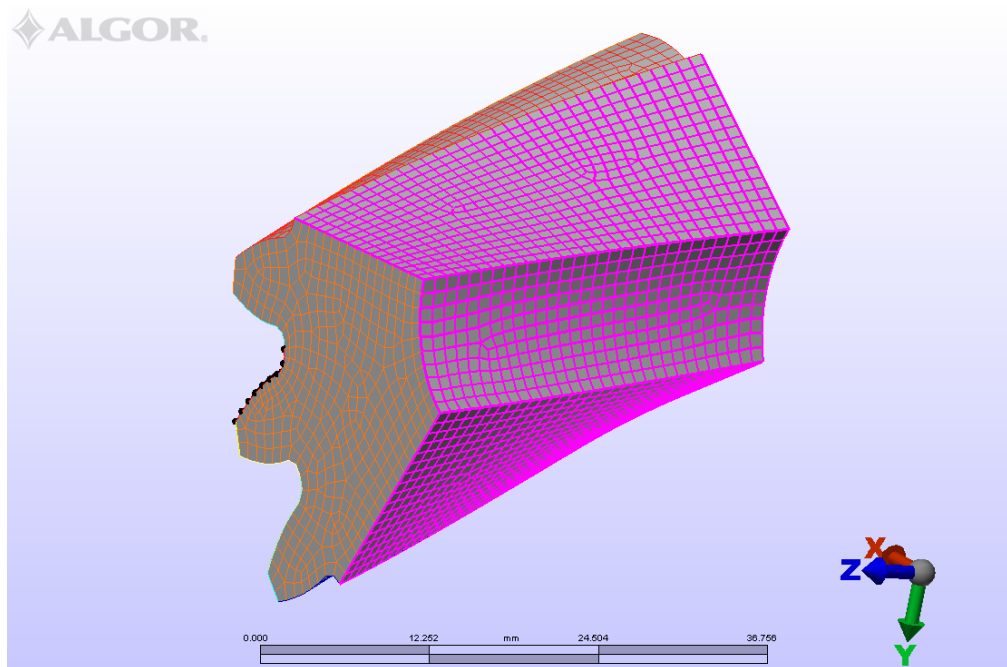


Figura 5.7 Selección de superficies para aplicar los apoyos

Realizando clic en cualquier parte del área de trabajo con el botón de la derecha del ratón aparece un menú contextual y se selecciona “Añadir: Surface boundary condition...”, con lo cual se muestra la caja de diálogo de la Figura 5.8.

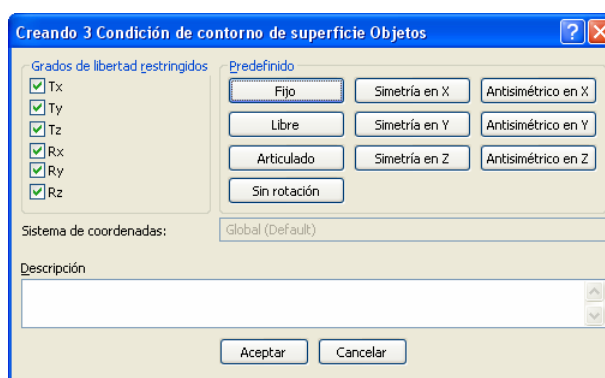


Figura 5.8 Caja de diálogo de “Condición de contorno de superficie”

En esta ventana de “Condición de contorno de superficie” se escoge el botón “Fijo” y luego “Aceptar” con lo cual se restringen los seis grados de libertad de las juntas correspondientes a las superficies seleccionadas.

## 5.2.4 APLICACIÓN DE LA CARGA

Para aplicar la carga, ya sea en uno o varios dientes, el programa Fempro permite colocar una fuerza en una superficie, la misma que se distribuye de manera uniforme en toda el área. Con este objetivo se usa el menú “Selección: Forma: Punto” y “Selección: Seleccionar: Superficies” y se selecciona la superficie correspondiente al plano de carga. Haciendo clic en cualquier parte del área de trabajo con el botón de la derecha del ratón aparece un menú contextual y se selecciona “Añadir: Surface force...”, lo cual abre la ventana mostrada en la Figura 5.9.

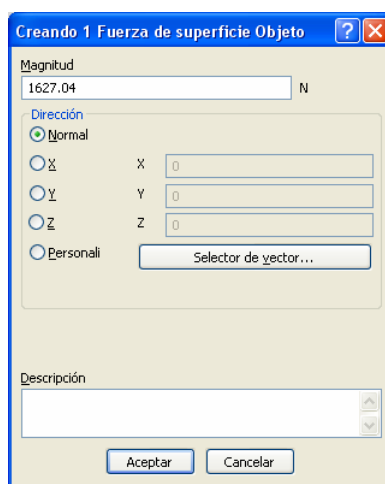


Figura 5.9 Caja de diálogo de “Fuerza de superficie”

Aquí se ingresa la fuerza total  $W$  calculada con las ecuaciones (1.23) y (1.26) y se hace clic en el botón “Aceptar”. Cabe anotar que la fuerza total es normal al plano de carga y que no varía con el ángulo de hélice  $\psi$  o con el ancho de cara  $F$ , pero sí con el módulo  $m$ .

Para el módulo  $m = 3$  [mm], la fuerza total es igual a  $W = 1627.04$  [N].

## 5.2.5 EJECUCIÓN DEL ANÁLISIS

Como se han definido todos los parámetros necesarios se procede a la ejecución del análisis, se usa el menú “Análisis: Efectuar análisis...”. Con esto primero se abre la ventana “Mallado tridimensional” la cual en base al mallado superficial

creado anteriormente realiza el mallado interior. Luego se abre la ventana “Structural – Tensión estática con modelos de materiales lineales”, se puede hacer clic en el botón “<<Detalles” con lo cual se puede observar el progreso del análisis, como se muestra en la Figura 5.10.

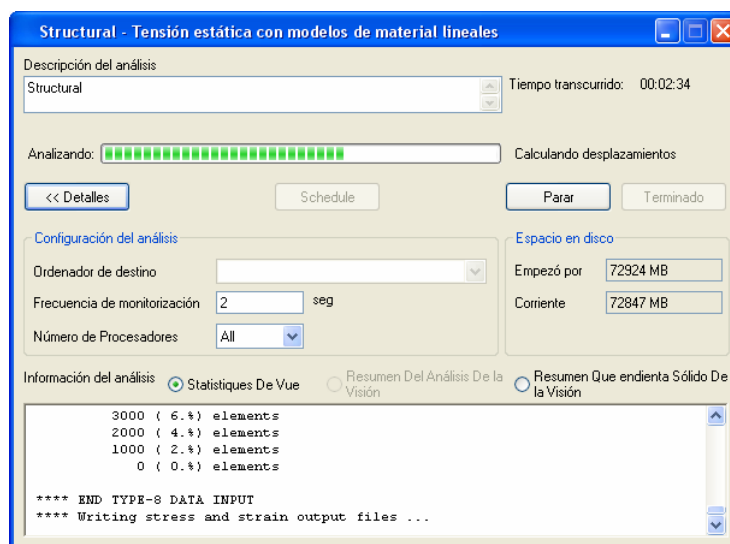


Figura 5.10 Ventana “Tensión estática con modelos de materiales lineales”

## 5.2.6 VISUALIZACIÓN DE RESULTADOS

Finalizado el análisis el programa automáticamente se pasa al ambiente de “Resultados” y se visualiza los resultados de esfuerzo de “von Mises” en la geometría deformada del modelo, como se observa en la Figura 5.11. Los resultados se muestran mediante contornos, con un rango de colores cuya escala se precisa en la parte superior izquierda de la pantalla. En la esquina inferior izquierda del área de resultados se muestra el máximo y mínimo valor.

También se pueden visualizar otros resultados como el desplazamiento de las juntas, para esto se usa el menú “Resultados: Desplazamiento: Magnitud”, con lo cual se muestra los resultados que se observan en la Figura 5.12.

Para cualquier tipo de resultado se puede usar la barra de “Opciones generales: Sonda” para visualizar los valores en cualquier parte del modelo.

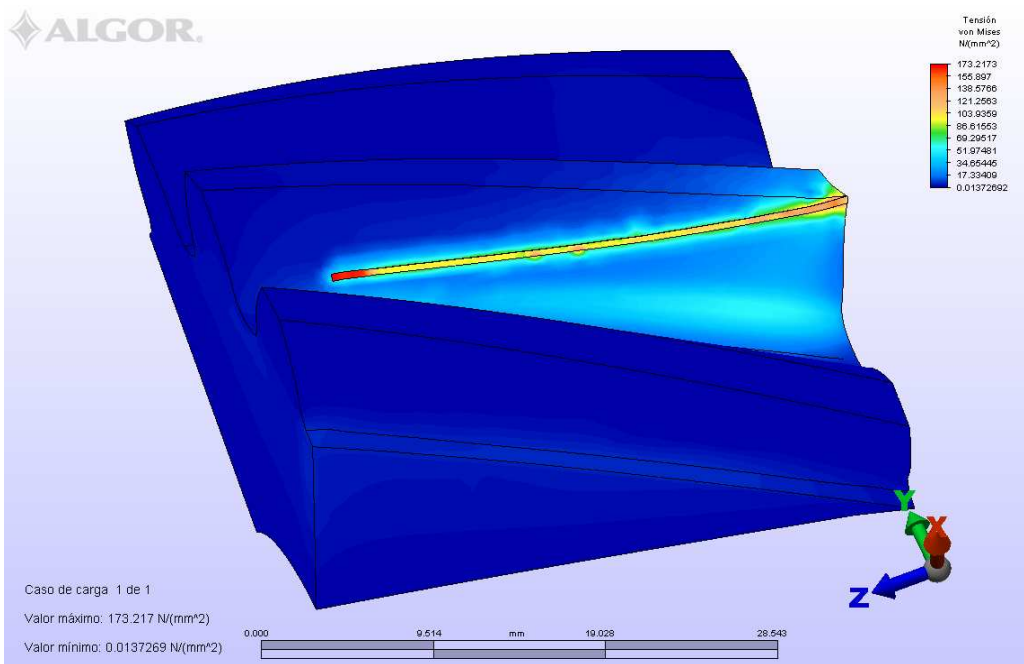


Figura 5.11 Resultados de esfuerzo de von Mises

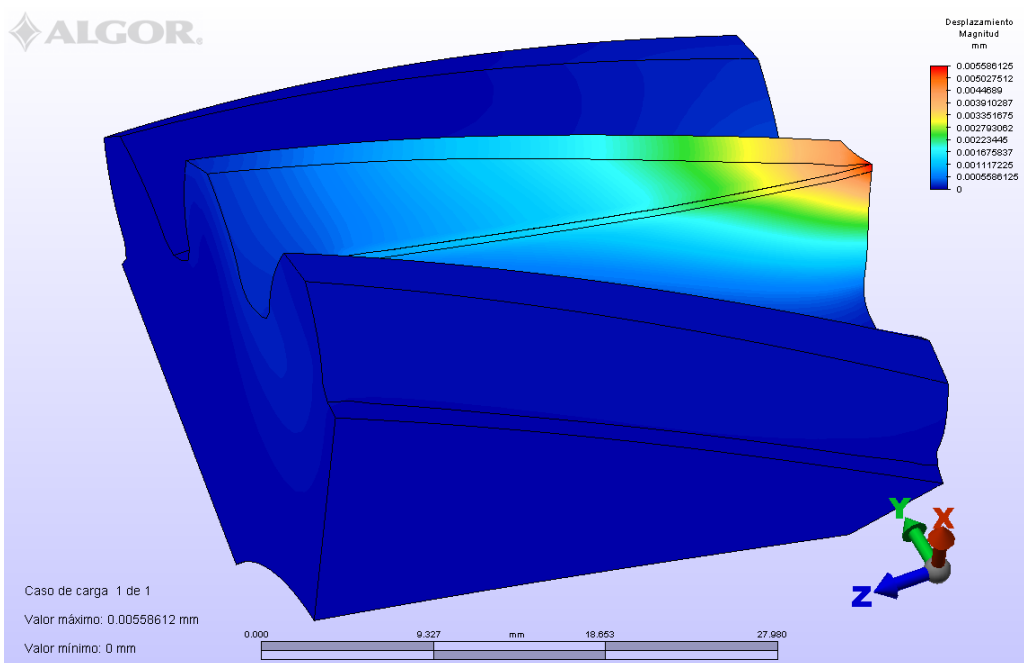


Figura 5.12 Resultados de desplazamiento

En el ambiente de resultados también es posible consultar los datos del modelo como son las condiciones de borde y las cargas aplicadas con el fin de comprobar los valores. Para esto se usa la barra de “Opciones generales: Presentación de cargas y restricciones”, si se desea se desactiva la geometría deformada del modelo en el menú “Opciones de resultados: Mostrar modelo desplazado” y los



resultados en “Resultados: Ninguno”, con lo que se obtiene la imagen que se observa en la Figura 5.13.

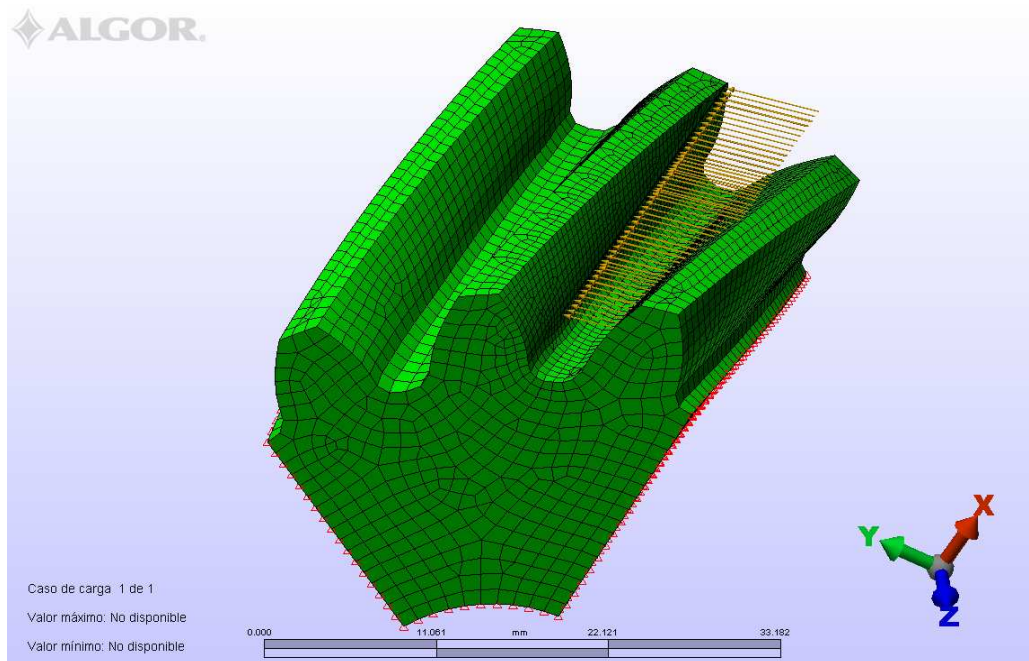


Figura 5.13 Visualización de cargas y restricciones

### 5.3 VARIACIONES EN LA GEOMETRÍA

Para poder realizar un estudio del comportamiento de los resultados obtenidos del análisis por el Método de los Elementos Finitos en el piñón, se procede a realizar una serie de variaciones en la geometría del piñón manteniendo constantes las demás variables.

Como ya se anotó en el Capítulo 3 los parámetros de diseño se mantienen fijos para todos los análisis y son los siguientes:

Potencia Transmitida:  $H = 10$  [Hp] = 7.46 [kW]

Velocidad:  $n = 1725$  [rpm]

Relación de transmisión:  $m_G = 2$

Ángulo de Presión:  $\phi = 20^\circ$

Diámetro del eje:  $d_e = 20$  [mm]

También permanecen sin cambio los valores de:

Número de dientes del piñón:	$N_p = 18$
Factor de altura de cabeza:	$a^* = 1$
Factor de altura de raíz:	$b^* = 1.25$
Factor de holgura radial:	$c^* = 0.25$
Factor de radio del entalle del diente:	$R^* = 0.30$
Factor del coeficiente de corrección:	$x^* = 0$

Se realiza modificaciones en el ángulo de hélice  $\psi$ , en el ancho de cara del piñón  $F$  y en el módulo del engrane  $m$ .

### 5.3.1 VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE

Se modifica los valores del ángulo de hélice desde  $0^\circ$  a  $45^\circ$ , se fija el ancho de cara en  $10\ m$  y el módulo en  $3\ [mm]$ , como se muestra en la Tabla 5.2.

Tabla 5.2 Variación del ángulo de hélice  $\psi$

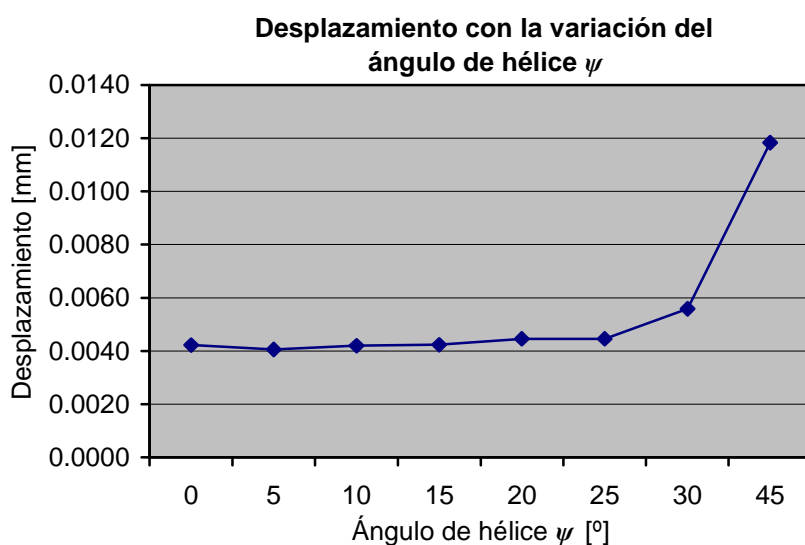
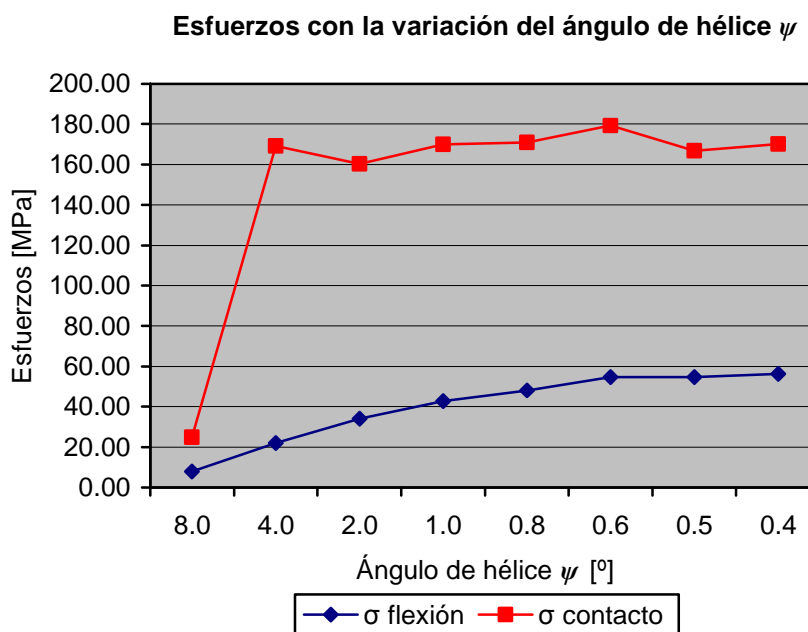
Número	$\psi\ [^\circ]$	$F\ [mm]$	$m\ [mm]$
1	0	30	3
2	5	30	3
3	10	30	3
4	15	30	3
5	20	30	3
6	25	30	3
7	30	30	3
8	45	30	3

Se realizan los análisis y se obtienen los resultados tabulados en la Tabla 5.3 y mostrados en la Figura 5.14 y en la Figura 5.15. Los gráficos de contorno con rango de colores se encuentran en el Anexo 8.

De los resultados se determina que el desplazamiento aumenta gradualmente con el incremento del ángulo de hélice, sobre todo para el ángulo de  $45^\circ$ . Los esfuerzos muestran también una tendencia a aumentar su valor con el incremento del ángulo de hélice.

Tabla 5.3 Resultados con la variación del ángulo de hélice  $\psi$ 

Número	$\psi$ [°]	$h$ [mm]	Refin. [mm]	Número Elementos	$u$ [mm]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	0	1.0	0.50	21055	0.004222	56.9966	142.1766
2	5	1.0	0.50	20765	0.004052	55.0213	164.2469
3	10	1.0	0.50	26046	0.004194	51.8232	177.3450
4	15	1.0	0.52	32200	0.004236	51.7890	180.8930
5	20	1.0	0.50	35638	0.004457	46.2909	179.3885
6	25	0.9		35317	0.004458	41.9966	162.5779
7	30	1.0	0.60	49240	0.005586	54.4791	173.2173
8	45	1.0	0.60	61692	0.011832	94.2888	264.1457

Figura 5.14 Resultados de desplazamiento con la variación del ángulo de hélice  $\psi$ Figura 5.15 Resultados de esfuerzos con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

### 5.3.2 VARIACIÓN DEL ANCHO DE CARA

Se modifica los valores del ancho de cara de  $9\text{ m}$  a  $14\text{ m}$ <sup>32</sup>, se fija el módulo en  $3\text{ [mm]}$  y el ángulo de hélice en  $20^\circ$  como se muestra en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4 Variación del ancho de cara  $F$

Número	$\psi$ [°]	$F$ [mm]	$m$ [mm]
1	20	27	3
2	20	30	3
3	20	33	3
4	20	36	3
5	20	39	3
6	20	42	3

Se realizan los análisis y se obtienen los resultados tabulados en la Tabla 5.5 y mostrados en la Figura 5.16 y en la Figura 5.17. Los gráficos de contorno con rango de colores se encuentran en el Anexo 9.

Del estudio de los resultados, se establece que los desplazamientos disminuyen de manera uniforme con el incremento del ancho de cara. Los esfuerzos también reducen su valor con el aumento del ancho de cara, aunque no de forma tan regular como los desplazamientos.

Tabla 5.5 Resultados con la variación del ancho de cara  $F$

Número	$F$ [mm]	$h$ [mm]	Refin. [mm]	Número Elementos	$u$ [mm]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	27	1.0	0.5	30415	0.004777	52.2386	170.7781
2	30	1.0	0.5	35436	0.004258	49.4182	170.8240
3	33	1.0	0.5	40245	0.004019	44.6355	162.3087
4	36	1.0	0.5	75678	0.003821	44.9514	167.2859
5	39	1.0	0.5	135356	0.003479	39.4759	151.2132
6	42	1.0	0.5	51610	0.003227	35.8940	148.6784

<sup>32</sup> JUVINALL Robert; Fundamentos de Diseño para Ingeniería Mecánica; Primera Edición; Limusa; México; 1993; p. 510.

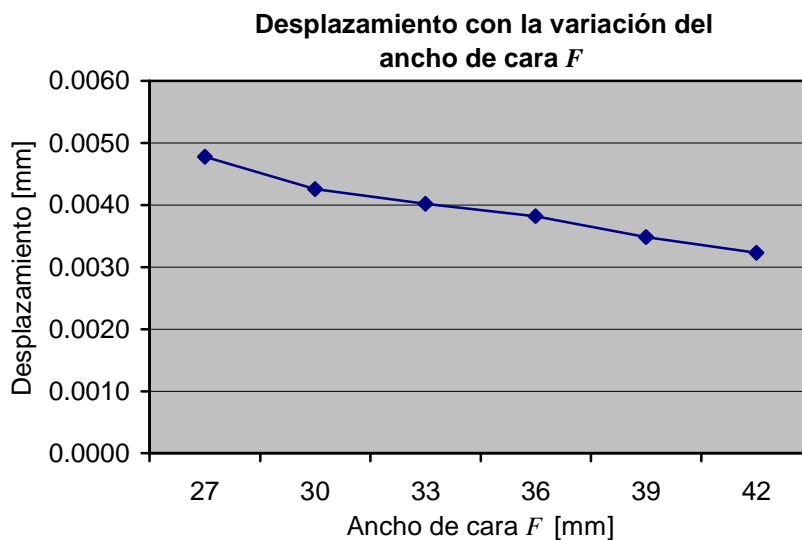


Figura 5.16 Resultados de desplazamiento con la variación del ancho de cara  $F$

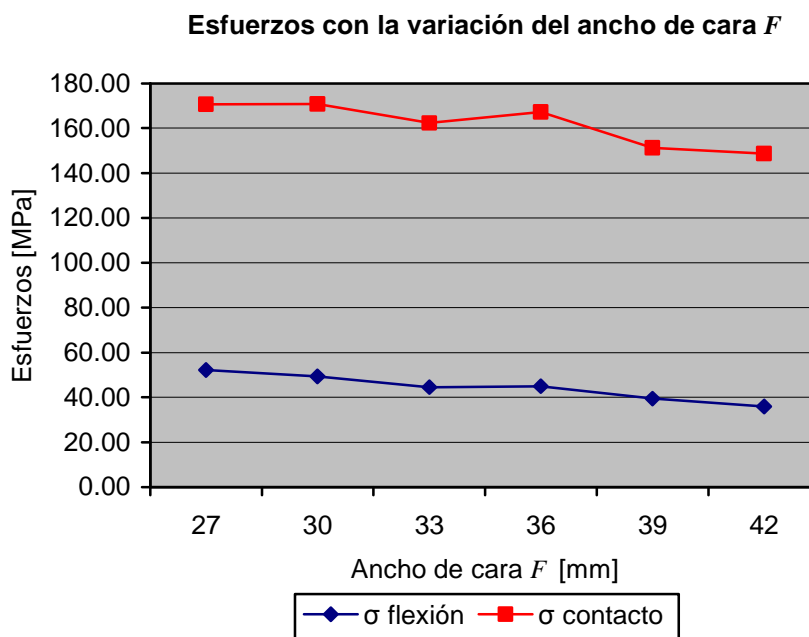


Figura 5.17 Resultados de esfuerzos con la variación del ancho de cara  $F$

### 5.3.3 VARIACIÓN DEL MÓDULO

Se modifica los valores del módulo con los tamaños estandarizados<sup>33</sup> de 2 a 8 [mm], se fija el ancho de cara en 30 [mm] y el ángulo de hélice en 30° como se muestra en la Tabla 5.6.

<sup>33</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 843.

Tabla 5.6 Variación del módulo  $m$ 

Número	$\psi$ [°]	$F$ [mm]	$m$ [mm]
1	30	30	2
2	30	30	3
3	30	30	4
4	30	30	5
5	30	30	6
6	30	30	8

Se realizan los análisis y se obtienen los resultados tabulados en la Tabla 5.7 y mostrados en la Figura 5.18 y en la Figura 5.19. Los gráficos de contorno con rango de colores se encuentran en el Anexo 10.

Como el incremento del módulo hace que las dimensiones generales del piñón se aumenten rápidamente, se ha incrementado el tamaño medio de los elementos así como el factor de refinamiento. De esta manera se tiene un número de elementos total más o menos regular.

Del estudio de los resultados se observa que los desplazamientos disminuyen considerablemente con el incremento del módulo. Los esfuerzos muestran también una tendencia a disminuir velozmente su valor con el aumento del módulo.

Tabla 5.7 Resultados con la variación del módulo  $m$ 

Número	$m$ [mm]	$h$ [mm]	Refin. [mm]	Número Elementos	$u$ [mm]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	2	1.0	0.5	26850	0.010876	165.4308	316.5292
2	3	1.0	0.6	48976	0.005589	54.8205	173.2135
3	4	1.2	0.6	45793	0.003604	25.6411	134.9552
4	5	1.4	0.7	43689	0.003106	18.8196	95.6812
5	6	1.6	0.8	39433	0.002663	12.9892	81.5845
6	8	2.0	1.0	31514	0.002079	6.9671	61.5994

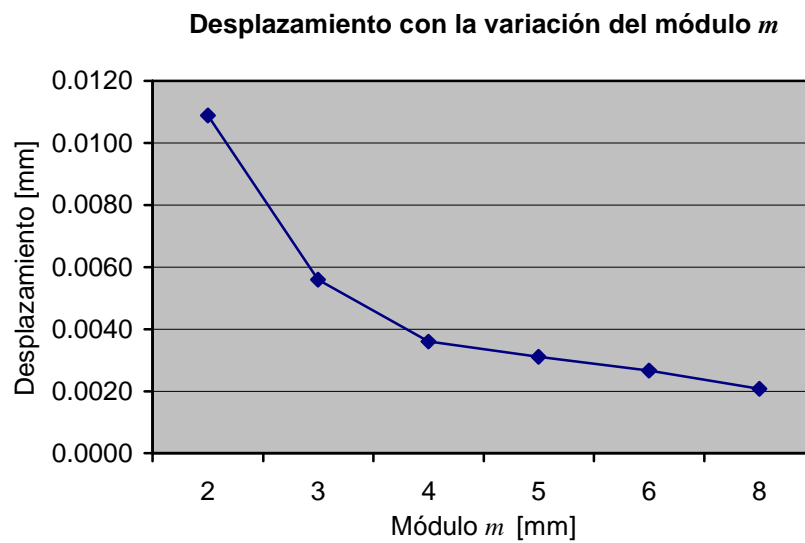


Figura 5.18 Resultados de desplazamiento con la variación del módulo  $m$

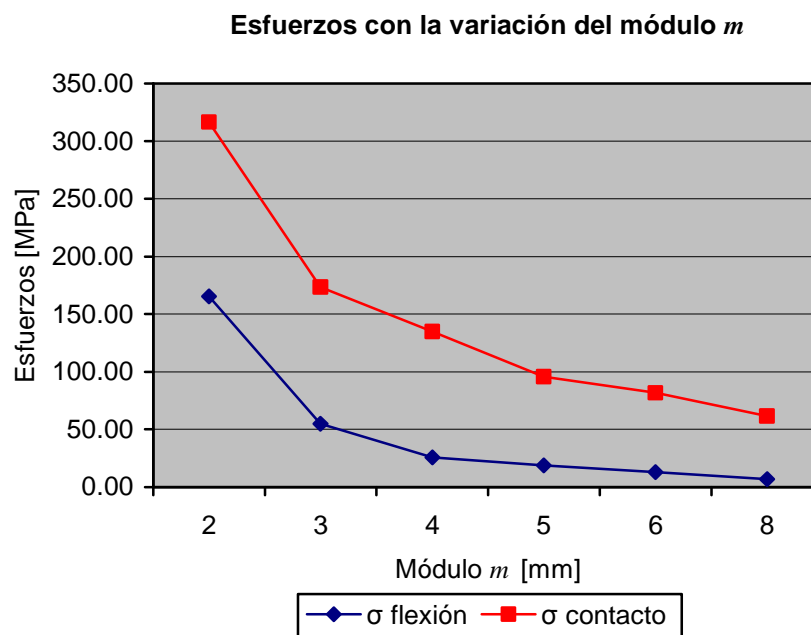


Figura 5.19 Resultados de esfuerzos con la variación del módulo  $m$

## 5.4 VARIACIÓN EN LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS

Se conoce que los engranes helicoidales tienen un valor de la relación de contacto  $m_c$  con valores cercanos o mayores a 2. Esto equivale a que por lo general más de una pareja de dientes se encuentra en contacto, es por esto que se ha realizado también el análisis del piñón considerando que la carga está aplicada en más de un diente a la vez.

Al no existir un criterio para la repartición de la carga en cada uno de los dientes, se considera que la presión es igual para cada una de las parejas de dientes que se encuentran en contacto. Esto quiere decir que la carga se reparte de acuerdo a la longitud de la línea de contacto en cada diente.

Se efectúa el análisis con la misma variación que en la sección 5.3.1. Se modifica los valores del ángulo de hélice desde  $0^\circ$  a  $45^\circ$ , se fija el ancho de cara en  $10\text{ mm}$  y el módulo en  $3\text{ [mm]}$ , como se muestra en la Tabla 5.2.

Se realizan los análisis y se obtienen los resultados tabulados en la Tabla 5.8 y mostrados en la Figura 5.20 y en la Figura 5.21. Los gráficos de contorno con rango de colores se encuentran en el Anexo 11.

Por la complejidad geométrica del modelo para algunos ángulos no se ha podido realizar una malla lo suficientemente fina para garantizar la convergencia de los resultados. Es así que para el ángulo de  $25^\circ$  se ha tomado un valor del tamaño medio de los elementos de 1.4 sin factor de refinamiento, esto va a producir que los resultados no guarden uniformidad con los valores obtenidos para otros ángulos.

De los resultados se observa que los desplazamientos aumentan con el incremento del ángulo de hélice aunque de una manera no muy uniforme. Los esfuerzos de contacto no muestran una tendencia clara y los esfuerzos de flexión muestran una disminución muy leve al irse incrementando el ángulo de hélice

Tabla 5.8 Resultados con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

Número	$\psi$ [°]	h [mm]	Refin. [mm]	Número Elementos	u [mm]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	0	1.0	0.50	33176	0.001554	27.1939	42.3589
2	5	1.0	0.50	37641	0.001810	28.1170	125.8164
3	10	0.9	0.52	47881	0.002259	32.7510	131.8074
4	15	1.0	0.50	49517	0.001842	28.6491	144.9913
5	20	1.0	0.50	85838	0.002636	30.4748	152.0639
6	25	1.4		18693	0.002534	25.6204	93.3756
7	30	1.2	0.60	127418	0.002136	28.1476	145.0765
8	45	1.2		60301	0.003593	23.9016	159.3400



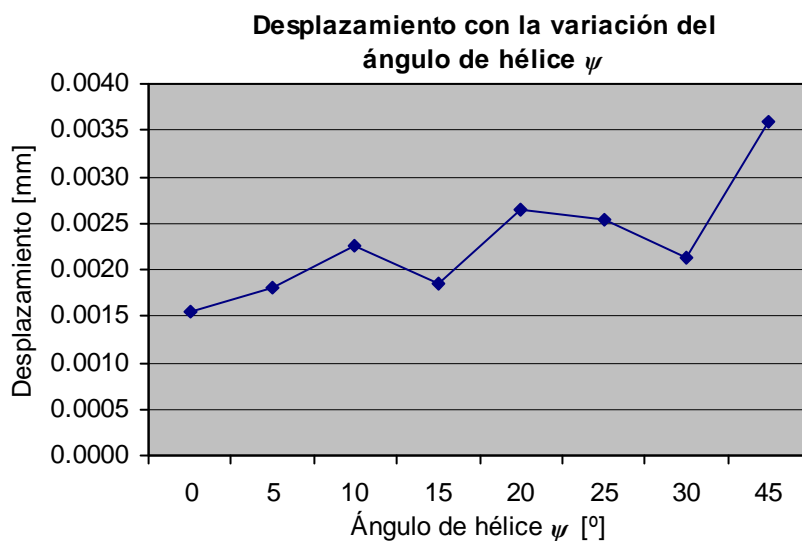


Figura 5.20 Resultados de desplazamiento con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

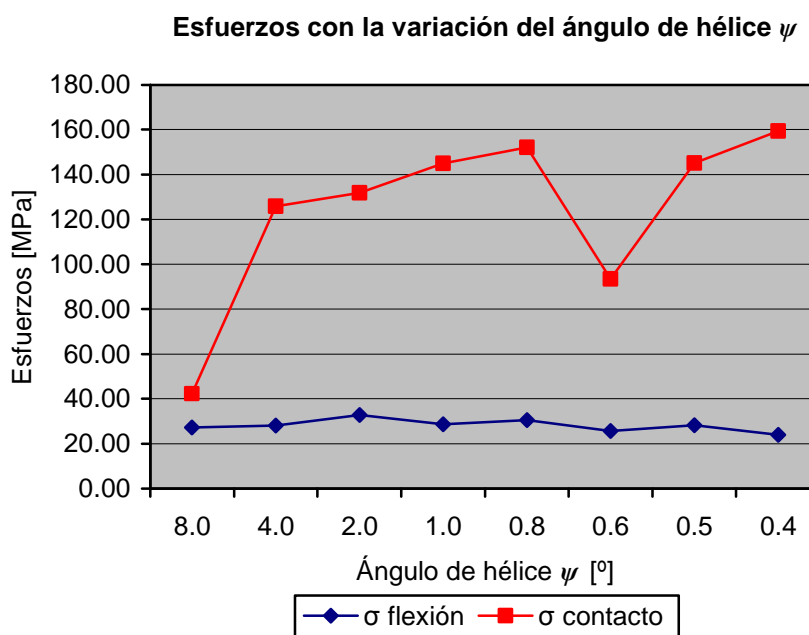


Figura 5.21 Resultados de esfuerzos con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

## 5.5 COMPARACIÓN Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

En esta parte se realiza una comparación de los resultados del cálculo por los métodos tradicionales con el Método de los Elementos Finitos, para posteriormente realizar un estudio que indique las similitudes y diferencias entre los dos procedimientos.

Los esfuerzos permisibles no son función de la geometría, se calcularon en el Capítulo 3 y los valores son: esfuerzo flexionante permisible  $\sigma_{perm} = 216.22$  [MPa] y esfuerzo de contacto permisible  $\sigma_{c,perm} = 732.80$  [MPa].

### 5.5.1 VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE

Los resultados de los dos métodos se tabulan en la Tabla 5.9 y se muestran en la Figura 5.22 para los esfuerzos flexionantes y en la Figura 5.23 para los esfuerzos de contacto.

Tabla 5.9 Comparación de resultados con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

Número	$\psi$ [°]	Método analítico		MEF	
		$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	0	64.95	643.91	57.00	142.18
2	5	51.79	518.16	55.02	164.25
3	10	47.51	511.27	51.82	177.35
4	15	44.79	499.94	51.79	180.89
5	20	42.39	484.41	46.29	179.39
6	25	39.81	464.99	42.00	162.58
7	30	39.16	442.08	54.48	173.22
8	45	29.06	356.93	94.29	264.15

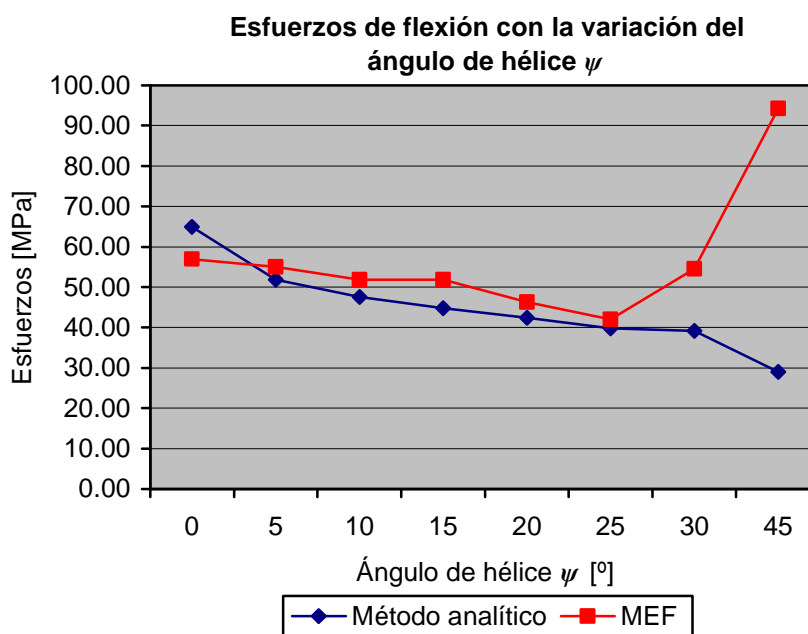


Figura 5.22 Esfuerzos de flexión con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

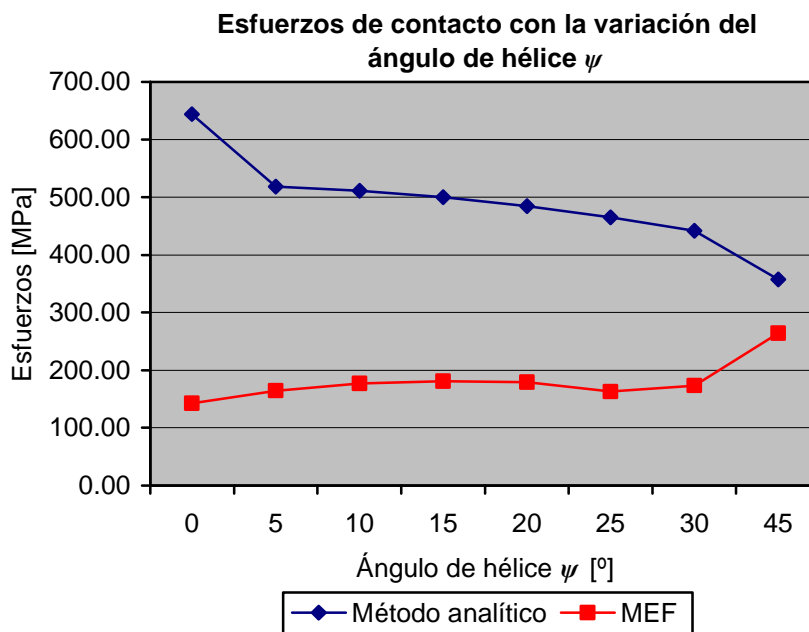


Figura 5.23 Esfuerzos de contacto con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

### 5.5.2 VARIACIÓN DEL ANCHO DE CARA

Los resultados de los dos métodos se tabulan en la Tabla 5.10 y se muestran en la Figura 5.24 para los esfuerzos flexionantes y en la Figura 5.25 para los esfuerzos de contacto.

Tabla 5.10 Comparación de resultados con la variación del ancho de cara  $F$

Número	$F$ [mm]	Método analítico		MEF	
		$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	27	47.10	510.61	52.24	170.78
2	30	42.39	484.41	49.42	170.82
3	33	38.54	461.87	44.64	162.31
4	36	35.33	442.20	44.95	167.29
5	39	32.61	424.86	39.48	151.21
6	42	30.28	409.40	35.89	148.68

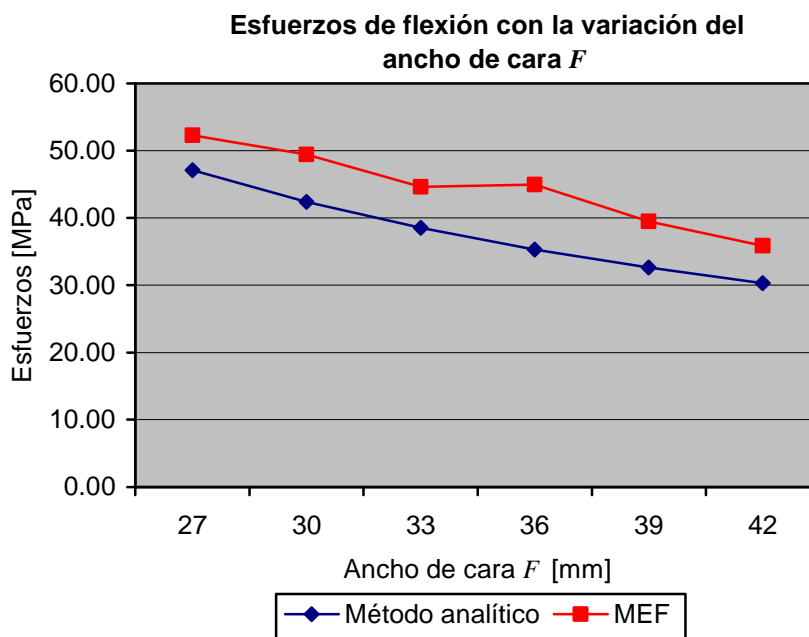


Figura 5.24 Esfuerzos de flexión con la variación del ancho de cara  $F$

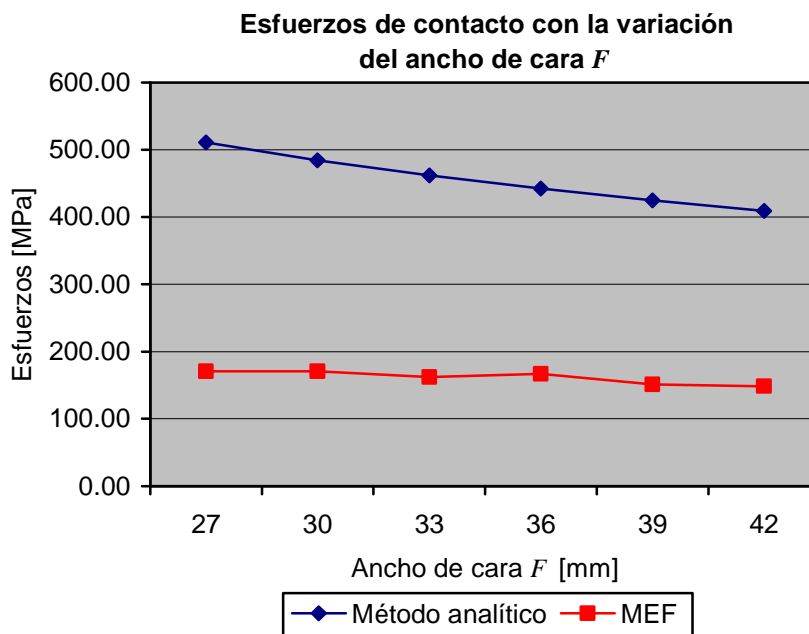


Figura 5.25 Esfuerzos de contacto con la variación del ancho de cara  $F$

### 5.5.3 VARIACIÓN DEL MÓDULO

Los resultados de los dos métodos se tabulan en la Tabla 5.11 y se muestran en la Figura 5.26 para los esfuerzos flexionantes y en la Figura 5.27 para los esfuerzos de contacto.

Tabla 5.11 Comparación de resultados con la variación del módulo  $m$

Número	$m$ [mm]	Método analítico		MEF	
		$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	2	88.10	663.11	165.43	316.53
2	3	39.16	442.08	54.82	173.21
3	4	22.03	331.56	25.64	134.96
4	5	14.10	265.25	18.82	95.68
5	6	9.79	221.04	12.99	81.58
6	8	5.51	165.78	6.97	61.60

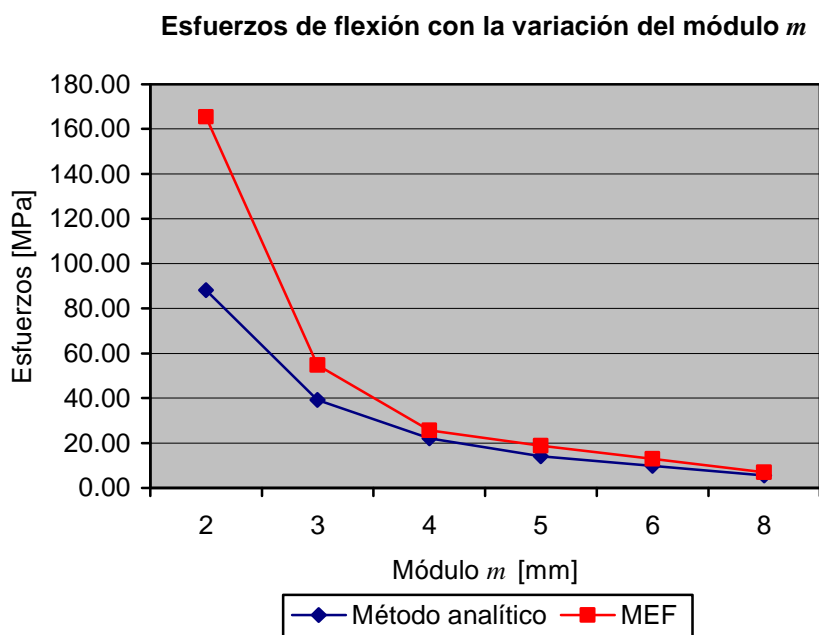


Figura 5.26 Esfuerzos de flexión con la variación del módulo  $m$

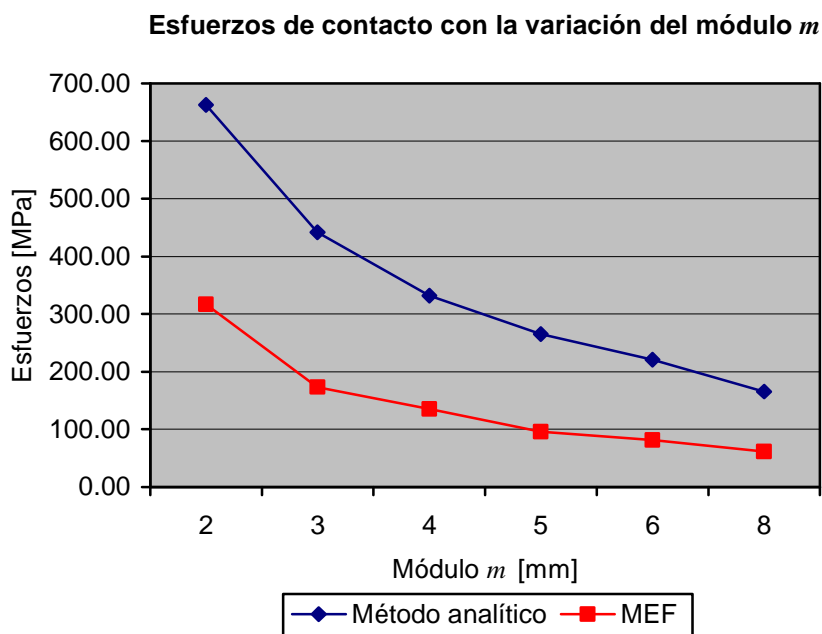


Figura 5.27 Esfuerzos de contacto con la variación del módulo  $m$

#### 5.5.4 VARIACIÓN EN LA APLICACIÓN DE LAS CARGAS

Los resultados de los dos métodos se tabulan en la Tabla 5.12 y se muestran en la Figura 5.28 para los esfuerzos flexionantes y en la Figura 5.29 para los esfuerzos de contacto.

Tabla 5.12 Comparación de resultados con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

Número	$\psi$ [°]	Método analítico		MEF	
		$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]	$\sigma$ [MPa]	$\sigma_c$ [MPa]
1	0	64.95	643.91	27.19	42.36
2	5	51.79	518.16	28.12	125.82
3	10	47.51	511.27	32.75	131.81
4	15	44.79	499.94	28.65	144.99
5	20	42.39	484.41	30.47	152.06
6	25	39.81	464.99	25.62	93.38
7	30	39.16	442.08	28.15	145.08
8	45	29.06	356.93	23.90	159.34

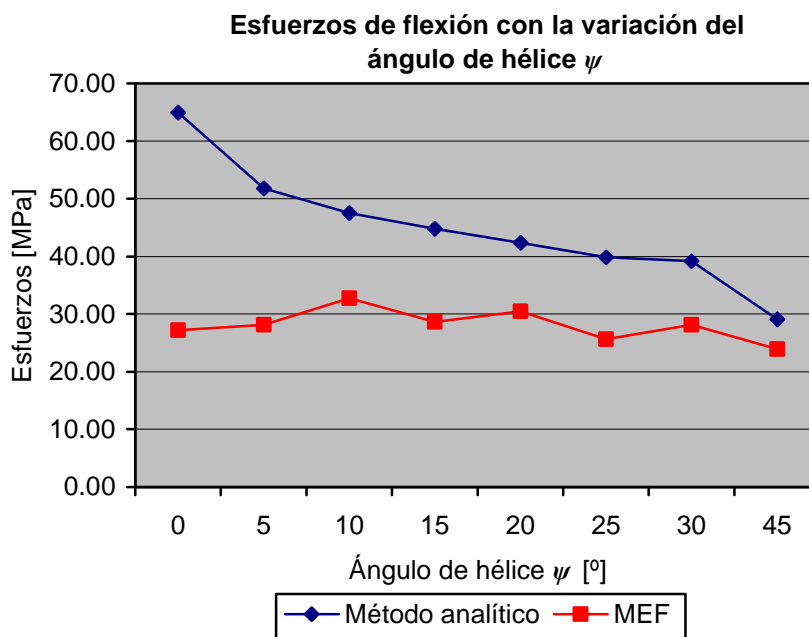


Figura 5.28 Esfuerzos de flexión con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

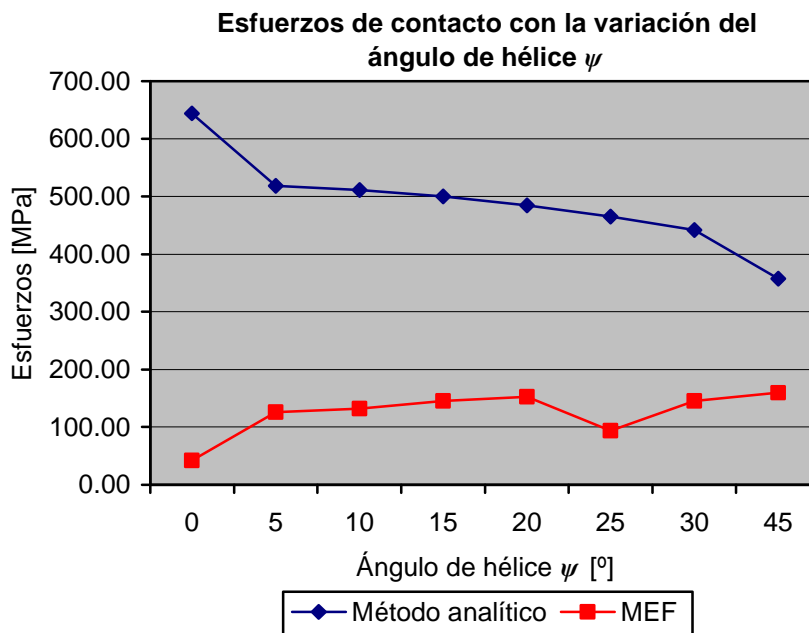


Figura 5.29 Esfuerzos de contacto con la variación del ángulo de hélice  $\psi$

### 5.5.5 ANÁLISIS DE LOS RESULTADOS

En el caso de la variación del ángulo de hélice  $\psi$  con la carga aplicada en un solo diente se observa que los esfuerzos flexionantes por el Método de los Elementos Finitos aumentan en vez de disminuir como sucede con el cálculo analítico, sobre todo para el ángulo de hélice de  $30^\circ$  y  $45^\circ$ . Además salvo para el caso del engrane recto los esfuerzos calculados por el MEF son superiores al método de cálculo tradicional.

Generalmente sucede que los esfuerzos calculados por el MEF tienen valores menores que los métodos tradicionales. La explicación de que en este caso los resultados sean contrarios se debe primero a que en el método analítico solo se considera la carga transmitida  $W_t$  para el cálculo mientras que en el caso de los elementos finitos se considera la carga total  $W$  que tiene además de la carga transmitida tienen las componentes radial  $W_r$  y axial  $W_a$ . La componente axial o empuje va incrementándose con el ángulo de hélice, es por esto que la diferencia es mayor para los ángulos más grandes. Otro factor que influye en la gran diferencia para los ángulos de  $30^\circ$  y  $45^\circ$ , es que en estos casos la carga aplicada en un solo diente, debido a su inclinación solo se coloca en una parte del ancho de cara.

Con la carga aplicada en varios dientes y cambiando el ángulo de hélice  $\psi$  se nota que los esfuerzos flexionantes determinados por el MEF son menores que los calculados analíticamente. Este es el resultado esperado ya que en el método analítico se asumen una serie de factores que no es posible considerar en el MEF. En este caso la diferencia para el ángulo de  $0^\circ$  es sumamente grande y va disminuyendo conforme se incrementa el ángulo de hélice.

Con las modificaciones del ancho de cara del piñón  $F$  se ve que los esfuerzos flexionantes tienen la misma tendencia para ambos métodos. Al igual que en el caso anterior los esfuerzos por el MEF son mayores que los del método analítico debido a que en el MEF se realiza el análisis con la carga total  $W$ .



Al variar el módulo del engrane  $m$  se observa que los esfuerzos flexionantes disminuyen para ambos métodos. En este caso al incrementar el módulo se reduce la diferencia entre los dos procedimientos, la explicación es que como se ha mantenido el ancho de cara para todos los cambios del módulo, la carga aplicada cada vez se coloca en una línea más horizontal, por lo cual se asemeja más al método de calculo tradicional con la carga aplicada en la parte más alta del diente.

Con respecto al esfuerzo de contacto para todos los casos de variación de geometría y la variación en la aplicación de carga los resultados son considerablemente menores en el MEF que en el método de cálculo tradicional. Esto es de esperarse ya que como se anotó la distribución de los esfuerzos de contacto entre dos cilindros es elíptica, pero en el MEF se aplicó una fuerza en una superficie lo cual da una distribución uniforme de carga. No se pudo aplicar la distribución elíptica de carga debido a que esto requería que el mallado en el plano de carga sea bastante fino para que en el ancho  $b$  pueda existir una distribución de carga no uniforme. Además al igual que en los esfuerzos flexionantes el método analítico asume una serie de factores que no se consideran en el MEF.

Para el caso de la variación del ángulo de hélice  $\psi$ , tanto para la carga aplicada en un solo diente como en varios dientes, la tendencia de los esfuerzos de contacto del MEF no es la misma que en el método analítico. La explicación es la misma anotada para los esfuerzos flexionantes en el caso de la variación del ángulo de hélice.

Los esfuerzos de contacto cuando varía el ancho de cara del piñón  $F$  y el módulo del engrane  $m$  tienen la misma tendencia en los dos métodos.

## CAPITULO 6

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 6.1 CONCLUSIONES

- El presente trabajo comprueba que es posible el análisis de esfuerzos en transmisiones de engranes cilíndricos helicoidales mediante el Método de los Elementos Finitos.
- La parte más complicada del MEF en engranes helicoidales es la modelación del engrane con el plano de carga. Si bien el engrane se forma por el desplazamiento de un perfil de evolvente a lo largo de una hélice base, las generatrices sobre las cuales se produce el contacto entre dientes, pertenecen a esa superficie pero no se crean en esta generación.
- El programa Fempro de la casa comercial Algor tiene limitaciones en cuanto al mallado tridimensional lo que provoca que requiera gran cantidad de recursos del computador para realizar mallas bastante finas.
- La generación del mallado tridimensional en el programa Fempro se realiza mediante algún método heurístico, esto hace que al realizar el mallado en diferentes equipos de computación con distintas capacidades la malla final tenga distinto número de elementos y por lo tanto produzca resultados ligeramente diferentes.
- Los resultados obtenidos por el MEF con la variación del ángulo de hélice no concuerdan con los resultados del método analítico, para el caso más crítico con el ángulo de  $45^{\circ}$  existe una diferencia del 224%. Esto no

significa que el estudio sea incorrecto, sino que los dos métodos hacen consideraciones distintas en su concepción y desarrollo.

- Un método de cálculo no reemplaza al otro sino más bien se complementan. Es así que mientras el MEF puede calcular esfuerzos de forma más precisa en geometrías complejas, no incluye una serie de factores muchos de ellos experimentales que el método analítico utiliza.
- Para tratar que los resultados por los dos métodos coincidan se decidió considerar los valores mínimos para algunos factores que son imposibles de considerar en el MEF, a pesar de todo los valores mínimos de algunos de estos factores son superiores en un 15% a 30% a la unidad.
- Los esfuerzos de flexión obtenidos por el MEF si bien son mayores que los calculados por el método analítico son mucho menores que los esfuerzos flexionantes permisibles para todos los casos.
- Al no existir un criterio para la distribución de carga en varios dientes el análisis realizado con la carga aplicada en varios dientes no produce unos resultados confiables.
- Al aplicarse la carga como una fuerza uniforme en el plano de carga los esfuerzos de contacto obtenidos por el MEF son significativamente menores que los calculados con el método analítico.
- El MEF aplicado a los engranes tiene muchas posibilidades en el caso de geometrías que no se acogen a las normas y por lo tanto no existen los factores de forma y de concentración de esfuerzos tabulados.

## 6.2 RECOMENDACIONES

- Se recomienda realizar un análisis con la distribución elíptica en el plano de carga, para poder aproximarse más a los resultados analíticos. Debido a la gran cantidad de elementos que se generarían al hacer esto se debería usar un software distinto al de la casa Algor.
- El programa Fempro es sumamente versátil, de gran facilidad de uso y bastante intuitivo, lo que lo hace recomendable para el aprendizaje del MEF con modelos simples o medianamente complejos.
- Para poder determinar la distribución de cargas cuando varios pares de dientes entran en contacto se puede modelar el piñón y la rueda y hacer que el programa de análisis por elementos finitos calcule el contacto entre los dientes. Se trató de realizar este tipo de análisis pero solo funcionó para engranajes rectos. Se debería probar con otros programas que tengan estas características para tratar de realizar esta simulación.
- La mayoría de programas actuales que utilizan el MEF emplean la capacidad de los computadores más nuevos con varios procesadores, pero solo en la fase de resolución de los sistemas de ecuaciones. Para todos los procesos anteriores y posteriores, esto es el mallado, ensamblaje de las matrices, salida de resultados y visualización de resultados utilizan un solo procesador. por lo cual puede resultar más recomendable un computador con una mayor velocidad del reloj que uno con varios procesadores.

## BIBLIOGRAFÍA

- COOK Robert D.; “Finite Element Modeling for Stress Analysis”; John Wiley & Sons Ltd.; 1995.
- GONZÁLEZ REY Gonzalo; “Cálculo de Engranajes Cilíndricos”; Ciudad Habana; 2001.
- HENRIOT Georges; “MANUAL DE ENGRANAJES”; Marcombo S.A.; Barcelona; 1967.
- JUVINALL Robert C.; “Fundamentos de Diseño para Ingeniería Mecánica”; Limusa; México; 1991.
- MAYER Omar E.; “Engranajes Helicoidales Teórico”; Universidad de Buenos Aires; 2002.
- REDDY J.N.; “An Introduction to the Finite Element Method”; McGraw-Hill; México; 1984.
- SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición; McGraw Hill; México; 2002.
- SHIGLEY Joseph; MITCHELL Larry; “Manual de Diseño Mecánico”; 4ta. Edición; Tomo 3 y Tomo 4; McGraw-Hill; México; 1989.
- SMITH I.M.; GRIFFITHS D.V.; “Programming The Finite Element Method”; John Wiley & Sons Ltd.; 2da Edición; 1988.
- SPYRAKOS C. Constantine; “Finite Element Modeling in Engineering Practice”; Algor Inc.; Pittsburgh; 1994.

- SPYRAKOS C. Constantine; RAFTOYIANNIS John; "Finite Element Analysis in Engineering Practice"; Algor Inc.; Pittsburgh; 1997.
- ZURITA Jesús A.; El método de los elementos finitos; Universidad de Navarra; 2002.

**ANEXOS**

## **ANEXO 1**

### **FACTORES DE FORMA DE LEWIS Y**



Tabla 1 Valores del factor de forma de Lewis  $Y$  <sup>1</sup>

Número de dientes	$Y$	Número de dientes	$Y$
12	0.245	28	0.353
13	0.261	30	0.359
14	0.277	34	0.371
15	0.290	38	0.384
16	0.296	43	0.397
17	0.303	50	0.409
18	0.309	60	0.422
19	0.314	75	0.435
20	0.322	100	0.447
21	0.328	150	0.460
22	0.331	300	0.472
24	0.337	400	0.480
26	0.346	Cremallera	0.485

<sup>1</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 910.

**ANEXO 2**  
**FACTORES GEOMÉTRICOS *J***

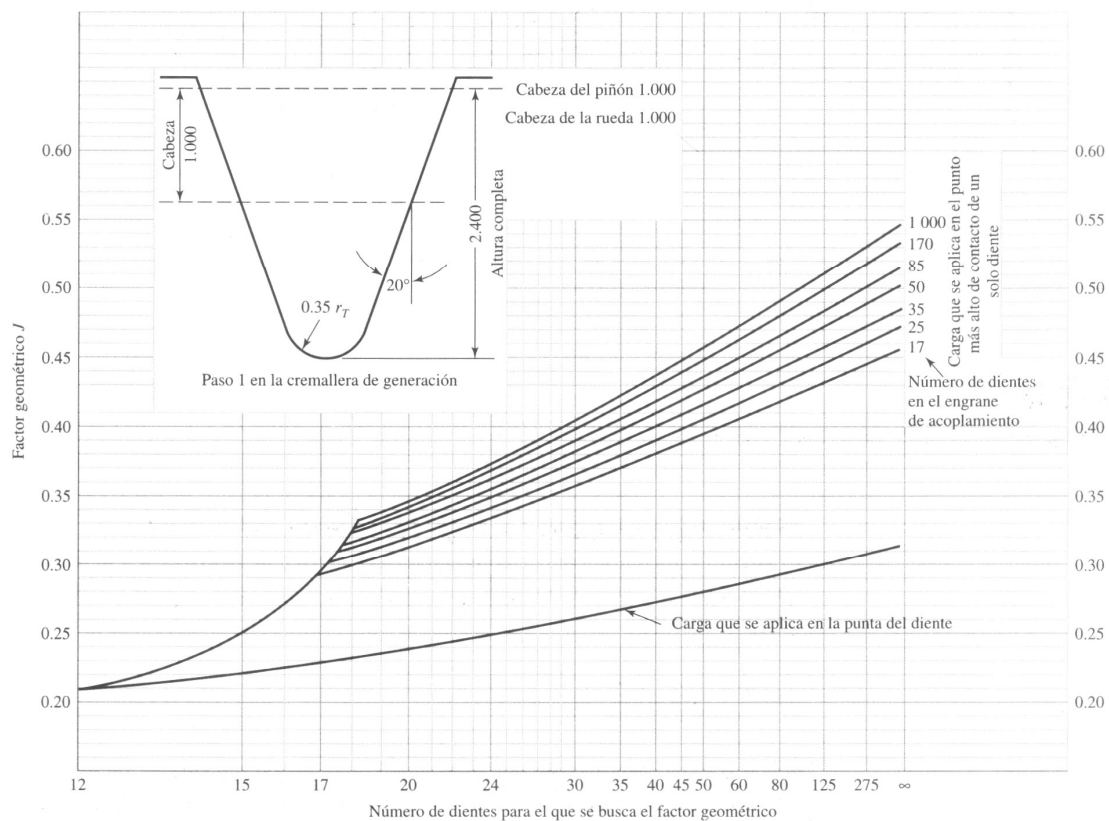


Figura 1 Factores geométricos  $J$  para engranes rectos<sup>1</sup>

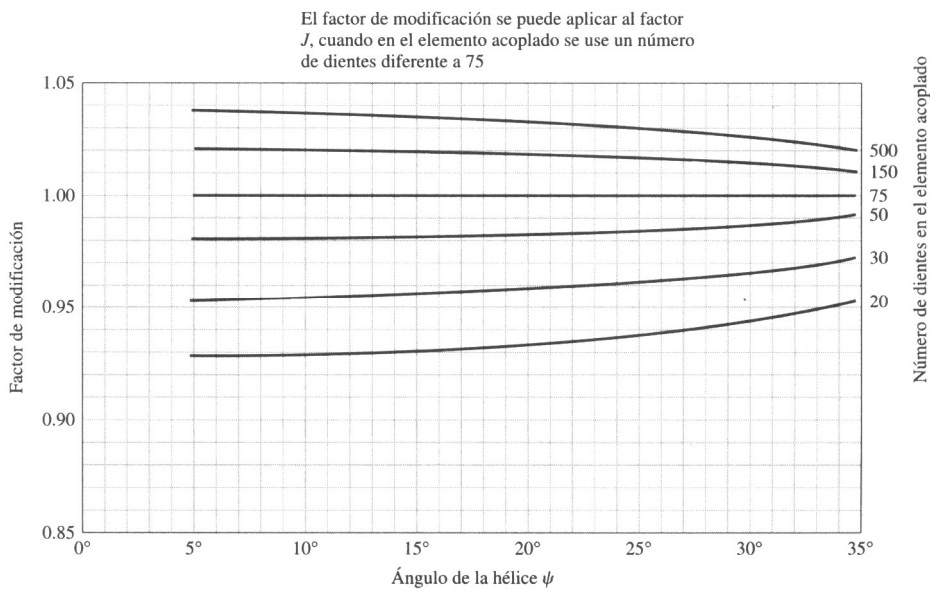
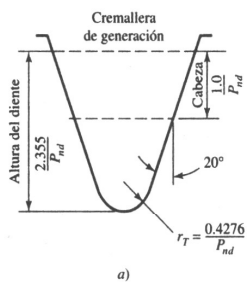


Figura 2 Multiplicadores del factor  $J'$  para su uso con la Figura 3, a fin de determinar  $J^2$

<sup>1</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 925.

<sup>2</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 927



$$m_N = \frac{p_N}{0.95Z}$$

El valor de Z es para un elemento con los números indicados de dientes y un acoplamiento de 75 dientes

El espesor normal del diente del piñón y del diente de la corona, cada uno reducidos 0.024 pulg., para proporcionar 0.048 pulg de juego total, para un paso diametral normal

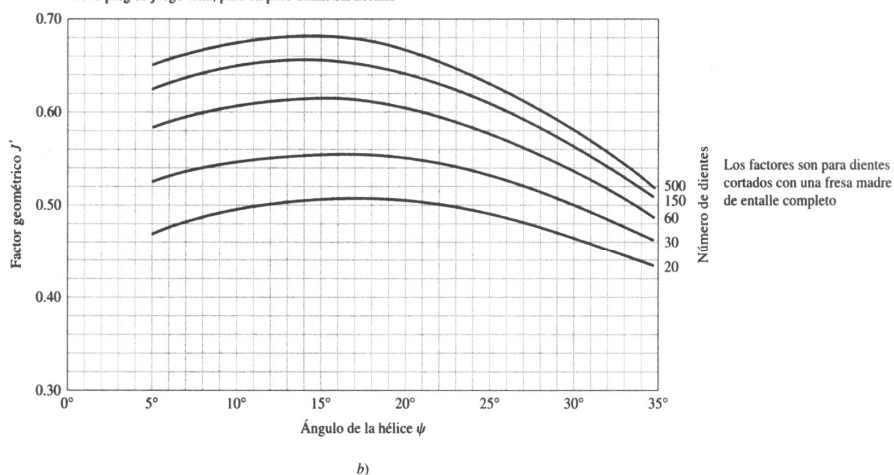


Figura 3 Factores geométricos  $J'$  para engranes helicoidales<sup>3</sup>

<sup>3</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 926

**ANEXO 3**

**NÚMERO DE ESFUERZO FLEXIONANTE PERMISIBLE**

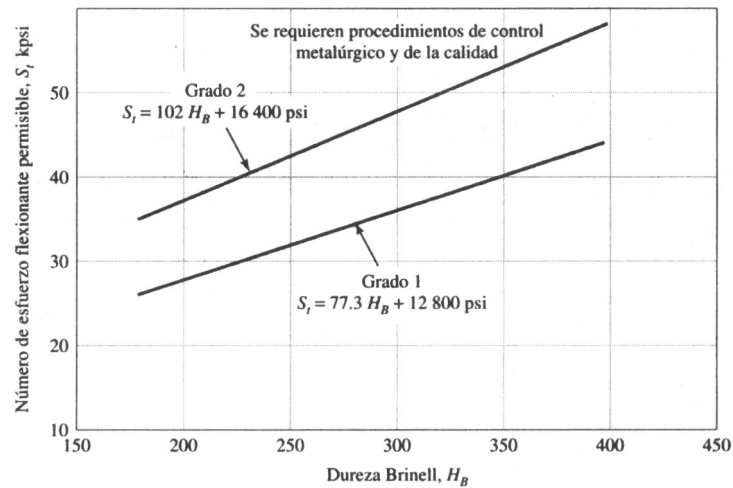


Figura 1 Número de esfuerzo flexionante permisible  $S_t$  para engranes de acero completamente endurecido<sup>1</sup>

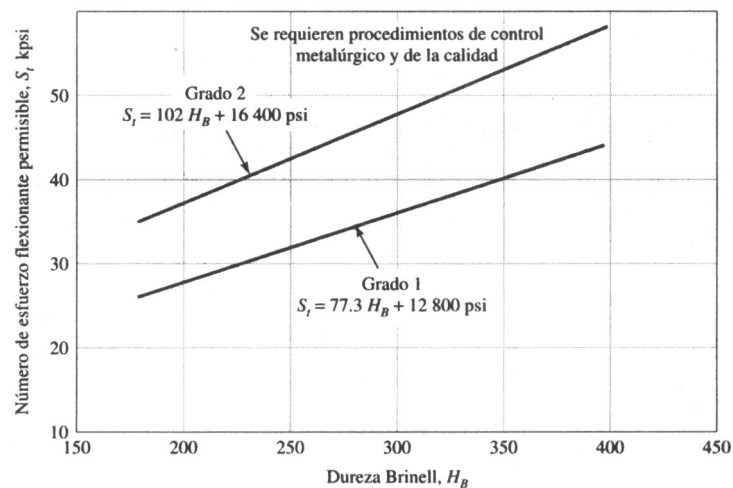


Figura 2 Número de esfuerzo flexionante permisible  $S_t$  para engranes de acero nitrurado completamente endurecido<sup>2</sup>

<sup>1</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 919.

<sup>2</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 919.

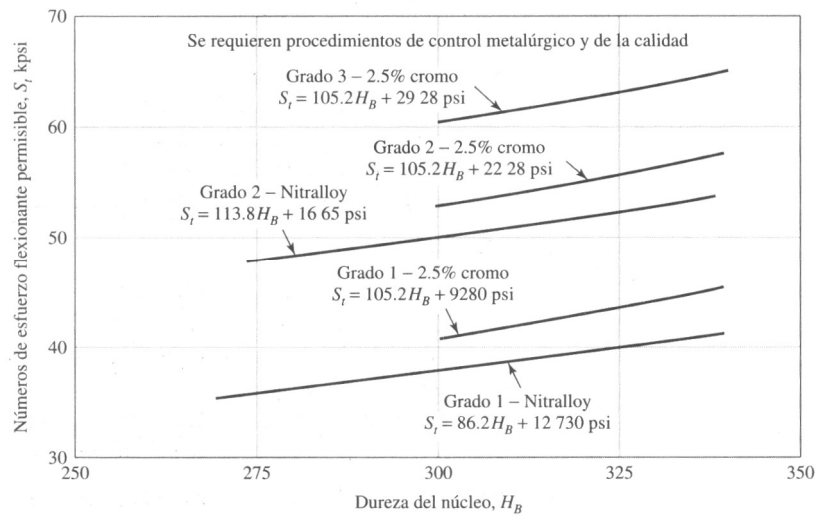


Figura 3 Número de esfuerzo flexionante permisible  $S_t$  para engranes de acero nitrurado<sup>3</sup>

<sup>3</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 920.

**ANEXO 4**

**FACTOR DE CICLOS DE ESFUERZO DE**

**RESISTENCIA A LA FLEXIÓN**



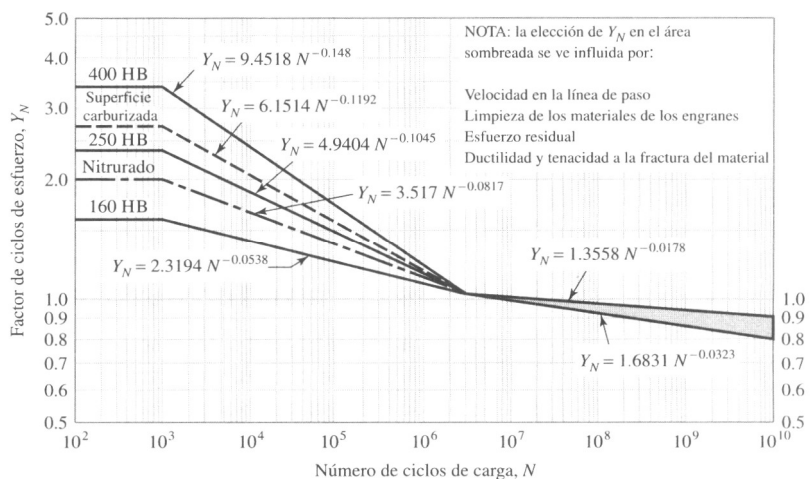


Figura 1 Factor de ciclos de esfuerzo repetidamente aplicados de resistencia a la flexión  $Y_N^1$

<sup>1</sup> SHIGLEY Joseph; “Diseño en Ingeniería Mecánica”; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 935.

**ANEXO 5**

**RESISTENCIA A LA FATIGA POR CONTACTO**

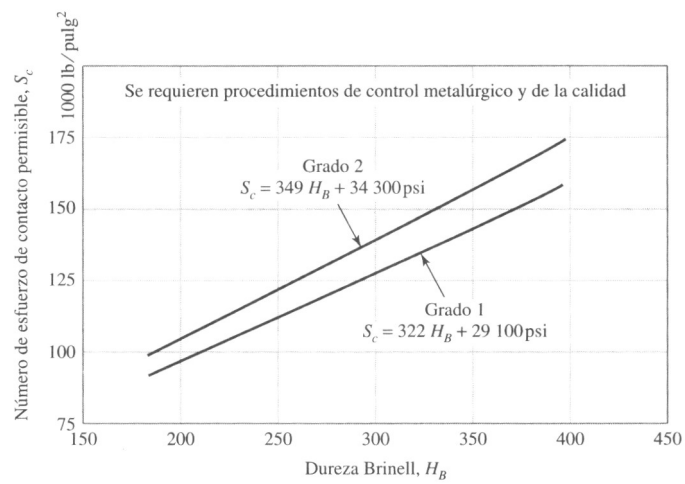


Figura 1 Resistencia a la fatiga por contacto  $S_c$  a  $10^7$  ciclos y confiabilidad de 0.99 para engranes de acero completamente endurecido <sup>1</sup>

<sup>1</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 922.

**ANEXO 6**

**FACTOR DE CICLOS DE ESFUERZOS DE RESISTENCIA A LA  
PICADURA**

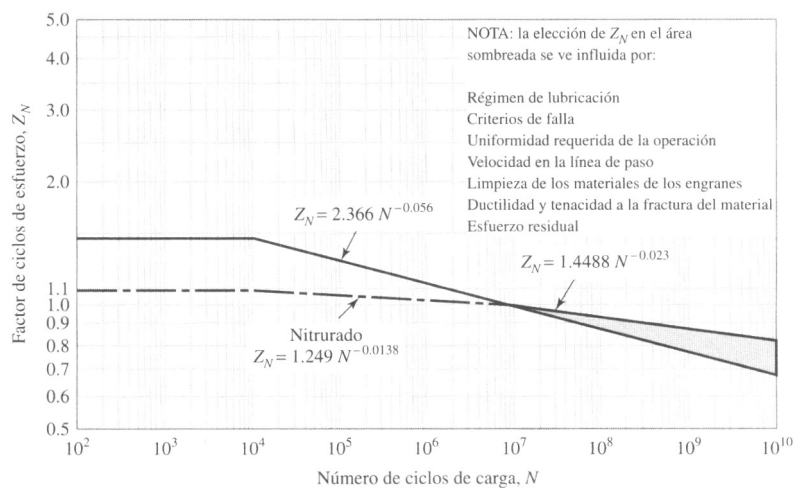


Figura 1 Factor de ciclos de esfuerzos de resistencia a la picadura  $Y_N$ <sup>1</sup>

<sup>1</sup> SHIGLEY Joseph; "Diseño en Ingeniería Mecánica"; Sexta Edición, McGraw-Hill; México; 2002; p 935.

## **ANEXO 7**

### **TABLAS DE DATOS Y RESULTADOS DEL DISEÑO ANALÍTICO**

Tabla 1 Datos y resultados con la variación del ángulo de hélice  $\psi$ 

N	Datos				Resultados						
	$\psi$ [°]	$F$ [mm]	$m$ [mm]	$N_p$	$W_t$ [kN]	$J$	$\sigma$ [MPa]	$S_F$	$I$	$\sigma_c$ [MPa]	$S_H^2$
1	0	30	3	18	1.53	0.34	64.95	3.33	0.1071	643.91	1.30
2	5	30	3	18	1.52	0.42	51.79	4.18	0.1642	518.16	2.00
3	10	30	3	18	1.51	0.45	47.51	4.55	0.1648	511.27	2.05
4	15	30	3	18	1.48	0.46	44.79	4.83	0.1658	499.94	2.15
5	20	30	3	18	1.44	0.46	42.39	5.10	0.1671	484.41	2.29
6	25	30	3	18	1.39	0.46	39.81	5.43	0.1687	464.99	2.48
7	30	30	3	18	1.32	0.42	39.16	5.52	0.1705	442.08	2.75
8	45	30	3	18	1.08	0.38	29.06	7.44	0.1743	356.93	4.22

Tabla 2 Datos y resultados con la variación del ancho de cara  $F$ 

N	Datos				Resultados						
	$\psi$ [°]	$F$ [mm]	$m$ [mm]	$N_p$	$W_t$ [kN]	$J$	$\sigma$ [MPa]	$S_F$	$I$	$\sigma_c$ [MPa]	$S_H^2$
1	20	27	3	18	1.44	0.46	47.10	4.59	0.1671	510.61	2.06
2	20	30	3	18	1.44	0.46	42.39	5.10	0.1671	484.41	2.29
3	20	33	3	18	1.44	0.46	38.54	5.61	0.1671	461.87	2.52
4	20	36	3	18	1.44	0.46	35.33	6.12	0.1671	442.20	2.75
5	20	39	3	18	1.44	0.46	32.61	6.63	0.1671	424.86	2.98
6	20	42	3	18	1.44	0.46	30.28	7.14	0.1671	409.40	3.20

Tabla 3 Datos y resultados con la variación del módulo  $m$ 

N	Datos				Resultados						
	$\psi$ [°]	$F$ [mm]	$m$ [mm]	$N_p$	$W_t$ [kN]	$J$	$\sigma$ [MPa]	$S_F$	$I$	$\sigma_c$ [MPa]	$S_H^2$
1	30	30	2	18	1.99	0.42	88.10	2.45	0.1705	663.11	1.22
2	30	30	3	18	1.32	0.42	39.16	5.52	0.1705	442.08	2.75
3	30	30	4	18	0.99	0.42	22.03	9.82	0.1705	331.56	4.88
4	30	30	5	18	0.79	0.42	14.10	15.34	0.1705	265.25	7.63
5	30	30	6	18	0.66	0.42	9.79	22.09	0.1705	221.04	10.99
6	30	30	8	18	0.50	0.42	5.51	39.27	0.1705	165.78	19.54

## **ANEXO 8**

### **GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE**



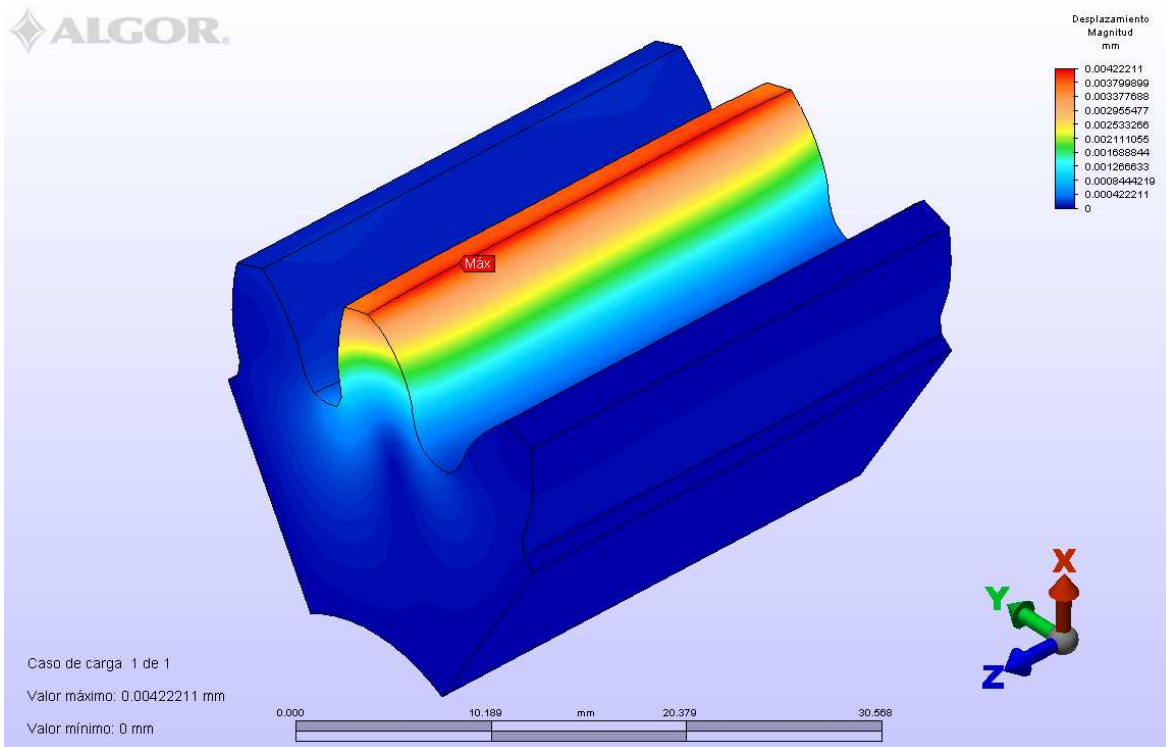


Figura 1 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 0^\circ$

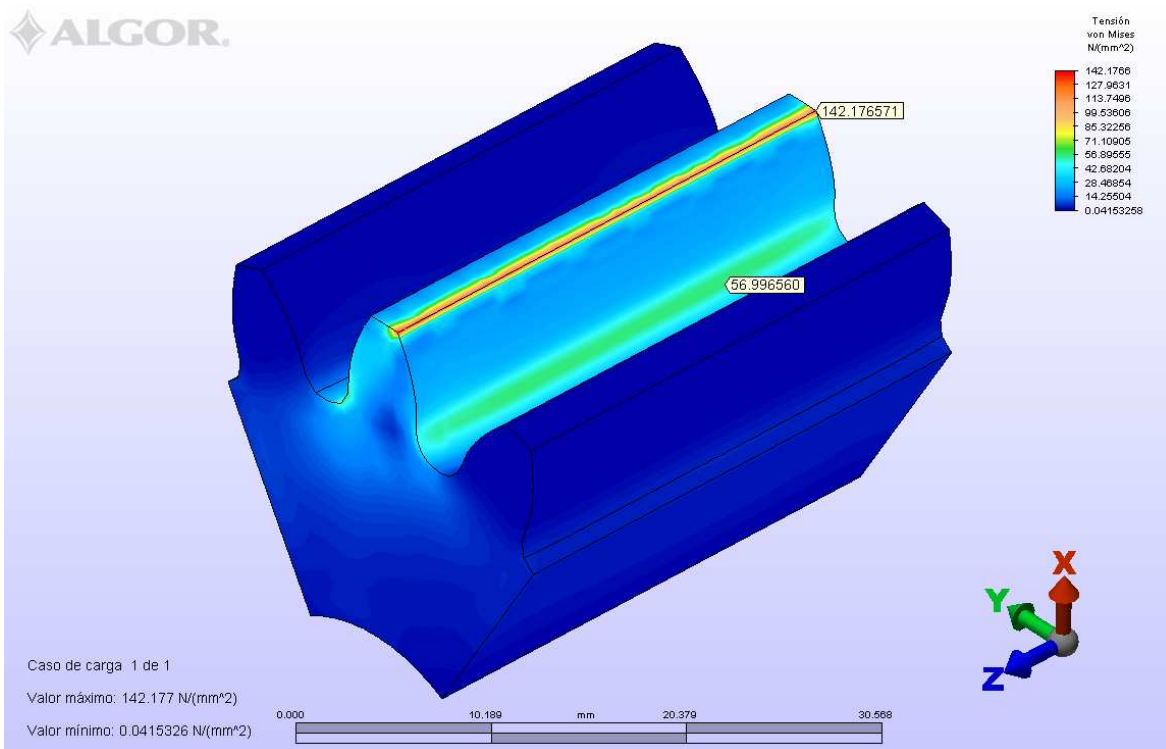


Figura 2 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 0^\circ$

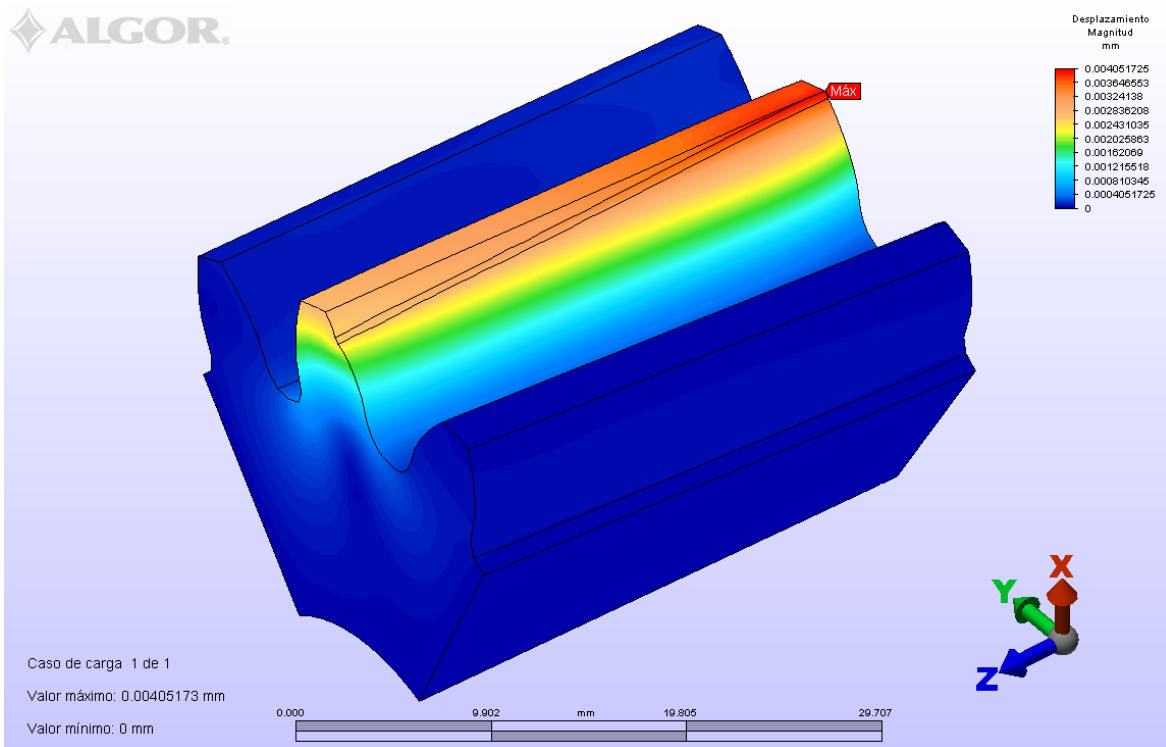


Figura 3 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 5^\circ$

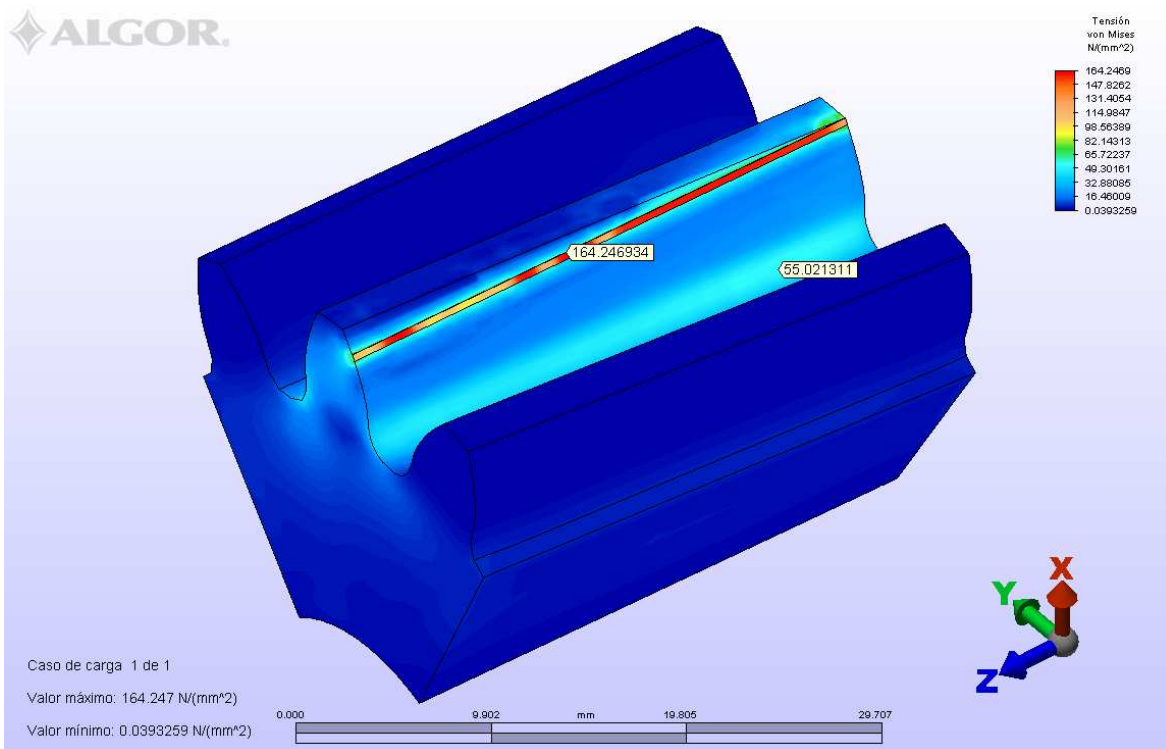


Figura 4 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 5^\circ$

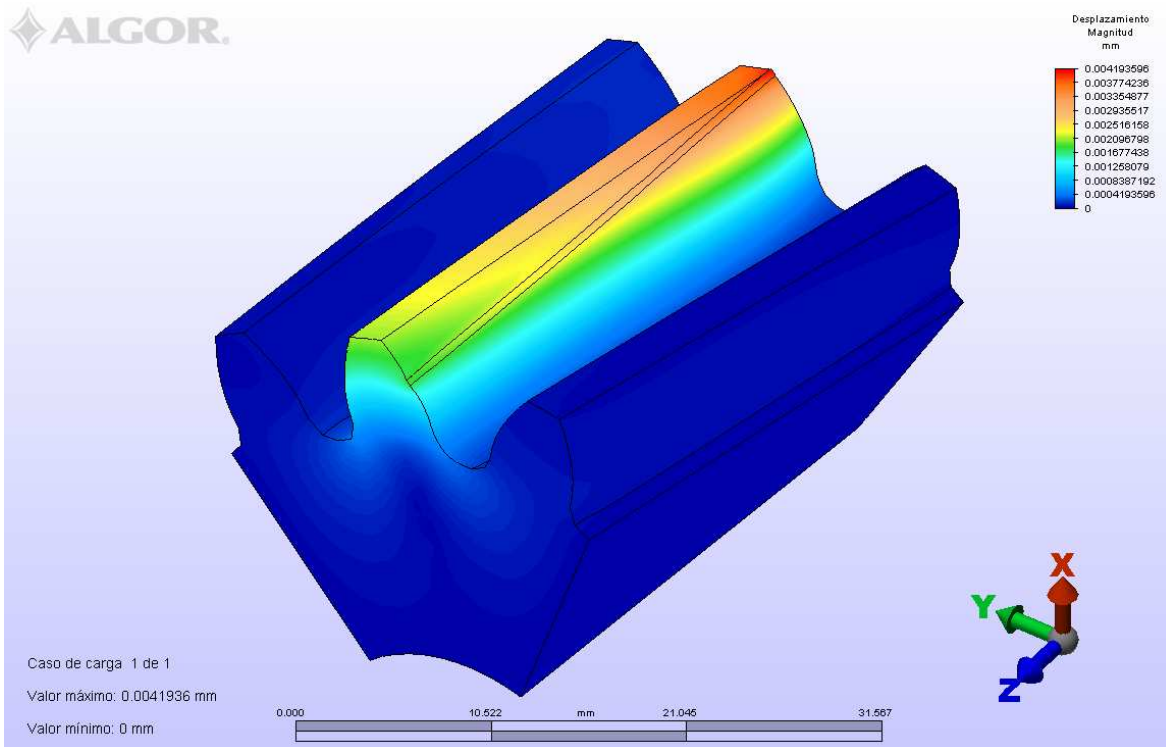


Figura 5 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 10^\circ$

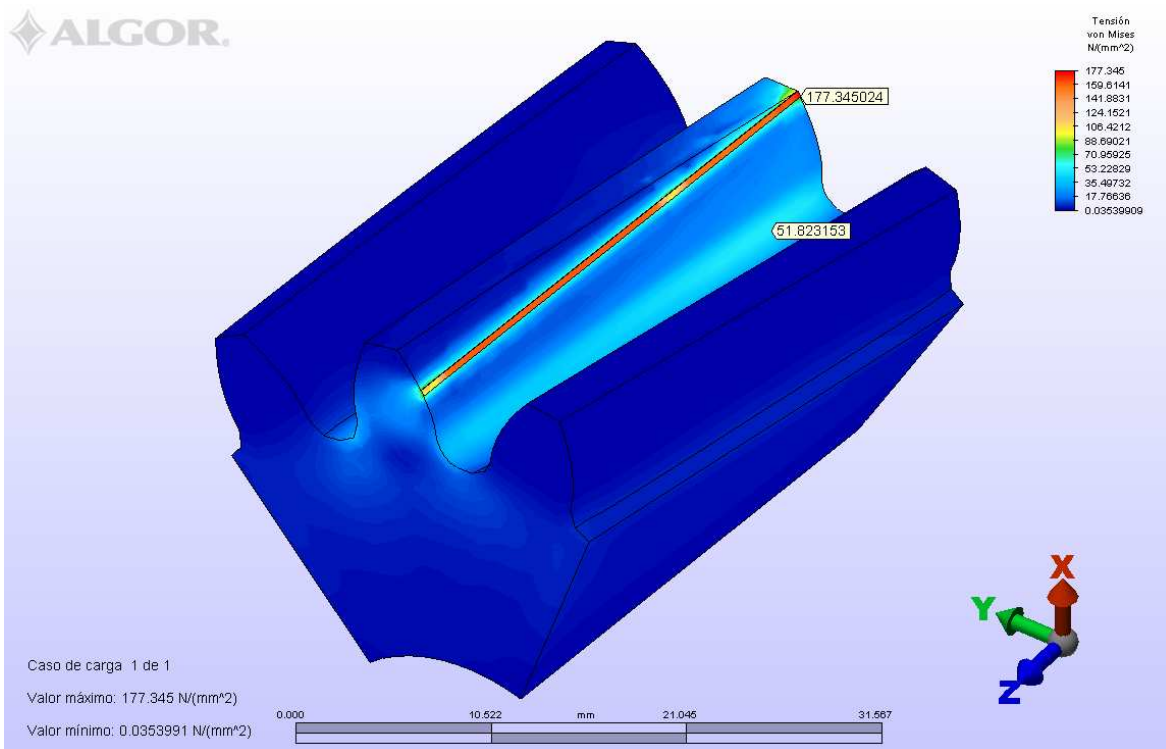


Figura 6 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 10^\circ$

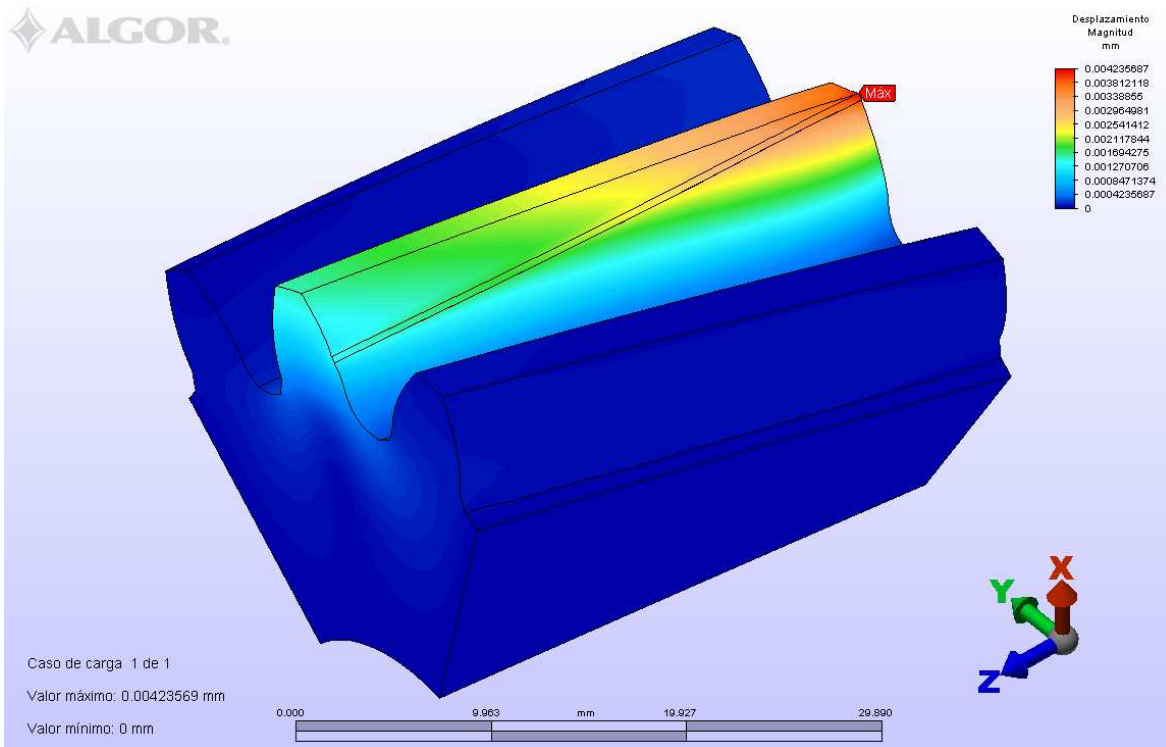


Figura 7 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 15^\circ$

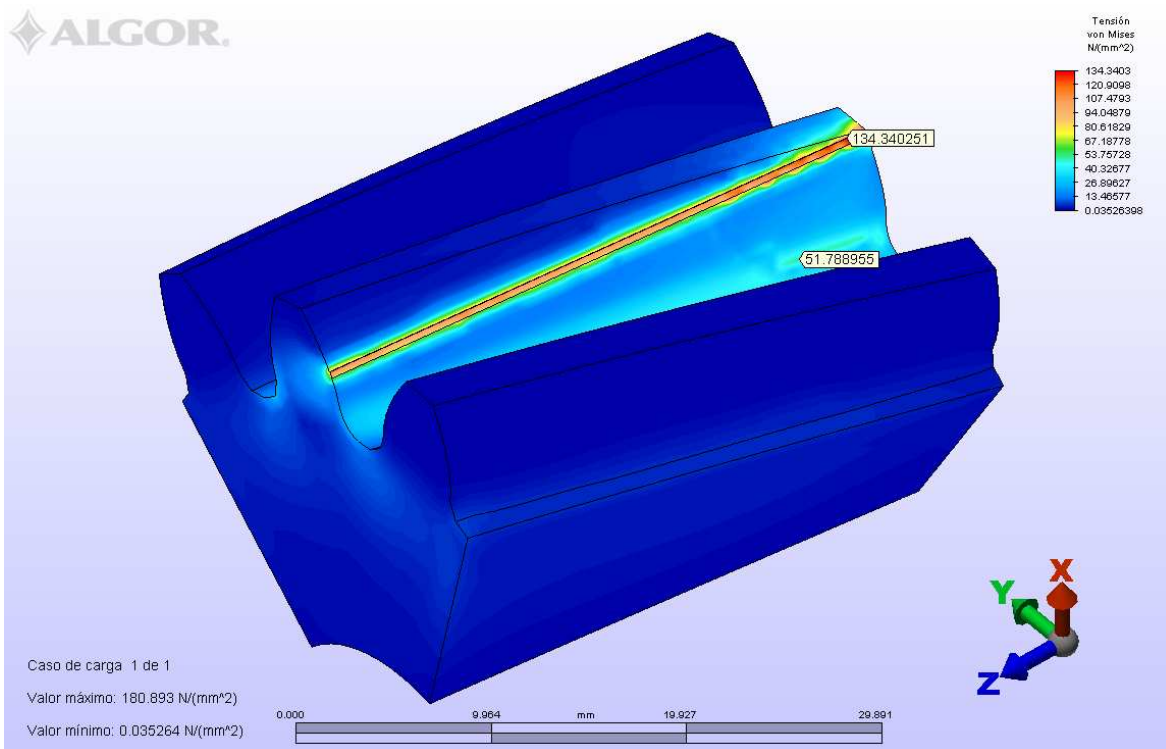


Figura 8 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 15^\circ$

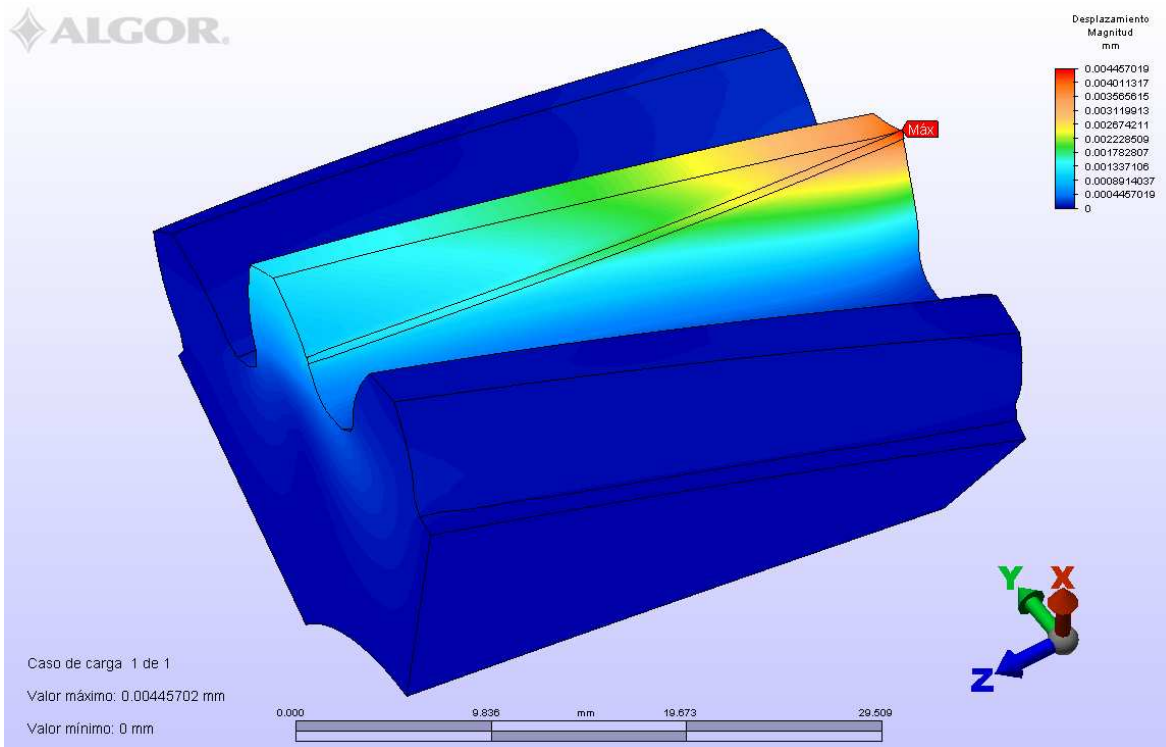


Figura 9 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 20^\circ$

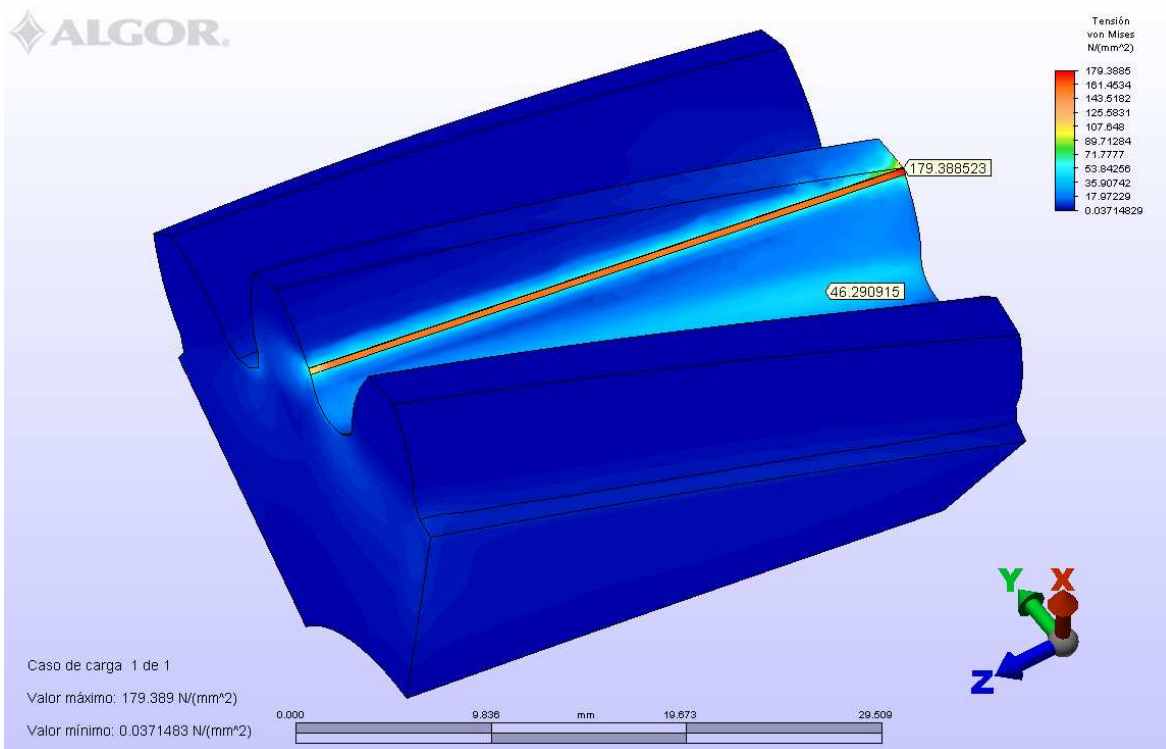


Figura 10 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 20^\circ$

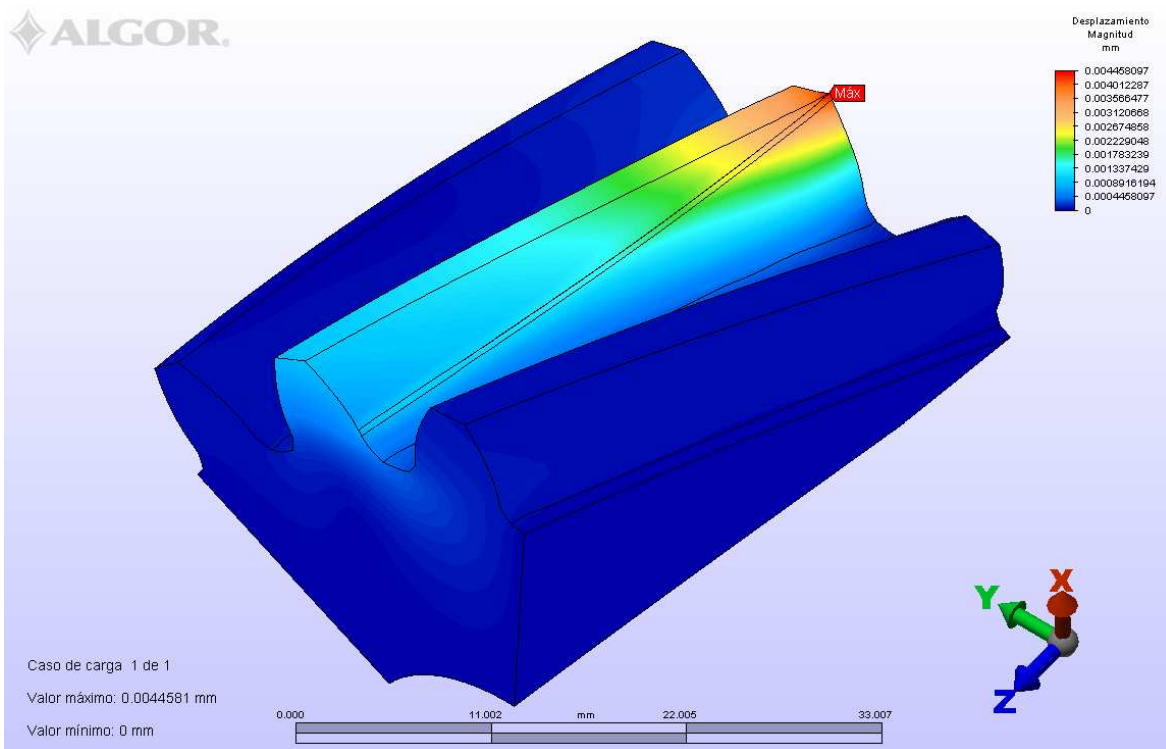


Figura 11 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 25^\circ$

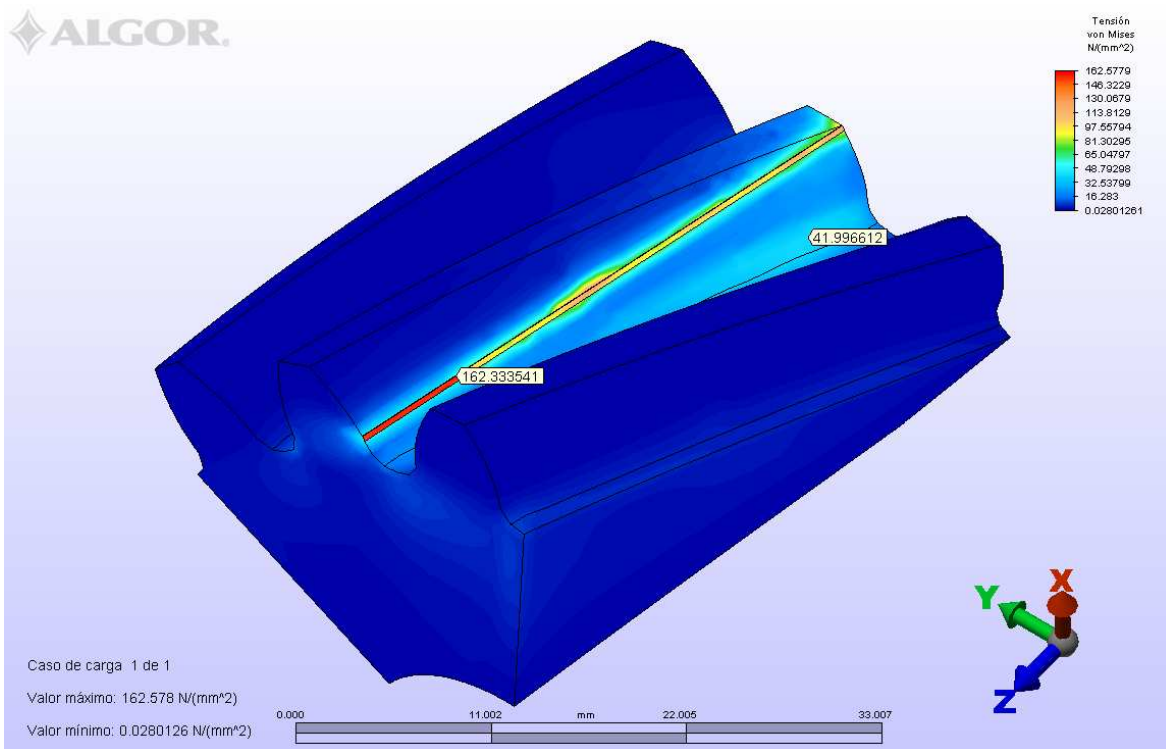


Figura 12 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 25^\circ$

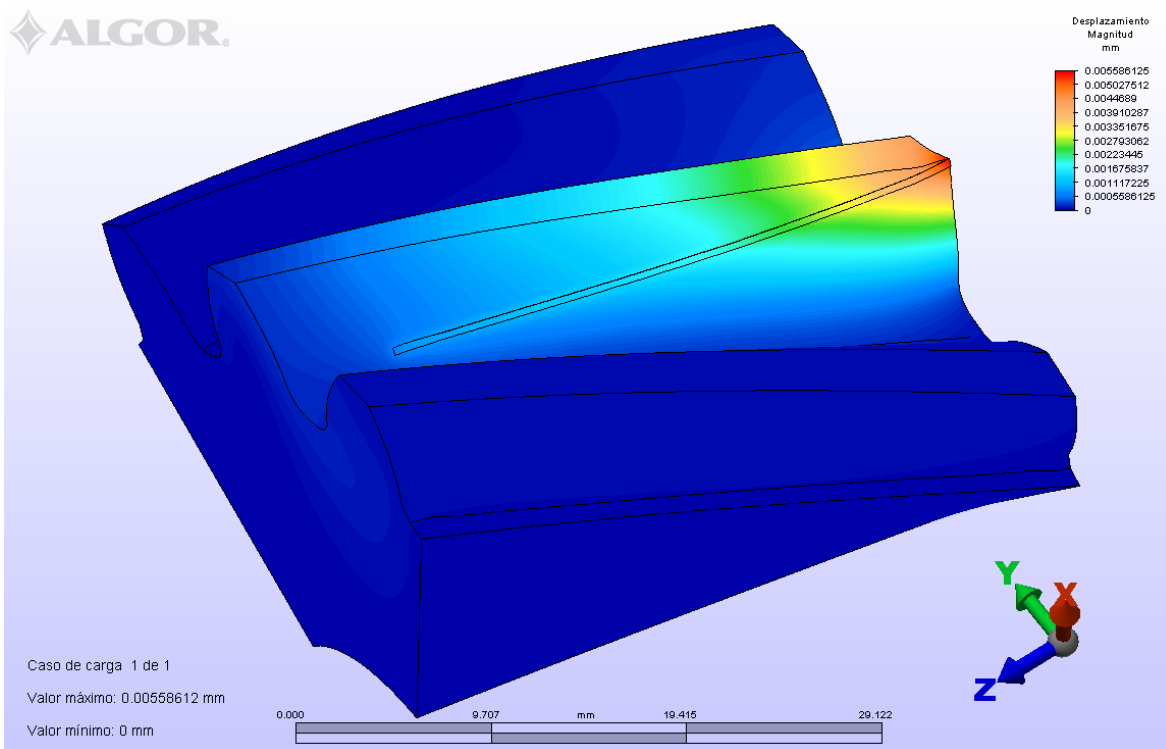


Figura 13 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 30^\circ$

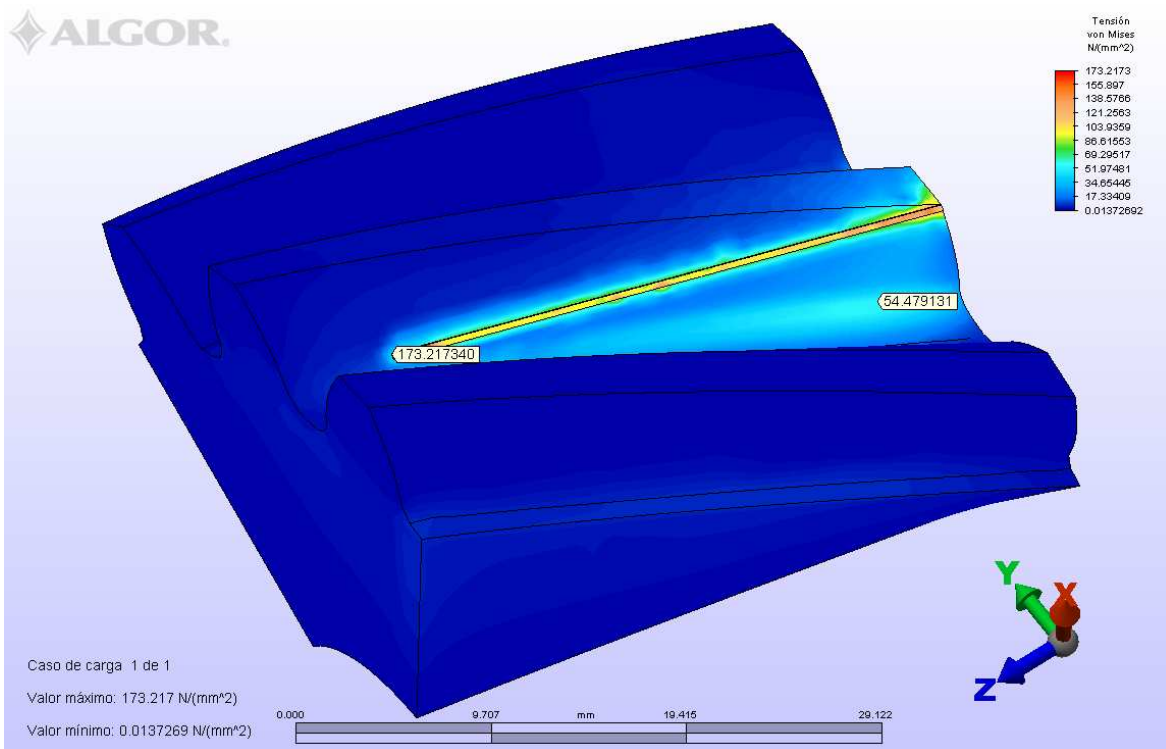


Figura 14 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 30^\circ$

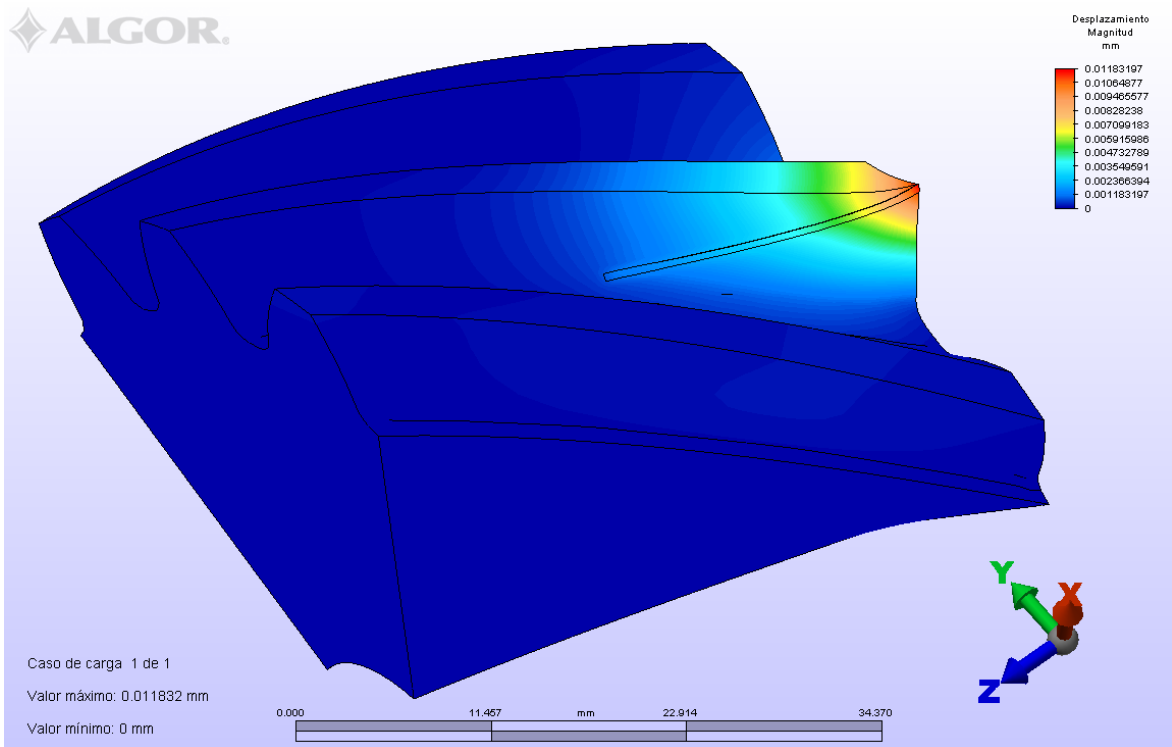


Figura 15 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 45^\circ$

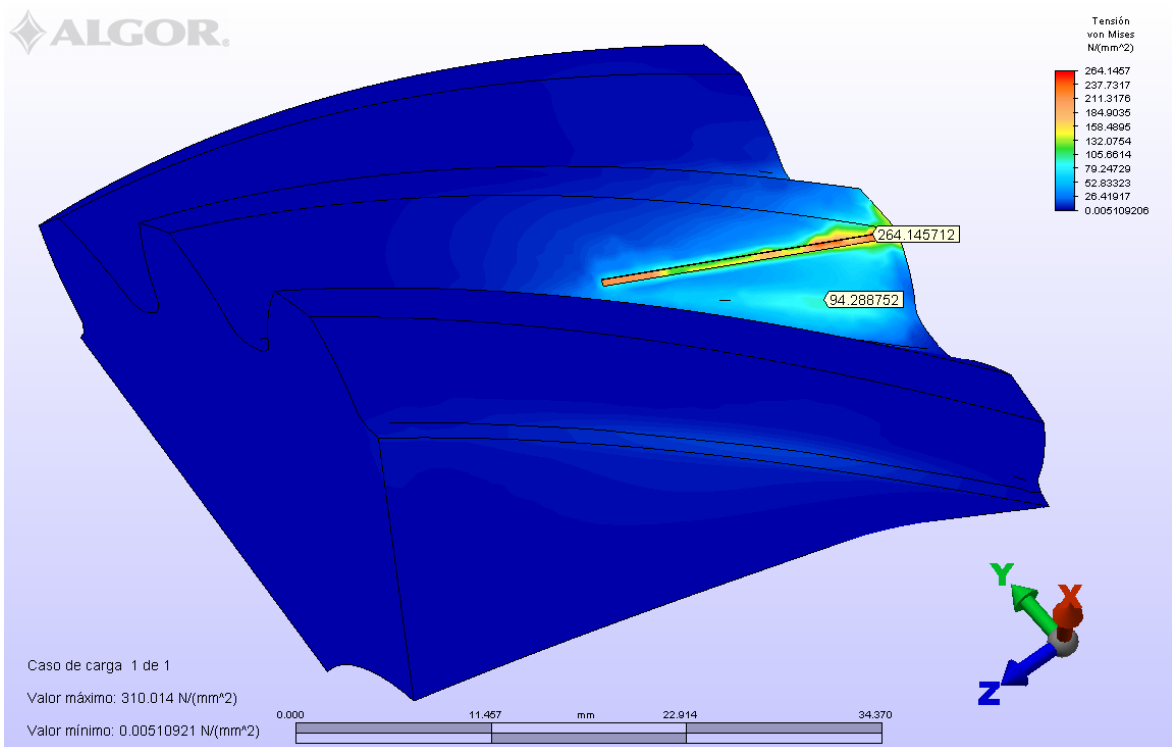


Figura 16 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 45^\circ$



## **ANEXO 9**

### **GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL ANCHO DE CARA**

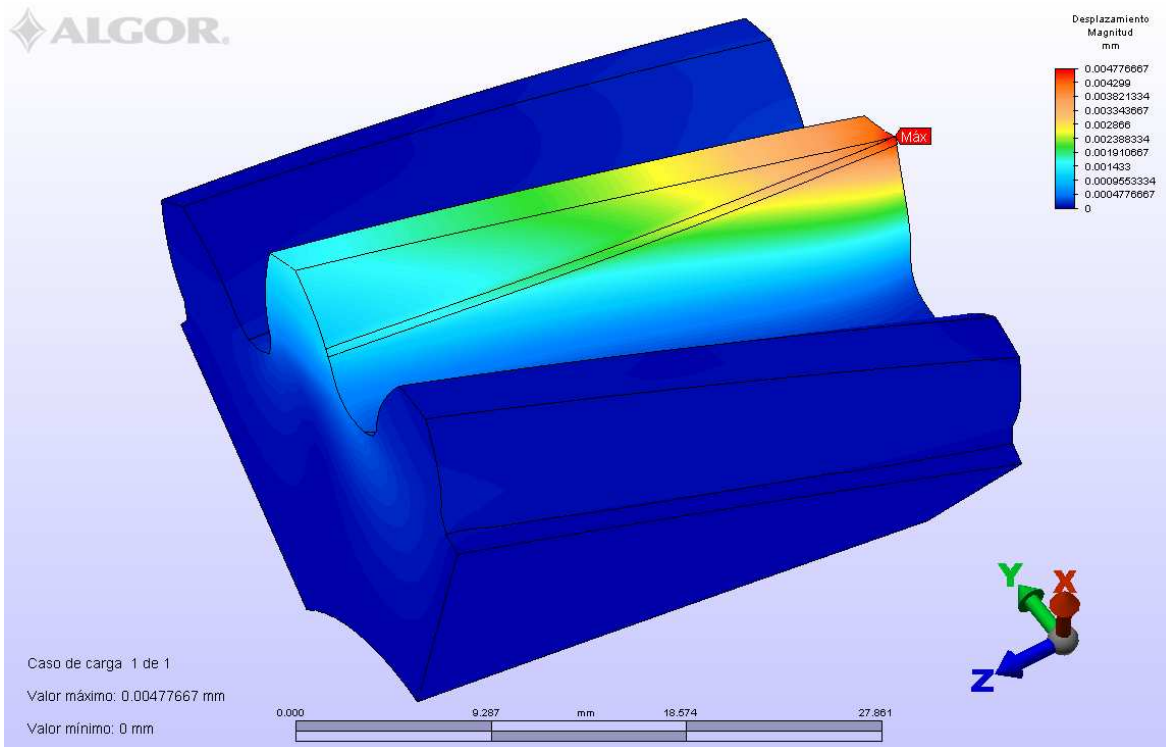


Figura 1 Resultados de desplazamiento con ancho de cara  $F = 27$

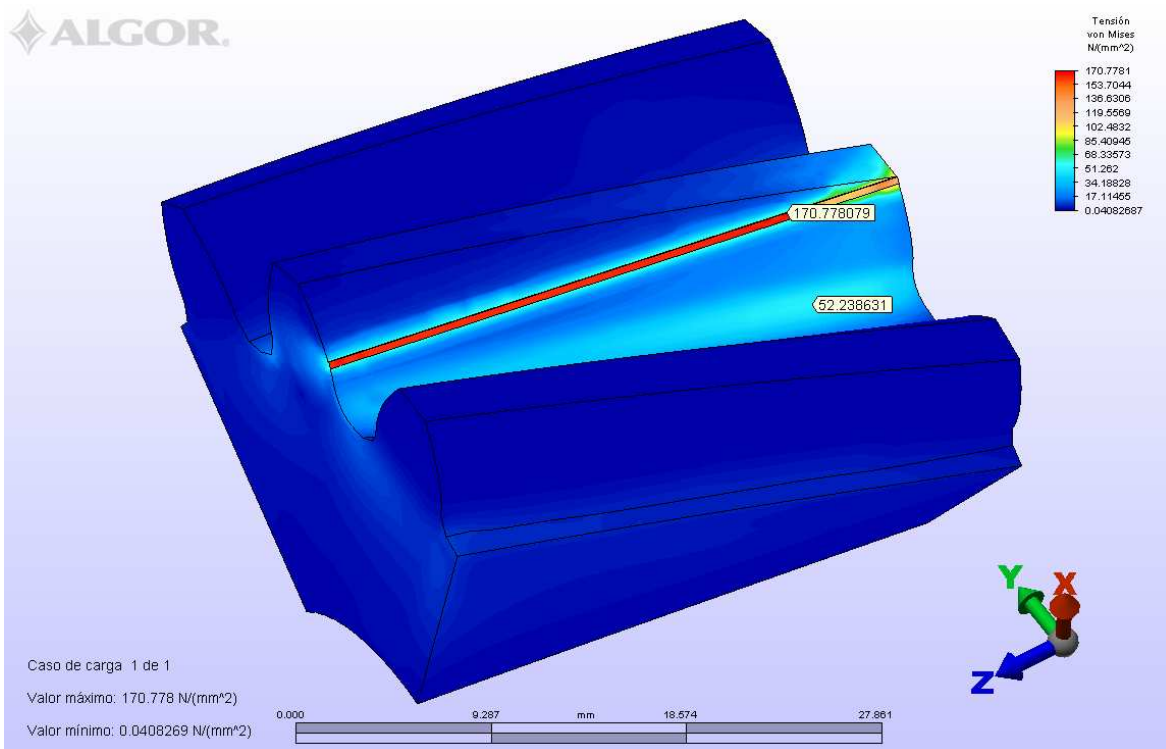


Figura 2 Resultados de esfuerzos con ancho de cara  $F = 27$

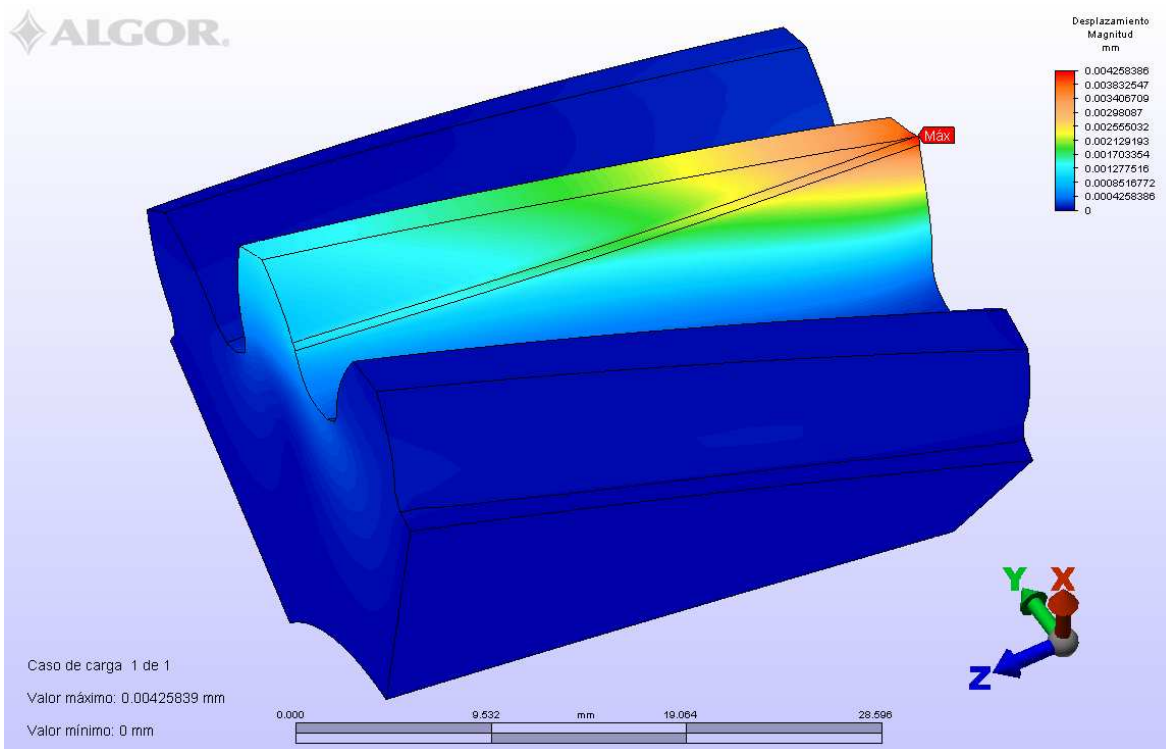


Figura 3 Resultados de desplazamiento con ancho de cara  $F = 30$

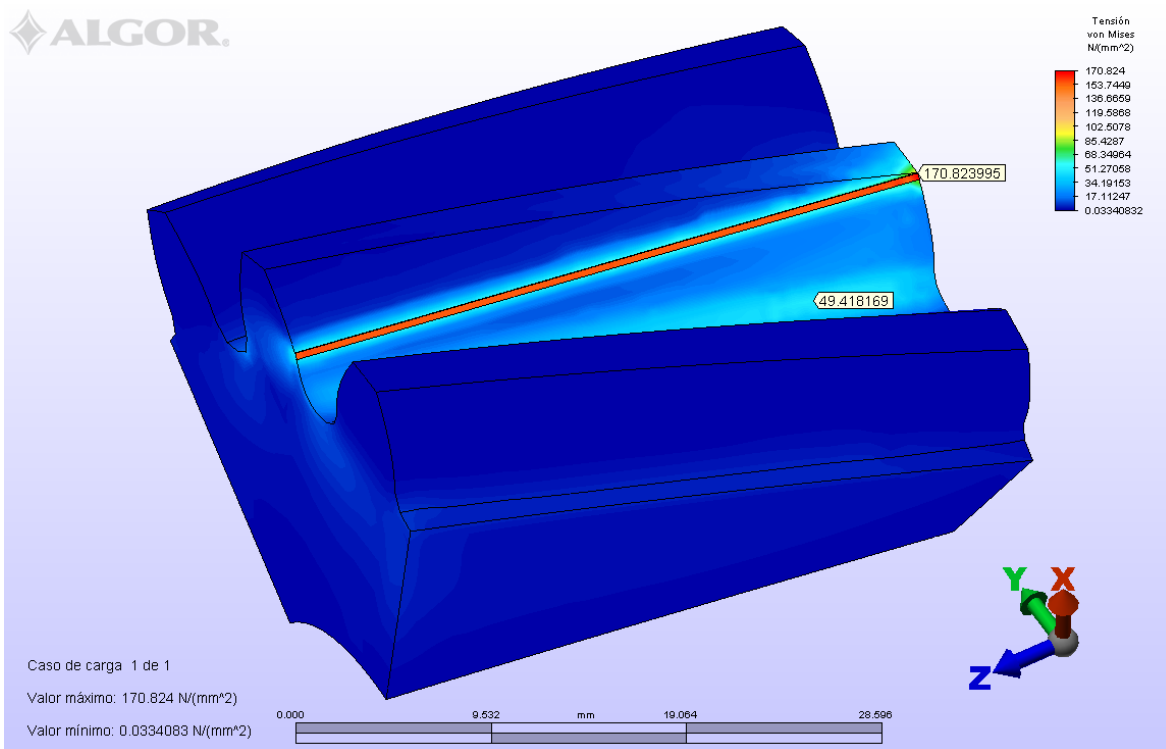


Figura 4 Resultados de esfuerzos con ancho de cara  $F = 30$

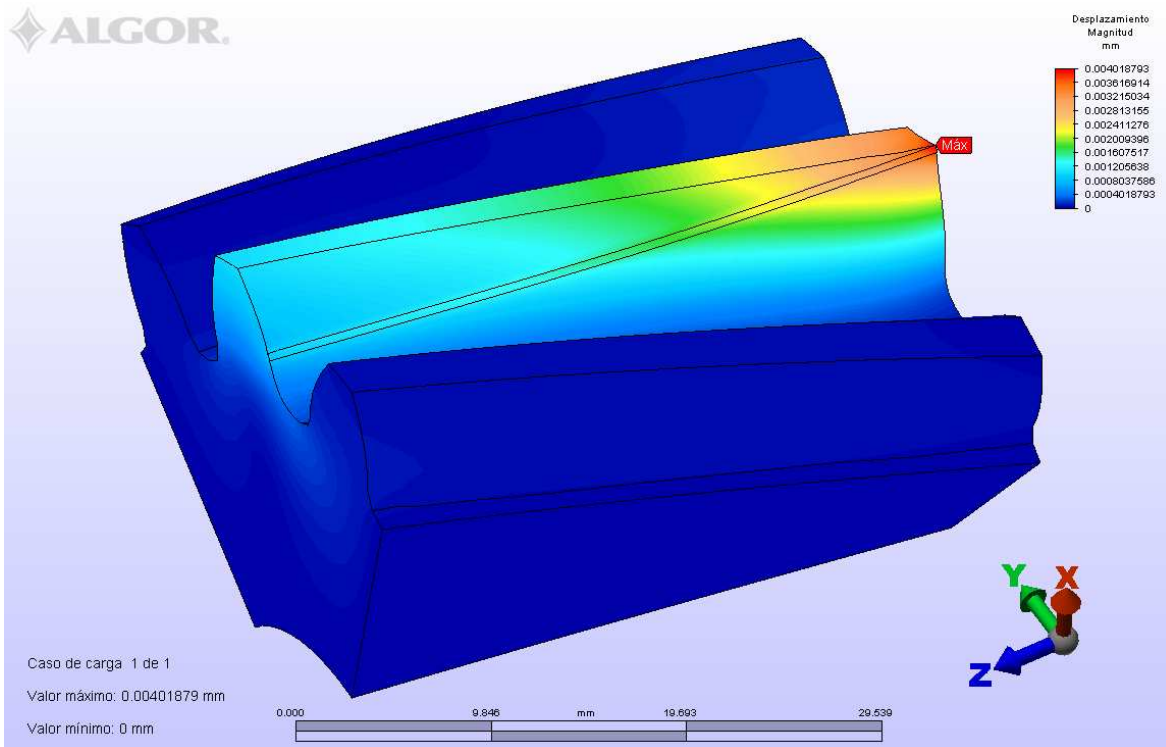


Figura 5 Resultados de desplazamiento con ancho de cara  $F = 33$

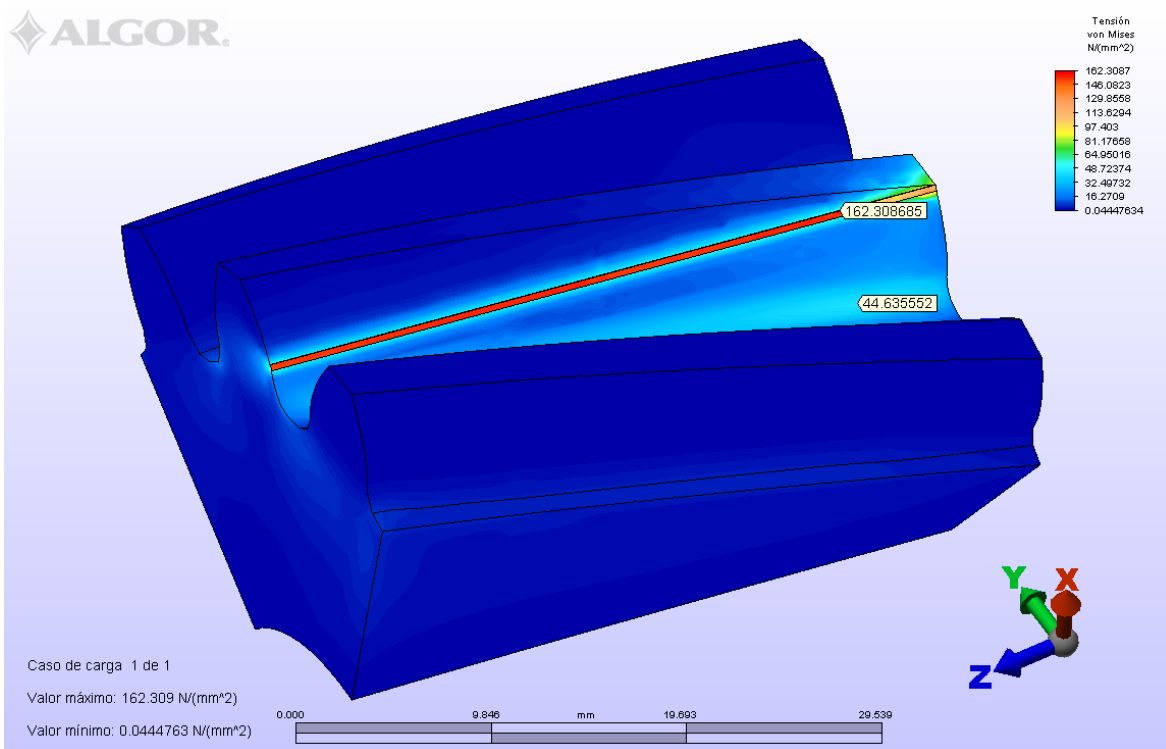


Figura 6 Resultados de esfuerzos con ancho de cara  $F = 33$

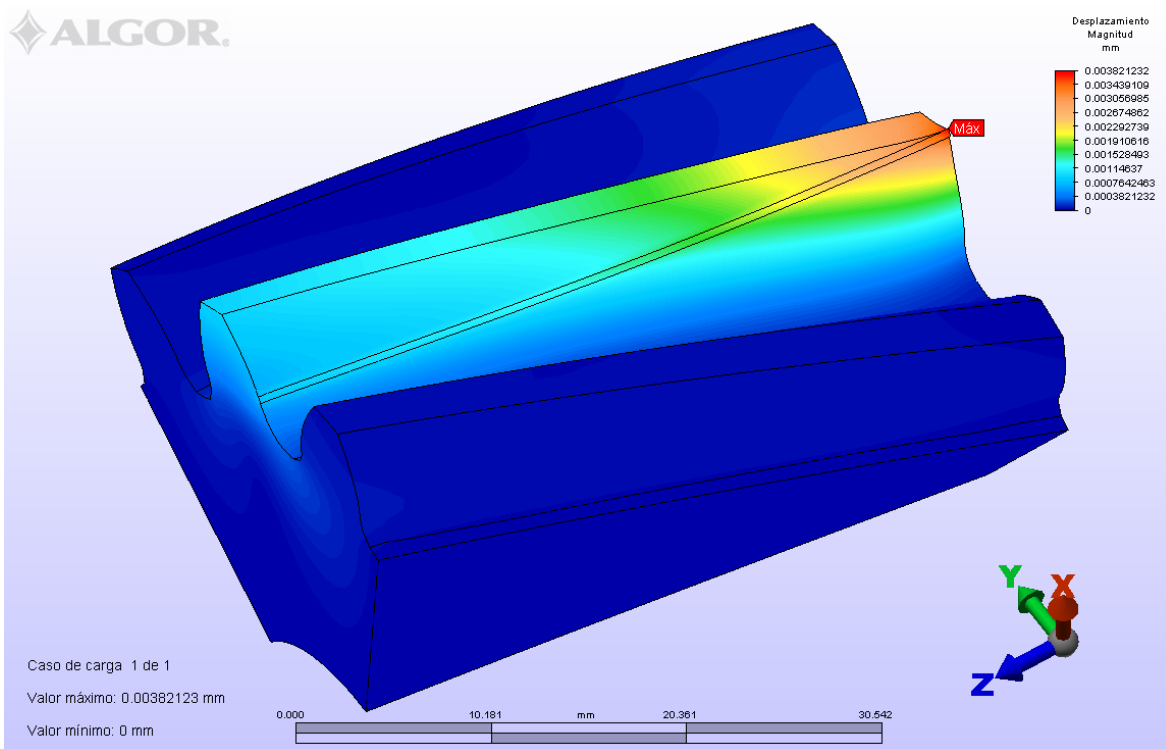


Figura 7 Resultados de desplazamiento con ancho de cara  $F = 36$

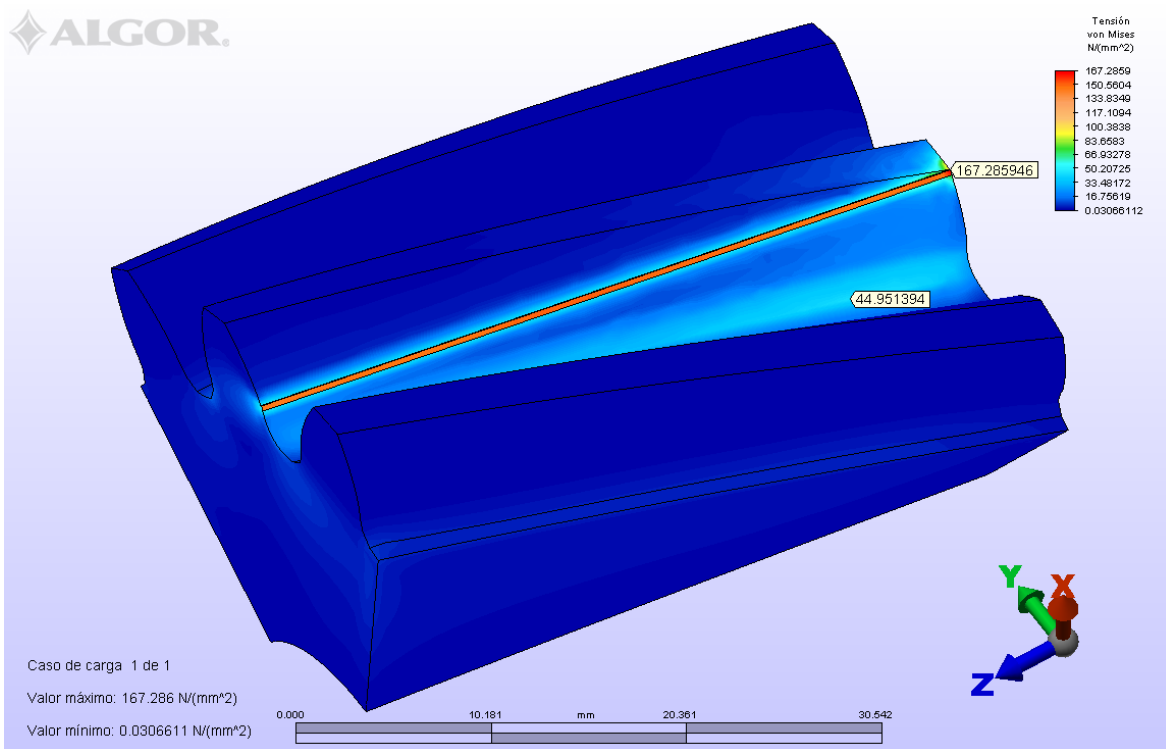


Figura 8 Resultados de esfuerzos con ancho de cara  $F = 36$

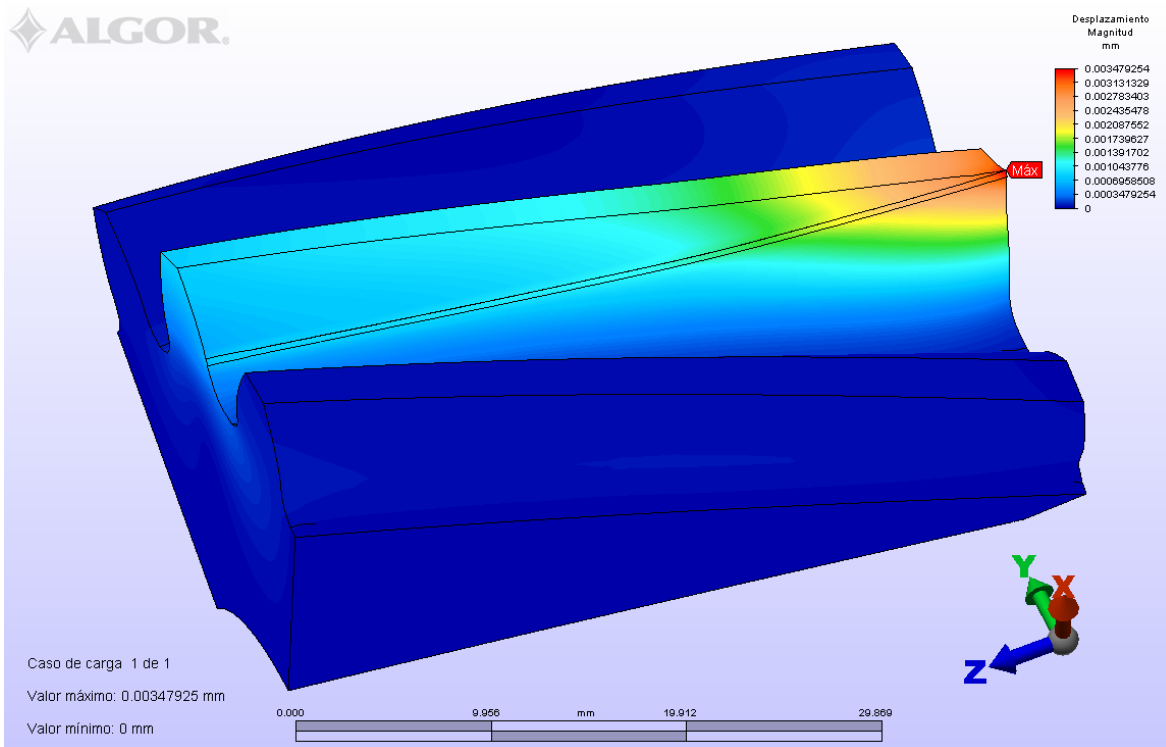


Figura 9 Resultados de desplazamiento con ancho de cara  $F = 39$

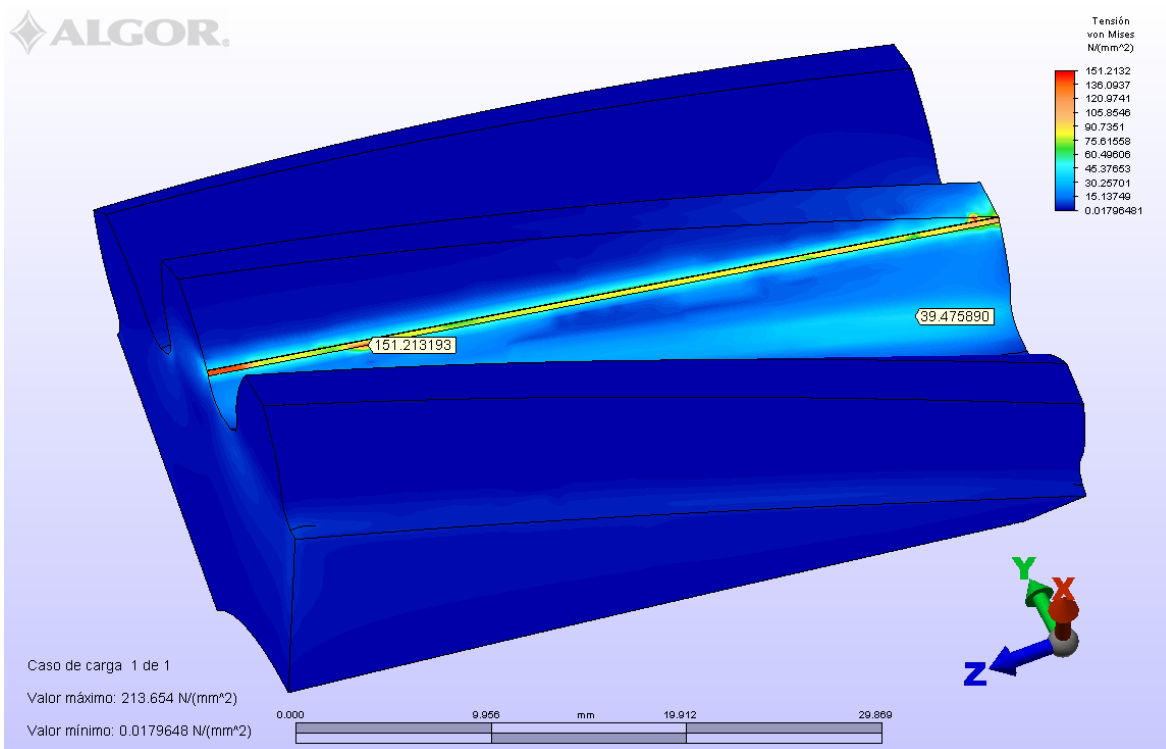


Figura 10 Resultados de esfuerzos con ancho de cara  $F = 39$

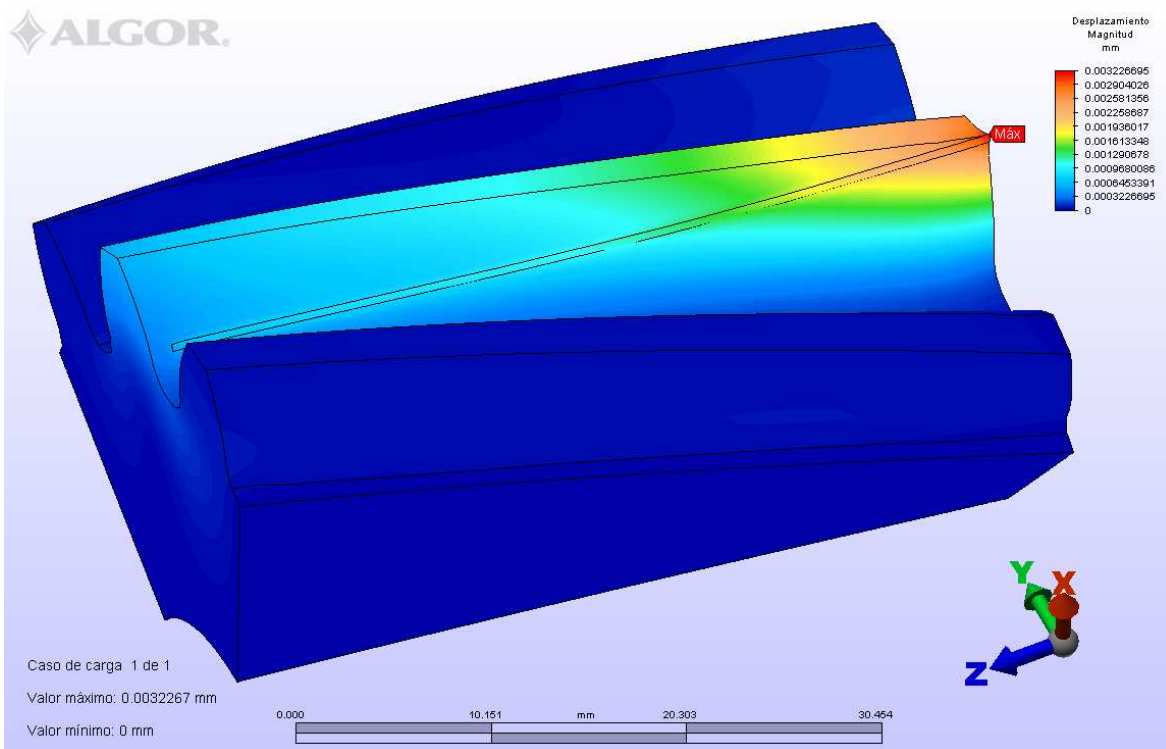


Figura 11 Resultados de desplazamiento con ancho de cara  $F = 42$

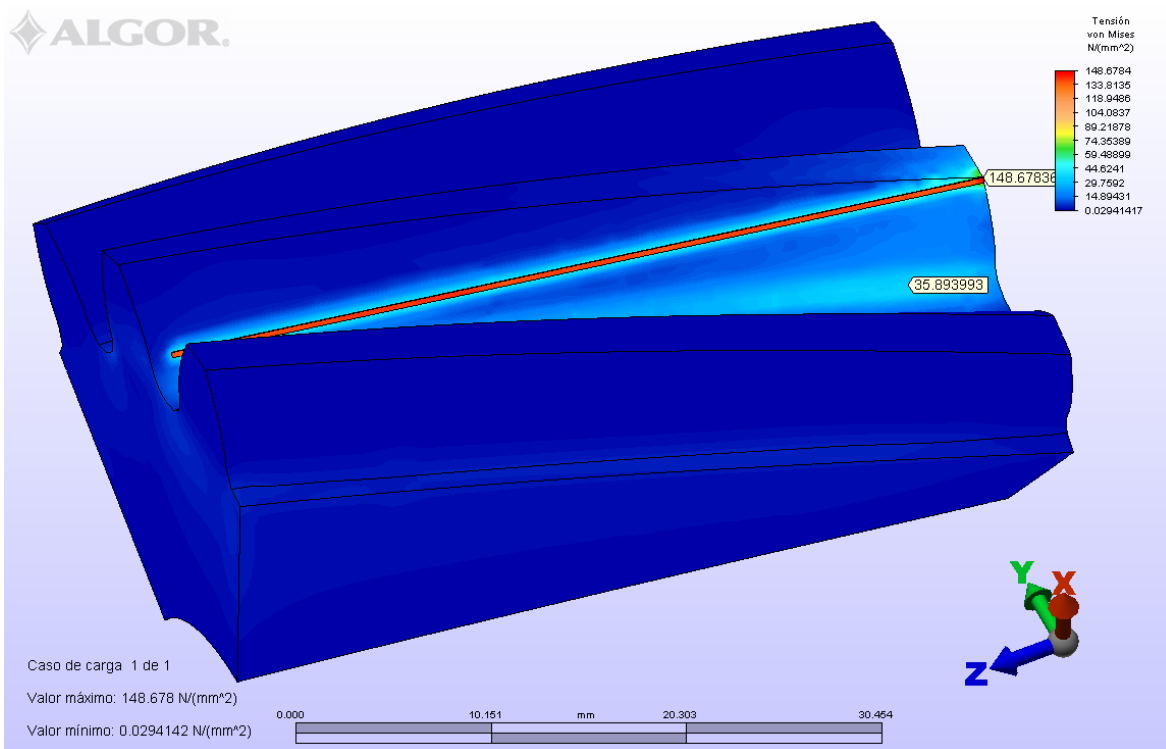


Figura 12 Resultados de esfuerzos con ancho de cara  $F = 42$

## **ANEXO 10**

### **GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON LA VARIACIÓN DEL MÓDULO**



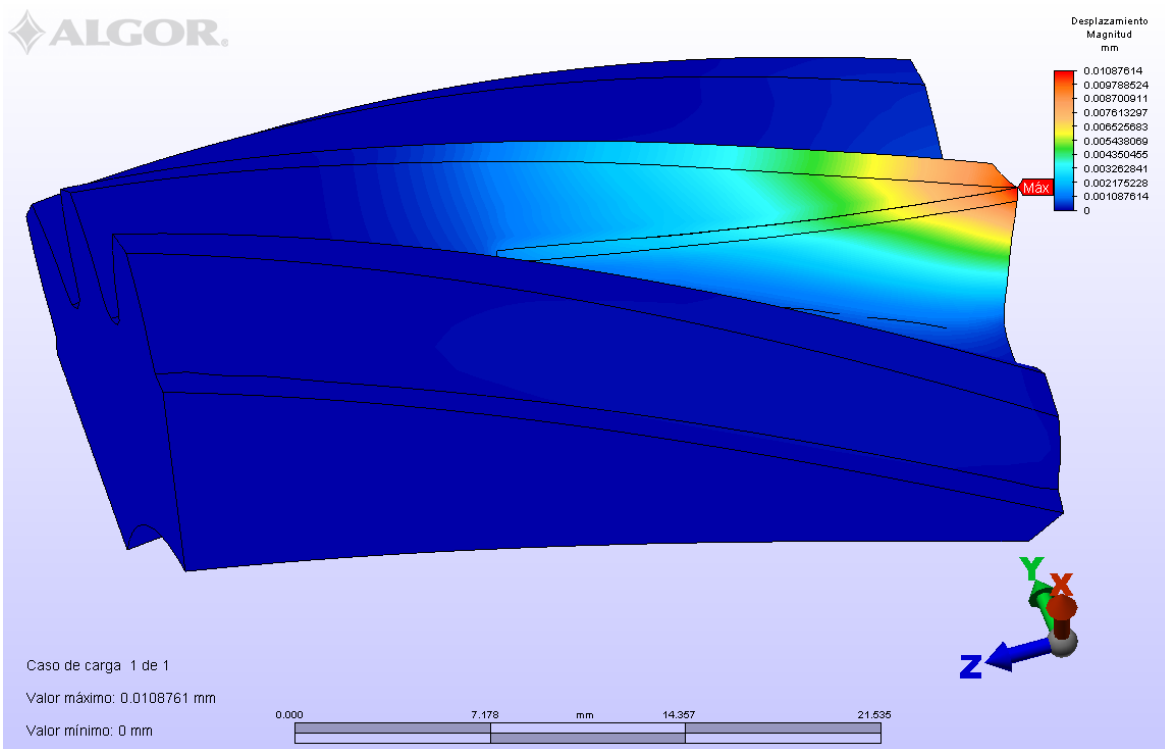


Figura 1 Resultados de desplazamiento con módulo  $m = 2$

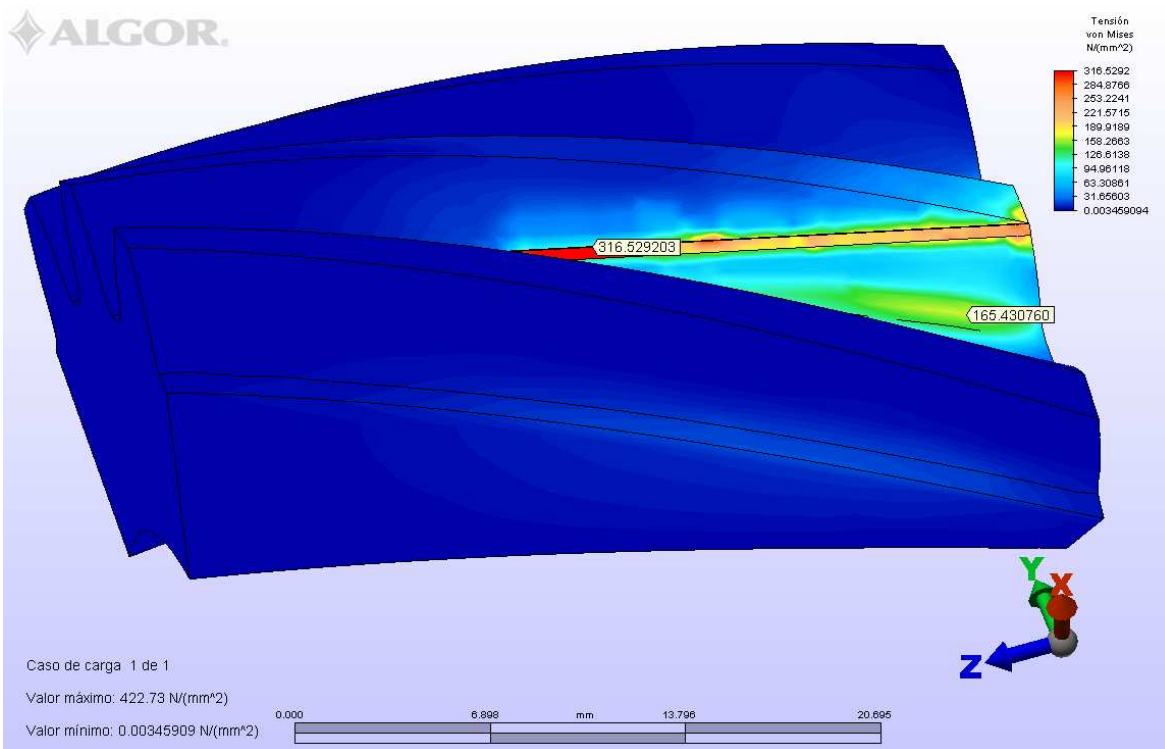


Figura 2 Resultados de esfuerzos con módulo  $m = 2$

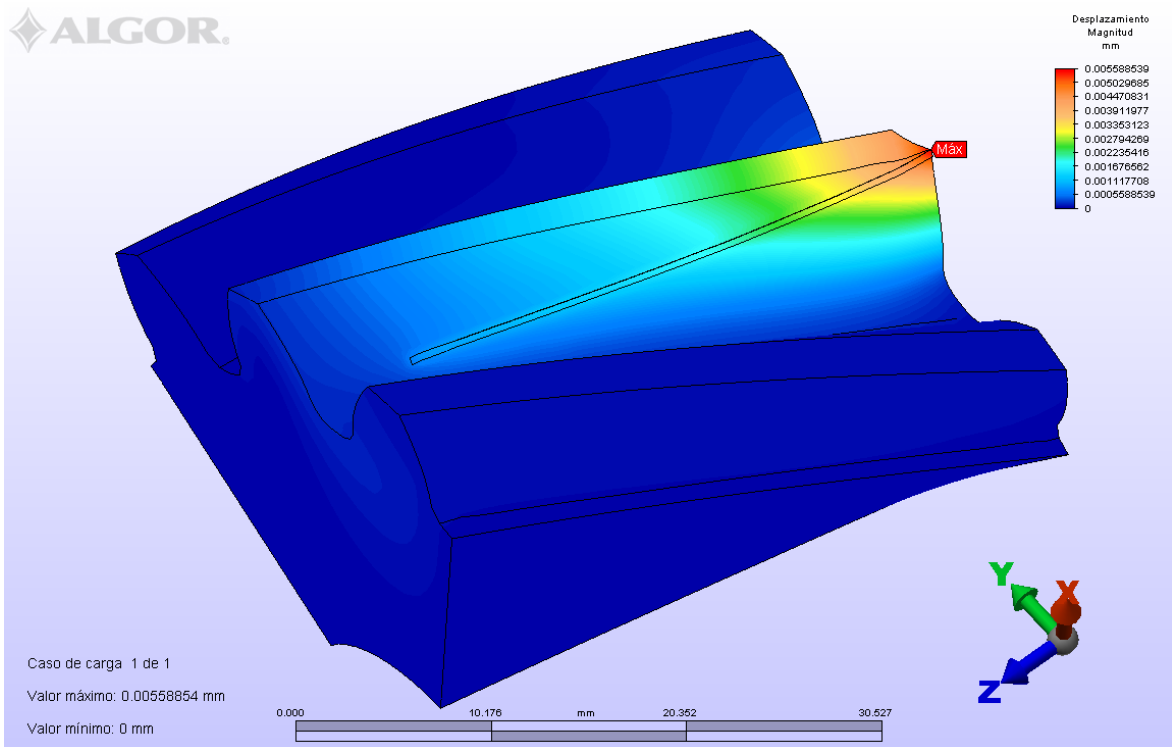


Figura 3 Resultados de desplazamiento con módulo  $m = 3$

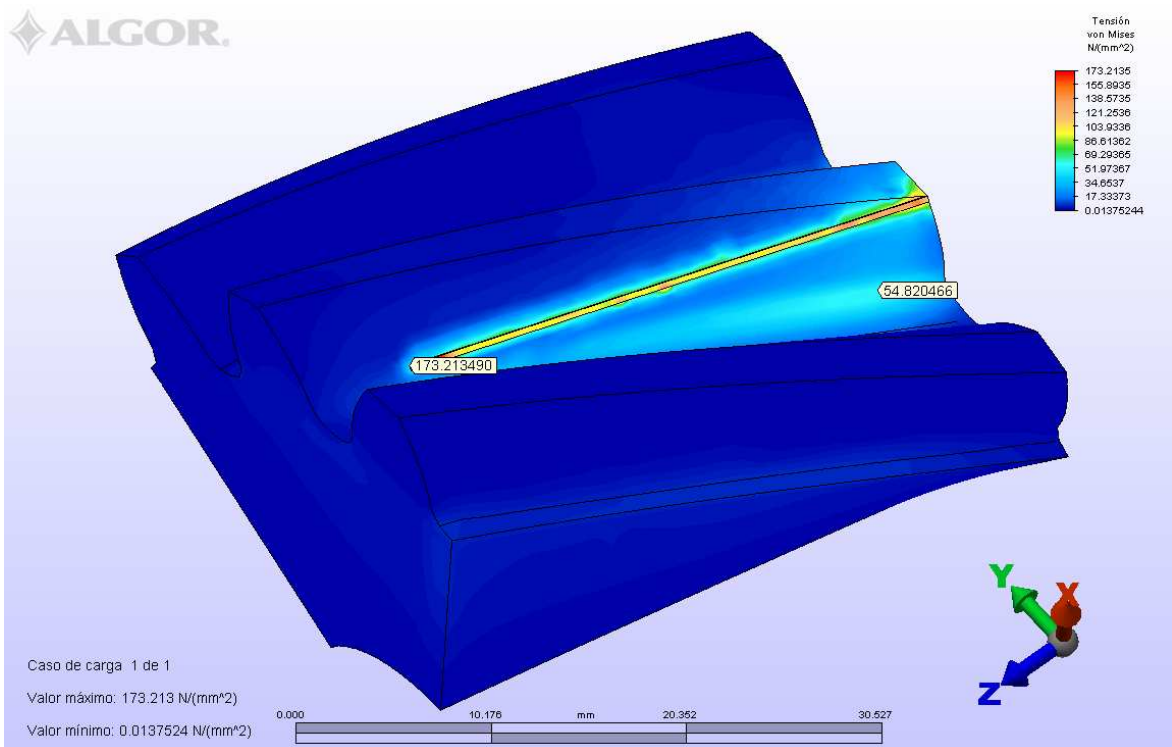


Figura 4 Resultados de esfuerzos con módulo  $m = 3$

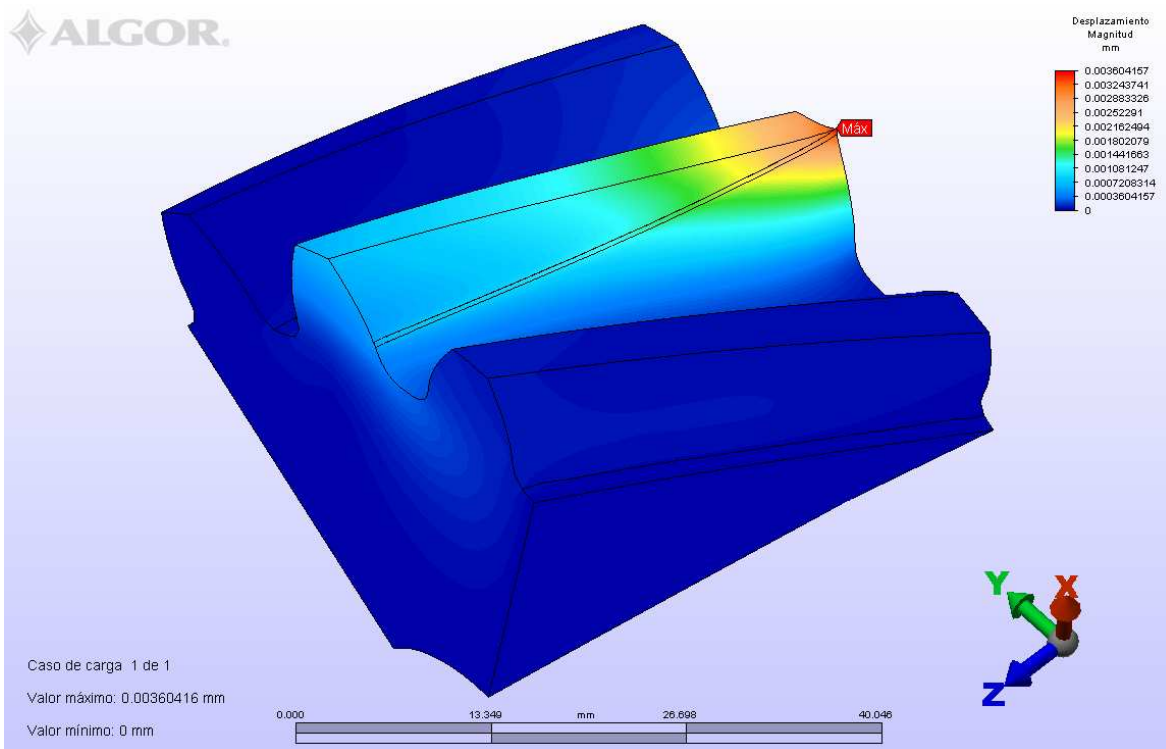


Figura 5 Resultados de desplazamiento con módulo  $m = 4$

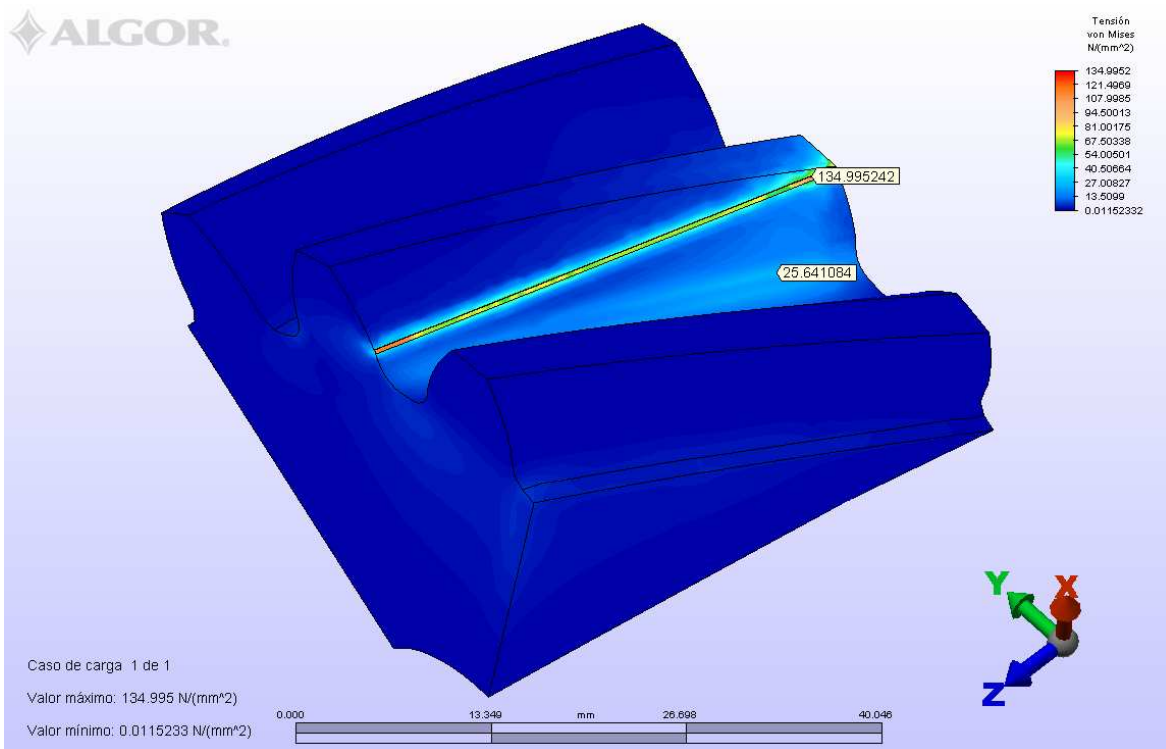


Figura 6 Resultados de esfuerzos con módulo  $m = 4$

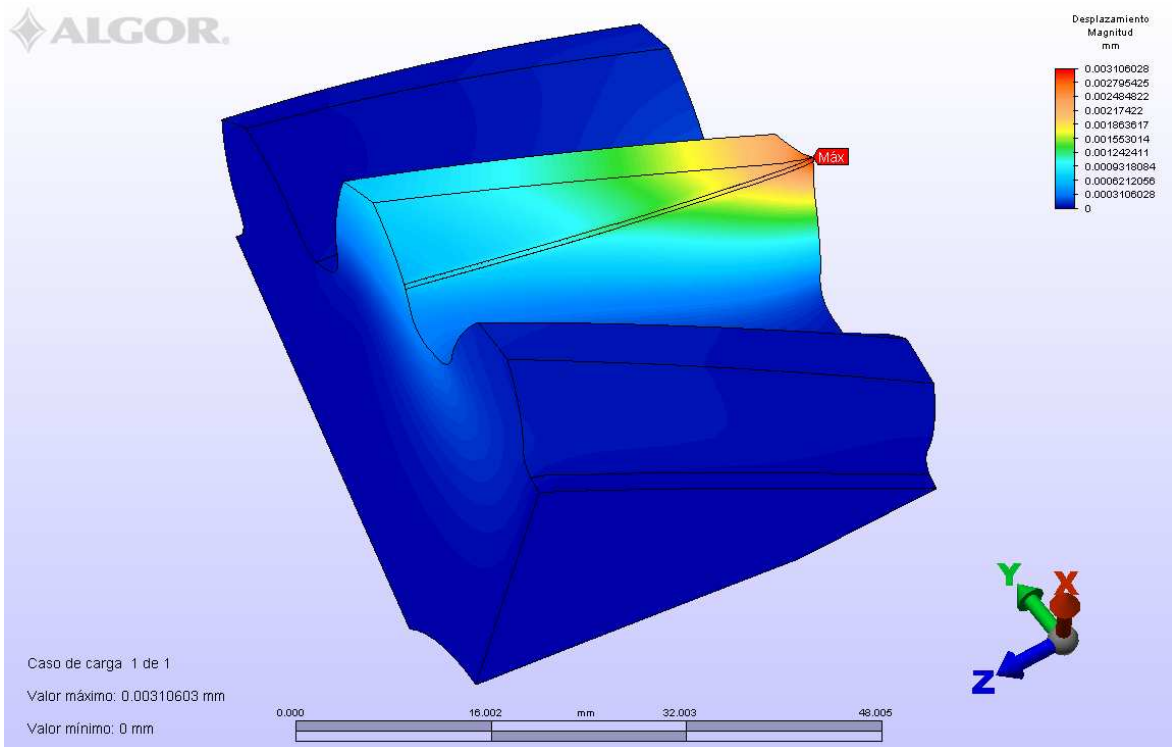


Figura 7 Resultados de desplazamiento con módulo  $m = 5$

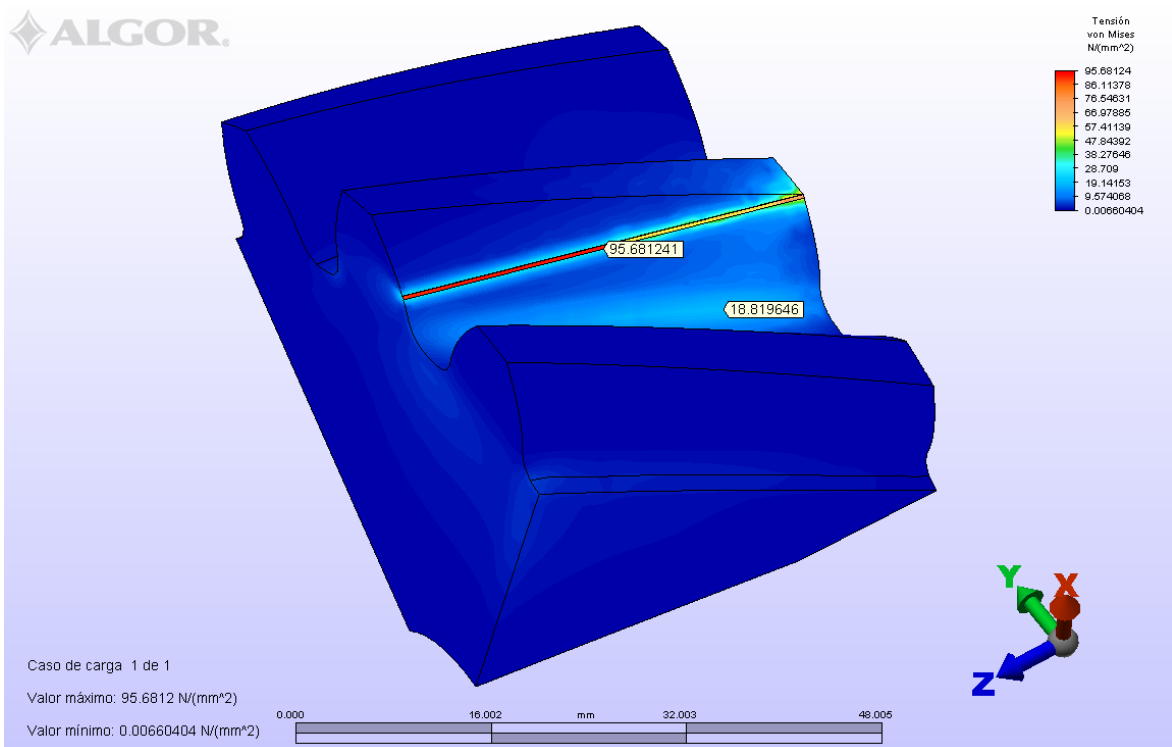


Figura 8 Resultados de esfuerzos con módulo  $m = 5$

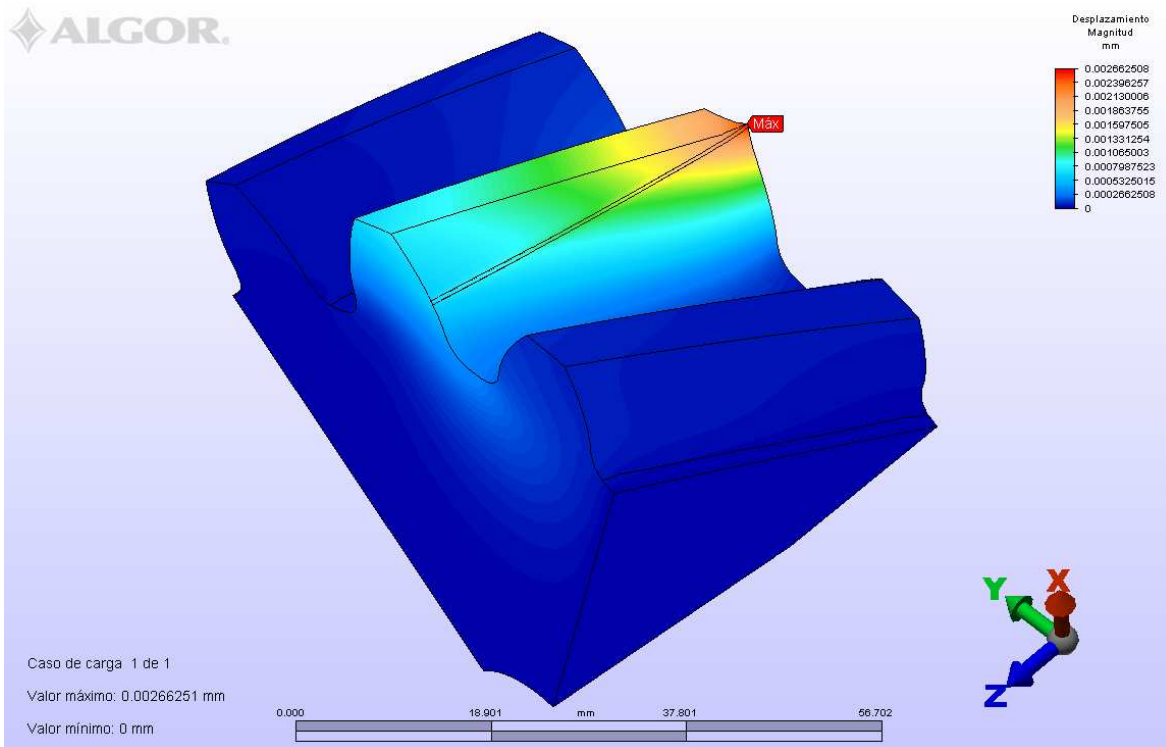


Figura 9 Resultados de desplazamiento con módulo  $m = 6$

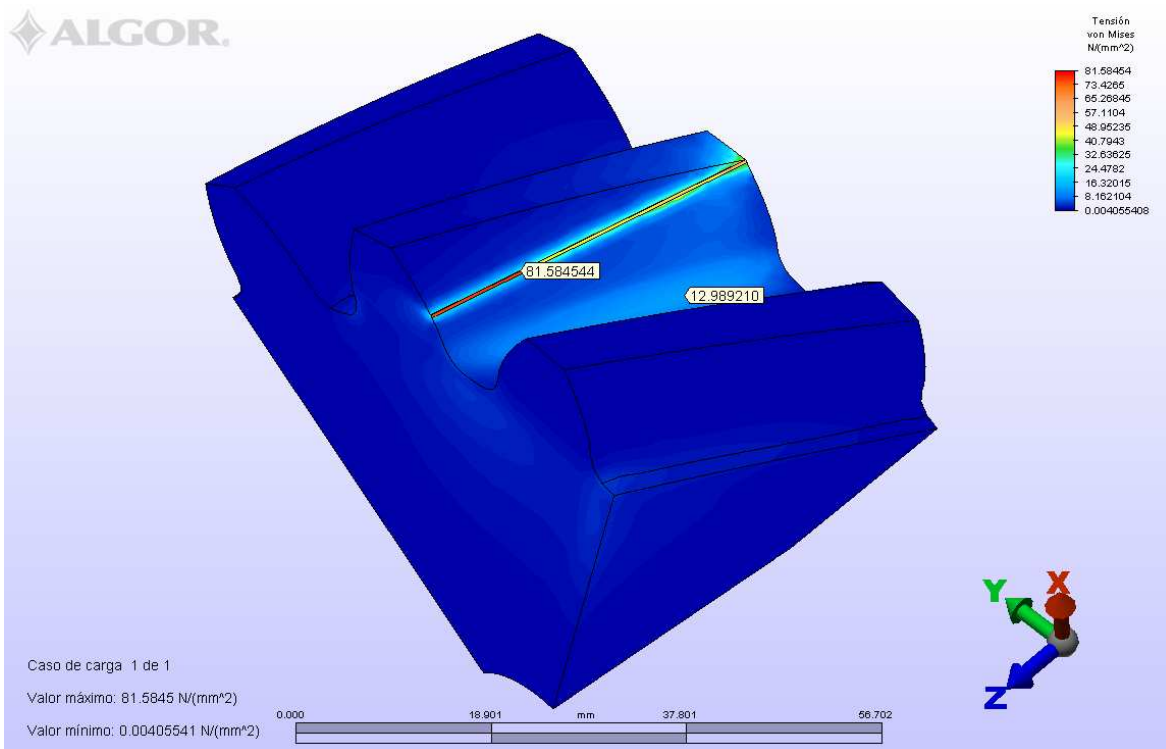


Figura 10 Resultados de esfuerzos con módulo  $m = 6$

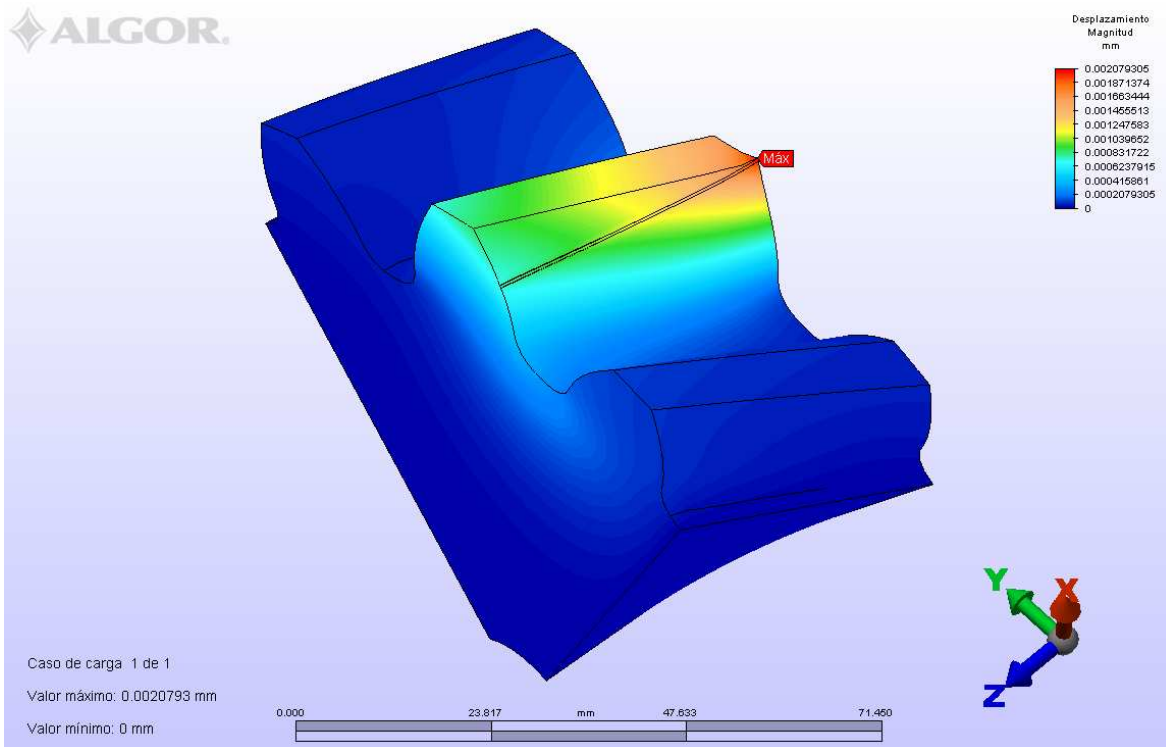


Figura 11 Resultados de desplazamiento con módulo  $m = 8$

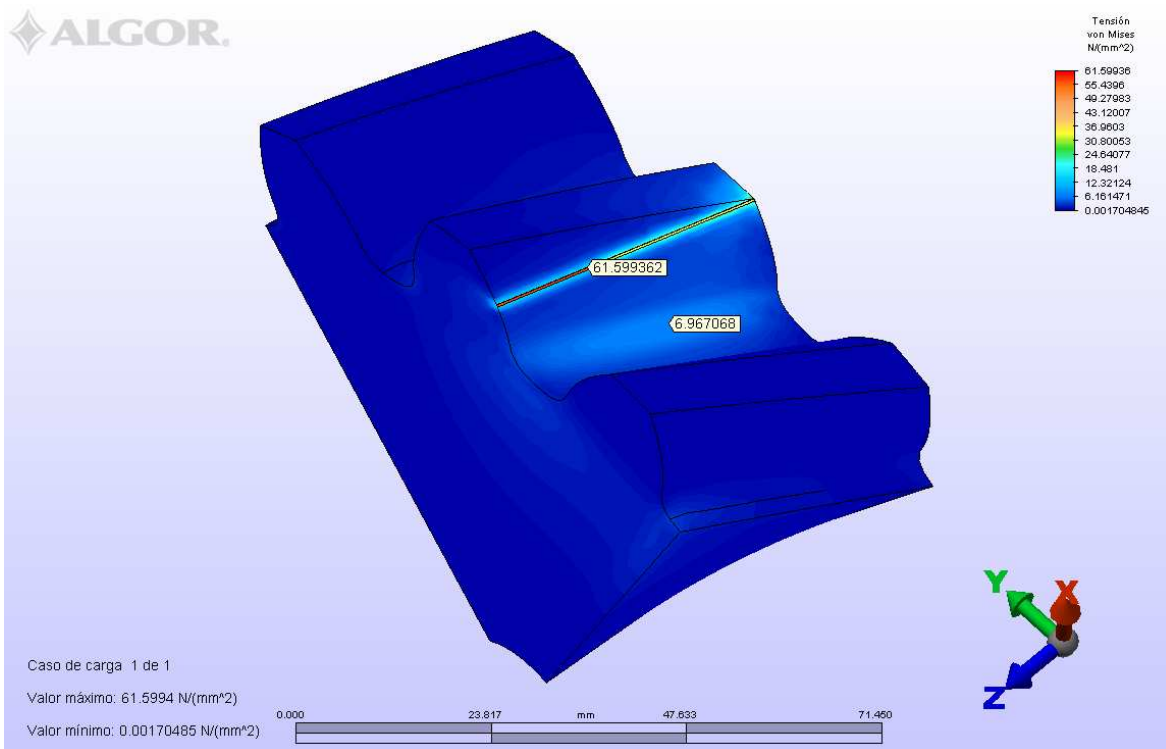


Figura 12 Resultados de esfuerzos con módulo  $m = 8$

**ANEXO 11**

**GRÁFICOS DE RESULTADOS DEL ANÁLISIS POR EL MEF CON  
LA VARIACIÓN DEL ÁNGULO DE HÉLICE Y LA CARGA  
APLICADA EN VARIOS DIENTES**

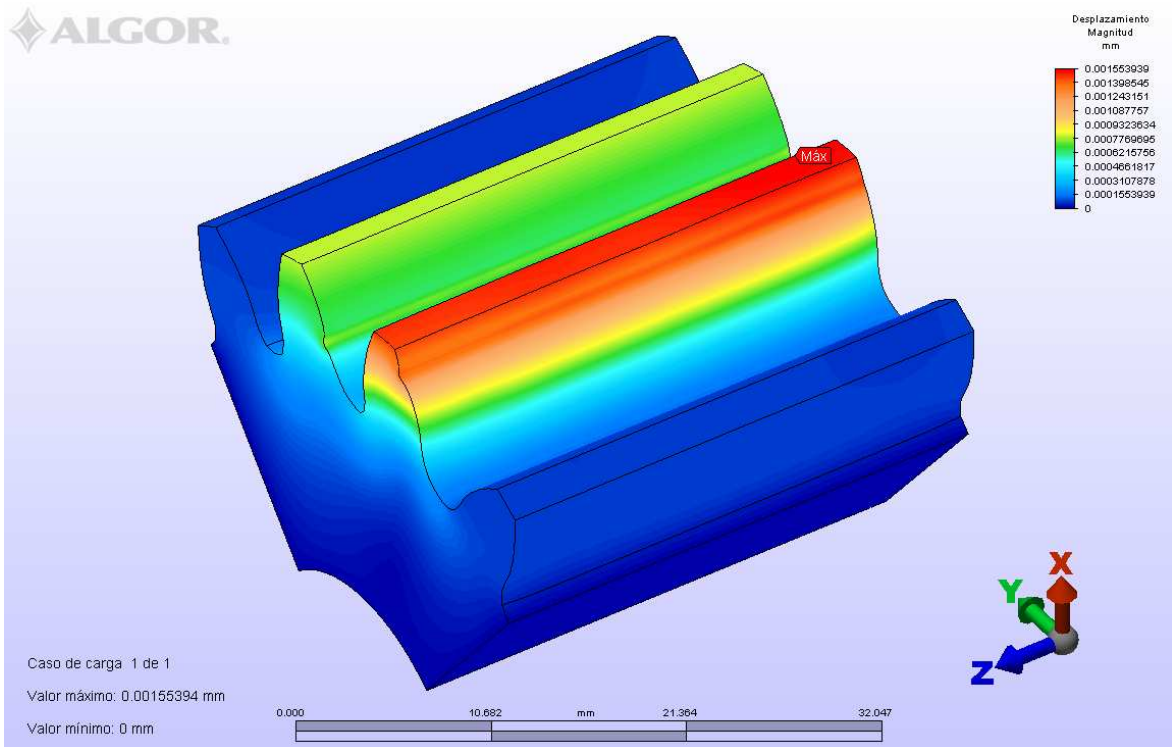


Figura 1 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 0^\circ$

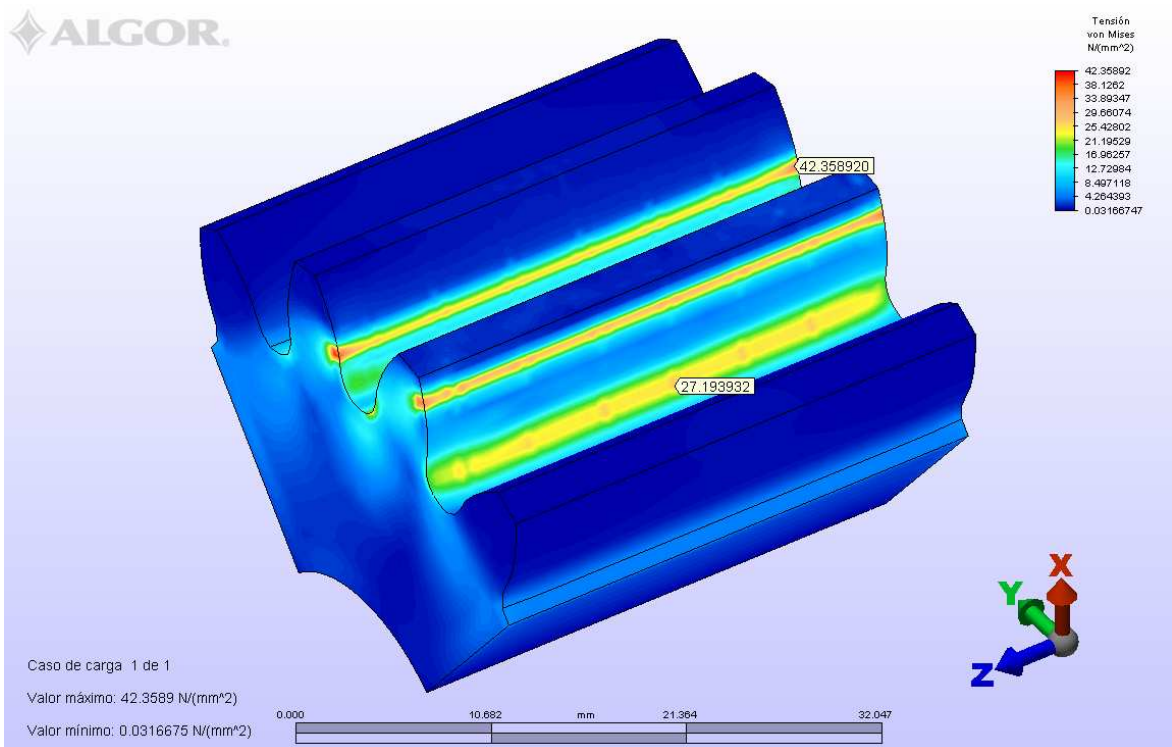


Figura 2 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 0^\circ$



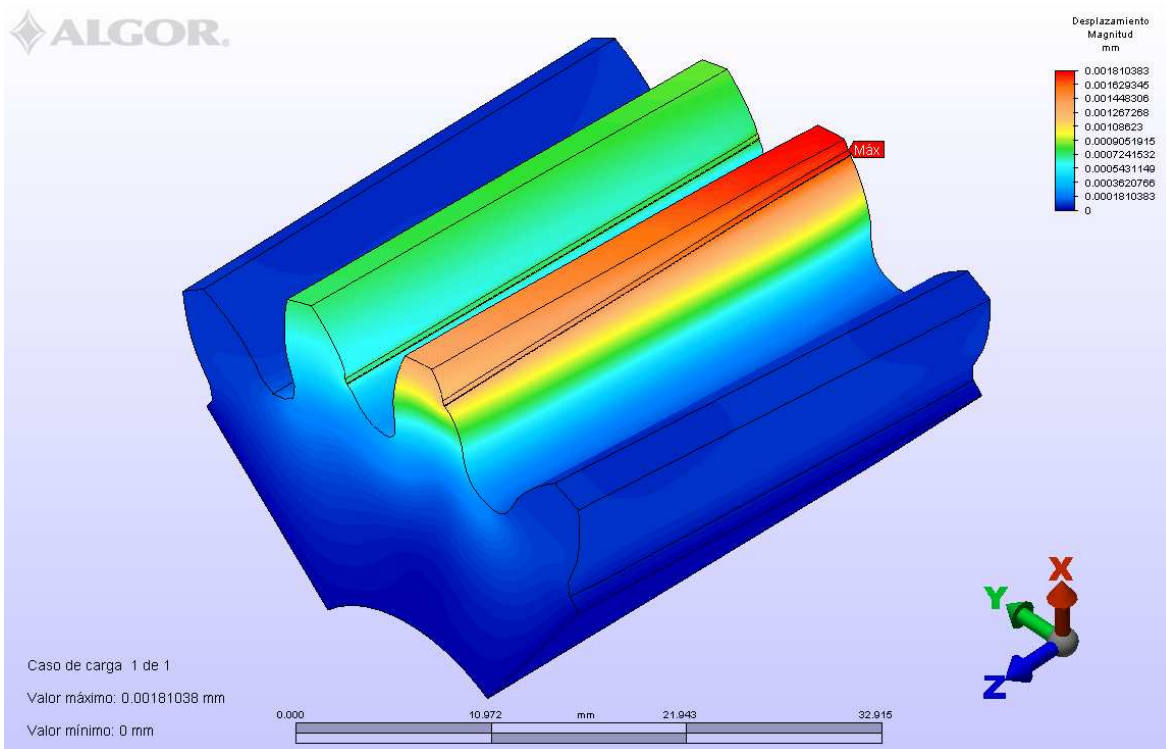


Figura 3 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 5^\circ$

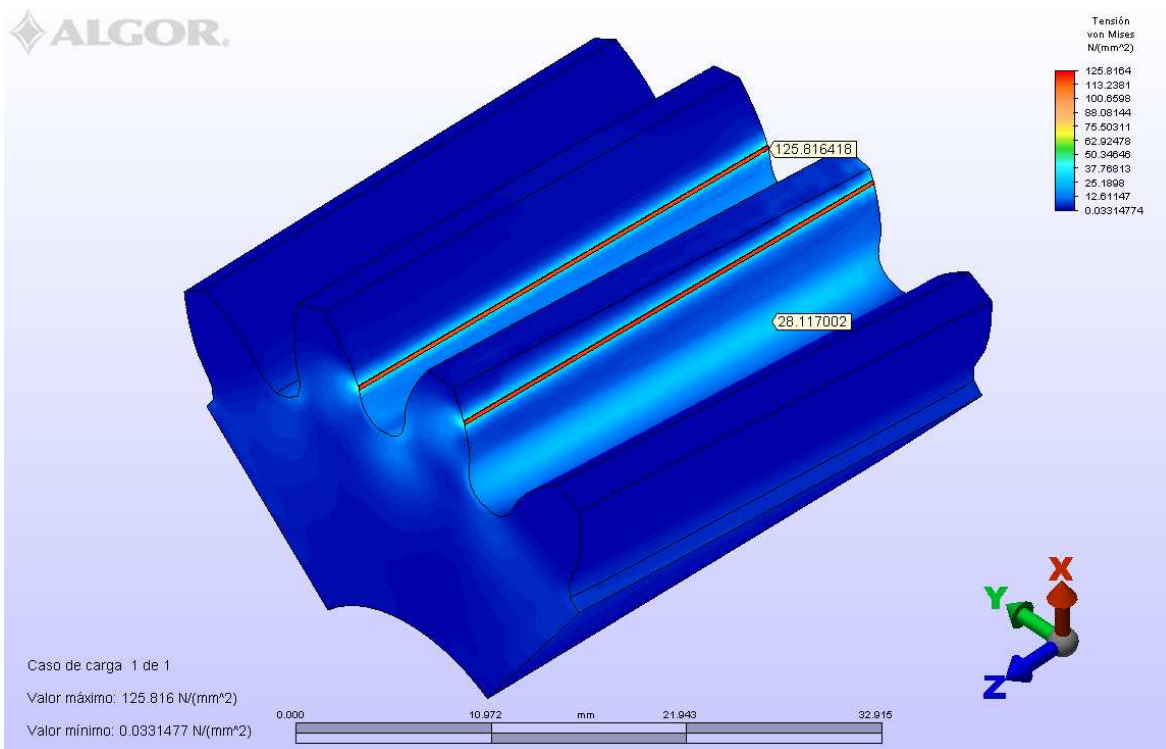


Figura 4 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 5^\circ$

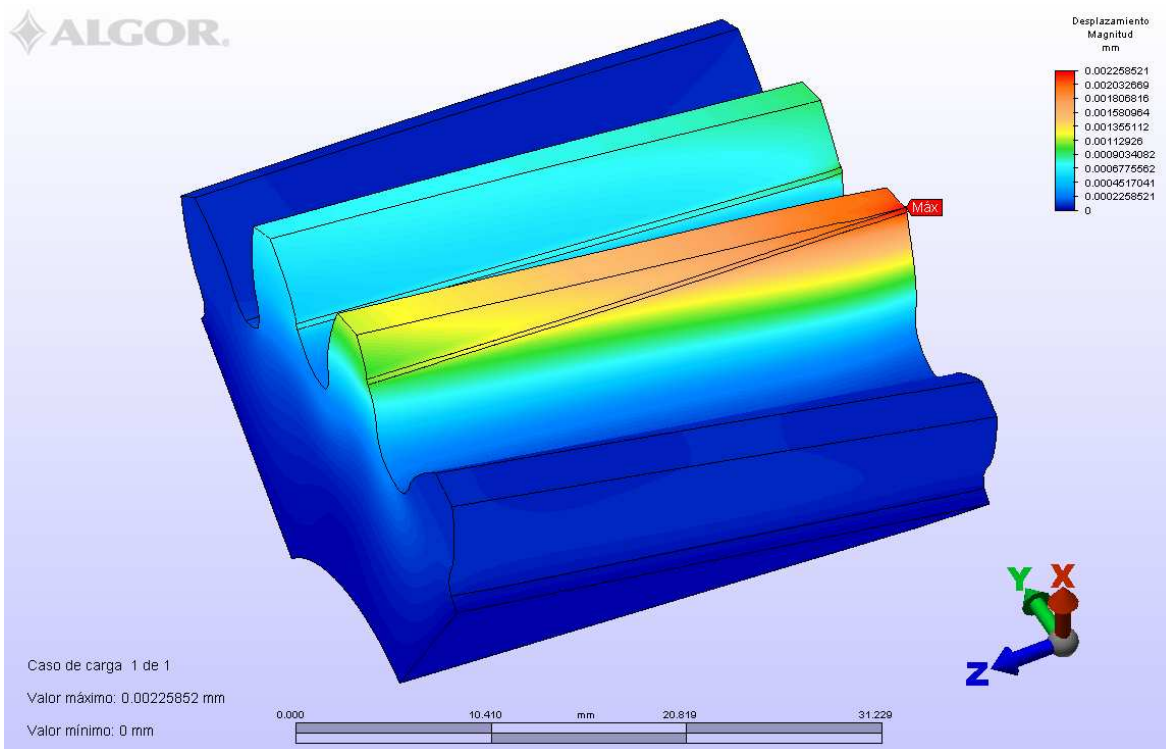


Figura 5 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 10^\circ$

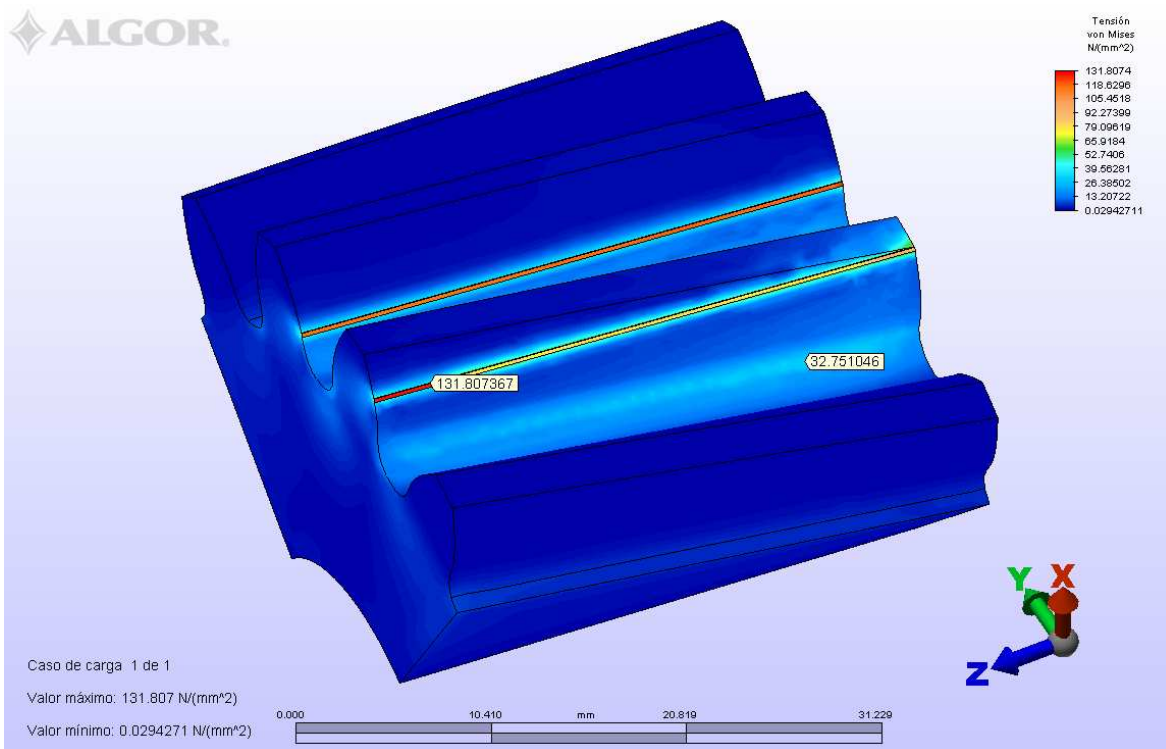


Figura 6 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 10^\circ$

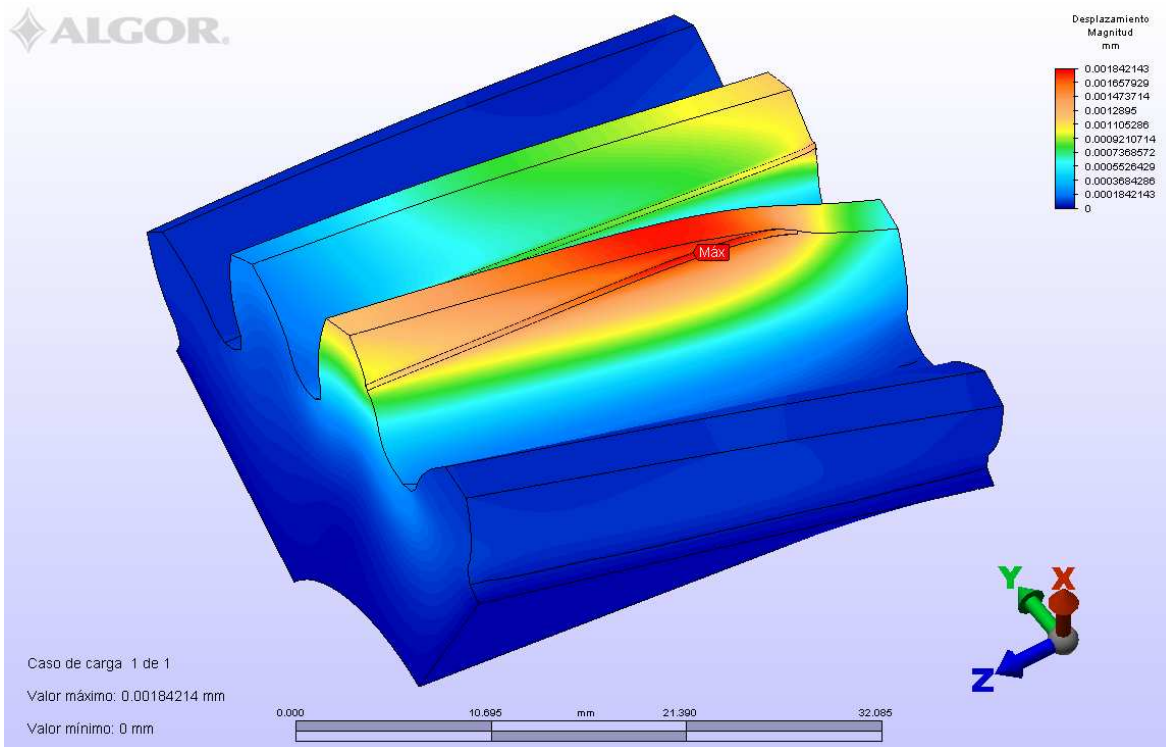


Figura 7 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 15^\circ$

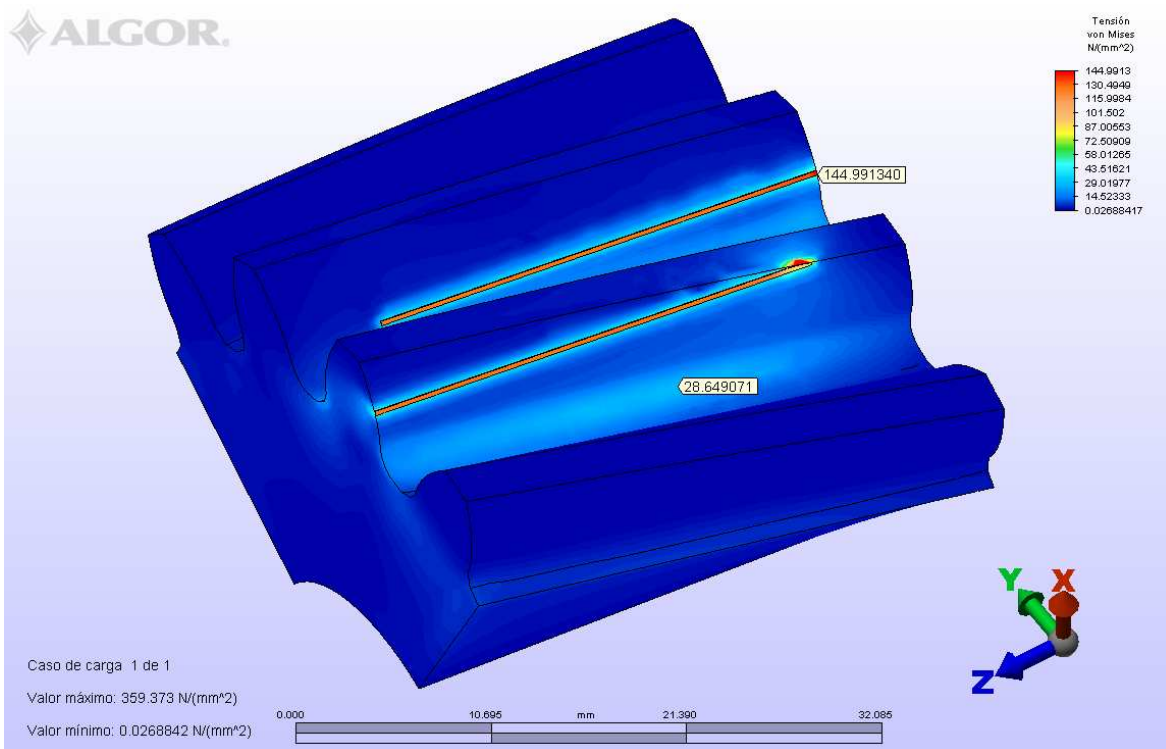


Figura 8 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 15^\circ$

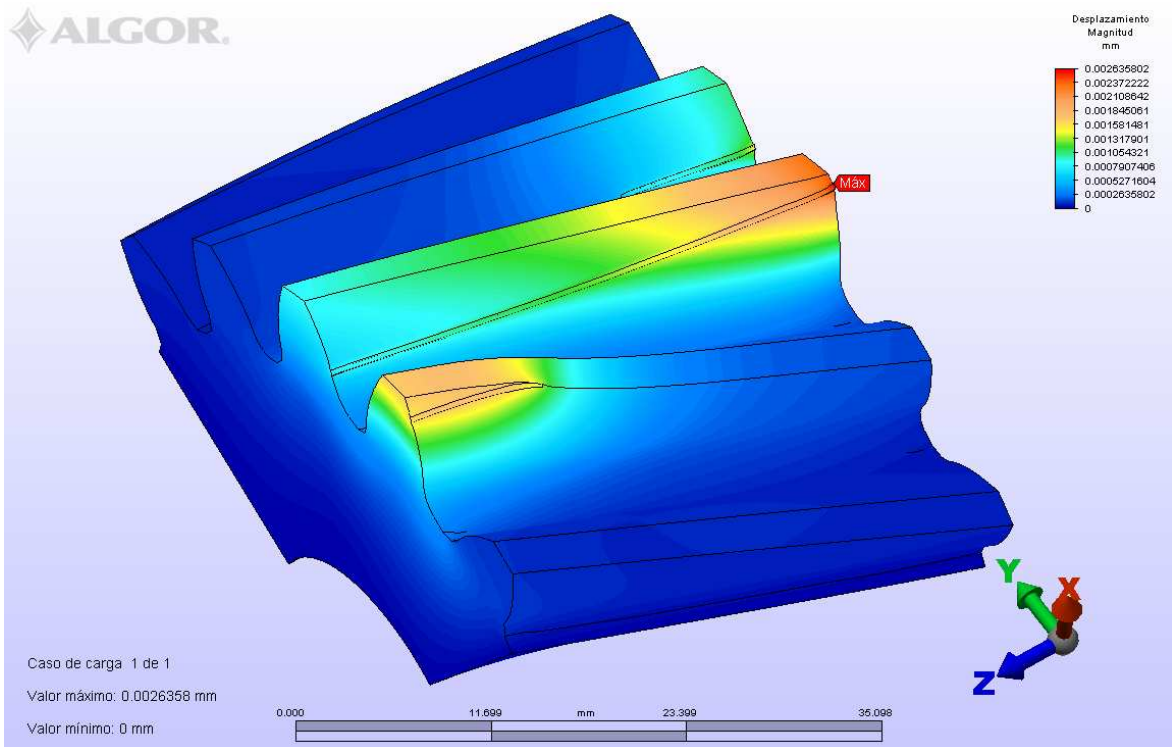


Figura 9 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 20^\circ$

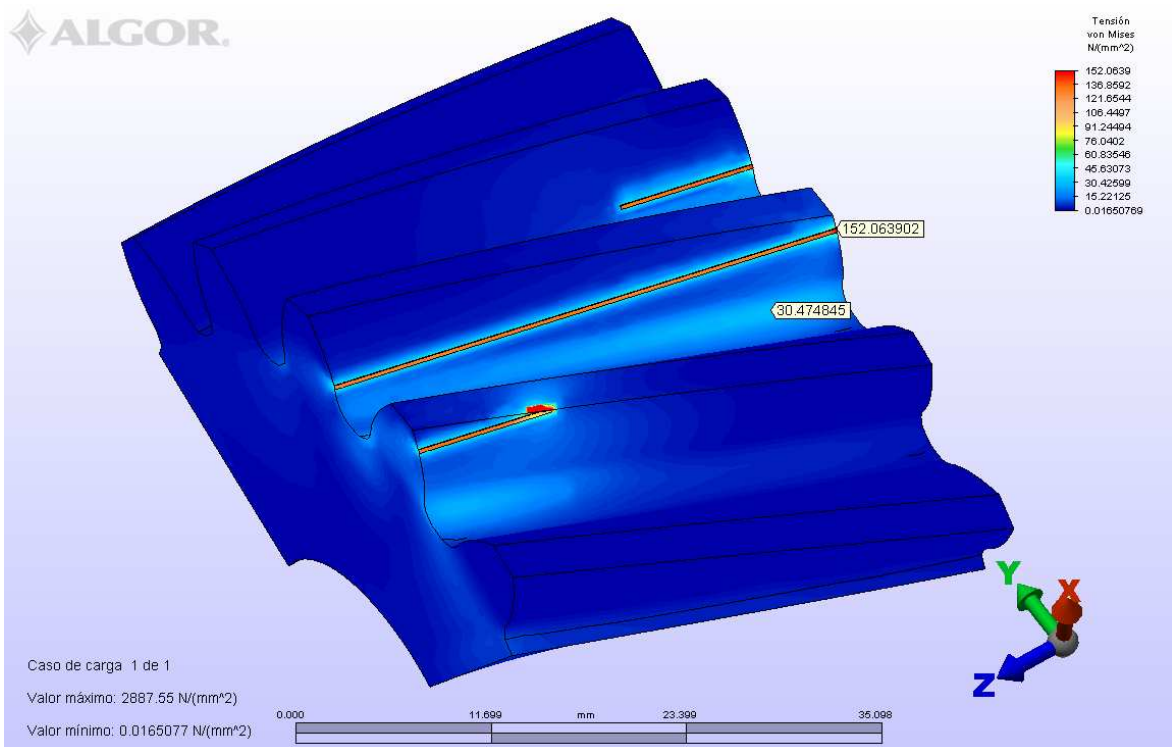


Figura 10 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 20^\circ$

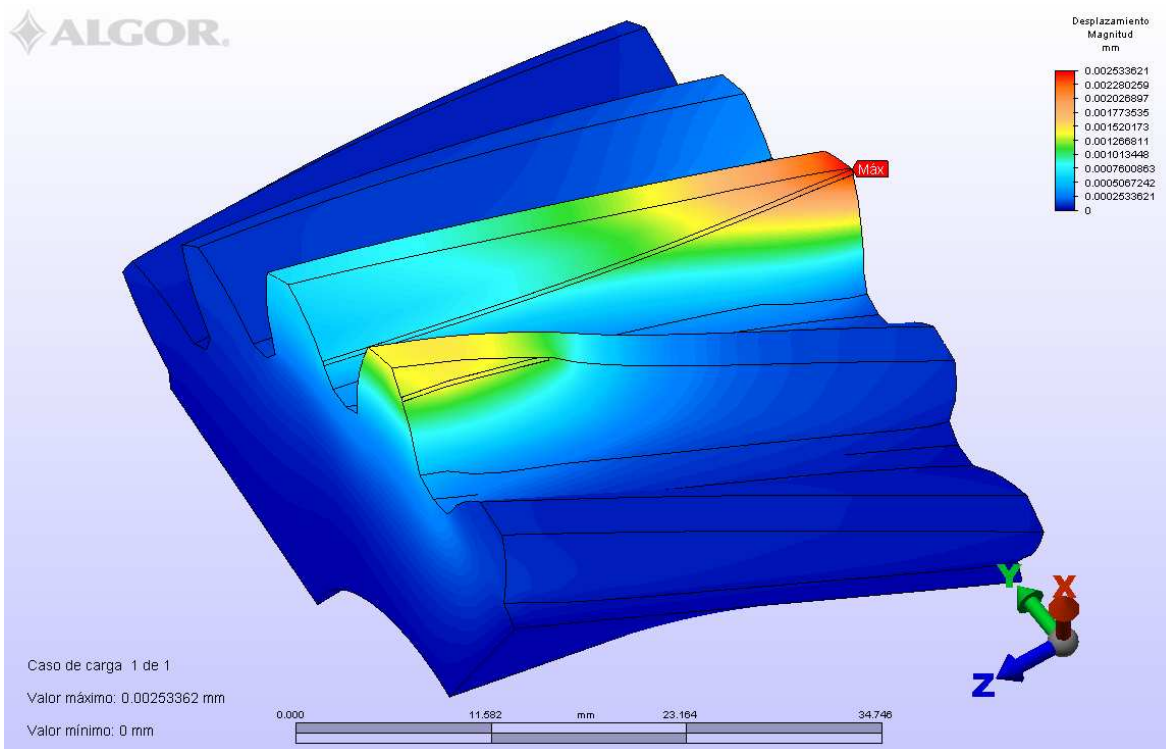


Figura 11 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 25^\circ$

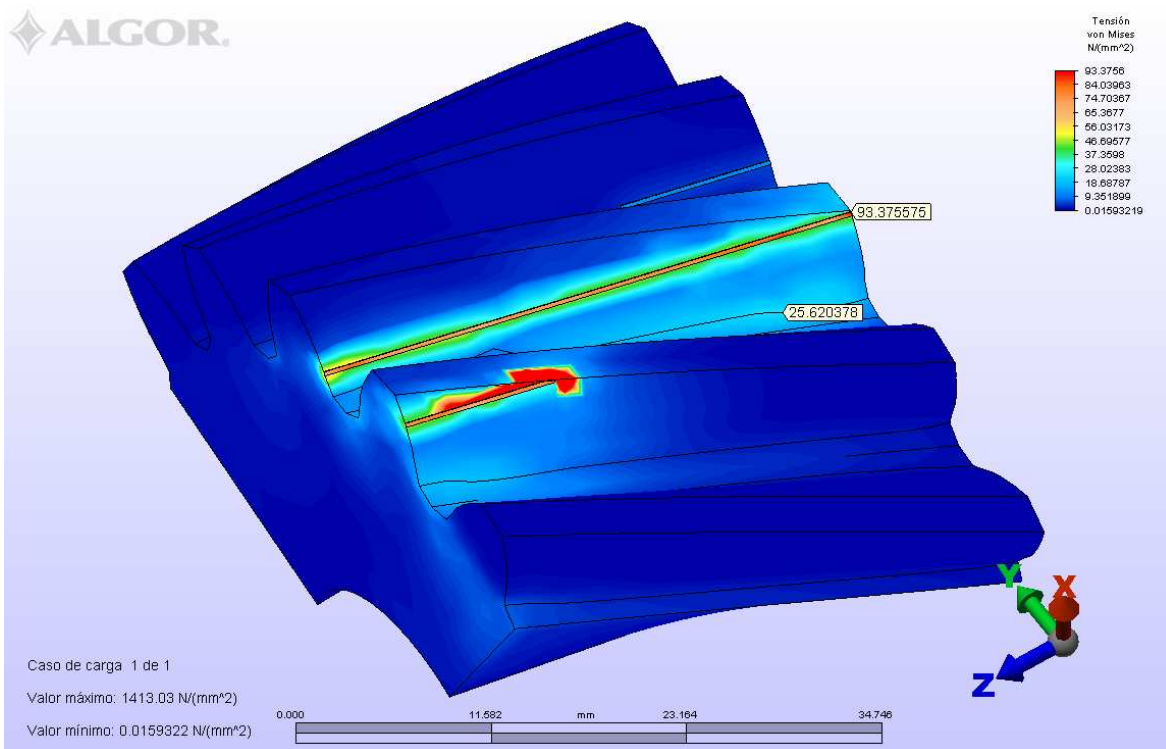


Figura 12 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 25^\circ$

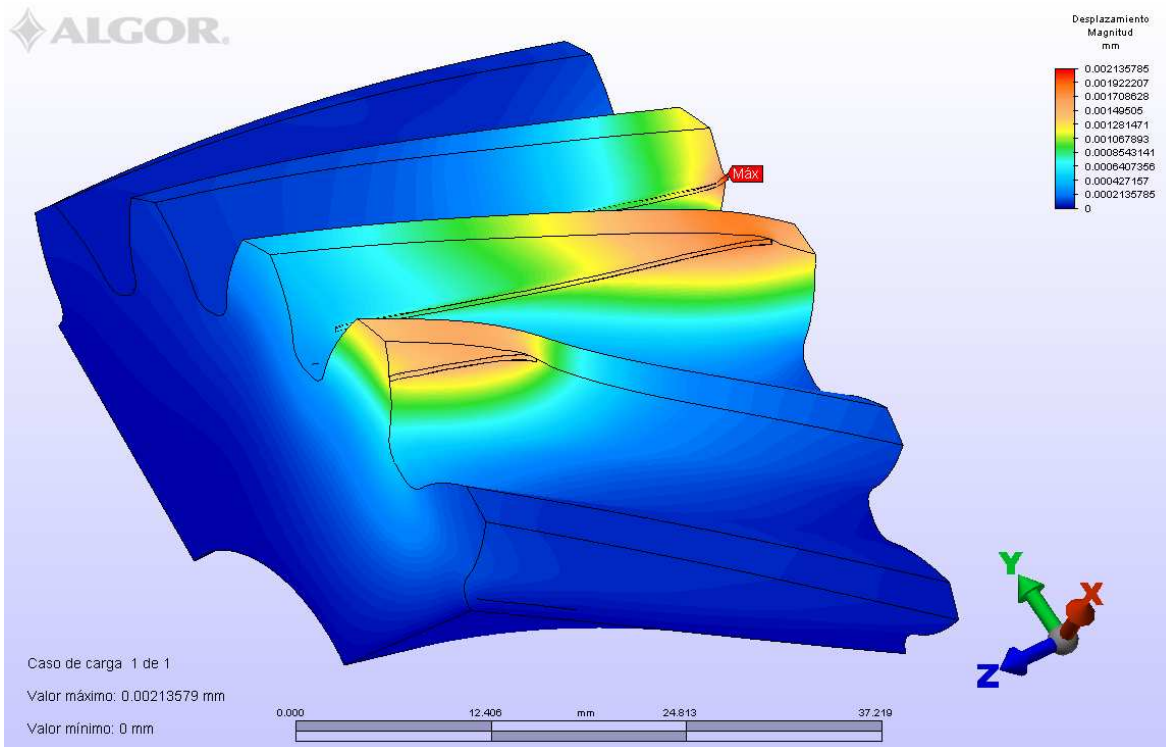


Figura 13 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 30^\circ$

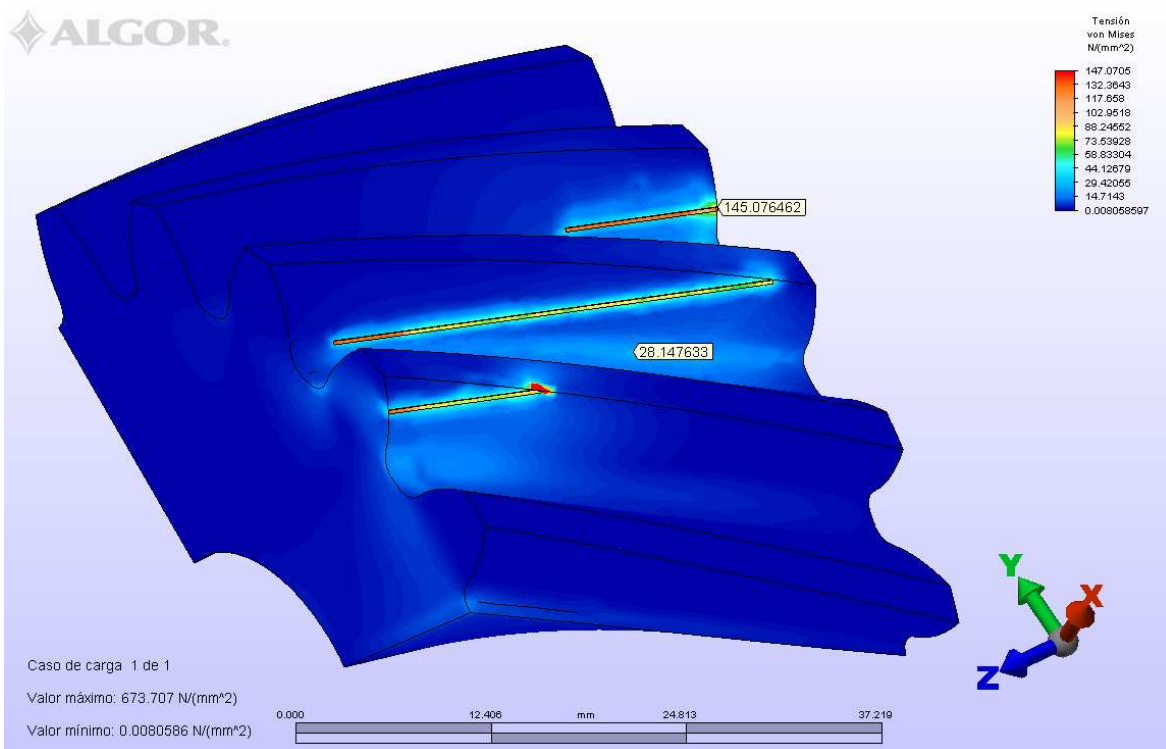


Figura 14 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 30^\circ$

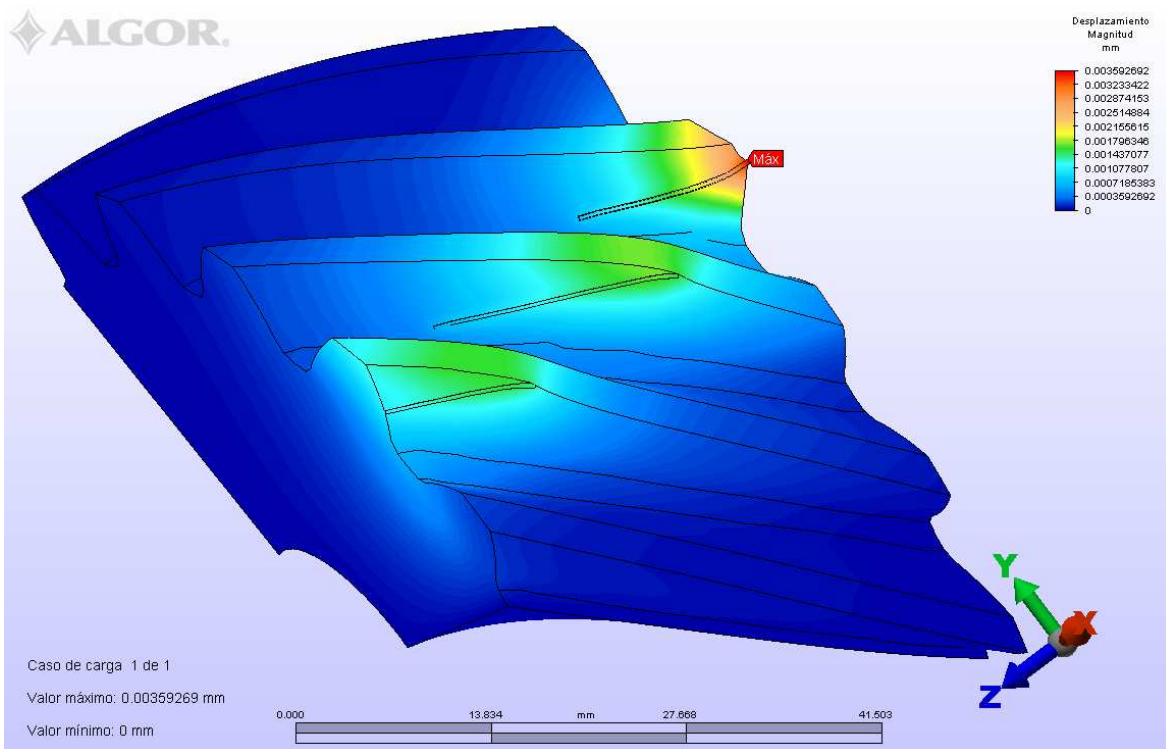


Figura 15 Resultados de desplazamiento con ángulo de hélice  $\psi = 45^\circ$

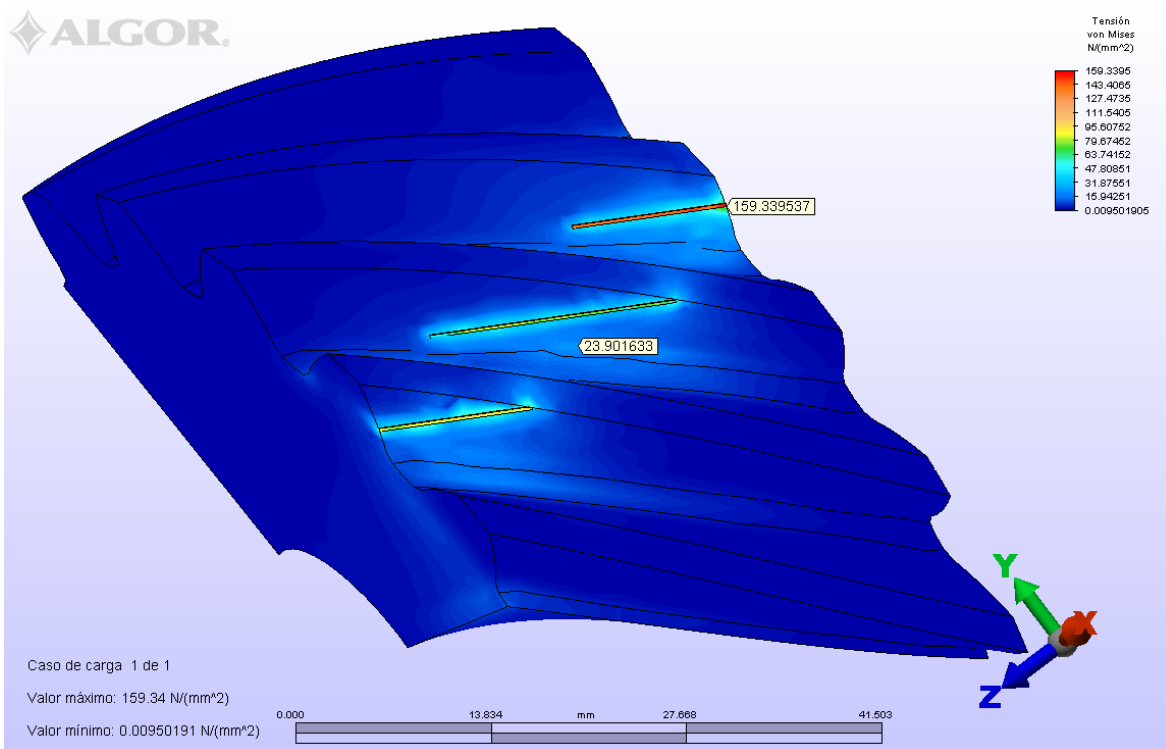


Figura 16 Resultados de esfuerzos con ángulo de hélice  $\psi = 45^\circ$