

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIAS

ECUACIONES DE LORENZ DE FLUIDOS DETERMINÍSTICOS
NO PERIÓDICOS

PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE MATEMÁTICO

DIEGO ISRAEL SALAZAR ORELLANA

`diegovdj@gmail.com`

Director: BORYS YAMIL ÁLVAREZ SAMANIEGO, PH.D.

`balvarez@uce.edu.ec`

Codirector: NELSON EDMUNDO SUBÍA CEPEDA, PH.D.

`nelson.subia@epn.edu.ec`

QUITO, OCTUBRE 2014

DECLARACIÓN

Yo DIEGO ISRAEL SALAZAR ORELLANA, declaro bajo juramento que el trabajo aquí escrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual, correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su reglamento y por la normatividad institucional vigente.

Diego Israel Salazar Orellana

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por DIEGO ISRAEL SALAZAR ORELLANA, bajo mi supervisión

Borys Yamil Álvarez Samaniego, Ph.D.
Director del Proyecto

CERTIFICACIÓN

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por DIEGO ISRAEL SALAZAR ORELLANA, bajo mi supervisión

Nelson Edmundo Subía Cepeda, Ph.D.
Codirector del Proyecto

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi profundo agradecimiento a mis padres, por el gran amor y cuidado que siempre me brindan, a Nelly mi madre, por ser ella mi soporte y guía de vida. A mi padre Eduardo por su cariño y sus acertados consejos y de igual manera a mis hermanos Juan y Fabián, por su apoyo incondicional.

Quiero agradecer a mis amigos de la facultad por su ayuda y compañía en todo momento, fue una riquísima experiencia haber ido junto a ellos en el camino de aprender matemáticas. Además, con mucho amor mi agradecimiento a Jessica por todos estos años comprendiéndome y respaldándome.

De manera muy especial agradezco al Dr. Borys Álvarez, por la enorme paciencia y el trabajo dedicado al dirigir esta tesis, así como también por todas sus enseñanzas y por haberme mostrado la profundidad e importancia que tiene la Matemática.

Finalmente, mi gratitud será eterna con la Facultad de Ciencias de la Escuela Politécnica Nacional y todos quienes la conforman, con ellos y en ese lugar aprendí, lo hermoso y gratificante, que resulta estudiar la Ciencia.

DEDICATORIA

A la memoria de mi abuelo, quién sembró en mí el amor por el conocimiento.

Índice de contenido

Índice de figuras	ix
Índice de cuadros	x
Resumen	1
Abstract	2
1 SISTEMAS DETERMINISTAS Y MODELOS DE CONVECCIÓN	1
1.1 Introducción	1
1.2 Sistemas deterministas	2
1.2.1 Sistemas Dinámicos	2
1.2.2 Determinismo	4
1.3 Dinámica de Fluidos Atmosféricos	6
1.3.1 Convección Natural	7
1.3.2 Aproximación de Boussinesq	8
1.4 Coeficientes de la transferencia de calor	9
1.4.1 Número de Reynolds	9
1.4.2 Número de Rayleigh	10
1.4.3 Número de Prandtl	11
1.5 La función de corriente Ψ	12
1.5.1 Velocidad de la Función de Corriente $\dot{\Psi}$	14
1.6 Conceptos relevantes en Sistemas Dinámicos	15
1.6.1 Contracción	15
1.6.2 Punto Fijo	15
1.6.3 Atractor	16
1.6.4 Campo de Vectores	16
1.6.5 Órbita	16
1.6.6 Conjuntos límite	16
1.6.7 Ciclos límite	17
1.6.8 Función de Lyapunov	17

1.6.9	Bifurcaciones	18
1.6.10	Espacios de fase	18
1.7	Ecuaciones de Navier Stokes	19
1.8	Ecuaciones de Euler	20
1.8.1	Ecuaciones de Movimiento	21
1.8.2	Conservación de la masa	21
1.8.3	Balance del momentum	23
1.8.4	Conservación de la energía	23
2	SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES	
	DE LORENZ	26
2.1	Generalidades	26
2.2	Flujo de Rayleigh-Bénard	27
2.2.1	Características	29
2.3	Inestabilidad del Flujo de Rayleigh-Bénard	31
2.3.1	Variabes Adimensionales	41
2.3.2	Función de corriente	44
2.4	Representación de Fourier	47
2.4.1	Función de Corriente Ψ y función de Temperatura φ	50
2.5	Sistema de Lorenz	52
3	SIMETRÍA DEL SISTEMA DE LORENZ Y RESULTADOS NUMÉRI-	
	COS	56
3.1	Simetría del Sistema de Lorenz	56
3.1.1	Simetría	56
3.2	Resultados Numéricos	61
3.3	Resolución numérica del sistema de Lorenz	62
3.4	Análisis de estabilidad	65
3.5	Conclusiones	75
3.6	Recomendaciones	77
A	Tratamiento matricial para subvectores de $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$	78
A.1	Extracción de vectores en N iteraciones	78
A.2	Extracción de vectores con máximos relativos para $Z(t)$ en N iteraciones	80
	Referencias	83

Índice de figuras

1.1	Pierre-Simon Laplace	5
1.2	Región de Flujo.	13
1.3	Flujo entre 2 puntos.	13
1.4	Velocidad de la función de corriente.	14
1.5	Velocidad en sus componenetes rectangulares.	15
2.1	Celdas de convección natural.	28
2.2	Celdas de Bénard.	28
2.3	Celdas de convección abiertas de Rayleigh-Bénard presentes en la atmósfera.	30
2.4	Función lineal de temperatura.	32
2.5	Función T_1	52
2.6	Función T_2	52
3.1	Invarianza del eje- z	58
3.2	Soluciones en 200 iteraciones	67
3.3	$Y(t)$ para 1 – 2500 iteraciones	68
3.4	$Y(t)$ para 2501 – 5000 iteraciones	68
3.5	$X(t)$ para las primeras 5000 iteraciones	69
3.6	$X(t)$ vs $Y(t)$ para las 1200 – 2000 iteraciones	70
3.7	$Z(t)$ vs $Y(t)$ para las 1200 – 2000 iteraciones	70
3.8	$X(t)$ vs $Y(t)$ para las 5000 primeras iteraciones	71
3.9	$Z(t)$ vs $Y(t)$ para las 5000 primeras iteraciones	71
3.10	$Z(t)$ vs $Y(t)$ para las 5000 primeras iteraciones	72
3.11	$X(t)$ - $Z(t)$ - $Y(t)$ para 5000 iteraciones	72
3.12	Máximos relativos para los valores de $Z(t)$ en N iteraciones.	73

Índice de cuadros

1.1	Propiedades de un fluido.	7
3.1	200 primeras iteraciones de la solución de (SL)	66
A.1	Máximos relativos de $Z(t)$ correspondientes a las primeras 13273 iteraciones	82

Resumen

Este documento presenta un estudio del artículo histórico de Edward Lorenz en sistemas dinámicos, el objetivo principal es la deducción detallada del sistema en donde aparecen tres ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

Se parte de algunas consideraciones en el fenómeno físico de la convección y en particular se analiza la celda convectiva de Rayleigh Bénard que se encuentra aislada térmicamente. A partir de las ecuaciones de Navier-Stokes y con el uso de variables adimensionales, se llega a una forma simplificada de dos ecuaciones diferenciales parciales para la función de corriente y de temperatura, valiéndose de las expresiones de estas funciones en su serie de Fourier y considerando un alto truncamiento se obtiene una forma simplificada de las mismas. Con el reemplazo de estas aproximaciones en las ecuaciones de Navier-Stokes y luego de simplificaciones adecuadas se obtiene esencialmente el sistema de Lorenz en los parámetros apropiados.

Adicionalmente, se hace un estudio de las propiedades básicas de simetría las ecuaciones y se experimenta numéricamente con la solución del sistema, bajo los parámetros usualmente tomados. Además, se comprueba empíricamente la falta de periodicidad del sistema y la presencia de los dos atractores en el espacio de fases.

Abstract

This document presents a study of the dynamical systems historical paper of Edward Lorenz, the main objective is the detailed deduction of the system in which appears three nonlinear differential equations.

It starts with some considerations on the physical phenomenon of convection and particularly in the Rayleigh Benard convection cell, which is thermally isolate. From the analysis of the Navier-Stokes equations and using dimensionless variables , we reach a simplified form of two partial differential equations for the stream function and temperature, availing in the expressions of these functions in their Fourier series and considering a high truncation we obtain a simplified shape of themselves. With the replacement of these approximations in the Navier-Stokes equations and after of appropriate simplifications we obtain essentially the Lorenz system with the right parameters.

Additionally, it is made a study of the basic symmetry properties of the equations and some numerical experiments with the system solutions are made, under the usual parameters taken. Furthermore, is empirically checked the lack of the system periodicity and the presence of the two attractors in the phase space.

Capítulo 1

SISTEMAS DETERMINISTAS Y MODELOS DE CONVECCIÓN

1.1 Introducción

El presente trabajo tiene por objetivo realizar un estudio detallado y exhaustivo del trabajo de Edward N. Lorenz (1962) [15], acerca de fluidos determinísticos no-periódicos. Así, en la Sección 2.5 se deduce, con el detalle posible, los sistemas de ecuaciones para llegar al sistema determinístico de ecuaciones diferenciales no lineales de Lorenz.

En la Sección 3.2 se procede también a incluir simulaciones computacionales que caracterizan el atractor extraño de Lorenz y la variación de las trayectorias en el espacio de fases con el cambio en los valores de los parámetros del número de Reynolds, el número de Prandtl y el parámetro de factor geométrico.

El estudio de los métodos numéricos y el análisis de los algoritmos de las aproximaciones hechas para los modelos de integración en las ecuaciones de convección está fuera del ámbito de trabajo de este documento.

Se enfatiza en el análisis de las soluciones no periódicas así como en la deducción formal del sistema de ecuaciones de convección libre con amplitud finita en problemas de valor inicial del trabajo de Barry Saltzman [20] a partir del cual se deduce el sistema de Lorenz en la Sección 2.5.

La mayoría de movimientos que se dan en la atmósfera son de origen convectivo producidos por calentamiento de la energía solar, es por este motivo que en la Sección 2.3 se hace una revisión rápida de los mismos. Se presenta además una introducción de los sistemas dinámicos en el primer capítulo, así como de los conceptos principales

de la dinámica de fluidos atmosféricos, las variables adimensionales involucradas en la transferencia de calor y las ecuaciones del movimiento a utilizar.

Se considera el fenómeno de convección de Rayleigh-Bénard, en particular se estudian las celdas de convección que se generan en dicho fenómeno. En los modelos que describen estos fenómenos se presentan patrones de flujo en su estado estacionario, si es que los mismos oscilan de una forma periódica, mientras que otros no presentan patrón alguno y su flujo parece totalmente azaroso, a este tipo de comportamiento se le caracteriza en la literatura matemática como **caos** para indicar una respuesta al grado de sensibilidad que las trayectorias de un sistema responden a sutiles variaciones en las condiciones iniciales.

Se intenta dejar abierto el camino para, en lo posterior, iniciar un estudio más detallado en esta área.

1.2 Sistemas deterministas

1.2.1 Sistemas Dinámicos

El concepto de sistema dinámico se originó conjuntamente con la mecánica newtoniana en el siglo XVII con Isaac Newton (1643-1727), su formalización y desarrollo continuó a lo largo del tiempo con Joseph Lagrange (1736-1813) y William Hamilton (1805-1865); es un concepto que describe, mediante un conjunto de reglas y modelos, la dependencia en el tiempo de un elemento en un determinado espacio geométrico.

En términos generales, un sistema dinámico es un 3-upla (T, X, Φ) , donde T es un monoide, es decir una estructura algebraica con una operación binaria asociativa y la presencia de un elemento neutro, $X \neq \emptyset$ y Φ una función, $\Phi : U \subset T \times X \mapsto X$, con

$$\begin{aligned} I(x) &= \{t \in T : (t, x) \in U\}, \\ \Phi(0, x) &= x, \\ \Phi(t_2, \Phi(t_1, x)) &= \Phi(t_1 + t_2, x), \quad \forall t_1, t_2 \in T, \quad \text{tal que } t_1 + t_2 \in I(x). \end{aligned}$$

La función $\Phi = \Phi(t, x)$ es llamada **función de evolución** y se supone inyectiva. A la variable t se la conoce como **parámetro** de evolución. El conjunto X es llamado el **espacio de fases**, véase también la Subsección 1.6.10, en donde la variable $x \in X$ representa el estado inicial del sistema. Se suele notar $\Phi_x(t) = \Phi^t(x) := \Phi(t, x)$.

Si se toma la primera variable como constante, en este caso $t = cte$, se tiene que la aplicación

$$\Phi_x : I(x) \mapsto X$$

es llamada el **flujo** a través de x . Al conjunto

$$G(x, y) = \{(s, y) \in I(x) \times X : y = \Phi_x(s)\},$$

es decir a su grafo, se lo conoce como **trayectoria** a través de x .

Asimismo, al conjunto

$$\gamma_x := \{\Phi(t, x) : t \in I(x)\}$$

se le llama **órbita** a través de x .

Se considera a continuación una clasificación general de sistemas dinámicos:

- **Sistema dinámico real** también llamado sistema dinámico de tiempo continuo o *flujo*, es una tripleta (I, X, Φ) , donde $I \subseteq \mathbb{R}$ abierto, X es una variedad localmente difeomorfa a un espacio de Banach E . Si el difeomorfismo local se da con $E = \mathbb{R}^n$ se lo llama sistema *dinámico de dimensión finita*, caso contrario es de dimensión infinita. Se tiene que $\Phi \in \mathcal{C}(T \times X, X)$, pero si además $\Phi \in \mathcal{C}^1(T \times X, X)$ se dice *sistema continuo diferenciable*. Si $I = \mathbb{R}$ se lo llama *sistema global* y si $I = \mathbb{R}^+$ se lo llama *semi-flujo*.
- **Sistema dinámico discreto** es una tripleta (I, X, Φ) , donde $I \subseteq \mathbb{Z}$ abierto, X es una variedad localmente difeomorfa a un espacio de Banach E y Φ una función continua. Si $I \subseteq \mathbb{Z}^+$, el sistema dinámico toma el nombre de *semi-cascada*.
- **Autómata celular** es una tripleta (\mathfrak{R}, X, Φ) , donde \mathfrak{R} es una red, es decir un subgrupo discreto de \mathbb{R}^n que genera a todo \mathbb{R}^n , por ejemplo \mathbb{Z} , X es una aplicación tal que $X : \mathfrak{R} \mapsto A$ en donde A es un conjunto finito y Φ una función de evolución cualquiera.

Como se puede notar el concepto de evolución temporal es la idea central en la teoría de sistemas dinámicos, de hecho su inicio se vio motivado por el estudio del comportamiento en el tiempo de los sistemas de la mecánica clásica con problemas de valor inicial que se describen en sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias. Esta será la forma por la cual se abordará esta tesis para realizar el estudio del sistema de Lorenz en [15].

1.2.2 Determinismo

El determinismo es una concepción filosófica de un sentido bastante amplio, fundamentado en el principio de causalidad, nos indica que todo lo que sucede o acaece en el mundo lo hace determinado por una causa o razón suficiente, el determinismo es entonces un principio de razón suficiente que expresa que todo lo que ocurre tiene una razón suficiente para ser así y no de otra forma¹ y que por tanto para todo lo que existe, hay también una explicación suficiente.

El determinismo plantea entonces un postulado para la filosofía natural: el mundo es gobernado por el determinismo si y solo si, dado una específica forma de ser de las cosas en un instante de tiempo t , el curso de ser las cosas se fija, por tanto como una ley natural, para una explicación más detallada véase [10].

Dentro del determinismo, el determinismo científico es un enfoque en la ciencia que considera que, a pesar de la enorme complejidad de la naturaleza y de la limitación práctica que se tiene para manejar todas las variables involucradas, el mundo físico evoluciona en el tiempo según principios totalmente predeterminados, todos los eventos entonces son el resultado de eventos antecedentes con sus condiciones juntamente con las leyes de la naturaleza, es una idea con la que se ha venido lidiando desde hace mucho. Sin embargo es en el siglo XVIII que se empezó a formalizar este concepto y analizarlo de una forma más rigurosa y matemática, concibiendo un paradigma como tal en las ciencias físicas. El impacto que generó y sus consecuencias se pueden notar en la famosa frase de Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827):

"Podemos mirar el estado presente del universo como el efecto del pasado y la causa de su futuro. Se podría concebir un intelecto que en cualquier momento dado conociera todas las fuerzas que animan la naturaleza y las posiciones de los seres que la componen; si este intelecto fuera lo suficientemente vasto como para someter los datos a análisis, podría condensar en una simple fórmula el movimiento de los grandes cuerpos del universo y del átomo más ligero; para tal intelecto nada podría ser incierto y el futuro así como el pasado estarían frente sus ojos."

En el siglo XX y gracias a los trabajos de destacados teóricos de la filosofía de la ciencia² se ha considerado el problema del determinismo científico en términos de la predictibilidad de un sistema mecánico; así también han surgido los enfoques modernos acerca del determinismo y caos, visión que trataremos de indagar con el presente

¹Gottfried Leibniz (1646 -1716)

²Karl Popper (1902 – 1994), Ilya Prigogine (1917 – 2003)

trabajo, al menos en sus partes más elementales.



Figura 1.1: Pierre-Simon Laplace

Sin embargo en el reciente siglo la concepción de determinismo que imperaba en la ciencia, entró en una crisis con los desarrollos teóricos de la Mecánica Cuántica. Según la opinión mayoritaria de la comunidad científica en la Mecánica Cuántica intervienen varios factores aleatorios intrínsecos por los cuales no existiría el determinismo como en el caso de la Mecánica Clásica, es el caso del colapso de la función de onda relacionado con el problema de la medición en donde se cree que interviene el azar de manera ineludible.

Los sistemas deterministas en la Física y la Matemática consideran los sistemas de la Mecánica Clásica dados por un conjunto de magnitudes de posición y velocidades, por ende sus momentos lineales, asociadas a cada punto material del sistema y que varían con el tiempo de acuerdo a ciertas leyes, expresadas en ecuaciones diferenciales, en algunos casos más simples los sistemas mecánicos se consideran con finitos grados de libertad y otros más generales, como es el caso de los fluidos, necesitamos definir funciones sobre regiones continuas, lo cual formalmente equivale a tratarlos como sistemas con un número infinito de grados de libertad.

Estas ecuaciones de movimiento son entonces las que describen las restricciones e interacciones del sistema mecánico y generalmente se representan como ecuaciones diferenciales de segundo orden o como sistema de ecuaciones diferenciales, en donde la posición y la cantidad de movimiento son las variables de estado. Con dicha formulación matemática el estado de un sistema queda completamente determinado si se conocen simultáneamente su cantidad de movimiento y su posición, estamos entonces ante una predictibilidad teóricamente infinita. Así, si matemáticamente en un determinado instante se conocieran con total precisión las posiciones y velocidades de un sistema finito de N partículas, se podrían conocer las posiciones y velocidades futuras,

ya que es posible construir el conjunto de funciones vectoriales $\{r_i = r_i(t, r_{i,0}, \dot{r}_{i,0})\}_{i=1}^N$ que nos proporcionan las posiciones de las partículas en cualquier instante de tiempo, generalmente las funciones de posición $\{r_i\}_{i=1}^N$ se obtienen por integración una vez que el sistema dinámico con sus ecuaciones diferenciales y las condiciones iniciales están dadas.

1.3 Dinámica de Fluidos Atmosféricos

En el presente trabajo se analiza un fenómeno específico que ocurre en los fluidos atmosféricos, entendiéndose por los mismos principalmente los gases que se encuentran en las dos primeras capas atmosféricas, es decir la troposfera y la estratosfera, que alcanzan hasta los 50 km de altura respecto de la superficie. Sin embargo, se da una revisión breve de algunos de los conceptos físicos clave en la dinámica de los fluidos atmosféricos.

Un **fluido** es una sustancia que se deforma continuamente, o que fluye, bajo la aplicación de un esfuerzo cortante. En un fluido las moléculas constitutivas se mantienen unidas entre si por fuerzas cohesivas débiles o por las paredes de un recipiente, poseen una propiedad distintiva en la cual los fluidos pueden cambiar de forma, es decir el desplazamiento espacial relativo de sus moléculas constituyentes, sin que aparezcan en su seno fuerzas restitutivas tendientes a recuperar la forma original.

Los fluidos son subclases de los estados de la materia e incluye líquidos, gases, plasmas y los sólidos plásticos.

Características de los fluidos

- Movimiento molecular no acotado.
- Compresibilidad.
- Viscosidad.
- Fuerzas de Van der Waals características.
- Distancia Molecular Grande.
- Ausencia de memoria de forma.

Propiedades de los fluidos

A continuación se enumeran las principales propiedades de los fluidos, tanto en las que ocurre por factores intrínsecos del fluido que no toma en cuenta causas externas, es decir propiedades termodinámicas; como las propiedades dinámicas que son cambios físicos o de su estado de evolución del movimiento, causados por factores o fuerzas externas.

PROPIEDADES DE LOS FLUIDOS	
Termodinámicas	Dinámicas
Presión	Viscosidad
Densidad	Conductividad Térmica
Temperatura	Tensión Superficial
Energía Interna	Comprensibilidad
Entalpía	Capilaridad
Entropía	
Calor específico	
Peso específico	
Volumen específico	

Cuadro 1.1: Propiedades de un fluido.

Además, se pueden clasificar a los fluidos respecto a su viscosidad ν , en: **fluidos newtonianos** $\nu(t) = cte$, **fluidos no newtonianos** $\nu(t) = \nu(T, \tau) \neq cte$ en donde T es la temperatura y τ es el esfuerzo cortante y en los **superfluidos** en donde $\nu(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$.

Para ubicar correctamente el trabajo de [15], se revisan este par conceptos clave, según lo que se indica en [27], para entender ligeramente la fenomenología física que hay por detrás.

1.3.1 Convección Natural

La convección natural es un fenómeno en donde el fluido, visto como un conjunto de partículas, está en movimiento por las fuerzas de flotabilidad debido a las variaciones de densidad, estas variaciones resultan finalmente en una transferencia de calor interna del fluido o entre fluidos vecinos que se calientan o enfrían, en algunos casos se da simultáneamente también un fenómeno de transporte de masa, este tipo de convección mixta no es tratada en este trabajo.

Un aspecto importante a considerar es que la convección natural no se da debido a la presencia de energía mecánica externa, sino como se mencionó antes, debido a las variaciones internas de densidad del fluido. Ahora, se va a caracterizar brevemente la convección natural con dos aspectos relevantes.

- Hay un acoplamiento fuerte entre el flujo y la transferencia de calor, es por eso que es necesario tratar simultáneamente tanto la función de posición o velocidad como de temperatura al describir el comportamiento del fluido, además se supone siempre que mientras ocurre la convección natural todas las propiedades del fluido, tanto dinámicas como térmicas, permanecen constantes.
- Las fuerzas de flotabilidad³ son generalmente débiles, por lo que la velocidad característica de la convección en donde existe presencia de energía mecánica externa, es decir en la convección forzada, es en general pequeña comparada con la velocidad que poseen otros tipos de convección, por ejemplo la convección natural.

1.3.2 Aproximación de Boussinesq

La aproximación de Boussinesq⁴ es un tipo de aproximación utilizada en los fenómenos de convección natural de la dinámica de fluidos. En particular, en los fluidos en donde la fuerza de flotabilidad es relevante, básicamente, indica que las variaciones de densidad son lo suficientemente pequeñas como para ser omitidas en las ecuaciones que gobiernan estos fenómenos, con excepción de los términos que están multiplicados por la aceleración debida a la gravedad g , los cuales deben conservarse en dichas ecuaciones, según lo indicado en [27] y [8].

La aproximación de Boussinesq tiene su justificación debido a que es despreciable la diferencia de masa inercial de cada conjunto de moléculas de las distintas capas del fluido. Sin embargo, la presencia de g puede ser lo suficientemente representativa como para hacer que los pesos específicos de cada capa presenten diferencias notables.

Así, si en 2 distintas capas de fluido con temperaturas T_1 y T_2 , donde alguna de las dos temperaturas es mayor que la otra, de densidades ρ_1 y ρ_2 respectivamente, se da que $|\rho_1 - \rho_2| < \varepsilon$, para algún ε lo suficientemente pequeño, es decir la diferencia entre densidades $\Delta\rho = \rho_2 - \rho_1$ es despreciable, pudiendo considerar únicamente cualquiera

³Fuerzas resultantes en donde la presión de la parte inferior del objeto es mayor a la suma de fuerzas de la parte superior, permitiendo que el cuerpo pueda sostenerse mientras está en un fluido

⁴Joseph Boussinesq (1842 – 1929)

de los dos densidades ρ_1 ó ρ_2 para todas las capas del fluido.

Sin embargo, en las circunstancias en las cuales se requiera introducir la aceleración de gravedad g , por ejemplo cuando el fenómeno se describa en la componente vertical, la diferencia de densidades ya no es despreciable y la gravedad usual debe ser sustituida por su similar, la gravedad reducida g' , dada por

$$g' := g \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho}.$$

Las ecuaciones de los fluidos que se tratan con la aproximación de Boussinesq son ampliamente usados en distintos ámbitos, por citar algunos, en dinámica atmosférica, circulación de corrientes oceánicas, vientos de drenaje o catabáticos,⁵ dispersiones de gas industrial, ventilación natural, calentamiento central, etc. La aproximación de Boussinesq goza de una alta precisión al momento de tratar estos fluidos, sin embargo, se considera que deja de ser lo suficientemente precisa cuando el cociente $\frac{\Delta\rho}{\rho}$ es del orden de la unidad o más grande que esta.

1.4 Coeficientes de la transferencia de calor

La transferencia de calor que se da mediante la convección natural, por medio de un fluido, está caracterizada por ciertos números adimensionales que juegan un papel muy importante al momento de representar el flujo como tal y sus condiciones térmicas, así como las características propias de dicha convección. Para el estudio del documento, [15], se realiza una revisión rápida de estos números adimensionales.

1.4.1 Número de Reynolds

El número de Reynolds⁶ R_e , es una cantidad adimensional que caracteriza los patrones de flujo en las distintas situaciones que se presentan en el movimiento de un fluido, es un cociente entre los términos de convección y viscosidad, permitiendo de esta manera poder clasificar el comportamiento turbulento, el cual se da en general para un R_e de gran magnitud o el comportamiento laminar que ocurre cuando R_e es lo suficientemente pequeño.

⁵Es un viento que transporta aire de una elevada densidad desde una elevación más alta, a través de una pendiente, bajo la fuerza de la gravedad.

⁶Osborne Reynolds(1842 – 1912)

El número de Reynolds viene dado por

$$Re := \frac{vL}{\nu}, \quad (1.1)$$

donde

- v : velocidad media del fluido,
- L : longitud característica,
- ν : viscosidad cinemática.

Por longitud característica se entiende una dimensión que define la escala de un sistema físico, generalmente introducida en las fórmulas para predecir algunas características de dicho sistema. En el número de Reynolds la longitud característica se toma como la dimensión en la sección de paso del fluido.

1.4.2 Número de Rayleigh

El número de Rayleigh⁷ R_a , es una magnitud adimensional que indica el cociente entre la flotabilidad y la viscosidad en un fluido, así como la naturaleza de la transferencia de calor, que dado cierto valor puede darse mediante *conducción*, es decir cuando existe contacto directo entre los cuerpos y no hay un intercambio de materia o por *convección* cuando la transferencia de calor se da mediante un fluido.

Una característica a resaltar es que mientras el número de Rayleigh se incrementa la fuerza de gravedad se vuelve más dominante. Así, R_a viene dado por

$$R_a = \frac{g\beta}{\nu\alpha}(T_s - T_i)L^3, \quad (1.2)$$

donde

- T_s : temperatura superior de la superficie,
- T_i : temperatura inferior de la superficie,
- L : altura de la superficie,
- g : aceleración debido a la gravedad,
- ν : viscosidad cinemática,
- α : difusividad térmica,
- β : coeficiente de expansión térmica.

⁷John Strutt (1842 – 1919), Barón de Rayleigh

1.4.3 Número de Prandtl

Según lo indicado en [28] y [27], el número de Prandtl⁸, σ , es un número adimensional que indica el cociente entre la tasa de difusión de la viscosidad ν y la tasa de difusión térmica α .

Por un lado, se tiene que

$$\nu = \frac{\mu}{\rho},$$

donde μ es la viscosidad dinámica y ρ la densidad.

Asimismo,

$$\alpha = \frac{k}{\rho Q_p},$$

donde k es el coeficiente de conductividad térmica y Q_p es el calor específico⁹.

Se tiene entonces que el número de Prandtl, σ , está dado por

$$\sigma := \frac{\nu}{\alpha} = \frac{Q_p \mu}{k}. \quad (1.3)$$

En la transferencia de calor por convección, σ indica el espesor relativo entre la capa de momentum y la capa térmica, es decir a menor valor en σ el calor se difunde rápidamente en comparación con el momentum de la masa del fluido.

Además, existen algunas relaciones de naturaleza adimensional que se establecen entre σ , R_e y R_a que vienen dados por el **Número de Péclet**¹⁰ y el **Número de Grashof**¹¹. El número de Péclet, notado por P_e y definido por

$$P_e := \frac{vL}{\alpha},$$

donde v es la velocidad del fluido y L su longitud característica, dada por la longitud recorrida del fluido. P_e indica el cociente entre la velocidad de advección¹² de un fluido

⁸Ludwing Prandtl (1875 – 1930)

⁹Magnitud física definida como la cantidad de calor necesaria a suministrar en una unidad de masa para elevar su temperatura una unidad.

¹⁰Jean Péclet (1793 – 1857)

¹¹Franz Grashof (1826 – 1893)

¹²Mecanismo de transporte de una sustancia o propiedad conservativa de un fluido debido al movimiento de fluido mayor, por ejemplo el transporte de calor o humedad atmosférica, por efecto del viento

y la velocidad de difusión térmica¹³.

El número de Grashof se indica como

$$G_r := \frac{g\beta(T_{sup} - T_{amb})L^3}{\nu^2},$$

donde β es el coeficiente de expansión térmica, g la aceleración de la gravedad, T_{sup} es la temperatura de la superficie y T_{amb} es la temperatura ambiente. Así, G_r indica la relación entre la fuerza de flotación y las fuerzas viscosas que se dan en la convección natural.

La relación que estos números toman con los coeficientes de transferencia de calor de este estudio está dada por la relación

$$P_e = \sigma R_e,$$

y también por la ecuación

$$R_a = G_r \sigma.$$

1.5 La función de corriente Ψ

También llamada *Stream Function* es un concepto clave en las ecuaciones de movimiento de fluidos. Se aborda a Ψ según lo indicado en [19].

Se considera el movimiento de un fluido bidimensional. Sea A un punto fijo en el plano del movimiento, sea además un punto arbitrario P . Se toma las 2 curvas ABP y ACP como en la Figura 1.2. Se considera además que ningún tipo de fluido es creado o destruido fuera de la región acotada por estas curvas.

La razón a la cual el fluido se desplaza en la región, de derecha a izquierda, a través de la curva ABP es igual a la razón a la cual este fluye de derecha a izquierda a través de la curva ACP , como se indica en la figura siguiente.

¹³Proceso físico de carácter irreversible, en donde las partículas ingresan a un medio en el cual en un principio estaban ausentes, con el respectivo aumento de la entropía del sistema.

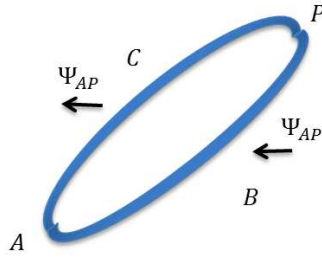


Figura 1.2: Región de Flujo.

Se usa el término **flujo** para la razón del fluido y se supone que el flujo es calculado en el mismo sentido, de derecha a izquierda; así el flujo a través de ACP es igual al flujo a través de cualquier curva que una A con P .

Una vez que el punto base A ha sido fijado, el flujo depende únicamente de la posición de P y del tiempo t , de esta manera el flujo llamado Ψ es una función de la posición P y del tiempo. En coordenadas cartesianas, la función de corriente depende de

$$\Psi = \Psi(x, z, t). \quad (1.4)$$

La existencia de esta función es una consecuencia de suponer la continuidad e incomprensibilidad del fluido, además Ψ existe para un líquido viscoso.

Se toma ahora dos puntos P_1 y P_2 y sean Ψ_1 y Ψ_2 los valores correspondientes de la función Ψ en los puntos P_1 y P_2 en el instante t . El flujo a través del segmento AP_2 , que se nota como Ψ_{AP_2} , está dado por $\Psi_{AP_2} = \Psi_{AP_1} + \Psi_{P_1P_2}$. Entonces, el flujo a través de P_1P_2 viene dado por $\Psi_{P_1P_2} = \Psi_2 - \Psi_1$. Si se cambia el punto base A por uno distinto A' , entonces Ψ simplemente cambiaría el flujo a través de la línea AA' , véase la Figura 1.3.

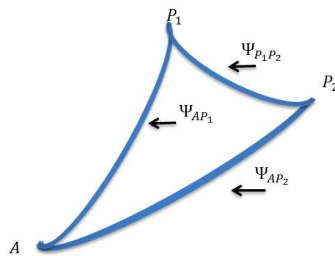


Figura 1.3: Flujo entre 2 puntos.

Además, si P_1 y P_2 son colineales con la línea de corriente, el flujo de P_1P_2 es igual al flujo a través de la línea de corriente en las cuales P_1 se encuentra con P_2 , así $\Psi_1 - \Psi_2 = 0$.

Además, se supone que la función de corriente Ψ es constante a lo largo de una línea de corriente, las ecuaciones de la línea de corriente se obtienen de $\Psi = c$, con $c \in \mathbb{R}$ constante, dando valores arbitrarios para c . Las líneas de corriente son llamadas también *trayectorias*.

1.5.1 Velocidad de la Función de Corriente $\dot{\Psi}$

Se considera ahora la *velocidad de la función de corriente* dada por $\dot{\Psi}$. Sea el segmento $P_1P_2 = \delta_s$ un arco de curva infinitesimal. La velocidad de Ψ se divide en sus componentes ortogonales $\dot{\Psi}_x$ a lo largo de δ_s y $\dot{\Psi}_z$ perpendicular al mismo.

La componente $\dot{\Psi}_x$ paralela a δ_s no contribuye al flujo transversal $\Psi_{P_1P_2}$. Por otro lado, la componente $\dot{\Psi}_z$ perpendicular a δ_s está dada por el flujo transversal dividido para δ_s , así

$$\dot{\Psi}_z = \frac{\Psi_{P_1P_2}}{\delta_s} = \frac{\Psi_2 - \Psi_1}{\delta_s}$$

donde como en los casos anteriores Ψ_1 y Ψ_2 son los valores de la función de corriente en los puntos P_1 y P_2 respectivamente, véase la Figura 1.4.

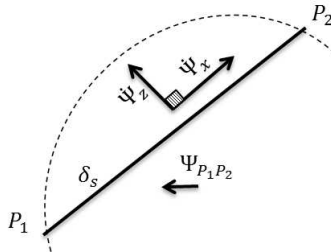


Figura 1.4: Velocidad de la función de corriente.

Así, sea $U \subset \mathbb{R}^3$ un abierto y la función $\Psi : U \mapsto \mathbb{R}$. Sea $p_0 = (x_0, z_0, t_0) \in U$, la velocidad de Ψ de derecha a izquierda a través de δ_s se convierte en

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s}(p_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Psi(p_0 + t \cdot r) - \Psi(p_0)}{t}.$$

donde $r \in \mathbb{R}^3$ es el vector unitario a lo largo de δ_s .

En coordenadas cartesianas, y considerando los incrementos infinitesimales δ_x y δ_y , las componentes u y v paralelas a los ejes rectangulares, véase la Figura 1.5, están dadas

por

$$u = -\frac{\partial\Psi}{\partial y} \quad v = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad (1.5)$$

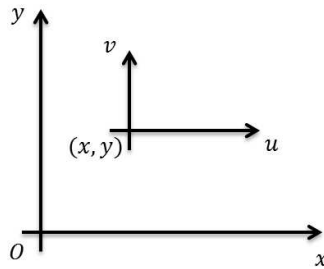


Figura 1.5: Velocidad en sus componentes rectangulares.

1.6 Conceptos relevantes en Sistemas Dinámicos

Los siguientes conceptos básicos son, entre muchos otros, claves al momento de entender los sistemas dinámicos, los siguientes fueron tomados de [4]. Así,

1.6.1 Contracción

Definición 1.1. Sea (X, d) un espacio métrico. Una aplicación $F : X \mapsto X$ es una *contracción* si existe $\lambda \in [0, 1[$ tal que

$$d(F(x), F(y)) \leq \lambda \cdot d(x, y), \quad \forall x, y \in X.$$

1.6.2 Punto Fijo

Definición 1.2. Sea (X, d) un espacio métrico completo y sea la función $F : X \mapsto X$ una *contracción*. Se dice que $p \in X$ es un **Punto Fijo** de F si

$$F(p) = p.$$

Además, se tiene que existe un *único punto fijo* p para F .

La utilización y aplicación de los puntos fijos es de vital importancia en el estudio de la estabilidad de las soluciones de ecuaciones diferenciales y trayectorias de los sistemas dinámicos.

1.6.3 Atractor

Definición 1.3. Sean (X, d) un espacio métrico completo y la función $F : X \mapsto X$ una contracción. Se dice que p es un **Atractor** de F si para cualquier $x \in X$ se tiene $F^n(x) \rightarrow p$ cuando $n \rightarrow \infty$. Además, se define inductivamente $F^n(x)$ mediante

$$F^n(x) := F(F^{n-1}(x)).$$

En el sentido clásico, es decir cuando el conjunto al cual evoluciona el sistema después de un período dado de tiempo, es un único elemento, podemos considerar que un punto fijo es también un atractor. En el presente trabajo se presentan las primeras ideas para introducir un concepto mucho más complicado conocido como *atractor extraño*.

1.6.4 Campo de Vectores

Definición 1.4. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto cualquiera. Un **Campo de Vectores** en U es una aplicación continua $X : U \mapsto \mathbb{R}^n$. Esta aplicación define una ecuación diferencial autónoma, es decir $\dot{x} = X(x)$.

1.6.5 Órbita

Definición 1.5. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto, sea además $X : U \mapsto \mathbb{R}^n$ un campo de vectores. Las soluciones de $\dot{x} = X(x)$ son llamadas trayectorias o curvas integrales de X . Al conjunto imagen de una solución maximal φ de X se dice la **órbita** de φ .

Una solución no constante $\varphi(t)$, es periódica de período $T > 0$, si

$$\varphi(t) = \varphi(t + T) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Una **órbita periódica** de período t , para la aplicación $\dot{x} = X(x)$, es el conjunto de todos los puntos $\{x_p = X^p(x_o) | p \in [0, t]\}$ distintos, con $x^t(x_o) = x_o$ y en donde x^t representa la composición de x consigo mismo k -veces.

1.6.6 Conjuntos límite

Generalmente se conoce como **conjunto límite** al estado al cual un sistema dinámico alcanza cuando el tiempo t tiende a $\pm\infty$. Los conjuntos límite nos ayudan a entender el comportamiento a largo plazo de un sistema dinámico y en este sentido los puntos fijos, los atractores, las órbitas periódicas y los ciclos límites son también clases de conjuntos límite.

Definición 1.6. Sea $U \subset \mathbb{R}^n$ un abierto y sea $X : U \mapsto \mathbb{R}^n$ un campo de vectores, tal que $X \in \mathcal{C}^k(U)$ con $k \geq 1$. Sea también $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ una trayectoria que pasa por el punto p en $t = 0$, es decir se requiere que se cumpla la condición inicial $\varphi(0) = \varphi(0, p)$. Se supone que el intervalo maximal de φ es una recta.

Se define el conjunto ω -límite como

$$\omega(p) := \left\{ \hat{\varphi} \in U : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} +\infty \text{ y } \varphi(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \hat{\varphi} \right\},$$

De la misma manera se toma el conjunto α -límite de la siguiente manera

$$\alpha(p) := \left\{ \hat{\varphi} \in U : \exists (t_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ tal que } t_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} -\infty \text{ y } \varphi(t_n) \xrightarrow[n \rightarrow -\infty]{} \hat{\varphi} \right\}.$$

1.6.7 Ciclos límite

Definición 1.7. Sea γ una órbita periódica en \mathbb{R}^2 o en alguna variedad 2-dimensional, se dice que γ es un **ciclo límite** si es el conjunto α -límite u ω -límite de algún punto $z \notin \gamma$, es decir, el conjunto de los puntos de acumulación de la trayectoria, hacia atrás o hacia adelante respectivamente, a través de z , es exactamente γ .

Se puede decir entonces, que γ es una trayectoria cerrada en el espacio de fases con la propiedad de que al menos una vez otra trayectoria en espiral dentro de esta, se aproxime infinitamente, cuando el paso del tiempo tienda a más o menos infinito.

1.6.8 Función de Lyapunov

Definición 1.8. Sea $f \in \mathcal{C}^1(X)$, con $X \subset \mathbb{R}^n$. Se considera el campo de vectores diferenciable $f : X \mapsto X$, una función escalar y diferenciable $V : U \mapsto \mathbb{R}$ con $U \subset X$ un abierto cualquiera, se dice que V es una **función de Lyapunov** para f en U si se cumple

$$\nabla V(x)^T f(x) \leq 0, \quad \forall x \in U.$$

Así, la función de Lyapunov es decreciente a lo largo de las órbitas de puntos en U que son introducidos en el campo de vectores f .

Se puede tomar una caracterización más estricta para la función de Lyapunov para sistemas autónomos. Así, dado el sistema de ecuaciones diferenciales autónomo $\dot{X} = f(X)$ con las características citadas anteriormente, la función de Lyapunov cumple que

1. $V(0) = 0$,
2. $V(X) > 0 \quad \forall X \in U \setminus \{0\}$,

$$3. \dot{V} \leq 0 \quad \forall X \in U.$$

En los sistemas dinámicos, en general, se requiere un estado inicial y una función de evolución que indican las trayectorias de los futuros estados del sistema, es entonces que se puede ver a la función de Lyapunov como un miembro que pertenece a una familia de regiones de Lyapunov, cada una de las cuales está definida por una curva de nivel.

Una vez que el estado de un sistema ha ingresado a la región de Lyapunov de su correspondiente curva de nivel, está no podrá salir. Así, mientras el tiempo transcurre, el estado irá limitándose a regiones de Lyapunov cada vez menores, es por eso que el valor de la función de Lyapunov va decreciendo con el paso del tiempo.

1.6.9 Bifurcaciones

Un campo de estudio muy activo en la actualidad es la **teoría de bifurcaciones** la cual estudia los cambios cualitativos en la dinámica de un conjunto de ecuaciones, dichos cambios son conocidos como *bifurcaciones* los cuales proveen modelos de transición e inestabilidad; a los valores de los parámetros en los cuales se dan dichos cambios cualitativos se los conoce como *puntos de bifurcación*.

A continuación se considera un tipo particular de bifurcación local.

Definición 1.9. Sea la ecuación diferencial $\dot{x} = f(x, r)$ en donde $f \in \mathcal{C}^1(\Omega \times \mathbb{R})$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es una función impar y de 1-parámetro, con $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$-f(x, r) = f(-x, r), \quad \forall x \in \Omega, \forall r \in \mathbb{R}.$$

Si para el punto $x_0 = 0$ se tienen las siguientes condiciones sobre las derivadas

$$\partial_x f(x_0, r_0) = \partial_r f(x_0, r_0) = \partial_{xx} f(x_0, r_0) = 0,$$

y

$$\partial_{rx} f(x_0, r_0) \neq 0, \partial_{xxx} f(x_0, r_0) \neq 0, \quad (1.6)$$

la ecuación tiene una **Bifurcación Tridente o Bifurcación Pitchfork** en $(x, r) = (x_0, r_0)$. En donde la forma del tridente está dada por $\partial_{xxx} f(x_0, r_0) < 0$ cuando es una bifurcación **supercrítica** y si $\partial_{xxx} f(x_0, r_0) > 0$ se dice que la bifurcación es **subcrítica**.

1.6.10 Espacios de fase

En términos generales es un espacio $X \neq \emptyset$ tal que sus elementos $x \in X$, llamados los puntos de fase, representan el estado de un sistema, cada x es isomorfo a su respectivo

estado por lo que no hay distinción entre los estados y los puntos de fase del sistema, además en un espacio de fase están representados la totalidad de todos los posibles estados instantáneos de un sistema físico.

El sentido de evolución que se toma en este trabajo será estrictamente determinístico. Un par de conceptos importantes para entender el espacio de fases es el de **sistema holónomo** el cual es un sistema físico en donde no existe una relación funcional entre el vector de posición \mathbf{r} y el vector de velocidad $\dot{\mathbf{r}}$. Además, el **número de grados de libertad** $n \in \mathbb{N}$ de un sistema holónomo es el número mínimo de variables de posición necesarias para describir el movimiento del mismo. Al número mínimo de variables posición r_i es usualmente conocido como **coordenadas generalizadas**.

Entonces, se define el **espacio de fases** como el espacio vectorial X^{2n} que resulta de considerar un sistema de n direcciones ortogonales $\{U_i\}_{i=1}^n$ tal que cada U_i , $i = 1, \dots, n$ está asociado a las coordenadas generalizadas \mathbf{r}_i y a $\dot{\mathbf{r}}_i$.

En el caso de un sistema dinámico clásico el espacio de fase a considerar será una variedad M , con frontera, en donde se ha definido la regla de la mano derecha.

1.7 Ecuaciones de Navier Stokes

Se trata de un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales que describen el movimiento de un fluido. Estas ecuaciones son usadas a menudo para modelar la atmósfera terrestre, las corrientes oceánicas y el flujo alrededor de vehículos o proyectiles y, en general, cualquier fenómeno en el que se involucren fluidos newtonianos.

Las forma general de estas ecuaciones es:

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{f}$$

donde

- \vec{v} : velocidad del flujo,
- ρ : densidad del fluido,
- p : presión,

- \mathbf{T} : tensor de stress de Cauchy,
- \mathbf{f} : función vectorial de la fuerza.

En particular, para el fluido incompresible se tiene que

$$\rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \vec{v} \right) = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{v} + \mathbf{f}.$$

Aquí,

- μ : constante de viscosidad dinámica,
- $\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}$: aceleración inestable,
- $\vec{v} \cdot \nabla \vec{v}$: aceleración convectiva.

Tanto la aceleración convectiva como la aceleración inestable del primer término, indican la *inercia por volumen* del fluido. Además,

- $-\nabla p$: gradiente de presión,
- $\mu \nabla^2 \vec{v}$: representa la viscosidad, conocida como la *divergencia del stress*,
- \mathbf{f} : función vectorial de fuerzas de otros cuerpos interactuantes.

En el presente trabajo se va a utilizar la formulación de las ecuaciones de Navier-Stokes para la función de corriente Ψ (*stream function*) bidimensional y en coordenadas cartesianas, no se supone dependencia de y , resultando entonces:

$$\begin{aligned} \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + \rho g_x, \\ \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) + \rho g_z. \end{aligned}$$

1.8 Ecuaciones de Euler

En dinámica de fluidos, las ecuaciones de Euler son un conjunto de ecuaciones que gobiernan los flujos no viscosos. Estas ecuaciones representan la conservación de la masa,

momentum y energía correspondiente a las ecuaciones de Navier-Stokes sin viscosidad y términos de conducción de calor. Las ecuaciones son:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial \rho u}{\partial t} + \nabla \cdot (u \times \rho u) + \nabla p = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \nabla \cdot (u(E + p)) = 0. \end{array} \right.$$

1.8.1 Ecuaciones de Movimiento

Se establece a continuación las ecuaciones que gobiernan el movimiento de un fluido en general, como una introducción al estudio del comportamiento de los fluidos en la atmósfera terrestre.

Las ecuaciones que se indican abajo se derivan de las leyes de conservación de la masa, de conservación del momentum y de la conservación de la energía.

Se consideran las siguientes 3 hipótesis:

1. La masa del fluido no se crea ni se destruye.
2. La energía no se crea ni se destruye.
3. La tasa de cambio del momentum $p(x, y, z, t)$ de una porción del fluido es igual a la fuerza $F(x, y, z, t)$ aplicada a este, esto acorde a la segunda ley de Newton. Así,

$$\frac{dp}{dt}(\vec{x}, t) = F(\vec{x}, t), \quad (1.7)$$

donde el vector $\vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ representa la posición espacial y $t \in I \subset \mathbb{R}^+$ representa el tiempo.

Se supone además que la humedad es nula, es decir aire seco y los líquidos no contienen sales.

1.8.2 Conservación de la masa

Sea el vector $\vec{x} = (x, y, z)$, la densidad de masa $\rho(\vec{x}, t)$ de una región $W \subset D$ donde D es una región tridimensional espacialmente llena de fluido y V es el volumen del fluido en el espacio. Entonces, la masa al tiempo t de la región W está dada por

$$m(W, t) = \int_W \rho(\vec{x}, t) dV. \quad (1.8)$$

Se supone que la región es constante en el tiempo, $W = W(t)$, se tiene así que el cambio de masa en dicha región es

$$\frac{d}{dt}m(W, t) = \frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV. \quad (1.9)$$

Se supone además que para algún $t_0 \in I$ la función $\rho(\vec{x}, t_0)$ es integrable en \mathbb{R}^3 , es decir $\rho(\cdot, t_0) \in L^1(\mathbb{R}^3)$.

También, se considera que $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ existe en $\mathbb{R}^3 \times I$ y existe una función integrable $g \in L^1(\mathbb{R}^3)$ tal que $|\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t)| \leq g(\vec{x})$. Entonces, la función $m(W, t)$ es diferenciable en $I \subset \mathbf{R}$ y se cumple que

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV = \int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV. \quad (1.10)$$

El paso a la ecuación (1.10) es una consecuencia directa del corolario 5.9 y del ejercicio 5R de [2].

Así, se obtiene la ecuación

$$\frac{d}{dt} \int_W \rho(\vec{x}, t) dV = - \int_{\partial W} \rho(\vec{x}, t) \vec{u} \cdot \vec{n} dA, \quad (1.11)$$

donde $\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t)$ representa la velocidad de la partícula moviéndose a través del vector \vec{x} .

Por otra parte \vec{n} indica el vector normal unitario al punto en la frontera ∂W , dA es el diferencial del área en ∂W .

Se tiene entonces que

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV + \int_{\partial W} \rho(\vec{x}, t) \vec{u} \cdot \vec{n} dA = 0. \quad (1.12)$$

Usando el teorema de la divergencia en el segundo término de (1.12), se obtiene que

$$\int_W \frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) dV + \int_W \nabla \cdot (\rho(\vec{x}, t) \vec{u}) dV = 0.$$

Luego,

$$\int_W \left[\frac{\partial \rho}{\partial t}(\vec{x}, t) + \nabla \cdot (\rho(\vec{x}, t) \vec{u}) \right] dV = 0. \quad (1.13)$$

Así, se obtiene la ecuación de la conservación de la masa de forma diferencial. Se supone

que la densidad del fluido es continua, lo cual es evidentemente contrario a la naturaleza molecular de la materia, sin embargo para los fenómenos macroscópicos esta suposición es extremadamente precisa, es por ello que se puede llamar a la ecuación (1.13) como *ecuación de continuidad*.

1.8.3 Balance del momentum

Se llama la *derivada material* al operador:

$$\frac{D}{Dt} = \partial t + \vec{u} \cdot \nabla, \quad (1.14)$$

el cual indica que el fluido está en movimiento y que las posiciones de cada una de las partículas cambian con el transcurso del tiempo.

Además, se denota por $\vec{b} = \vec{b}(\vec{x}, t)$ la fuerza de un cuerpo por unidad de masa, siendo p la presión, se ve entonces que la ecuación del balance de momentum está dada por

$$\rho \frac{D\vec{u}}{Dt} = -\nabla \cdot p + \rho \vec{b}. \quad (1.15)$$

1.8.4 Conservación de la energía

Aunque no detallaremos todos los aspectos termodinámicos requeridos para un tratamiento riguroso, nos restringiremos entonces al caso especial de fluidos incompresibles.

Para un fluido en movimientos contenido en una región $W \subset D$ la energía cinética está dada por

$$E_k = \frac{1}{2} \int_W \rho \|\vec{u}\|^2 dV, \quad (1.16)$$

donde $\|\cdot\|$ es la norma euclídea y $\vec{u} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ es el vector de velocidad, por tanto $\|\vec{u}\|^2 = \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$.

Se supone que la energía total del fluido puede ser escrita como

$$E_T = E_k + E_{int}. \quad (1.17)$$

Donde E_{int} es la *energía interna* del fluido y es la resultante de los potenciales eléctricos entre moléculas y de las vibraciones internas entre las mismas.

$$\frac{dE_k}{dt} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{W_t} \rho \|\vec{u}\|^2 dV.$$

Ahora, se usa el teorema del transporte de Reynolds ¹⁴ para calcular la variación de E_k en una porción W_t del fluido. Así,

$$\frac{dE_k}{dt} = \int_{W_t} \frac{1}{2} \rho \frac{D}{Dt} \|\vec{u}\|^2 dV$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} = \int_{W_t} \rho \left[\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \dot{x} \frac{\partial}{\partial x} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \right. \\ \left. \frac{1}{2} \dot{y} \frac{\partial}{\partial y} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \dot{z} \frac{\partial}{\partial z} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) \right] dV \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \frac{dE_k}{dt} = \int_{W_t} \left[\rho \left[\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial t} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial t} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} \right] + \right. \\ \left. \rho \dot{x} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial x} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial x} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial x} \right) + \rho \dot{y} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial y} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial y} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial y} \right) + \rho \dot{z} \left(\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial z} + \dot{y} \frac{\partial \dot{y}}{\partial z} + \dot{z} \frac{\partial \dot{z}}{\partial z} \right) \right] dV. \end{aligned}$$

Escribiendo de forma compacta, se tiene

$$\frac{dE_k}{dt} = \int_{W_t} \left[\rho \left(\vec{u} \cdot \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} \right) + \rho (\vec{u} \cdot (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u}) \right] dV.$$

¹⁴Dado un campo escalar cualquiera $B(x, t)$ que asocia el movimiento de un fluido, se tiene

$$\frac{D}{Dt} \left[\int_{V(t)} B(x, t) dV \right] = \int_{V(t)} \left[\frac{\partial B(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot (B(x, t) u) \right] dV$$

donde ∇ es el gradiente usual, $V(t)$ denota el volumen en el tiempo t y u denota el vector velocidad

Usando la ecuación (1.15), finalmente se tiene

$$\frac{dE_k}{dt} = \int_{W_t} \rho \left[\vec{u} \cdot \left(\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \vec{u} \right) \right] dV. \quad (1.18)$$

Capítulo 2

SISTEMA DE ECUACIONES DIFERENCIALES NO LINEALES DE LORENZ

2.1 Generalidades

En 1963 Edward Norton Lorenz (1917-2008), en el MIT, estudió las ecuaciones de la Física Matemática usadas para la predicción del clima ([13], [14] y [15]). Deseaba generar modelos más robustos que los usados comúnmente en ese entonces, los que empleaban series de tiempo. Así, se propuso derivar un sistema no lineal de ecuaciones diferenciales que modelaba un fenómeno de convección del aire en la atmósfera, para esto siguió el trabajo de Barry Saltzman [20], sobre problemas de valor inicial en convección libre con amplitud finita. El resultado fue un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal y acoplado, del mismo que resultó un objeto dinámico muy complicado, conocido actualmente como atractor de Lorenz.

Las ecuaciones de Lorenz son derivadas de las aproximaciones a las ecuaciones de Oberbeck-Boussinesq, véase la Sección 1.3.2, que modelan la circulación de un fluido y el fenómeno de su convección en una capa del mismo, el cual es calentado uniformemente por la parte inferior y enfriado uniformemente por arriba, esta circulación en los fluidos es conocida como la convección de Rayleigh-Bénard. Se supone que el fenómeno se da en 2 dimensiones y que las condiciones de borde son periódicas y de geometría rectangular.

El sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.47) y (2.52), que es deducido más adelante, describe la función de corriente Ψ y de la temperatura φ . Así, se utiliza el truncamiento de Galerkin, es decir a las funciones que describen el comportamiento

hidrodinámico se les realiza su expansión en sus respectivas series de Fourier, las cuales se truncan en un término para la función de corriente Ψ y en dos términos para la temperatura φ . Finalmente, con los respectivos cambios de variable, desarrollos trigonométricos y consideraciones de los dominios se llega al sistema acoplado.

Posteriormente, Edward Lorenz observó que ante cambios infinitesimales que realizase en las condiciones iniciales, los resultados del sistema varían de forma drástica, a esto él llamó el *efecto mariposa* o hiper sensibilidad a las condiciones iniciales. Esto puso limitaciones prácticas a la predicción en meteorología. Sin embargo, las trayectorias tenían una forma muy particular de evolucionar dentro del espacio de fases, ubicando una especie de centro de gravedad de los comportamientos posibles.

Durante el desarrollo de este capítulo se usarán los trabajos [15], [20], y [29], así como [9] para el planteamiento de las ecuaciones físicas.

2.2 Flujo de Rayleigh-Bénard

Básicamente, el sistema de Lorenz describe un modelo de fluido bajo ciertas condiciones del flujo de Rayleigh-Bénard, para esto se hará un estudio básico de las propiedades y características de dicho fluido.

En el fenómeno de la convección natural, en el cual el transporte de calor del fluido no es generado por ninguna fuente externa sino únicamente por las diferencias de densidades que ocurren debido a los gradientes de temperatura, el fluido circundante a una fuente recibe calor de este, disminuye su densidad y se eleva; posteriormente, el fluido frío se mueve para reemplazarlo y la energía transferida para calentarlo, como se muestra en la Figura 2.1, generando de esta manera corrientes convectivas que van desde el fondo hasta la superficie del fluido, véase [19] para una explicación más detallada. Las fuerzas que dirigen este fenómeno son en general de origen gravitatorio, generando los fenómenos de flotabilidad.

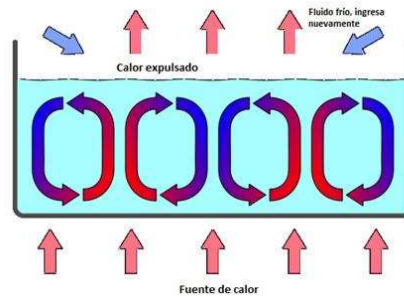


Figura 2.1: Celdas de convección natural.
Convection cells in a vessel, Eyrian, August, 06, 2007

El fenómeno de Rayleigh-Bénard es un tipo de convección natural que ocurre en un fluido en un plano horizontal, es decir la altura de la capa de fluido es pequeña en comparación con la dimensión horizontal. Dicho fluido es calentado desde la parte baja, debido a esto se generan patrones regulares que son conocidos como celdas de Bénard, un ejemplo de las mismas se ilustra en la Figura 2.2, las cuales son un ejemplo clásico de patrones de auto organización en los sistemas no lineales. Las celdas de Bénard surgen desde las capas de mayor temperatura hacia las capas de menor densidad en los fluidos que son sometidas a calentamiento.



Figura 2.2: Celdas de Bénard.
Gold paint dissolved in acetone, WikiRigaou, 2005

En la convección natural que se da en el fluido de Rayleigh-Bénard, al principio tanto las capas superiores como las inferiores están a la misma temperatura y esta es uniforme respecto a la posición de sus moléculas en cada punto del espacio, es más el fluido siempre tiende a mantener la misma temperatura en cada uno de sus puntos, con el transcurso del tiempo, según lo indica la segunda ley de la termodinámica. Presenta además de esto una estabilidad asintótica, la cual se explicará en lo posterior con más detalle, pero a breves rasgos se puede caracterizar como la propiedad que tiene el fluido

para que una vez que haya habido una perturbación local y temporal de la temperatura exterior, este se vuelva hacia un estado uniforme con el transcurso del tiempo. Luego, la temperatura del fondo aumenta ligeramente produciendo un flujo de energía térmica que se conduce a través del fluido, entonces se dice que el sistema empieza a poseer una estructura de conductividad térmica. Así, la temperatura, densidad y presión del fluido varían linealmente entre el fondo y la capa superior, dando como resultado un gradiente uniforme de temperatura.

2.2.1 Características

En el fluido de Rayleigh-Bénard la rotación de las celdas de Bénard es estable y se alterna en el sentido horario y anti-horario. El término estable hace referencia, en forma general, a que pequeñas perturbaciones no provocarán cambios notables en las rotaciones, a diferencia de las perturbaciones más grandes las cuales sí podrían provocar cambios notables. Algunas veces la dependencia de un sistema, en este caso de las rotaciones de las celdas de Bénard, pueden no depender únicamente de su estado actual, sino de su entorno pasado y de su estado interno, dicho fenómeno es conocido como *histéresis*.

Aunque las rotaciones sean estables, la disposición de las celdas posee un comportamiento no determinístico, dependiendo sutilmente de sus condiciones iniciales; en una particular posición aparecen celdas con orientación horaria o anti-horaria si se repite el experimento. Este tipo de patrones se despliega en muchos aspectos de la naturaleza, en particular, según el trabajo que venía efectuando Lorenz, eran de interés los que se presentan en fenómenos atmosféricos, véase un ejemplo de estos en la Figura 2.3.

En el caso de que la superficie del fluido esté en contacto con el aire libre, la flotabilidad y la tensión superficial juegan un papel importante en los patrones creados.

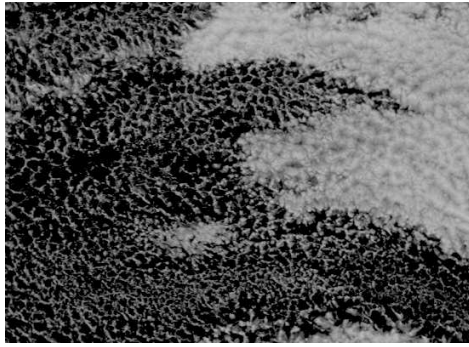


Figura 2.3: Celdas de convección abiertas de Rayleigh-Bénard presentes en la atmósfera.

<http://oiswww.eumetsat.org/WEBOPS/iotm/>

Un par de conceptos clave para entender la fenomenología inherente en el modelo atmosférico de Edward Lorenz son los siguientes:

La **flotabilidad** se entiende como la capacidad que tiene un cuerpo para sostenerse dentro de un fluido. Se dice que un cuerpo flota cuando la fuerza resultante de la presión ejercida en la parte inferior del cuerpo es superior a la fuerza resultante de su peso más la presión ejercida en la parte superior, esta capacidad viene establecida por el principio de Arquímedes: *“Un cuerpo total o parcialmente sumergido en un fluido en reposo, recibe un empuje de abajo hacia arriba igual al peso del volumen del fluido que desaloja.”*

La **tensión superficial** es la tendencia contractiva de la superficie de un líquido a permitir que esta resista a una fuerza externa, debido a las diferencias entre las fuerzas cohesivas que actúan entre las moléculas del interior del líquido y la superficie.

Si la temperatura del fondo de un fluido se incrementa, la estructura de dicho fluido se vuelve cada vez más compleja y el flujo turbulento se torna caótico. Los patrones que adquieren las celdas de Bénard dependen de las condiciones de las formas de la frontera en donde se desenvuelva el flujo horizontal, experimentalmente los patrones de las celdas se han visto formadas como prismas hexagonales regulares, prismas cuadrados regulares o espirales, dependiendo de las condiciones iniciales y de una baja turbulencia. En el caso de que la superficie del fluido esté en contacto con el aire (libre) la flotabilidad y la tensión superficial juegan un papel importante en los patrones creados.

2.3 Inestabilidad del Flujo de Rayleigh-Bénard

Debido al gradiente de temperatura entre la base y la parte superior de la superficie del fluido, la gravedad trata de enviar el fluido más frío hacia el fondo el cual encuentra resistencia con la fuerza de amortiguación viscosa del fluido, el juego de estas dos fuerzas está expresado en una constante adimensional conocida como el *Número de Rayleigh*, denotado por R . Este número lleva su nombre en honor a Lord Rayleigh (1842 – 1919), ver la Subsección 1.4.2, y está definido por

$$R = \frac{g\beta}{\nu\alpha}(T_s - T_i)L^3. \quad (2.1)$$

Como se indicó al inicio de la Sección 2.2, las ecuaciones del sistema de Lorenz describen el movimiento de un fluido bajo las condiciones del flujo de Rayleigh-Bénard. Se sigue de aquí en adelante la línea de trabajo presentada en [9], así como las consideraciones dadas en [15] y [20] para la deducción del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales.

Básicamente, se analiza un fluido incompresible de una celda de Rayleigh-Bénard con una temperatura T_s más baja en la parte superior que la temperatura T_i del fondo. Así,

$$\delta T = T_i - T_s, \quad (2.2)$$

donde δT expresa la diferencia de temperaturas. En dicha celda se da el fenómeno de convección natural y es ahí en donde ocurre particularmente el flujo de Rayleigh-Bénard.

Cuando el gradiente de temperatura entre las dos capas se vuelve lo suficientemente grande, entonces un pequeño paquete de fluido que empieza a moverse un poco hacia arriba experimenta una fuerza de flotación ya que se mueve hacia una zona de menor temperatura y por ende mayor densidad. En este instante dicho paquete de fluido es menos denso que su vecindad circundante y si a su vez la fuerza de empuje hacia arriba es la suficiente, el paquete de fluido se moverá hacia la parte superior más rápido que la tasa a la cual la temperatura podría bajar; de otra forma, si la fuerza de flotabilidad no es lo suficientemente grande la temperatura del paquete de fluido decaerá antes que este pueda moverse una distancia necesaria y permanecerá estática, por ende el fenómeno no se producirá.

Además, debido al segundo principio de la termodinámica, si el paquete de fluido está en un principio más caliente que sus alrededores este irá entregando energía térmica a

su ambiente, según lo indicado en [9], y así las corrientes convectivas empiezan a ocurrir.

A continuación, se realiza un estudio de la difusión de energía térmica y de las fuerzas de viscosidad en una celda convectiva de Rayleigh-Bénard.

Se supone que en principio el fluido está originalmente en reposo. Se considera además una pequeña porción de fluido que se ha desplazado una magnitud Δz hacia la parte superior. Se toma una función de temperatura lineal \hat{T} de pendiente $m = \frac{-\delta T}{h}$, $h \neq 0$, como se indica en la Figura 2.4.

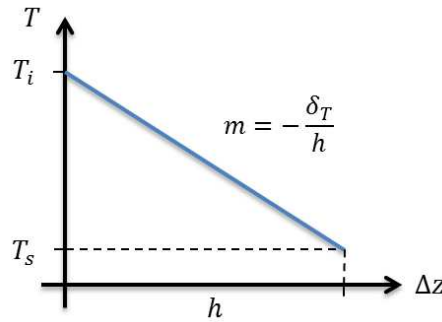


Figura 2.4: Función lineal de temperatura.

Así, en la celda de convección de longitud $h \neq 0$, la temperatura está dada por

$$\hat{T} = -\frac{\delta T}{h}\Delta z + T_i.$$

En donde se cumple que $\hat{T}(x, h, t) = T_s$ y $\hat{T}(x, 0, t) = T_i$.

Se toma la diferencia entre $T_i - \hat{T} := \Delta T$. Obteniendo,

$$\Delta T = \frac{\delta T \Delta z}{h}. \quad (2.3)$$

En [9], págs. 452-453, se expresa la ecuación de la continuidad en el espacio como

$$\frac{\partial C}{\partial t}(x, y, z, t) = D\nabla^2 C(x, y, z, t),$$

donde

- D : coeficiente de difusión, y
 C : concentración de moléculas por unidad de volumen.

Se suponen ciertas simplificaciones para estos fenómenos de transporte, se toma un tiempo instantáneo de difusión τ_d y se asume que no existen aceleraciones en el conjunto de moléculas (MRU), de esta manera la variación infinitesimal de concentración de las mismas puede ser aproximada como

$$\Delta C \approx \frac{\partial C}{\partial t} \tau_d.$$

Quedando así una aproximación para la ecuación de la continuidad dada por

$$\tau_d \frac{\partial C}{\partial t} = \tau_d D \nabla^2 C \approx \Delta C.$$

Se denota al término $\tau_d D =: d^2$ para indicar una distancia en la cual no varía sustancialmente la difusión. Se puede expresar entonces

$$\Delta C \approx d^2 \nabla^2 C.$$

Se toma ahora la ecuación de la difusión térmica

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D_T \nabla^2 T, \quad (2.4)$$

donde D_T es el coeficiente de difusión térmica. En el caso particular de la ecuación de difusión térmica para los pequeños desplazamientos h que se dan en esta región y en donde la variación de la difusión térmica es despreciable, con similar razonamiento que para la ecuación de continuidad, y considerando una relajación de tiempo térmica

$$\delta t_T := \frac{h^2}{D_T}, \quad (2.5)$$

se tiene que

$$\Delta T \approx \delta t_T \frac{\partial T}{\partial t} = \delta t_T D_T \nabla^2 T = h^2 \nabla^2 T. \quad (2.6)$$

Es decir,

$$h^2 \nabla^2 T \approx \Delta T = \frac{\delta T}{h} \Delta z \quad (2.7)$$

Se puede interpretar a δt_T como el tiempo requerido para que la temperatura cambie sustancialmente debido al fenómeno de difusión.

Ahora se considera el efecto de la flotabilidad en la porción del fluido en estudio.

Esta fuerza está dada por

$$F_f = \alpha \rho_0 g \Delta T = \alpha \rho_0 g \frac{\delta T \Delta z}{h}, \quad (2.8)$$

donde

- ρ_0 : densidad original del fluido,
- α : cambio relativo en la densidad por unidad de temperatura, y
- g : constante de la aceleración debido a la gravedad, cercana a la superficie.

Se supone que F_f está en balance con la fuerza viscosa del fluido. Además, la porción de masa del fluido en análisis, posee movimiento rectilíneo uniforme en el intervalo Δz con rapidez ΔV^z . Así, se define el tiempo de desplazamiento, t_d , por

$$t_d = \frac{\Delta z}{\Delta V^z}. \quad (2.9)$$

La fuerza de viscosidad del fluido es igual al coeficiente de viscosidad multiplicado por el Laplaciano de la velocidad. Así,

$$F_v = \mu \nabla^2 V^z,$$

donde μ es el coeficiente de viscosidad de la porción de fluido en cuestión.

Dado que la fuerza siempre se puede expresar como el producto de la masa por la aceleración, la anterior ecuación puede ser escrita como

$$F_v = m \frac{\partial V^z}{\partial t} = \mu \nabla^2 V^z.$$

Como en la celda de Rayleigh-Bénard se está tratando con moléculas masivas de ma-

teria, $m \neq 0$, se tiene entonces

$$\frac{\partial V^z}{\partial t} = \frac{\mu}{m} \nabla^2 V^z. \quad (2.10)$$

De igual manera como lo procedido para el caso de la temperatura, en la ecuación (2.10), se toma un un tiempo de desplazamiento infinitesimal, $\hat{t}_d := \frac{h^2 m}{\mu}$, de donde

$$\Delta V^z \approx \frac{\partial V^z}{\partial t} \hat{t}_d = \frac{\mu}{m} \hat{t}_d \nabla^2 V^z = h^2 \nabla^2 V^z.$$

Dado que $h \neq 0$, se multiplica a esta última expresión por $\frac{\mu}{h^2}$, se obtiene entonces una aproximación para la función F_v . Así,

$$\mu \frac{\Delta V^z}{h^2} \approx \mu \nabla^2 V^z = F_v. \quad (2.11)$$

Se requiere ahora que tanto la fuerza de flotabilidad como la de viscosidad sean iguales entre sí. Luego, usando (2.8) y (2.11), se tiene que $F_v = F_f$ si y solamente si

$$\frac{\mu \Delta V^z}{h^2} = \alpha \rho_0 g \frac{\delta T}{h} \Delta z,$$

donde en la última ecuación se ha reemplazado \approx por $=$. Así, la igualdad anterior es equivalente a

$$\Delta V^z = \frac{\alpha \rho_0 g \delta T h}{\mu} \Delta z. \quad (2.12)$$

Reemplazando (2.12) en (2.9), se obtiene

$$t_d = \frac{\Delta z}{\Delta V^z} = \frac{\Delta z \mu}{\Delta z \alpha \rho_0 g h \delta T} = \frac{\mu}{\alpha \rho_0 g h \delta T}. \quad (2.13)$$

Se puede decir que el estado de no convección se mantiene estable si el tiempo en el cual se da la difusión térmica es menor que el tiempo de desplazamiento. Si se establece la proporción entre la relajación de tiempo térmica, δt_T , dada por (2.5) y el tiempo de desplazamiento, t_d , dado en (2.13), se tiene que

$$\frac{\delta t_T}{t_d} = \frac{\frac{h^2}{D_T}}{\frac{\mu}{\alpha \rho_0 g h \delta T}} = \frac{\alpha \rho_0 g h^3 \delta T}{D_T \mu} := R = R_a, \quad (2.14)$$

que es una manera de interpretar también el número de Rayleigh, factor crítico que indica que a cierto valor determinado la convección empieza o presenta ciertas características, véase la Sección 1.4.2.

Dado que se considera un fluido bidimensional, la velocidad del mismo en las ecuaciones de Navier-Stokes para las componentes x y z , dada por los resultados de la Sección 1.7, se expresan por

$$\rho \frac{\partial v^z}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla v^z = -\rho g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v^z, \quad (2.15)$$

$$\rho \frac{\partial v^x}{\partial t} + \rho \vec{v} \cdot \nabla v^x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v^x, \quad (2.16)$$

donde

- ρ : densidad de masa del fluido,
- g : constante de aceleración de la gravedad,
- p : presión del fluido, y
- μ : viscosidad del fluido.

Se realizará ahora un refinamiento a la ecuación de difusión térmica (2.4) antes mencionada. Según [9] págs. 452 – 454, la ecuación (2.4) considera el cambio debido a la difusión de las moléculas dentro y fuera de una región, por otro lado en la ecuación (2.17) abajo indicada, se supone además que dicha región se encuentra en movimiento. Entonces, la temperatura puede variar no solamente por la difusión interna sino además porque la región considerada se desplaza, con el flujo, hacia otra región donde la temperatura es diferente. Así, la temperatura T del fluido, en estas condiciones es descrita por la siguiente ecuación de difusión térmica

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = D_T \nabla^2 T. \quad (2.17)$$

Esta ley de conservación está asociada con el flujo neto de temperatura, T , del fluido en alguna región espacial.

En los estados estables de no convección o cuando el fluido está inmóvil, la temperatura T_l varía de forma lineal en la variable espacial z desde la parte inferior hacia la superior, de igual manera con pendiente $-\frac{\delta T}{h}$, obteniendo

$$T_l(z) = T_i - \frac{z}{h}\delta T. \quad (2.18)$$

En lo posterior se utilizará la función φ que indica la manera en la cual la temperatura en cada punto del espacio $T = T(x, z, t)$, se desvía de su componente lineal. Así

$$\begin{aligned} \varphi(x, z, t) &= T(x, z, t) - T_l(z) \\ &= T(x, z, t) - T_i + \frac{z}{h}\delta T. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Usando (2.19) en la ecuación de difusión térmica (2.17), se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t}(\varphi + T_l)(x, z, t) + \vec{v}(x, z, t) \cdot \nabla(\varphi + T_l)(x, z, t) = D_T \nabla^2(\varphi + T_l)(x, z, t). \quad (2.20)$$

Como T_l es independiente de x y t , tomando el gradiente respecto de las variables independiente espaciales, se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + (v^x, v^z) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x}(\varphi + T_l), \frac{\partial}{\partial z}(\varphi + T_l) \right) = D_T \nabla^2(\varphi + T_l).$$

Luego,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + v^x \frac{\partial \varphi}{\partial x} + v^z \frac{\partial \varphi}{\partial z} - v^z \frac{\delta T}{h} = D_T \nabla^2 \varphi.$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi - v^z \frac{\delta T}{h} = D_T \nabla^2 \varphi. \quad (2.21)$$

Se analiza ahora la variación de la densidad del fluido respecto a la temperatura. En general la densidad de la porción del fluido decrece con el aumento de la temperatura del mismo lo que lleva a considerar la fuerza de flotabilidad, la misma que iniciará la convección.

Se supone ahora que la función de densidad ρ se puede escribir como función de la

temperatura T , es decir $\rho = \rho(T)$, en cierta región del dominio de temperaturas. Se supone además que ρ es lo suficientemente regular, es decir $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$, además se supone que ρ tiene una expresión en serie de potencias, alrededor de la temperatura del fondo T_i , dada por

$$\rho(T) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\rho^{(n)}(T_i)}{n!} (T - T_i)^n. \quad (2.22)$$

Según los resultados experimentales (ver [29] para más detalles) se puede obtener una adecuada aproximación de $\rho(T)$, dada por (2.22), tomando los términos de orden 0 y 1. Luego,

$$\rho(T) = \rho_0 + \rho'(T_i)(T - T_i) + \mathcal{O}((T - T_i)^2), \quad (2.23)$$

cuando T es suficientemente grande y donde $\rho = \rho(T_i)$ es la densidad del fluido en T_i y $\rho_0 = \rho^{(0)}(T_i)$ representa la misma función ρ evaluada en T_i .

De lo expresado en (2.23), se supone que existen $M > 0$ y $T_0 \in \mathbb{R}$, tales que para todo $T \geq T_0$,

$$|\mathcal{O}((T - T_i)^2)| \leq M|(T - T_i)^2|.$$

Se considera ahora el coeficiente de expansión térmica dado por

$$\alpha(T) = -\frac{1}{\rho_0} \rho'(T),$$

Luego, la expresión anterior evaluada en la temperatura del fondo resulta

$$-\alpha(T_i)\rho_0 = \rho'(T_i). \quad (2.24)$$

Usando (2.24) y la diferencia $(T - T_i)$ de la ecuación (2.19), en la ecuación aproximada de (2.23), y dado que la \mathcal{O} grande de Landau permite establecer una cota asintótica para la expansión en serie de Taylor de $\rho(T)$, se obtiene que

$$\rho(T)(x, z, t) = \rho_0 - \alpha(T_i)\rho_0 \left[\varphi(x, z, t) - \frac{z}{h} \delta T \right]. \quad (2.25)$$

Según la aproximación de Boussinesq, ver la Sección 1.3.2, se puede ignorar la variación de la densidad como función de la temperatura, en todos los términos, excepto en los cuales está involucrada la fuerza de la gravedad, para una justificación más amplia consúltese [3]. Así, para los términos que no están afectados por g se toma una densidad constante, es decir $\rho = \rho_0 = \rho_f$ para toda temperatura T . De aquí en adelan-

te se escribe $\alpha = \alpha(T_i)$, que es otra forma de expresar el coeficiente de difusión térmica.

Con esta aproximación y usando (2.25), se deriva desde la ecuación (2.15)

$$\rho_0 \frac{\partial v^z}{\partial t} + \rho_0 \vec{v} \cdot \nabla v^z = -\rho_0 g - \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T g + \alpha \rho_0 \varphi g - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 v^z. \quad (2.26)$$

Se observa que en la ecuación (2.26) la variable espacial z está afectada por la fuerza de gravedad terrestre. Similarmente, se procede con la ecuación (2.16) en la variable x y se obtiene

$$\rho_0 \frac{\partial v^x}{\partial t} + \rho_0 \vec{v} \cdot \nabla v^x = -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 v^x. \quad (2.27)$$

Se toma ahora la variación unidimensional de la densidad debido al aumento de temperatura del medio

$$\rho_f = \rho_0(1 + \alpha \Delta T).$$

El fenómeno de convección que se analiza se da en la atmósfera, en donde la presión atmosférica se distribuye de manera desigual por la superficie del planeta. Esta diferencia de presión entre diferentes puntos de la superficie se lo conoce como gradiente de presión o gradiente barométrico. Según lo indicado en [26] la aceleración resultante de la presión del gradiente en el eje- z está dada por

$$a = -\frac{1}{\rho(x, z, t)} \frac{\partial \rho}{\partial z}(x, z, t).$$

Debido a que se considera el eje- z de sentido vertical, se tiene que $a = g$, entonces

$$\frac{\partial p}{\partial z}(x, z, t) = -\rho(x, z, t)g.$$

Si se omite en la notación, la dependencia temporal y espacial de la densidad, se tiene que

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0.$$

Ahora se toma $\rho_f = \rho$, la ecuación de la variación lineal de la densidad y la ecuación (2.3), en la cual, por simplicidad, se escribe z en lugar de Δz , para llegar a la siguiente ecuación

$$\rho_f g + \frac{\partial p}{\partial z} = \rho_0 g + \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T g + \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

Luego,

$$-\rho_0 g - \alpha \rho_0 \frac{z}{h} \delta T g - \frac{\partial p}{\partial z} = 0. \quad (2.28)$$

Se introducirá ahora, la presión de gradiente efectiva $\frac{\partial p'}{\partial z}$, la cual tiene la propiedad de ser 0 cuando no hay movimiento en el fluido, en donde p' está dada de la siguiente manera

$$p' = p + \rho_0 g z + \alpha g \rho_0 \frac{z^2}{2} \frac{\delta T}{h}, \quad (2.29)$$

ver [9] para más detalles.

Derivando la última expresión respecto a las variables espaciales x y z , se tiene que

$$\frac{\partial p'}{\partial z} = \frac{\partial p}{\partial z} + \rho_0 g + \alpha g \rho_0 \frac{z}{h} \delta T, \quad (2.30)$$

y

$$\frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad (2.31)$$

donde se ha supuesto que $p = p(x, z, t) = p(z, t)$ es una función que no depende de la variable x .

Luego, usando (2.30) y (2.31) en (2.26), (2.27) y dividiendo para ρ_0 se obtiene

$$\frac{\partial v^z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^z = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z} + \alpha g \varphi + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v^z \quad (2.32)$$

$$\frac{\partial v^x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^x = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x} + \frac{\mu}{\rho_0} \nabla^2 v^x. \quad (2.33)$$

Al término $\frac{\mu}{\rho_0} =: \nu$ que aparece en las dos últimas ecuaciones se le llama *viscosidad cinética*.

Es requerido escribir las ecuaciones (2.15) y (2.16), como (2.32) y (2.33), puesto que a partir de éstas se derivarán las ecuaciones del sistema de Lorenz.

2.3.1 Variables Adimensionales

A continuación, las ecuaciones (2.32) y (2.33) se expresan en términos de variables adimensionales.

Se introduce la variable adimensional t' dada por

$$t' = \frac{D_T}{h^2} t, \quad (2.34)$$

que representa un tiempo para la difusión térmica en la distancia h . Además, se usa las siguientes variables adimensionales

$$x' = \frac{x}{h}, \quad (2.35)$$

$$z' = \frac{z}{h}, \quad (2.36)$$

$$\varphi' = \frac{\varphi}{\delta T}. \quad (2.37)$$

De igual manera se procede para las velocidades y distancias. Obsérvese a continuación, que se utilizará la notación de Leibniz para las derivadas. Así,

$$v^{x'} = \frac{dx'}{dt'} = \frac{dx'}{dx} \frac{dx}{dt} \frac{dt}{dt'} = \frac{1}{h} v^x \frac{h^2}{D_T} = \frac{h}{D_T} v^x. \quad (2.38)$$

Similarmente para la velocidad en z se tiene

$$v^{z'} = \frac{dz'}{dt'} = \frac{h}{D_T} v^z. \quad (2.39)$$

También, se considera el operador Laplaciano ∇'^2 dado por

$$\nabla'^2 = h^2 \nabla^2. \quad (2.40)$$

Se procede a usar estas nuevas variables, es decir (2.34), (2.35), (2.36) y (2.37) en (2.32) y se tiene que

$$\frac{\partial v^z}{\partial v^{z'}} \frac{\partial v^{z'}}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + (v^x, v^z) \cdot \left(\frac{\partial v^z}{\partial x}, \frac{\partial v^z}{\partial z} \right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} + \alpha g \delta T \varphi' + \nu \frac{1}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v^z}{\partial x'} \right), \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial v^z}{\partial z'} \right) \right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} & \frac{D_T}{h} \frac{\partial v^{z'}}{\partial t'} \frac{D_T}{h^2} + \frac{D_T}{h}(v^{x'}, v^{z'}) \cdot \left(\frac{\partial v^z}{\partial v^{z'}} \frac{\partial v^{z'}}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial v^z}{\partial v^{z'}} \frac{\partial v^{z'}}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \right) = \\ & - \frac{1}{\rho_0} \frac{1}{h} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \alpha g \delta T \varphi' + \frac{\nu}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial v^z}{\partial v^{z'}} \frac{\partial v^{z'}}{\partial x'} \right), \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial v^z}{\partial v^{z'}} \frac{\partial v^{z'}}{\partial z'} \right) \right). \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} & \frac{D_T^2}{h^3} \frac{\partial v^{z'}}{\partial t'} + \frac{D_T}{h}(v^{x'}, v^{z'}) \cdot \left(\frac{D_T}{h} \frac{\partial v^{z'}}{\partial x'} \frac{1}{h}, \frac{D_T}{h} \frac{\partial v^{z'}}{\partial z'} \frac{1}{h} \right) = \\ & - \frac{1}{\rho_0 h} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \alpha g \delta T \varphi' + \frac{\nu}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{D_T}{h} \frac{\partial v^{z'}}{\partial x'} \right), \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{D_T}{h} \frac{\partial v^{z'}}{\partial z'} \right) \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{D_T^2}{h^3} \frac{\partial v^{z'}}{\partial t'} + \frac{D_T}{h} \frac{D_T}{h^2} \vec{v}' \cdot \nabla' v^{z'} = - \frac{1}{\rho_0 h} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \alpha g \delta T \varphi' + \frac{\nu D_T}{h^3} \left(\frac{\partial^2 v^{z'}}{\partial x'^2}, \frac{\partial^2 v^{z'}}{\partial z'^2} \right).$$

Multiplicando esta última expresión por el factor $\frac{h^3}{\nu D_T}$, dado que $\nu \neq 0$, $D_T \neq 0$, finalmente se tiene que

$$\frac{D_T}{\nu} \left[\frac{\partial v^{z'}}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla' v^{z'} \right] = - \frac{h^2}{\nu D_T \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial z'} + \frac{\alpha \delta T g h^3}{\nu D_T} \varphi' + \nabla'^2 v^{z'}. \quad (2.41)$$

Similarmente realizando las sustituciones respectivas de (2.34), (2.35), (2.36) y (2.37), en (2.33), y procediendo análogamente al caso anterior, esta vez para v_x , se obtiene

$$\frac{D_T}{\nu} \left[\frac{\partial v^{x'}}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla' v^{x'} \right] = - \frac{h^2}{\nu D_T \rho_0} \frac{\partial p'}{\partial x'} + \nabla'^2 v^{x'}. \quad (2.42)$$

Se reconoce en estos coeficientes algunos términos comunes en la hidrodinámica de fluidos. Así, el número de Prandtl está dado por $\sigma = \frac{\nu}{D_T}$ y el número de Rayleigh

$R = \frac{\alpha g h^3 \delta T}{\nu D_T}$, véase las Secciones 1.4.3 y 1.4.2, respectivamente.

Se introduce la variable adimensional \hat{p} para la presión, dada por

$$\hat{p} = \frac{p' h^2}{\nu \rho_0 D_T}. \quad (2.43)$$

Por facilidad de notación, se suprimirán las primas en las ecuaciones de Navier-Stokes adimensionales (2.41) y (2.42), y usando las constante σ y R así como la ecuación (2.43), se llega a las siguientes ecuaciones

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial v^z}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^z \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + R\varphi + \nabla^2 v^z, \quad (2.44)$$

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial v^x}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla v^x \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} + \nabla^2 v^x. \quad (2.45)$$

Tomando además la ecuación de difusión térmica (2.21) y considerando las variables adimensionales, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \frac{\partial t'}{\partial t} + \frac{D_T}{h} (v^{x'}, v^{z'}) \cdot \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{\partial x'}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial \varphi'} \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \frac{\partial z'}{\partial z} \right) - \frac{D_T}{h} v^{z'} \frac{\delta T}{h} = \\ \frac{D_T}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x'} \right), \frac{\partial}{\partial z'} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z'} \right) \right). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \delta T \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} \frac{D_T}{h^2} + \frac{D_T}{h} (v^{x'}, v^{z'}) \cdot \left(\delta T \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \frac{1}{h}, \delta T \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \frac{1}{h} \right) - \frac{D_T \delta T}{h^2} v^{z'} = \\ \frac{D_T}{h^2} \left(\frac{\partial}{\partial x'} \left(\delta T \frac{\partial \varphi'}{\partial x'} \right), \frac{\partial}{\partial z'} \left(\delta T \frac{\partial \varphi'}{\partial z'} \right) \right). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\frac{D_T \delta T}{h^2} \frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \frac{D_T \delta T}{h^2} \vec{v}' \cdot \nabla' \varphi' - \frac{D_T \delta T}{h^2} v^{z'} = \frac{D_T}{h^2} \left(\delta T \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x'^2}, \delta T \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z'^2} \right).$$

Multiplicando a esta última expresión por $\frac{h^2}{D_T \delta T}$, considerando $D_T \neq 0$ y $\delta T \neq 0$, se tiene

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t'} + \vec{v}' \cdot \nabla' \varphi' - v^{z'} = \nabla'^2 \varphi'.$$

Al igual que en el caso anterior, suprimiendo las primas se tiene que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla \varphi - v^z = \nabla^2 \varphi. \quad (2.46)$$

Se expresa de esta manera el mismo fenómeno físico, pero con parámetros más conocidos, es pues de estas tres ecuaciones (2.44), (2.45) y (2.46) de donde se deducirá la forma estándar del sistema de Lorenz.

2.3.2 Función de corriente

Como se ha mencionado anteriormente en el modelo de Lorenz se considera al fluido como bi-dimensional, como en [15], [20], lo cual ocurre cuando las condiciones del fluido permanecen uniformes en una dirección mientras que en las otras dos dimensiones, las que usualmente son perpendiculares, se manifiestan los remolinos y giros.

Se considera, entonces, la función de corriente $\Psi = \Psi(x, z, t)$, para una descripción más detallada véase la Sección 1.5. La función Ψ representa la posición espacial de las partículas en la celda de fluido.

En la hidrodinámica de los fluidos bi-dimensionales, Ψ indica que la velocidad \vec{v} de dicho fluido, en una localización particular (x, z) , puede ser especificada por su función de corriente, a este tipo fluido se lo conoce como isocórico, es decir su volumen permanece constante. Además, las componentes de la velocidad están dadas por

$$v_x = -\frac{\partial\Psi}{\partial z}, \quad (2.47)$$

$$v_z = \frac{\partial\Psi}{\partial x}. \quad (2.48)$$

De la ecuación (2.46) se ve que

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} + v_x \frac{\partial\varphi}{\partial x} + v_z \frac{\partial\varphi}{\partial z} - v_z = \nabla^2\varphi.$$

Así, sustituyendo (2.47) y (2.48) en la última ecuación de difusión térmica, toma la forma

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{\partial\Psi}{\partial z} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{\partial\Psi}{\partial x} = \nabla^2\varphi. \quad (2.49)$$

Procediendo similarmente para (2.44) se ve que

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial\Psi}{\partial x} \right) + v_x v_{xz} + v_z v_{zz} \right] = -\frac{\partial\hat{p}}{\partial z} + R\varphi + \nabla^2 \frac{\partial\Psi}{\partial x}.$$

Luego,

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial^2 x^2} + \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial z} + R\varphi + \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (2.50)$$

Para (2.45), se tiene que

$$\frac{1}{\sigma} \left[-\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \right) + v_x v_{xx} + v_z v_{zx} \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}.$$

Así,

$$\frac{1}{\sigma} \left[-\frac{\partial^2 \Psi}{\partial t \partial z} + \frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right] = -\frac{\partial \hat{p}}{\partial x} - \nabla^2 \frac{\partial \Psi}{\partial z}. \quad (2.51)$$

Tomando la derivada respecto a la variable x en (2.50), se obtiene

$$\frac{1}{\sigma} \left[\Psi_{xtx} - \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_z \Psi_{xx}) + \frac{\partial}{\partial x} (\Psi_x \Psi_{zx}) \right] = -\frac{\partial \hat{p}_z}{\partial x} + R\varphi_x + \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 \Psi_x.$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} [\Psi_{xtx} - \Psi_{xz} \Psi_{xx} - \Psi_z \Psi_{xxx} + \Psi_{xx} \Psi_{zx} + \Psi_x \Psi_{xzx}] = \\ 0 + R\varphi_x + \frac{\partial}{\partial x} [\Psi_{xxx} + \Psi_{zzx}]. \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sigma} [\Psi_{xtx} - \Psi_{xz} \Psi_{xx} - \Psi_z \Psi_{xxx} + \Psi_{xx} \Psi_{zx} + \Psi_x \Psi_{xzx}] = \\ R\varphi_x + \Psi_{xxxx} + \Psi_{xzzx}. \end{aligned} \quad (2.52)$$

Tomando la derivada respecto a z en (2.51), se tiene

$$\frac{1}{\sigma} \left[-\frac{\partial}{\partial z}(\Psi_{tz}) + \frac{\partial}{\partial z}(\Psi_z \Psi_{xz}) - \frac{\partial}{\partial z}(\Psi_x \Psi_{zz}) \right] =$$

$$-\frac{\partial \hat{p}_x}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} [\Psi_{xxz} + \Psi_{zzz}]$$

Entonces,

$$\frac{1}{\sigma} [-\Psi_{ztz} + \Psi_{zz} \Psi_{xz} + \Psi_z \Psi_{zxx} - \Psi_{zx} \Psi_{zz} - \Psi_x \Psi_{zzz}] = -\Psi_{zxxz} - \Psi_{zzzz} \quad (2.53)$$

Restando (2.53) de (2.52) se obtiene

$$\frac{1}{\sigma} [\Psi_{xtx} + \Psi_{ztz} + (-\Psi_{zz} \Psi_{xz} - \Psi_z \Psi_{zxx} + \Psi_{zx} \Psi_{zz} + \Psi_x \Psi_{zzz}) +$$

$$(-\Psi_{xz} \Psi_{xx} - \Psi_z \Psi_{xxx} + \Psi_{xx} \Psi_{zx} + \Psi_x \Psi_{xxz}) = R\varphi_x + \Psi_{xxxx} +$$

$$\Psi_{zzzz} + \Psi_{xzzx} + \Psi_{zxxz}.$$

Luego, suponiendo que Ψ es cuatro veces continuamente diferenciable definida en un abierto cualquiera de \mathbb{R}^3 , se ha supuesto que las derivadas mixtas de Ψ existen y son continuas, entonces por el teorema de Schwarz, las derivadas mixtas son iguales, y se tiene que

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\nabla^2 \Psi) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \Psi}{\partial z} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z \partial x} \right) \right] =$$

$$R \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla^4 \Psi, \quad (2.54)$$

donde

$$\nabla^4 \Psi = \Psi_{xxxx} + \Psi_{zzzz} + \Psi_{xzzx} + \Psi_{zxxz}.$$

Las ecuaciones (2.49) y (2.54) son las ecuaciones de convección con las que se deducirá el sistema de Lorenz. Si se utiliza el operador Jacobiano, el cual se denota por

$$\frac{\partial(a, b)}{\partial(x, z)} = \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial b}{\partial z} - \frac{\partial b}{\partial x} \frac{\partial a}{\partial z},$$

Se tiene

$$\frac{1}{\sigma} \left[\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 \Psi) + \frac{\partial(\Psi, \nabla^2 \Psi)}{\partial(x, z)} \right] = R \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \nabla^4 \Psi$$

y la ecuación de la difusión térmica con el operador jacobiano

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \frac{\partial(\Psi, \varphi)}{\partial(x, z)} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} = \nabla^2 \varphi.$$

Estas dos últimas expresiones son las correspondientes a las ecuaciones (17) y (18) respectivamente, que se muestran en el artículo original de Lorenz [15].

En el desarrollo realizado, y con motivo de resaltar los parámetros del número de Rayleigh y el número de Prandtl, se toma las constantes de la forma que aquí figuran, es por este motivo que la forma de expresión de los coeficientes varía ligeramente del artículo original. A partir de estas dos ecuaciones, (2.49) y (2.54), se realizarán los desarrollos posteriores para el sistema de Lorenz.

De manera análoga, en [20] se derivan las mismas ecuaciones con argumentos de convección similares, basta realizar la identificación $\varphi \equiv \theta$ para obtener (16') y (17') de dicho artículo, los parámetros difieren en notación, pero se usan (2.49) y (2.54) para llegar a la forma usual de las ecuaciones.

2.4 Representación de Fourier

Las ecuaciones (2.49) y (2.54) describen simultáneamente, tanto el movimiento y la diferencia de temperaturas, de un fluido en una celda convectiva, en un medio bidimensional, al ser calentada.

Se intenta plantear las ecuaciones antes mencionadas como separables. Para ello, se utilizan los desarrollos en series de Fourier de las funciones φ y Ψ de la Sección 2.3.

Se requieren además algunas hipótesis acerca de los espacios funcionales a los cuales pertenecen φ y Ψ . Es por esto que se dan las definiciones siguientes, tomadas de [6]. Así,

Una función $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ se dice que es *periódica*, de período $T \neq 0$, si $f(x + T) = f(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Se sigue que toda función continua y periódica es uniformemente continua.

Además, si T es un período para f , se tiene que $nT, \forall n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, es también un período para f . Ahora bien, $-T$, es en particular un período para f . Por tanto, sin pérdida de generalidad, si f es periódica de período $T \neq 0$ se puede tomar $T > 0$. Por otro lado, dado que una función constante es siempre periódica para cualquier período T , si f es una función no constante y continua, al más pequeño $T > 0$ que hace periódica a f se le llama *período fundamental*, en lo posterior se referirá al período fundamental simplemente como período.

Se nota $\mathcal{C}_{per}^n([-T, T])$ al conjunto de funciones $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^n y periódicas con período $2T$. Este espacio es de Banach respecto a la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}_{per}^n([-T, T])} = \sum_{j=0}^n \sup_{x \in [-T, T]} |f^{(j)}(x)|.$$

Ahora, dada una función $f \in \mathcal{C}([-T, T])$ que satisface $f(-T) = f(T)$ siempre se puede hallar una única extensión continua de f a una función periódica continua definida en todo \mathbb{R} , es así entonces que el espacio $\mathcal{C}_{per}^n([-T, T])$ se identifica con el conjunto de funciones $f : [-T, T] \mapsto \mathbb{C}$ de clase \mathcal{C}^n que satisfacen $f(-T) = f(T)$. Como en general, dada una función $f \in \mathcal{C}([-T, T])$, se la puede extender en una forma natural a una función periódica de período $2T$, pero esta extensión no será necesariamente continua en general, se considera un espacio más grande, el de las funciones a valores complejos y continuas por partes de período $2T$ notado por $\mathcal{PC}_{per}([-T, T])$. Asimismo, se nota como $\mathcal{PC}_{per}^n([-T, T])$ al conjunto de todas las $f \in \mathcal{PC}_{per}([-T, T])$ tal que para el intervalo $[-T, T]$ existe una partición $-T = x_0 < x_1 < \dots < x_m = T$ con $f \in \mathcal{C}^n(x_j, x_{j+1})$ para todo $j = 0, 1, \dots, m - 1$ y $f^{(k)} \in \mathcal{PC}_{per}([-T, T])$ para todo $k = 1, \dots, m$.

Sin pérdida de generalidad, se considera ahora una función $f : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{C}$ tal que $f \in \mathcal{PC}([-\pi, \pi]^n)$, es decir f está en el conjunto de las funciones continuas por partes y 2π periódicas respecto a cada una de las n componentes. Luego, la serie de Fourier para f está dada por

$$S(f(X)) = \sum_{m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(m_1, \dots, m_n) e^{i(m_1, \dots, m_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)}, \quad (2.55)$$

donde la expresión para el coeficiente de Fourier \hat{f} viene dado por

$$\hat{f}(m_1, \dots, m_n) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \dots \int_{-\pi}^{\pi} f(X) e^{-i(m_1, \dots, m_n) \cdot (x_1, \dots, x_n)} dx_1 \dots dx_n, \quad (2.56)$$

con $X = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $m_1, \dots, m_n \in \mathbb{Z}$.

Usando el teorema de convergencia de series de Fourier, análogo al teorema de inversión de Fourier, se supone que las series de Fourier de las funciones $\Psi, \varphi \in \mathcal{PC}_{per}$ coinciden con dichas funciones en cada punto (x, z, t) . Usando la ecuación (2.55) para las funciones Ψ y φ , se tiene que

$$\Psi(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\Psi}(m, n, t) \left[\cos\left(\frac{2\pi H m x}{L}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi H m x}{L}\right) \right] \cdot \left[\cos(\pi n z) + i \operatorname{sen}(\pi n z) \right], \quad (2.57)$$

y

$$\varphi(x, z, t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tilde{\varphi}(m, n, t) \left[\cos\left(\frac{2\pi H m x}{L}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi H m x}{L}\right) \right] \cdot \left[\cos(\pi n z) + i \operatorname{sen}(\pi n z) \right], \quad (2.58)$$

donde

$$\tilde{\Psi}(m, n, t) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \Psi(x, z, t) \exp\left[-2\pi H i \left(\frac{m}{L}x + \frac{n}{2H}z\right)\right] dz dx, \quad (2.59)$$

$$\tilde{\varphi}(m, n, t) = \frac{1}{2LH} \int_0^L \int_{-H}^H \varphi(x, z, t) \exp\left[-2\pi H i \left(\frac{m}{L}x + \frac{n}{2H}z\right)\right] dz dx, \quad (2.60)$$

con $m, n \in \mathbb{Z}$ y $t \geq 0$.

Se supone que mediante la metodología del truncamiento de Galerkin¹, no se pierde la información no lineal más relevante del sistema. También, según [13] la omisión de

¹En el procedimiento de Galerkin, dada la ecuación

$$L(u) = f(x)$$

con L un operador diferencial, $u \in X$ espacio de Hilbert y f es una función lo suficientemente regular y conocida, en donde se supone existe solución en el abierto U . Además, se considera una base $\{\varphi_j(x)\}$ $j = 1, \dots, N$.

Se supone que u puede ser aproximada mediante $u(x) \simeq \sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)$ con u_j el coeficiente de la j -ésima función base, al realizar esta aproximación se tiene un error para cada paso N , para la ecuación inicial, dado por

$$e_N = L\left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j(x)\right) - f_j(x).$$

los términos que expresan en grandes escalas las ecuaciones del movimiento, como las funciones representadas en las dobles series de Fourier arriba indicadas, pueden ser reducidas a un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales.

En [20], así como en [29], se propone un *ansatz* el cual resulta adecuarse a los resultados experimentales. Adicionalmente, vale mencionar que en [20] se demuestra que para las soluciones numéricas de un gran conjunto de ecuaciones en dos dimensiones que gobiernan los rollos de convección entre dos superficies que se mantienen a una diferencia de temperatura constante, como los aquí indicados, el truncamiento realizado captura la mayoría de la dinámica del fenómeno y el comportamiento no lineal, al menos en un limitado rango de valores en los parámetros.

2.4.1 Función de Corriente Ψ y función de Temperatura φ

A continuación, se establecen las condiciones de borde en la función de corriente Ψ y la función de temperatura φ de la celda convectiva.

Para la función de temperatura se supone aislamiento térmico con el exterior en la región espacial del eje z , es decir la temperatura en la superficie superior e inferior es fija. Así,

$$\varphi(x, 0, t) = \varphi(x, 1, t) = 0.$$

Se considera en los bordes de la celda convectiva que la componente de la velocidad en la dirección vertical, z , es cero, es decir, para la componente de la velocidad en z :

$$\begin{cases} v_z = 0 & \text{en } z = 1, \\ v_z = 0 & \text{en } z = 0. \end{cases}$$

Por lo tanto, se elimina la componente vertical de la velocidad en los bordes de la celda convectiva, en otras palabras

$$v_z(x, 0, t) = 0 = v_z(x, 1, t).$$

La metodología de Galerkin requiere que el error sea ortogonal a cada función de la base. Así, $(e_N, \varphi_j) = \int_U e_N \varphi_j dx = 0$, $j = 1, \dots, N$, es decir

$$\int_U \varphi_j L \left(\sum_{j=1}^N u_j \varphi_j \right) dx - \int_U \varphi_j f dx = 0, \quad j = 1, \dots, N.$$

De esta manera el problema inicial se reduce a la resolución de N ecuaciones algebraicas.

Además, se consideran despreciables las fuerzas de tensión cortante en los bordes de la celda, es decir ausencia de fricción generada en el rozamiento entre celdas. Así,

$$\begin{cases} \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 & \text{en } z = 1, \\ \frac{\partial v_x}{\partial z} = 0 & \text{en } z = 0. \end{cases}$$

Se toma las ecuaciones (2.57) y (2.58). Es en principio de difícil justificación el por qué se debe tomar un limitado número de términos seno y coseno, que satisfagan las condiciones de borde explicadas anteriormente. Es con el trabajo de [20] y posteriormente de [29] que se demuestra que las soluciones numéricas de un conjunto de ecuaciones de convección como las indicadas en el trabajo de Saltzman, [20], pueden ser truncadas para capturar la mayoría de la dinámica del fenómeno y el comportamiento no lineal, al menos en un limitado rango de parámetros.

Así, se hace un “alto truncamiento” o “*high truncation*” a las funciones φ y Ψ , debido a las siguientes razones:

1. Se ha puesto limitaciones en los grados de libertad de este modelo termodinámico, en particular en la consideración de las ecuaciones de convección.
2. Se ha considerado únicamente dos dimensiones espaciales.
3. Las condiciones de frontera del fenómeno son idealizaciones, relativamente alejadas de la realidad del fenómeno físico.
4. Se ha restringido el número de fenómenos físicos considerados en la dinámica interna de la celda convectiva, tales como: vorticidad, tensión superficial, compresibilidad, densidad variable, etc.

Así, el truncamiento correspondiente, véase [13] y [20] para más detalles, es

$$\Psi(x, z, t) = \psi(t) \text{sen}(\pi z) \text{sen}(ax), \quad (2.61)$$

$$\varphi(x, z, t) = T_1(t) \text{sen}(\pi z) \cos(ax) - T_2(t) \text{sen}(2\pi z), \quad (2.62)$$

donde la altura de la celda convectiva es 1, esto es $z \in [0, 1]$. Se conoce que a es un número adimensional asociado con la transferencia de calor en el interior del fluido. Cuando este número a está por encima de un cierto valor crítico, la transferencia de calor se produce principalmente por convección. En el presente caso y considerando argumentos de tipo experimental, ver [1] para más detalles, la convección da inicio

cuando a toma su valor mínimo.

Las funciones ψ, T_1, T_2 dependen solamente del tiempo, t , y son funciones desconocidas.

La función T_1 representa la diferencia de temperaturas entre los flujos de convección de la celda, esta función es la que caracteriza la variación de temperatura en el fenómeno de convección que da origen a las celdas de Rayleigh-Bénard.

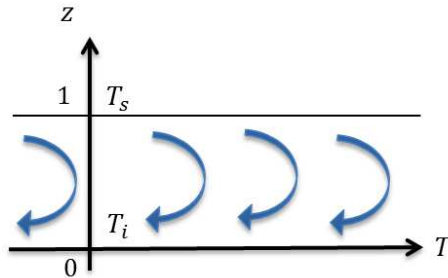


Figura 2.5: Función T_1 .

La función T_2 es la desviación de ΔT , como función lineal, desde el centro de la celda como una función de z , representa la variación global de temperatura de todas las moléculas del fluido desde T_i hasta T_s .

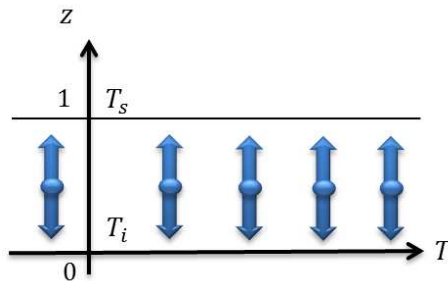


Figura 2.6: Función T_2 .

2.5 Sistema de Lorenz

Usando el método de Galerkin, véase [20] y considerando [9], se toma el operador Laplaciano, independientemente del tiempo. Así,

$$\begin{aligned}\nabla^2\Psi &= \Psi_{xx} + \Psi_{zz} \\ &= -a^2\Psi - \pi^2\Psi \\ &= -(\pi^2 + a^2)\Psi.\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
\nabla^4 \Psi &= \nabla^2(\nabla^2 \Psi). \\
&= \nabla^2(-(\pi^2 + a^2)\Psi) \\
&= -(\pi^2 + a^2)\nabla^2 \Psi \\
&= [-(\pi^2 + a^2)][-(\pi^2 + a^2)]\Psi \\
&= (\pi^2 + a^2)^2 \Psi.
\end{aligned}$$

Sustituyendo (2.61) y (2.62) en (2.54), se tiene que

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\sigma} \left\{ -\psi'(t)(\pi^2 + a^2) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\left(\pi \psi(t) \cos(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \left(a \pi \psi(t) \cos(\pi z) \cos(ax) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(a \psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) \right) \left(-\pi^2 \psi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \right) \right] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial}{\partial x} \left[\left(\pi \psi(t) \cos(\pi z) \sin(ax) \right) \left(-a^2 \psi(t) \sin(\pi z) \sin(ax) \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \left(a \psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) \right) \left(a \pi \psi(t) \cos(\pi z) \cos(ax) \right) \right] \right\} = \\
&\quad - RaT_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) + (\pi^2 + a^2)^2 \psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax).
\end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&- \psi'(t)(\pi^2 + a^2) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) - \frac{\partial}{\partial z} \left[\pi^2 a ((\psi(t))^2 \operatorname{sen}(ax) \cos(ax) (\operatorname{sen}^2(\pi z) + \cos^2(\pi z))) \right] \\
&+ \frac{\partial}{\partial x} \left[a^2 \pi (\psi(t))^2 \operatorname{sen}(\pi z) \cos(\pi z) (\operatorname{sen}^2(ax) + \cos^2(ax)) \right] = \\
&- \sigma RaT_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) + \sigma (\pi^2 + a^2)^2 \psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax).
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
&- \psi'(t)(\pi^2 + a^2) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) = -\sigma RaT_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \quad (2.63) \\
&+ \sigma (\pi^2 + a^2)^2 \psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax).
\end{aligned}$$

Multiplicando la ecuación (2.63) por el término $\frac{1}{(\pi^2 + a^2) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax)}$, para $z \neq k, k \in \mathbb{Z}$ y además $x \neq \frac{k\pi}{a}, k \in \mathbb{Z}, a \neq 0$, se obtiene que

$$\psi'(t) = \frac{\sigma Ra}{\pi^2 + a^2} T_1(t) - \sigma(\pi^2 + a^2)\psi(t), \quad (2.64)$$

considerando de igual manera que $z \neq k, k \in \mathbb{Z}, \quad x \neq \frac{k\pi}{a}, k \in \mathbb{Z}, a \neq 0$.

Se sustituye ahora las ecuaciones (2.61) y (2.62) en la ecuación (2.49), se ve que

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t} \left(T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) - T_2(t) \operatorname{sen}(2\pi z) \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial z} \left(\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) - T_2(t) \operatorname{sen}(2\pi z) \right) \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \frac{\partial}{\partial z} \left(T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) - T_2(t) \operatorname{sen}(2\pi z) \right) \\ & - \frac{\partial}{\partial x} \left(\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) = \\ & -(\pi^2 + a^2)T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) + 4\pi^2 T_2(t) \operatorname{sen}(2\pi z). \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} & T_1'(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) - T_2'(t) \operatorname{sen}(2\pi z) \\ & - \left(\pi\psi(t) \cos(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \left((-a)T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \\ & + \left(a\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) \right) \left[\pi T_1(t) \cos(\pi z) \cos(ax) - 2\pi T_2(t) \cos(2\pi z) \right] \\ & - a\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) = -(\pi^2 + a^2)T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) + 4\pi^2 T_2(t) \operatorname{sen}(2\pi z). \end{aligned}$$

Luego,

$$\begin{aligned} & T_1'(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) - T_2'(t) \operatorname{sen}(2\pi z) + (\pi^2 + a^2)T_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) \\ & - 4\pi^2 T_2(t) \operatorname{sen}(2\pi z) - a\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) = \\ & - \left(\pi\psi(t) \cos(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \left(aT_1(t) \operatorname{sen}(\pi z) \operatorname{sen}(ax) \right) \\ & - \left(a\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) \right) \left(\pi T_1(t) \cos(\pi z) \cos(ax) \right) \\ & + \left(a\psi(t) \operatorname{sen}(\pi z) \cos(ax) \right) \left(2\pi T_2(t) \cos(2\pi z) \right). \end{aligned}$$

Ahora se analiza el término final de la última ecuación, es decir,

$$2a\pi\psi(t)T_2(t)\text{sen}(\pi z)\cos(2\pi z)\cos(ax). \quad (2.65)$$

Se considera la siguiente identidad trigonométrica

$$\text{sen}(\pi z)\cos(2\pi z) = -\frac{1}{2}\text{sen}(\pi z) + \frac{1}{2}\text{sen}(3\pi z).$$

En consideración con [9] y [20], la dependencia espacial de $\text{sen}(3\pi z)$ va más allá de lo contemplado por el ansatz utilizado, es por este motivo que podemos omitir dicho término.

Se usa entonces $\text{sen}(\pi z)\cos(2\pi z) \approx -\frac{1}{2}\text{sen}(\pi z)$ y la identidad trigonométrica básica $\text{sen}(\pi z)\cos(\pi z) = \frac{1}{2}\text{sen}(2\pi z)$.

Así,

$$\begin{aligned} & T_1'(t)\text{sen}(\pi z)\cos(ax) + (\pi^2 + a^2)T_1(t)\text{sen}(\pi z)\cos(ax) - a\psi(t)\text{sen}(\pi z)\cos(ax) \\ & - T_2'(t)\text{sen}(2\pi z) - 4\pi^2 T_2(t)\text{sen}(2\pi z) = \\ & 2\left(\frac{-1}{2}\right)a\pi\psi(t)T_2(t)\text{sen}(\pi z)\cos(ax) - \frac{1}{2}a\pi\psi(t)T_1(t)\text{sen}(2\pi z)[\text{sen}^2(ax) + \cos^2(ax)]. \end{aligned}$$

Se igualan los coeficientes de $\text{sen}(\pi z)\cos(ax)$ y $\text{sen}(2\pi z)$, obteniendo las siguientes expresiones

$$T_1'(t) = a\psi(t) - (\pi^2 + a^2)T_1(t) - \pi a\psi(t)T_2(t) \quad (2.66)$$

y

$$T_2'(t) = \frac{\pi a}{2}\psi(t)T_1(t) - 4\pi^2 T_2(t). \quad (2.67)$$

Finalmente, vale mencionar que las ecuaciones (2.64), (2.66) y (2.67) corresponden, salvo constantes, a las ecuaciones (25), (26), (27) del sistema de Lorenz formulado en [15] y dado por

$$(\text{SL}) \begin{cases} X'(t) = \sigma(Y(t) - X(t)), \\ Y'(t) = rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t), \\ Z'(t) = X(t)Y(t) - bZ(t). \end{cases}$$

Capítulo 3

SIMETRÍA DEL SISTEMA DE LORENZ Y RESULTADOS NUMÉRICOS

3.1 Simetría del Sistema de Lorenz

3.1.1 Simetría

Teorema 3.1. *Sea $\psi(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$ una solución del sistema (SL), entonces $\hat{\psi}(t) = (-X(t), -Y(t), Z(t))$ es también solución del mismo sistema. Se conoce a esto como propiedad de **simetría espacial** en 2 dimensiones.*

Demostración. Para las ecuaciones del sistema (SL), se utiliza un cambio de variable que viene dado por la transformación

$$T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad \text{en donde} \quad T(X, Y, Z) = (-X, -Y, Z), \quad \text{es decir} \quad T(\psi) = \hat{\psi}.$$

Se sabe que en las ecuaciones de Lorenz, se cumple que $\sigma, r, b \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$.

Así, para la primera ecuación se tiene que

$$-\dot{X}(t) = \sigma(-Y(t) + X(t)) \quad \Rightarrow \quad +\dot{X}(t) = +\sigma(Y(t) - X(t)),$$

en la segunda ecuación

$$-\dot{Y}(t) = -rX(t) + Y(t) + X(t)Z(t) \quad \Rightarrow \quad +\dot{Y}(t) = +rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t),$$

y finalmente para la tercera ecuación

$$+\dot{Z}(t) = -(-X(t)Y(t)) - bZ(t) \quad \Rightarrow \quad +\dot{Z}(t) = +X(t)Y(t) - bZ(t),$$

Se llega entonces a las mismas ecuaciones del sistema (SL). Escribamos a dicho sistema como

$$\frac{d\vec{U}(t)}{dt} = F(\vec{U}(t)).$$

en donde

$$\begin{aligned} \vec{U}(t) &= [X(t), Y(t), Z(t)], \\ F(\vec{U}(t)) &= [F_1(\vec{U}(t)), F_2(\vec{U}(t)), F_3(\vec{U}(t))] \\ &= [\sigma(Y(t) - X(t)), rX(t) - Y(t) - X(t)Z(t), X(t)Y(t) - bZ(t)]. \end{aligned}$$

Se observa que ocurre con la solución bajo la transformación T . Así, como $\psi(t)$ es una solución de (SL), ψ es una función tal que satisface

$$\frac{d\psi(t)}{dt} = F(\psi(t)) = F[F_1(\psi(t)), F_2(\psi(t)), F_3(\psi(t))].$$

para probar la invariancia de la solución de (SL) bajo la transformación T , se debe cumplir que

$$\frac{dT(\psi)}{dt} = F(T(\psi)) \quad (3.1)$$

Donde se ha omitido la dependencia del tiempo, para facilitar la notación. Ahora, se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{dT(\psi)}{dt} &= \mathbf{J}T(\psi) \cdot \psi' = \mathbf{J}[-X, -Y, Z] \cdot \psi' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -\dot{X} \\ -\dot{Y} \\ \dot{Z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(\psi) \\ -F_2(\psi) \\ F_3(\psi) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Por otra parte, se tiene que

$$F(T(\psi)) = F(\hat{\psi}) = \begin{bmatrix} F_1(\hat{\psi}) \\ F_2(\hat{\psi}) \\ F_3(\hat{\psi}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_1(\psi) \\ -F_2(\psi) \\ F_3(\psi) \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

como se tiene que la ecuación (3.2) es igual a (3.3), se ha demostrado (3.1), por lo que (SL) es invariante bajo la transformación T .

Se concluye entonces que $\psi = \hat{\psi}$ es una solución simétrica por si misma o ψ tiene una pareja simétrica $\hat{\psi}$.

□

Se deduce entonces el siguiente corolario

Corolario 3.2. *La dimensión dada por el eje- z en el sistema (SL) es invariante.*

Demostración. Se toma únicamente el eje- z , es decir $X \equiv 0, Y \equiv 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, además se toma un punto Z_0 cualquiera en Z . Tenemos que el punto $(0, 0, Z_0)$ es la condición inicial, y resulta el sistema (SL) como

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = 0 \\ \dot{Y}(t) = 0 \\ \dot{Z}(t) = -bZ(t) \end{cases}$$

De donde, por integración se obtiene $X(t) = k_1 = 0$ ya que $X(0) = 0$ y $Y(t) = k_2 = 0$ porque $Y(0) = 0$, pues además en el eje Z las dimensiones X, Y son cero para todos los valores del tiempo t .

Por ende el eje- z es una órbita en la que se cumple que de la ecuación $\dot{Z}(t) = -bZ(t)$ se tiene que $Z(t) = Z_0 e^{-bt}$ para los valores de X, Y en todo tiempo t .

Ahora para cualquier $Z_0 \in \mathbb{R}$ se tiene que $Z(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$. Como se indica en la Figura 3.1.1. Es decir todas las trayectorias que empiezan en el eje- z permanecen en este o tienden la punto de origen $(0, 0, 0)$, se dice a esto que el eje- Z es siempre parte de la variedad estable para el origen.

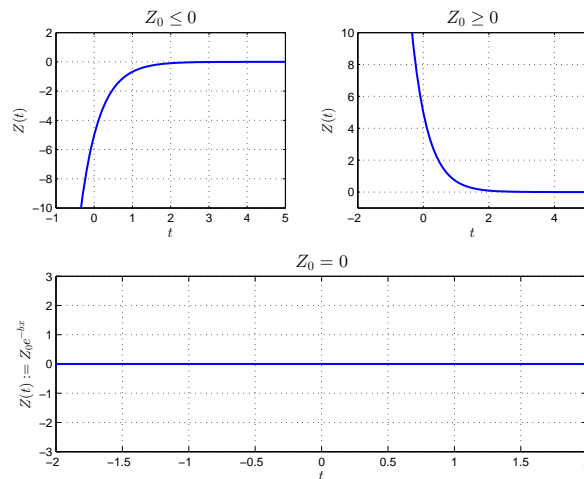


Figura 3.1: Invarianza del eje- z

Por tanto el eje- z es invariante en el sistema (SL). □

Se indica a continuación una interesante característica de un conjunto en el espacio de fases de las trayectorias del sistema (SL), el estudio detallado de estas propiedades, escapa al alcance de este trabajo y puede ser consultado en [22].

Teorema 3.3. *Existe un conjunto E acotado y $E \neq \emptyset$, al cual todas las trayectorias del sistema (SL) ingresan.*

Demostración. Se demuestra a continuación que existe una región acotada E para la cual toda trayectoria de la solución del sistema (SL) ingresa, y además no vuelve a salir.

Se considera la función de Lyapunov $V : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ dada por

$$V(x, y, z) = rx^2 + \sigma y^2 + \sigma(z - 2r)^2.$$

Así, se supone que $V \in C^1(\mathbb{R}^3)$ y se cumple que $V(0, 0, 0) = 0$ y también que $V(x, y, z) > 0 \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Veamos la derivada de V . Así,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{dz}{dt},$$

luego usando el sistema (SL)

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= 2rx(\sigma y - \sigma x) + 2\sigma y(rx - y - xz) + 2\sigma(z - 2r)(xy - bz), \\ &= 2r\sigma xy - 2r\sigma x^2 + 2r\sigma xy - 2\sigma y^2 - 2\sigma xyz + 2\sigma(xyz - bz^2 - 2rxy + 2rbz), \\ &= -2\sigma(rx^2 + y^2 + bz^2 - 2brz). \end{aligned}$$

Como se indica en [22], Lorenz toma otro tipo de funciones de Lyapunov, pero para el presente caso V es suficiente. Sea ahora $A \subset E \subset \mathbb{R}^3$ una región acotada para la cual $V'(t) \geq 0$ y sea m el máximo que V alcanza en la región A , consideremos la región E en la cual se cumple que

$$V \leq m + \epsilon \quad \forall \epsilon > 0.$$

Si un punto $x^* \in \mathbb{R}^3$, tal que $x^* \notin E$ entonces $x^* \notin A$ y por tanto $V'(x^*) \leq 0$. Ahora, si $V'(x^*) \geq -\delta$ para algún $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, es así como, si se inicia una trayectoria en el punto x^* fuera de E entonces los valores de V de los puntos en dicha trayectoria deben decrecer a medida que el tiempo avanza y dentro de un tiempo finito la trayectoria entrará en la región E , de la misma manera todas las trayectorias que van hacia adentro

pasan la frontera de la región E .

Si se considera el caso en el cual $\epsilon = \delta = 0$, entonces todas las trayectorias eventualmente ingresan a E , pero les tomará un tiempo infinito en hacerlo. Así, todas las trayectorias del sistema (SL) una vez que entran, permanecen por siempre en E . \square

La región E de la que se refirió anteriormente, es en realidad un elipsoide cuyas dimensiones vienen dadas por los parámetros del número de Rayleigh, b y el número de Prandtl. Una característica importante es que, de hecho, existe una región acotada de volumen cero a la cual todas las trayectorias tienden, es decir hay un conjunto de medida nula al cual toda órbita del sistema tiende asintóticamente, a este conjunto se le dice atractor y contiene una singularidad en $(0, 0, 0)$. Este atractor es un objeto matemáticamente muy interesante y complicado de abordar conocido como atractor extraño, el estudio completo fue realizado usando las ideas de Warwick Tucker en el año 2002 como solución al problema de Smale.

Con el uso de distintos parámetros, el sistema de Lorenz (SL) adquiere algunas propiedades en sus soluciones, un caso especial en donde se conoce como la transición al caos se da en $r = 28$, $\sigma = 10$ y $b = 8/3$, como se verá en los resultados numéricos. Si tomamos a los puntos de equilibrio C_1 y C_2 como

$$C_1 = (\sqrt{b(r-1)}, \sqrt{b(r-1)}, r-1),$$

$$C_2 = (-\sqrt{b(r-1)}, -\sqrt{b(r-1)}, r-1),$$

y según se indica en [22], un resumen del comportamiento de los puntos de equilibrio de acuerdo a r está dado por :

$0 < r < 1$: El origen $(0, 0, 0)$ es globalmente estable, todas las órbitas van hacia este punto y no hay presencia de conjuntos límite ni transición al caos.

$r > 1$: El origen no es estable, la linealización del sistema dado alrededor del origen, véase [15], nos da los siguientes valores propios

$$\lambda_1 = \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 + \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma} \right],$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2} \left[-\sigma - 1 - \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4r\sigma} \right],$$

$$\lambda_3 = -b.$$

$1 < r < 24,74\dots$: Los puntos C_1 y C_2 son estables, todos los valores propios del sistema linealizado sobre estos puntos tienen parte real negativa, si se toma $r > 1,3501\dots$ se obtiene $\sigma = 10$ y $b = 8/3$, además existen un par de valores propios conjugados y complejos.

$r > 24,74\dots$: Los puntos C_1 y C_2 son no estables, si se lineariza el flujo alrededor de C_1 y C_2 se obtiene un valor propio real negativo y un par de valores propios conjugados complejos con parte positiva, además los tres puntos de equilibrio o puntos estacionarios, son no estables.

3.2 Resultados Numéricos

En la presente sección, se han realizado simulaciones numéricas de las soluciones y propiedades del sistema de Lorenz (SL), no se ha desarrollado un método numérico específico como tal, sino se ha optado por utilizar un solver numérico para sistemas de ecuaciones diferenciales de la librería de funciones de MATLAB, conocido como *ode45()*, se ha optado por esta librería debido a su mínimo error de precisión y a su estabilidad. Además se han escrito fragmentos auxiliares de código, para el tratamiento matricial de los resultados, los cuales son debidamente comentados y se incluyen.

La librería de funciones *ode45()* es ampliamente usada en la actualidad en el tratamiento numérico de las ecuaciones diferenciales, esta utiliza simultáneamente los métodos de Runge-Kutta de cuarto y quinto orden para las estimaciones de error y para ajustar el paso de la variable temporal en las respectivas iteraciones.

Cabe resaltar que el método numérico desarrollado por *ode45()* es muy superior al que uso Lorenz en [15], esto no afecta el estudio del mencionado artículo ni omite resultados de relevancia, puesto que al tomar una precisión mayor, únicamente obtendremos una mayor suavidad en las curvas que representan las trayectorias de la solución, inclusive en [22] se tolera la utilización de métodos muy básicos como el de Euler. Así, el valor de paso para el tiempo en el artículo de Lorenz [15], es $\Delta T = 0,01$, en el presente análisis es de $\Delta T = 0,00001$, considérese además que Lorenz utilizó un procedimiento de doble aproximación para la integración numérica, debidamente justificado en la Sección 4 del mencionado artículo.

Lorenz en 1963 estimó un tiempo por iteración para la solución de (SL) de 1 segundo con un computador Royal McBee LGP-30, en cambio a la fecha actual utilizando un

computador HP Mobile Workstation Intel CORE-i7 se ha estimado un tiempo de alrededor de $6,18931651926736e - 05$ por iteración.

Básicamente, se seguirá de aquí en adelante el trabajo realizado en [13] y [15], así como también nos ayudaremos en la interpretación y comentario de los resultados, desde las referencias [22] y [25]. Las soluciones numéricas de las ecuaciones de convección que se obtienen, se dan para los siguientes valores fijos de los parámetros en el sistema (SL)

$$\sigma = 10, \quad b = \frac{8}{3}, \quad \frac{470}{19} = 24,7368.$$

Estos valores se siguen de acuerdo a [20], es de importancia el valor crítico del número de Rayleigh r , pues este caracteriza la inestabilidad del estado de convección que ocurre cuando toma el valor antes mencionado, para efectos de la exposición de resultados, se toma un valor ligeramente mayor para el número de Rayleigh, con el valor supercrítico de $r = 28$. De esta manera en el espacio de fases, en donde se mostrarán los resultados los puntos $(6\sqrt{2}, 6\sqrt{2}, 27)$ y $(-6\sqrt{2}, -6\sqrt{2}, 27)$ corresponden al estado de convección, mientras que el estado de no convección corresponde al punto $(0, 0, 0)$, es decir, el origen.

3.3 Resolución numérica del sistema de Lorenz

Se ha resuelto el sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de Lorenz mediante la utilización de dos funciones implementadas en MATLAB, la función *lorenz.m* utiliza el método de Runge-Kutta de cuarto orden para aproximar la solución. En el código adjunto se ha utilizado el error de tolerancia de *eps* que corresponde al cero del computador, el cual es $eps \approx 1,0000e - 05$. La evaluación que se da para *ode45()* se hace mediante la función auxiliar *F.m* la cual evalúa el lado derecho del sistema de Lorenz.

lorenz.m

```
1 function [x,y,z] = lorenz(rho, sigma, beta, initV, T, eps)
2
3     opciones = odeset('RelTol',eps,'AbsTol',[eps eps eps/10]);
4     % RelTol: Error relativo a la tolerancia que aplica a todos ...
5     %         los componentes
6     %         de la solución
7     % AbsTol: Error absoluto que aplica a la tolerancia de cada ...
8     %         componente
```

```

7      %           de la solución.
8
9      [T,X] = ode45(@(T,X) F(T, X, sigma, rho, beta), T, initV, ...
10         opciones);
11     % Solver que usa un modelo numérico Runge-Kutta explícito de ...
12         4to orden
13     % para el valor inicial, el error por paso es de  $O(h^5)$  y el ...
14         error total
15     % acumulado es de  $O(h^4)$ .
16     % La convergencia del método es de la orden de  $O(h^4)$ .
17
18     x = X(:,1);
19     y = X(:,2);
20     z = X(:,3);
21     return
22 end

```

F.m

```

1 function dx = F(T, X, sigma, rho, beta)
2 % Evalúa el lado derecho del sistema de Lorenz
3     dx = zeros(3,1);
4     dx(1) = sigma*(X(2) - X(1));
5     dx(2) = X(1)*(rho - X(3)) - X(2);
6     dx(3) = X(1)*X(2) - beta*X(3);
7     return
8 end

```

Estas funciones son utilizadas en el programa *Sistema Lorenz.m*, el mismo que es parametrizable para experimentar con los valores de σ , r y b del sistema. Se utiliza un cronómetro para estimar el tiempo de iteración y prever posibles saturaciones de la memoria del computador a medida que se exija un mayor número de iteraciones. Además, el código permite la creación de un gráfico tridimensional para las variables X , Y , Z , vale la pena indicar que para la creación del resto de figuras que se indican, basta con tomar la función *plot()* o *scatter()* en lugar de *plot3()* y ajustar debidamente las escalas.

Sistema Lorenz.m

```

1 %% SISTEMA DE LORENZ
2

```

```

3 % x' = sigma*(y-x)
4 % y' = x*(rho - z) - y
5 % z' = x*y - beta*z
6 %     X, Y, Z - Vectores de salida del atractor extraño
7 %     RHO     - Número de Rayleigh
8 %     SIGMA   - Número de Prandtl
9 %     BETA    - Parámetro de factor geométrico
10 %    INITV   - Punto inicial
11 %    T       - Intervalo de Tiempo
12 %    EPS     - Precisión del solver de EDO
13
14
15 % Inicia cronómetro
16 tic
17
18 % Valores de los parámetros
19 rho=28; sigma=10; beta=8/3;
20
21 % Convección estable
22 ini_X=0;
23 ini_Y=1;
24 ini_Z=0;
25
26 % Convección inestable
27 % ini_X=6*sqrt(2);
28 % ini_Y=6*sqrt(2);
29 % ini_Z=27;
30
31 % Vector de valores iniciales
32 initV = [ini_X ini_Y ini_Z];
33
34 % Periodo de cálculo
35 T = [0 100];
36 % Precisión
37 eps = 0.00001;
38
39 % Resolución
40 [X Y Z] = lorenz(rho, sigma, beta, initV, T, eps);
41
42 % Finaliza cronómetro, indica tiempo de iteración
43 fin_iteracion=toc;
44 tiempo_iteracion=fin_iteracion/size(X,1);
45
46 % Gráfico de las variables X,Y,Z
47 set(figure(1), 'Position', get(0, 'Screensize'), 'name', 'Sistema de ...
    Lorenz', ...

```

```

48     'numbertitle','off','Color',[223/255 223/255 255/255]);
49 figure(1)
50 plot3(X,Y,Z);
51 grid on;
52 axis square;
53 title('Atractor Extraño de Lorenz');
54 xlabel('X'); ylabel('Y'); zlabel('Z');

```

3.4 Análisis de estabilidad

A partir de las soluciones numéricas antes estimadas se realiza un análisis empírico de la estabilidad del sistema (SL), tanto para el estado estable o estacionario conocido como *steady state* y como también para el estado no estacionario o *non steady state*.

Se utiliza el código realizado en MATLAB para formar los subvectores correspondientes de las variables espaciales X, Y, Z cada N iteraciones, véase el Apéndice 2, con el código correspondiente.

Para seguir el análisis del artículo original, y únicamente para propósitos de comodidad en el despliegue de las tablas, pero no en los cálculos reales, se ha tomado el tamaño del análisis en cada variable espacial para las 200 primeras iteraciones, en un paso de tamaño 5, es decir $\text{tam_análisisX}=\text{tam_análisisY}=\text{tam_análisisZ}=200$; con $N_X=N_Y=N_Z=5$; Véase el Cuadro 3.1.

Se aclara que los valores aquí tomados difieren a los del artículo original [15], ya que por razones de capacidad computacional Lorenz multiplicaba los valores de despliegue por 10 e imprimía la izquierda del desarrollo decimal.

De esa manera en el artículo original se tiene que el estado de no convección y el estado de convección aparecen como $(000, 000, 000)$ y $(-0084, -0084, 0270)$ respectivamente, a diferencia de nuestras tablas en donde se notarán como $(0, 0, 0)$ y $(-8,485281, -8,485281, 27)$.

N	X(t)	Y(t)	Z(t)	N	X(t)	Y(t)	Z(t)
1	0	1	0	105	4.05003401	-9.15058969	35.5674493
5	0.076801733	1.000723842	0.000308752	110	0.64669533	-9.29385045	32.2916249
10	0.268320106	1.0865673	0.00424705	115	-1.61353561	-9.0185337	30.2400551
15	0.462684488	1.301144139	0.014047025	120	-3.63030034	-8.62456442	28.4471639
20	0.698532169	1.68477553	0.034947551	125	-5.04696295	-8.37152155	27.1710011
25	1.017704059	2.304053535	0.079016048	130	-6.01249727	-8.33367946	26.3052374
30	1.49056	3.290593477	0.17655326	135	-6.75593041	-8.50109477	25.7288221
35	2.215170631	4.839737606	0.399140692	140	-7.39300308	-8.84837762	25.4558214
40	3.323529579	7.211692316	0.909959502	145	-8.00024205	-9.30852416	25.545023
45	4.955689183	10.64648411	2.039957437	150	-8.60652933	-9.74837873	26.0662363
50	7.200665062	15.17020564	4.345390386	155	-9.12886419	-9.93009489	26.9658855
55	10.08464038	20.44062392	8.648203391	160	-9.42146852	-9.65618637	27.965058
60	13.52943018	25.42395148	16.00137759	165	-9.35976824	-8.92024329	28.6684983
65	17.29589267	27.6544248	27.76796437	170	-8.9359006	-8.00513048	28.7241972
70	19.43421672	24.29716998	38.51529265	175	-8.38306795	-7.34956068	28.196069
75	19.75528483	17.51934931	45.35996329	180	-7.85536645	-7.05149493	27.3041515
80	18.65300474	9.935707627	48.16771129	185	-7.50299244	-7.19612956	26.2412527
85	16.74076066	3.596459468	48.01614317	190	-7.53125906	-7.90759477	25.3086051
90	14.44437206	-1.185651059	46.31068049	195	-8.02102395	-8.91794444	25.1619952
95	11.88932814	-4.69421557	43.79663862	200	-8.68509064	-9.71583526	25.8396131
100	8.508982543	-7.517963756	40.20076779				

Cuadro 3.1: 200 primeras iteraciones de la solución de (SL)

Para las condiciones iniciales se toma una ligera variación del estado de no convección desde el punto $(0, 1, 0)$, es decir se requiere una pequeña variación de la zona del punto fijo $(0, 0, 0)$, para iniciar la simulación del fenómeno de convección en la celda.

Se analiza entonces la inestabilidad del estado estacionario, en la Figura 3.2 se observa que las tres variables crecen rápidamente y que alrededor de la iteraciones 60 – 80 la fuerza de convección excede el estado estable, esto se da cuando el fluido frío se hunde y es reemplazado por un fluido aún más frío de la parte superior, de igual manera el fluido caliente ascendente se reemplaza por el fluido aún más caliente de la parte inferior.

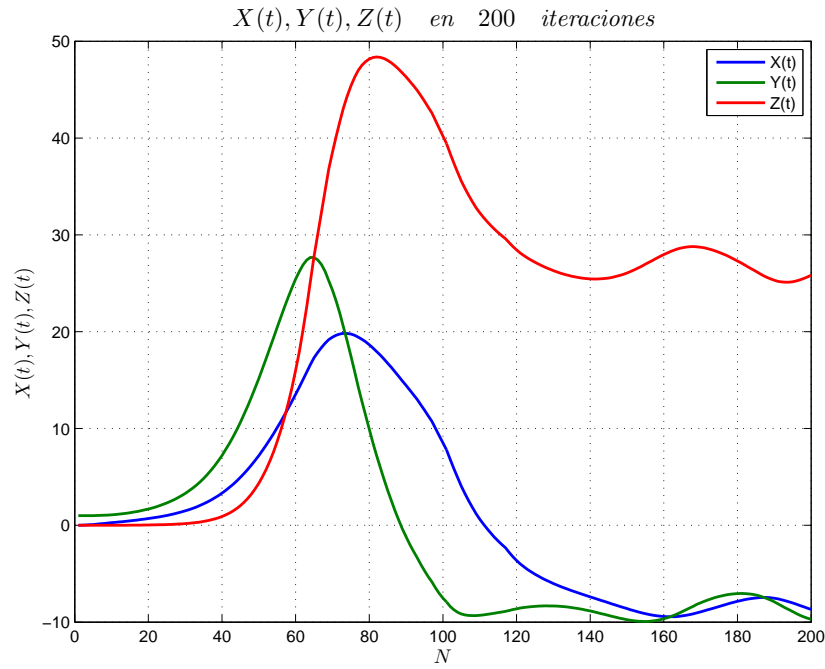


Figura 3.2: Soluciones en 200 iteraciones

Se toma la variable Y para analizarla por separado y mantener un análisis similar al que realizó Lorenz, se ve que a medida que las iteraciones avanzan los valores de Y disminuyen, en la iteración 89 el valor de Y toma un valor negativo y X continúa con valor positivo, esto se da cuando el fluido más caliente es llevado por arriba de las celdas de convección, entonces se interpreta como el momento en el cual el fluido caliente está descendiendo y el frío ascendiendo. A partir de la iteración 112 la variable X toma signo negativo, lo que indica que el movimiento cesa y empieza en la dirección contraria. Cerca de la iteración 148. Entre la iteración 148 y la 200 se da una oscilación completa en su intensidad y la minúscula amplificación que se da es casi indetectable.

Además, se indican en las Figuras 3.3 y 3.4, las primeras 5000 iteraciones de la variable Y .

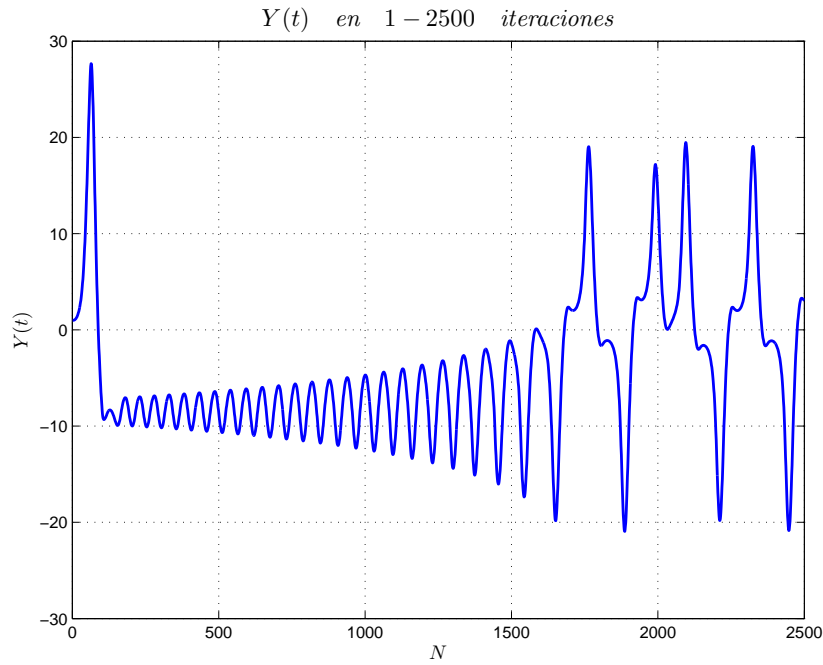


Figura 3.3: $Y(t)$ para 1 – 2500 iteraciones

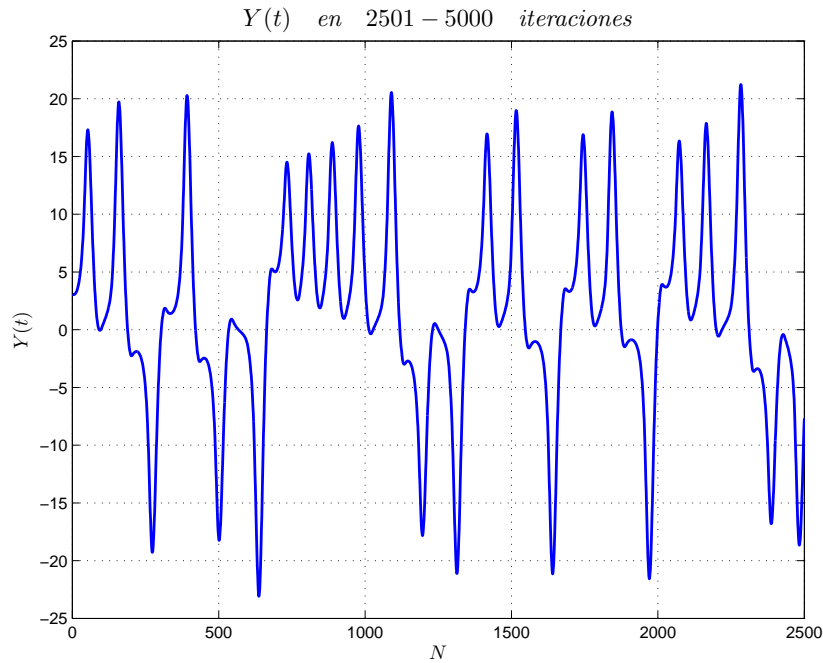


Figura 3.4: $Y(t)$ para 2501 – 5000 iteraciones

Se observa claramente la inestabilidad del fluido. Así, en la iteración 79 se da un pico alto para el valor de Y y pasa por el punto de equilibrio en la iteración 88, luego se van amplificando regularmente las oscilaciones hasta cerca de la iteración 1680, en donde se alcanza el punto crítico y a partir de ahí Y varía de una manera totalmente irregular como se indica la final de la Figura 3.3 y durante toda la Figura 3.4, a veces Y

alcanza 1 o 2 picos antes de cambiar de signo; a veces alcanza 5 picos antes de cambiar de signo nuevamente, como se ve aproximadamente entre las iteraciones 650 – 1200. Un comportamiento bastante similar se da para la variable X , como se indica en la Figura 3.5.

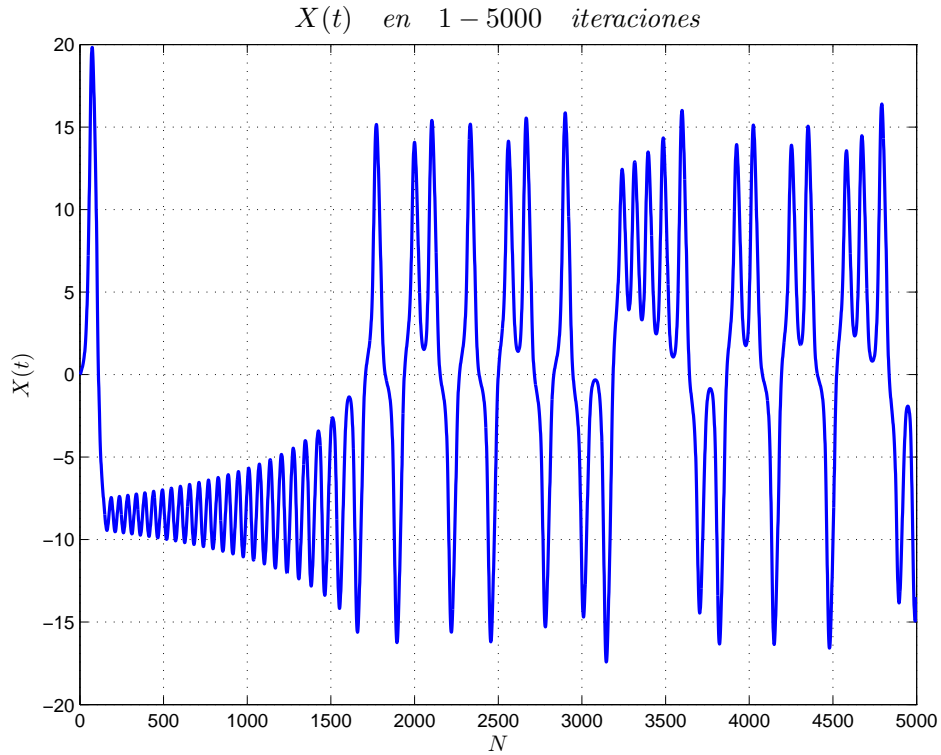


Figura 3.5: $X(t)$ para las primeras 5000 iteraciones

A continuación se observan las proyecciones $X - Y$ y $Z - Y$ en el espacio de fases, no se ha graficado completamente todas las trayectorias sino únicamente las correspondientes a las iteraciones 1200–2000, esto con el fin de facilitar la visualización de las trayectorias que se arremolinan hacia los estados de convección denotados como C y C' , como se indican en las Figuras 3.6 y 3.7.

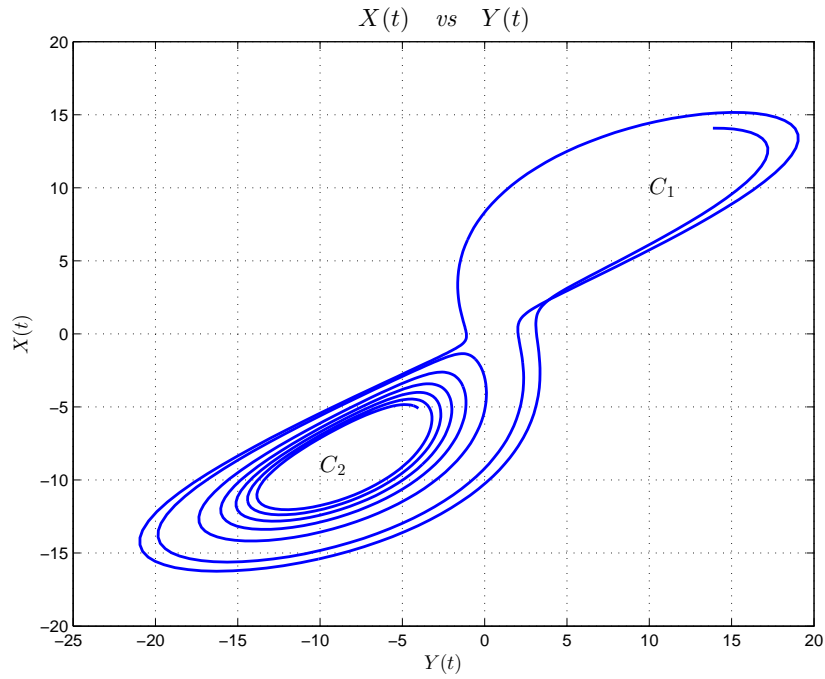


Figura 3.6: $X(t)$ vs $Y(t)$ para las 1200 – 2000 iteraciones

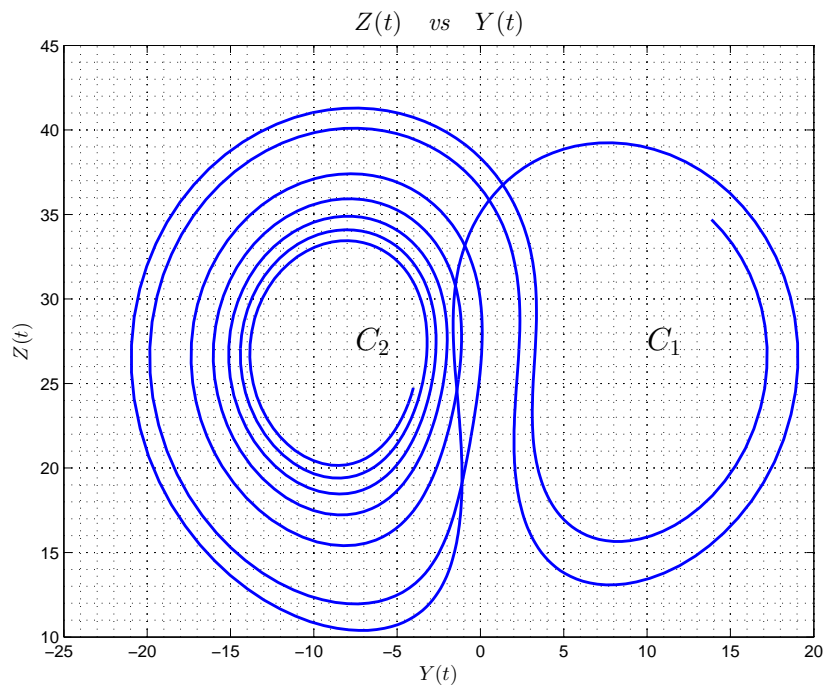


Figura 3.7: $Z(t)$ vs $Y(t)$ para las 1200 – 2000 iteraciones

En la figura 3.6 se observa que las primeras trayectorias se arremolinan fuera de la vecindad C_1 al estado de convección estable C_2 , además las oscilaciones alrededor del mismo continuarán creciendo a partir de las siguientes iteraciones, cerca de la iteración 1700 la trayectoria cruza el plano $X - Z$ y retorna hacia C_2 en donde antes se

arremolinaba, de aquí en adelante las trayectoria cruzan desde C_2 hacia C_1 y viceversa, pero todo esto lo hacen de forma no periódica y en intervalos de iteraciones arbitrarios, algo muy similar ocurre en la Figura 3.7. Veamos ahora las Figuras 3.8 y 3.9 para un mayor número de iteraciones.

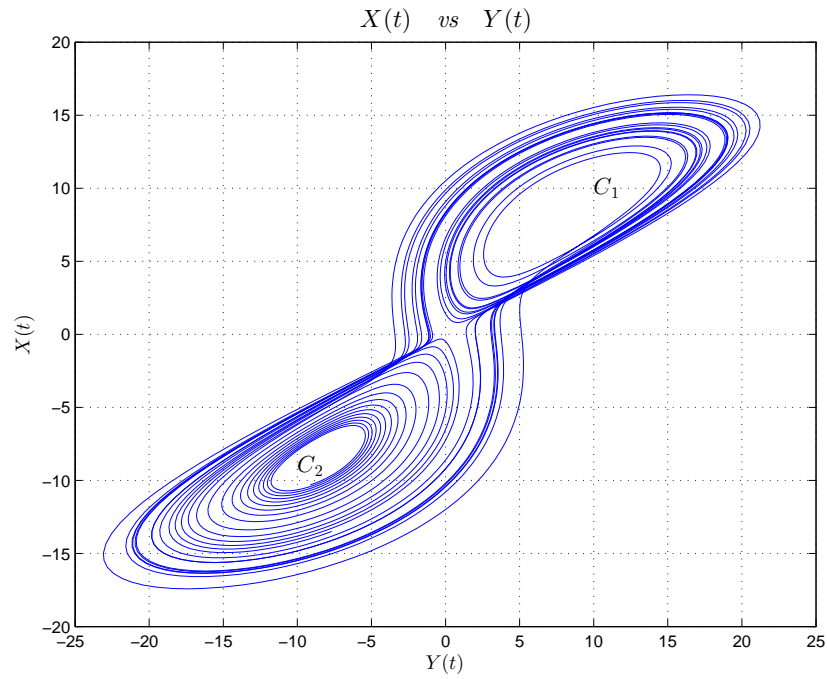


Figura 3.8: $X(t)$ vs $Y(t)$ para las 5000 primeras iteraciones

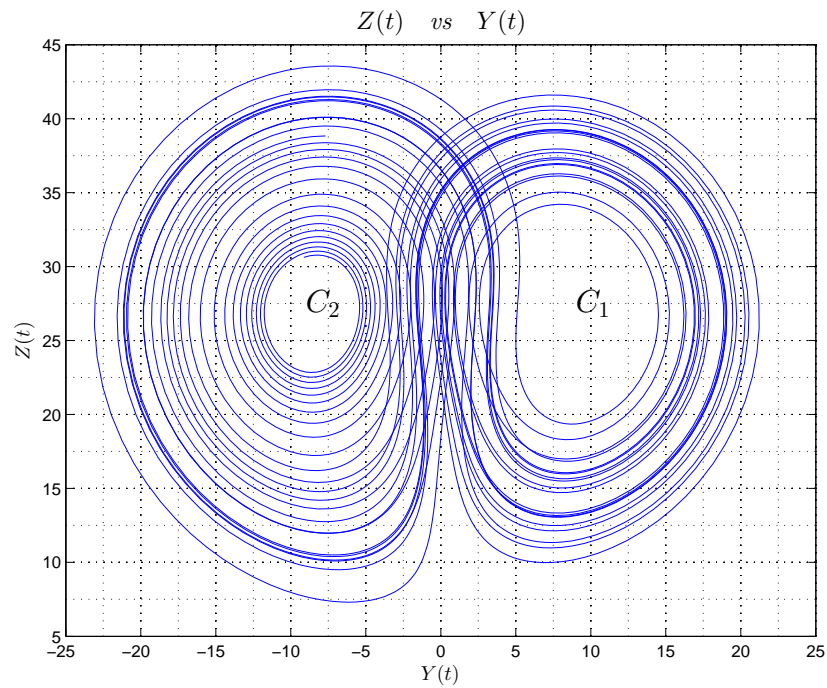


Figura 3.9: $Z(t)$ vs $Y(t)$ para las 5000 primeras iteraciones

Cuando se observa la gráfica del espacio de fase $Z - X$ se ve un comportamiento similar, que refleja claramente la inestabilidad de la trayectoria y la ausencia de periodicidad, véase la Figura 3.10.

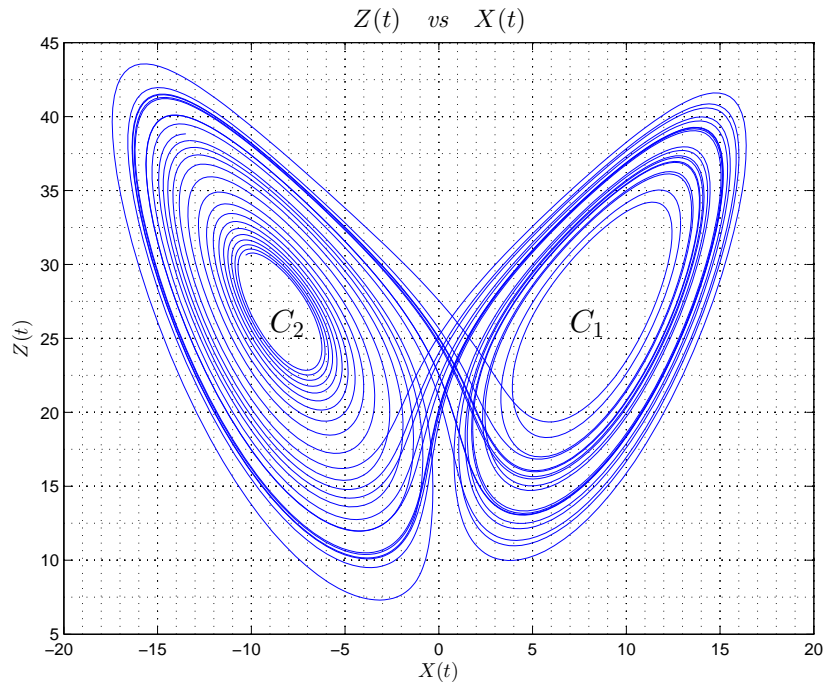


Figura 3.10: $Z(t)$ vs $Y(t)$ para las 5000 primeras iteraciones

Se hace un gráfico en tres dimensiones de la solución del sistema (SL), llegando a la Figura 3.11

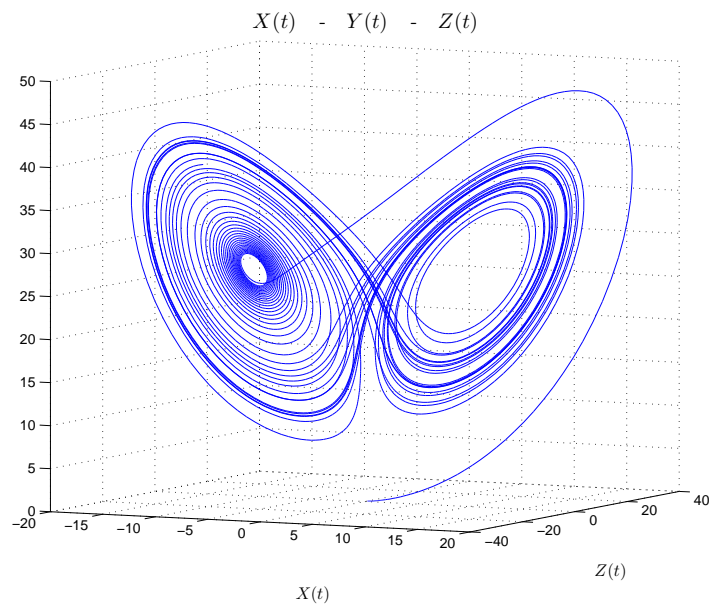


Figura 3.11: $X(t)$ - $Z(t)$ - $Y(t)$ para 5000 iteraciones

Se observa en el gráfico los dos atractores hacia donde tiende el sistema, una propiedad interesante de la Figura 3.11 es que si es que se cambian las condiciones iniciales, aunque los valores numéricos son distintos, tras un determinado número de iteraciones el aspecto de la gráfica de la solución será la misma. Además si es que nos acercamos tanto como queramos, se ve que las trayectorias nunca se cruzan, esto se debe a la ausencia total de periodicidad. Cuando la trayectoria abandona una de las espirales es solo después de haber excedido alguna distancia crítica desde el centro, esta distancia esta de alguna manera relacionada con el número de vueltas antes que la trayectoria cambie de espiral de nuevo.

Se intuye entonces que algunas de las características de una de las espirales predice algo similar para la otra, según indica [15] una de estas características son los máximos relativos de $Z(t)$, los mismos que ocurren cuando una vuelta hacia uno de los atractores está cerca de ser completada. Se ha preparado, en el Anexo B, un código para extraer los máximos relativos de la serie de valores que toma $Z(t)$. En el Cuadro A.2 se muestran los valores de M_{N+1} y M_N de cada uno de los máximos en la iteración N .

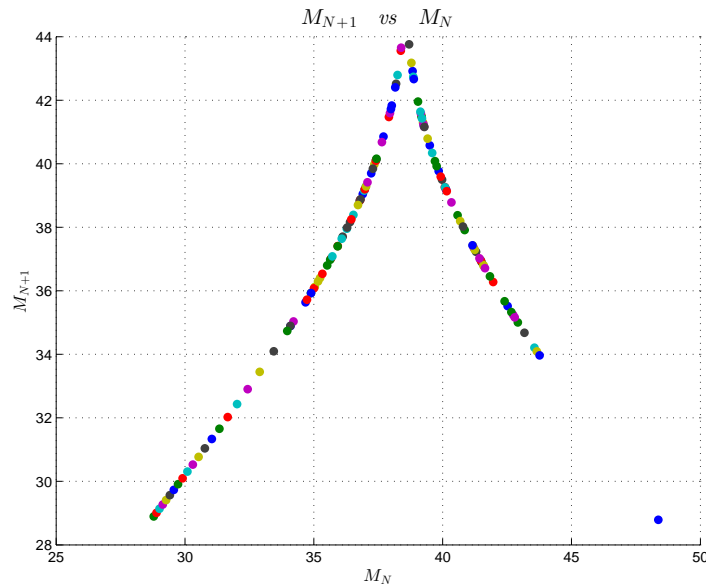


Figura 3.12: Máximos relativos para los valores de $Z(t)$ en N iteraciones.

Adicionalmente, se esperaría poder realizar una suerte de predicción empírica sobre los datos de Z , una vez que se ha obtenido alguna relación de mapeo iterado sobre los M_N , la misma que puede estar dada por interpolación de los puntos en la Figura 3.12. Sin embargo este tipo de procedimiento es sumamente inexacto, en el sentido de que dada la sensibilidad que las trayectorias toman, en cada variación de los parámetros del número de Rayleigh y de Prandtl, y por ende también de los máximos relativos de

la función Z . Ahora, si se desea conocer con cierto grado de precisión, no solamente los M_N en cada iteración, sino que si se intentase reconstruir la trayectoria a partir de interpolación entre curvas vecinas, se presentarían más dificultades aún e inexactitudes propias del comportamiento de las soluciones de (SL).

En tal sentido y considerando que solamente se ha tomado un sistema para un fenómeno atmosférico muy simplificado, la capacidad de predicción real del clima en un largo período de tiempo que es gobernada por sistemas tipo Lorenz, se vuelve imposible desde el punto de vista práctico. Este comportamiento de los sistemas y su sensibilidad es una característica del caos, una rama matemática de mucha profundidad y que este trabajo intenta únicamente ubicar en el contexto del problema, esperando ser el inicio de un posterior y más formal estudio.

3.5 Conclusiones

- La derivación del sistema de ecuaciones diferenciales no lineales de Lorenz, se da desde las ecuaciones de Navier-Stokes expresadas en coordenadas cartesianas y donde se omite una variable espacial.
- El sistema de Lorenz modela un fluido bidimensional, en particular, un fenómeno de convección de una celda ideal de Rayleigh-Bénard en la atmósfera.
- Las deducciones y consideraciones físicas que resultan a partir del fenómeno convectivo, apoyadas en el artículo [20], fueron la base para el trabajo de Edward Lorenz, dicho trabajo se inicia desde las ecuaciones diferenciales parciales [2.49] y [2.54], las mismas que son deducidas en este estudio.
- El sistema de Lorenz para modelizar el fenómeno convectivo, identifica dos funciones principales, la función φ para la temperatura y la función de corriente Ψ , sus condiciones de borde, reflejan que la celda de Rayleigh-Bénard está aislada y es esta entonces, una idealización de la realidad física.
- Posterior a asumir que tanto φ como Ψ pueden expresarse como series de Fourier, con las consideraciones respectivas de variables adimensionales, manipulaciones algebraicas y los respectivos cambios de variable, desde las ecuaciones diferenciales parciales se deriva esencialmente, el sistema de Lorenz, del artículo [15].
- Se ha demostrado que el sistema de Lorenz posee una simetría espacial en 2 dimensiones.
- Se realizó un estudio empírico de la estabilidad de las soluciones del sistema de Lorenz, de observar las gráficas de las soluciones en N iteraciones, así como de los espacios de fase, se concluye que a pequeños cambios en los parámetros del sistema, las soluciones se disparan ante la ausencia total de periodicidad, este fenómeno es característico de los sistemas que presentan caos.
- Con cierta combinación de parámetros del sistema de Lorenz ($\rho = 28, \sigma = 10, b = 8/3$), para los números de Rayleigh, de Prandtl y del factor geométrico respectivamente; además de las condiciones iniciales $(X_0, Y_0, Z_0) = (0, 1, 0)$, se observa que en el espacio de fases se presentan 2 atractores, C_1 y C_2 .
Es hacia estos atractores donde las trayectorias se arremolinan sin cruzarse nunca (indicando la ausencia de periodicidad), esto es una característica de un objeto matemático con propiedades geométricas y topológicas bastante complicadas, conocido como el atractor extraño de Lorenz.

- Este caso de estudio, ejemplifica la dificultad inherente al momento de tratar sistemas de ecuaciones diferenciales que gobiernan los fenómenos atmosféricos, pues muy a parte de las limitaciones de cálculo, dados por una determinada capacidad computacional, los sistemas en sí mismos son altamente sensibles a mínimas variaciones, tanto de sus condiciones iniciales como de sus parámetros.

En este sentido, una predicción meteorológica por ejemplo, es lo suficientemente fiable, mientras los parámetros que la componen, no den una transición hacia el comportamiento caótico, es por esto que la predicción totalmente confiable del clima, resulta en términos prácticos, imposible.

3.6 Recomendaciones

- Se recomienda leer previamente los artículos [16], [17] y [20], antes de abordar el célebre artículo de E. Lorenz, [15].
- Un entendimiento de los principales fenómenos físicos de la atmósfera es necesario y ayuda a comprender ciertos pasos en la derivación del modelo, que si bien no son lo suficientemente rigurosos, tienen el soporte necesario para haber sido tomadas por los autores.
- Se recomienda prestar cuidado al momento de tratar con las variables adimensionales, estas son muy requeridas para no cargar mucho la notación.
- Dada la capacidad actual de los *solvers* de ecuaciones diferenciales, el sistema de Lorenz puede ser resuelto relativamente bien en cualquiera de ellos, pero para explorar el comportamiento de las soluciones del sistema, se requiere programar códigos adicionales, un ejemplo de estos se incluyen en el anexo.
- Para un posterior trabajo, se recomienda continuar el estudio desde las propiedades de los máximos relativos de las soluciones del sistema, este parece ser una buena introducción para entender el atractor extraño de Lorenz.

Apéndice A

Tratamiento matricial para subvectores de $X(t)$, $Y(t)$, $Z(t)$

A.1 Extracción de vectores en N iteraciones

A continuación se detallan el código MATLAB que se implementó para formar la matriz de resultados, dadas N iteraciones, con un determinado tamaño de paso para las variables X , Y y Z . A continuación se indican subvectores para las primeras 5000 iteraciones con un tamaño de paso de 5.

```
1
2     %% Generación de subvectores en N pasos
3
4     % Cantidad de iteraciones a graficar
5     tam_analisisX=5000;
6     tam_analisisY=5000;
7     tam_analisisZ=5000;
8
9     % Tamaño del paso
10    N_X=5;
11    N_Y=5;
12    N_Z=5;
13
14    % Vectores de trayectorias
15    X_tray=X(1:1:tam_analisisX);
16    Y_tray=Y(1:1:tam_analisisY);
17    Z_tray=Z(1:1:tam_analisisZ);
18
19    % Ajuste de dimensiones
20    tam_vectorX=size(X_tray,1);
```

```

21 tam_subvectorX=fix(tam_vectorX/N_X);
22
23 tam_vectorY=size(Y_tray,1);
24 tam_subvectorY=fix(tam_vectorY/N_Y);
25
26 tam_vectorZ=size(Z_tray,1);
27 tam_subvectorZ=fix(tam_vectorZ/N_Z);
28
29 % Solicita memoria para el tamaño del subvector
30 X_N=zeros(tam_subvectorX+1,1);
31 Y_N=zeros(tam_subvectorY+1,1);
32 Z_N=zeros(tam_subvectorZ+1,1);
33
34 % Extracción de subvectores
35
36 X_N(1,1)=X_tray(1,1);
37 for i=1:tam_subvectorX
38     s=i*N_X;
39     X_N(i+1)=X_tray(s);
40 end
41
42 Y_N(1,1)=Y_tray(1,1);
43 for i=1:tam_subvectorY
44     s=i*N_Y;
45     Y_N(i+1)=Y_tray(s);
46 end
47
48 Z_N(1,1)=Z_tray(1,1);
49 for i=1:tam_subvectorZ
50     s=i*N_Z;
51     Z_N(i+1)=Z_tray(s);
52 end
53
54
55 % Índice de iteración
56 index_itera(1,1)=1;
57 for i=1:tam_subvectorZ
58     s=i*N_Z;
59     index_itera(i+1)=s;
60 end
61
62 % Matriz de resultados
63 M_graficacion=[index_itera' X_N Y_N Z_N];

```

A.2 Extracción de vectores con máximos relativos para $Z(t)$ en N iteraciones

Se implementó un código el cual encuentra y discrimina los máximos y mínimos de la función $Z(t)$ de todo el universo de valores que toma dicha función, el criterio utilizado está basado en el cambio del valor de la pendiente que se da en cada iteración referente de los mínimos y máximos relativos, se ha discriminado el máximo relativo como el primer valor mayor que toma $Z(t)$ a partir de su primer mínimo relativo, el cual es aproximadamente 26. Finalmente, se realiza un gráfico iterativo de cada unos de estos máximos en el plano M_{N+1} vs M_N .

```
1  %% Extracción de subvectores de máximos y mínimos
2
3  % Espacio requerido para la matriz de máximos
4
5  % En la 1era columna se ubica los valores de Z(t)
6  % En la 2da columna se ubica las pendientes
7  % En la 3era columna se ubican los signos de las pendientes
8  % En la 4ta columna se ubican los cambios de monotonía en Z(t)
9
10 matriz_max=[Z zeros(size(Z,1),1) zeros(size(Z,1),1) ...
11             zeros(size(Z,1),1)];
12
13 % Calculo de pendiente
14 for i=2:1:size(matriz_max,1)
15     matriz_max(i,2)=matriz_max(i,1)-matriz_max(i-1,1);
16 end
17
18 % Cálculo del cambio de monotonía
19 for i=2:1:size(matriz_max,1)
20     if (matriz_max(i,2) ≥ 0 )
21         matriz_max(i,3)=1;
22     else
23         matriz_max(i,3)=0;
24     end
25 end
26
27 % Ubicación de maximos y minimos
28 % El max o min se nombra por 1, el resto 0.
29 for i=3:1:size(matriz_max,1)
30
31     if (matriz_max(i,3) == matriz_max(i-1,3))
```

```

32     matriz_max(i-1,4)=0;
33     else
34         matriz_max(i-1,4)=1;
35     end
36 end
37
38 % Discriminación entre máximos y mínimos
39
40 for i=3:1:size(matriz_max,1)
41
42     if (matriz_max(i,4)==1 && matriz_max(i,1)≥26)
43         matriz_max(i,5)=matriz_max(i,1);
44     end
45     if (matriz_max(i,4)==1 && matriz_max(i,1)<26)
46         matriz_max(i,5)=0;
47     end
48 end
49
50 % Extracción de máximos
51 a=1;
52 vec_maximos_rel=[];
53 for i=1:1:size(matriz_max,1)
54     if matriz_max(i,5)>0
55         vec_maximos_rel(a,1)=matriz_max(i,5);
56         a=a+1;
57     end
58
59 end
60
61
62 % Graficar Mapeo iterado
63 for i=2:1:size(vec_maximos_rel,1)
64     scatter(vec_maximos_rel(i-1,1),vec_maximos_rel(i,1), 'filled')
65     hold all
66     grid on
67     title ('$$M_{N+1} \quad \textit{vs} \quad \textit{quad} \dots
68           M_N$$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 15, ...
69           ...'FontWeight', 'bold', 'FontName', 'Helvetica');
70 xlabel('$$M_N$$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);
71 ylabel('$$ M_{N+1}$$', 'Interpreter', 'latex', 'FontSize', 12);
72 end

```

Máximos Relativos														
N	M_{N+1}	M_N	N	M_{N+1}	M_N	N	M_{N+1}	M_N	N	M_{N+1}	M_N	N	M_{N+1}	M_N
1		48.3699	31	39.7000	40.0834	61	36.0812	37.6410	91	43.6542	34.0919	121	43.7604	33.9681
2	48.3699	28.7887	32	40.0834	39.2638	62	37.6410	40.6790	92	34.0919	34.8932	122	33.9681	34.7362
3	28.7887	28.8950	33	39.2638	41.2078	63	40.6790	38.1937	93	34.8932	35.9268	123	34.7362	35.7187
4	28.8950	29.0109	34	41.2078	37.3486	64	38.1937	42.5193	94	35.9268	37.4024	124	35.7187	37.0842
5	29.0109	29.1371	35	37.3486	39.9766	65	42.5193	35.5183	95	37.4024	40.0949	125	37.0842	39.4177
6	29.1371	29.2707	36	39.9766	39.4998	66	35.5183	36.8007	96	40.0949	39.2549	126	39.4177	40.7897
7	29.2707	29.4125	37	39.4998	40.5795	67	36.8007	38.8628	97	39.2549	41.2464	127	40.7897	38.0239
8	29.4125	29.5669	38	40.5795	38.3773	68	38.8628	42.7359	98	41.2464	37.2932	128	38.0239	41.8317
9	29.5669	29.7314	39	38.3773	43.5603	69	42.7359	35.2431	99	37.2932	39.8457	129	41.8317	36.4547
10	29.7314	29.9088	40	43.5603	34.2100	70	35.2431	36.4035	100	39.8457	39.7682	130	36.4547	38.2494
11	29.9088	30.0958	41	34.2100	35.0361	71	36.4035	38.1618	101	39.7682	39.9250	131	38.2494	42.7955
12	30.0958	30.3066	42	35.0361	36.1222	72	38.1618	42.4031	102	39.9250	39.5931	132	42.7955	35.1649
13	30.3066	30.5289	43	36.1222	37.7051	73	42.4031	35.6690	103	39.5931	40.3409	133	35.1649	36.2940
14	30.5289	30.7717	44	37.7051	40.8543	74	35.6690	37.0183	104	40.3409	38.7850	134	36.2940	37.9935
15	30.7717	31.0401	45	40.8543	37.9140	75	37.0183	39.2779	105	38.7850	43.1757	135	37.9935	41.7210
16	31.0401	31.3363	46	37.9140	41.4738	76	39.2779	41.1697	106	43.1757	34.6785	136	41.7210	
17	31.3363	31.6574	47	41.4738	36.9641	77	41.1697	37.4229	107	34.6785	35.6374			
18	31.6574	32.0224	48	36.9641	39.1729	78	37.4229	40.1331	108	35.6374	36.9773			
19	32.0224	32.4344	49	39.1729	41.5132	79	40.1331	39.1807	109	36.9773	39.1949			
20	32.4344	32.9007	50	41.5132	36.8997	80	39.1807	41.4779	110	39.1949	41.4282			
21	32.9007	33.4469	51	36.8997	39.0430	81	41.4779	36.9560	111	41.4282	37.0241			
22	33.4469	34.0956	52	39.0430	41.9586	82	36.9560	39.1542	112	37.0241	39.2879			
23	34.0956	34.8894	53	41.9586	36.2779	83	39.1542	41.5812	113	39.2879	41.1562			
24	34.8894	35.9278	54	36.2779	37.9554	84	41.5812	36.8112	114	41.1562	37.4315			
25	35.9278	37.4096	55	37.9554	41.5935	85	36.8112	38.8773	115	37.4315	40.1573			
26	37.4096	40.1028	56	41.5935	36.7806	86	38.8773	42.6666	116	40.1573	39.1343			
27	40.1028	39.2392	57	36.7806	38.8312	87	42.6666	35.3314	117	39.1343	41.6406			
28	39.2392	41.2965	58	38.8312	42.9160	88	35.3314	36.5346	118	41.6406	36.7127			
29	41.2965	37.2273	59	42.9160	35.0046	89	36.5346	38.3881	119	36.7127	38.6995			
30	37.2273	39.7000	60	35.0046	36.0812	90	38.3881	43.6542	120	38.6995	43.7604			

Cuadro A.1: Máximos relativos de $Z(t)$ correspondientes a las primeras 13273 iteraciones

Referencias

- [1] Hiroyuki Nagashima & Yoshikazu Baba. *Introduction to Chaos*. Institute of Physics Publishing Bristol and Philadelphia, 1999.
- [2] Robert G. Bartle. *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*. John Wiley Sons, Inc., 175 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10010, 1996.
- [3] S. Chandrasekhar. *Hydrodynamic and Hidromagnetic Stability*. Oxford University Press, first edition, 1961.
- [4] Augusto Armando de Castro Júnior. *Curso de Equações Diferenciais Ordinárias*. Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 2009.
- [5] Manuel de la Torre Juárez. *Caos Disipativo, Caos Espacio - Temporal y Transición a la Turbulencia en Fluidos Incompresibles*. Escuela Politécnica Nacional. Facultad de Ciencias, 1996.
- [6] Rafael José Iorio Jr. & Valéria de Magalhães Iorio. *Fourier Analysis and Partial Differential Equations*. Cambridge University Press, The Edinburgh Building, Cambridge CB2RU, 2001.
- [7] Charles L. Fefferman. Existence and smoothness of the navier-stokes equation. *Clay Mathematics Institute*, pages 1–5, 2000.
- [8] Wikipedia Foundation. Boussinesq approximation (buoyancy) — Wikipedia, the free encyclopedia. [http://en.wikipedia.org/wiki/Boussinesq_approximation_\(buoyancy\)](http://en.wikipedia.org/wiki/Boussinesq_approximation_(buoyancy)), 2013.
- [9] Robert C. Hilborn. *Chaos and Nonlinear Dynamics*. Oxford University Press, Oxford University Press 198 Madison Avenue New York,USA, 1998.
- [10] Carl Hofer. Causal determinism. <http://plato.stanford.edu/entries/determinism-causal/#EpiDet>, Enero 2010.
- [11] Tim D. Sauer & James A. Yorke Kathleen T. Alligood. *CHAOS An introduction to Dynamical Systems*. Springer-Verlag New York, Inc, 175 Fifth Avenue, New York, NY 10010, USA, 1996.

- [12] Borys Alvarez-Samaniego & David Lannes. Large time existence for 3d water-waves and asymptotics. *Inventiones Mathematicae*, 171:485–541, 2008.
- [13] Edward N. Lorenz. Maximum simplification of the dynamic equations. *A Quarterly Journal of Geophysics*, 12(3).
- [14] Edward N. Lorenz. Simplified dynamic equations applied to the rotating-basin experiments. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19:39–51, 1961.
- [15] Edward N. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 20:130–141, 1963.
- [16] Edward N. Lorenz. The predictability of hydrodynamic flow. *The New York Academy of Sciences*, 25:409–432, 1963.
- [17] Edward N. Lorenz. Nonlinearity, weather prediction, and climate deduction. *Air Force Cambridge Research Laboratories*, 25:1–20, 1966.
- [18] Alexander Chorin & Jerrold E. Marsden. *A mathematical Introduction to Fluid Mechanics*. Springer-Verlag, 175 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10010, 2009.
- [19] L.M. Milne-Thomson. *Theoretical Hydrodynamics*. Dover Publications, Inc., London, 1938, 1971.
- [20] Barry Saltzman. Finite amplitude free convection as an initial value problem. *Journal of the Atmospheric Sciences*, 19:329–341, 1962.
- [21] Irving H. Shames. *Mecánica de Fluidos*. McGraw-Hill, 2 Penn Plaza, 10th Floor, NY, 1995.
- [22] Colin Sparrow. *The Lorenz Equations, Bifurcations, Chaos, and Strange Attractors*. Springer-Verlag New York Inc., 175 Fifth Avenue, New York, N. Y. 10010, U.S.A., 1982.
- [23] Morris W. Hirsch & Robert L. Devaney Stephen Smale. *Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.
- [24] George G. Stokes. On the theory of oscillatory waves. *Philosophical Society*, 8:441–455, 1849.
- [25] Stephen H. Strogatz. *Nonlinear Dynamics and Chaos*. Perseus Books, 1994.
- [26] R.B. Stull. *Meteorology For Scientists And Engineers*. Brooks/Cole, 2005.
- [27] Michael Favre-Marinet & Sedant Tardu. *Convective Heat Transfer*. John Wiley Sons, Inc., 111 River Street, Hoboken, NJ 07030, USA, 2009.

- [28] Geoffrey K. Vallis. *Atmospheric and Oceanic Fluid Dynamics*. Cambridge University Press, 2006.
- [29] Li Zhen. Six-mode truncation and chaotic characteristics of atmospheric convection system. *Springer-Verlag Berlin Heidelberg*, pages 553–559, 2012.