

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

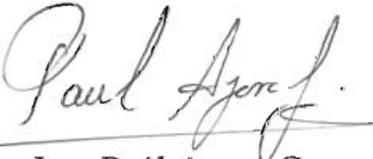
**ESTUDIO DEL POTENCIAL DE ACOPLAMIENTO ENTRE
ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA CERCANOS**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO
ELECTRICO EN SISTEMAS ELECTRICOS DE POTENCIA**

JAVIER ALFONSO IÑIGUEZ IZQUIERDO

QUITO, ABRIL, 1997

Certifico que la presente tesis de grado ha sido realizada en su totalidad por el Sr. Javier Alfonso Iñiguez Izquierdo.


Ing. Paúl Ayora G.

DEDICATORIA

A mis padres que gracias a su esfuerzo y sacrificio he podido salir adelante. A mis hermanos que siempre me apoyaron. A la memoria de mi abuelita, quien supo alentarme en todo momento.

AGRADECIMIENTO

Mi agradecimiento a todos los profesores de la Escuela Politécnica Nacional que de una u otra manera contribuyeron a mi formación profesional, y muy especialmente al Ing. Paúl Ayora G. por su paciencia y sabios consejos para la culminación de este trabajo. A los ingenieros Cristóbal Espinosa y Francisco Fuentes por su valiosa colaboración en el desarrollo de esta tesis.

**En el presente trabajo se utilizó el BORLAND C ++ v 3.0 Copyright
Borland Inc. como herramienta computacional para su desarrollo.**

CAPITULO I

1.1.- INTRODUCCION. [1][3][16]

En los años 60 los ingenieros electrónicos modificaron el medio ambiente industrial para que se acomode a sus equipos, y así nació el cuarto de computadoras. La tecnología de puesta a tierra de las computadoras ha tenido momentos difíciles, pero rara vez resultó en discusiones entre los ingenieros electrónicos y eléctricos.

Sin embargo, con los años 70 vino una nueva tecnología lógica más cara de alta densidad y alta velocidad y de memoria embebida en el microprocesador y sus chips de soporte. Sus fabricantes aplicando sensores y controles a la industria química incorporaron esta nueva tecnología computarizada a sus productos que subsecuentemente evolucionaron en control distribuido. Este concepto permite primero poner la computadora en donde está la acción y así el contorno del cuarto de cómputo se abrió. El resultado fue una tela araña de equipo electrónico sensible puesto encima de un complejo industrial con su entorno eléctrico hostil. Hoy la puesta a tierra de sistemas distribuidos puede ser difícil, varía de un trabajo a otro por que la distribución física y el equipo varían con los requerimientos del trabajo y muy rara vez los ingenieros electrónicos y eléctricos reconocen cómo sus decisiones impactan

las metas de cada uno.

El término puesta a tierra, de aquí en adelante, se referirá a todas las facetas de la puesta a tierra incluyendo la seguridad, el camino de retorno de la corriente de falla, el modo de eliminación de ruido común, protección contra rayos, eliminación estática lógica, protección de radiación magnética, etc.

En principio un diseño de puesta a tierra seguro tiene dos objetivos:

1.- Suministrar métodos para alcanzar corrientes eléctricas en la tierra bajo condiciones normales y de falla sin exceder los límites del equipamiento y sin afectar adversamente el funcionamiento y la continuidad del servicio.

2.- Asegurar que una persona en la vecindad de las instalaciones de puesta a tierra no esté expuesta a las peligrosas y críticas descargas eléctricas.

Un método práctico de enfocar el problema de seguridad de la puesta a tierra es procurar controlar la interacción de los dos tipos de conexión a tierra:

1.- La conexión a tierra intencional que consiste en electrodos de puesta a tierra enterrados a alguna profundidad bajo la superficie de la tierra; y

2.- La conexión a tierra accidental que es temporalmente establecida por una persona expuesta a un gradiente de potencial en la vecindad de las instalaciones de puesta a tierra.

Generalmente se asume que cualquier objeto conectado a tierra, puede ser tocado sin problemas, lo que ha ocasionado accidentes en el pasado. Técnicamente se conoce que una subestación de baja resistencia de puesta a tierra, no es en sí misma, una garantía de seguridad. No hay una relación simple entre la resistencia del sistema de puesta a tierra como un todo y la máxima corriente de descarga a la cual una persona puede estar expuesta. De ahí que una subestación de baja resistencia de puesta a tierra puede ser peligrosa bajo algunas circunstancias, mientras otra subestación con una resistencia muy alta puede ser segura o hacérsela segura con un diseño cuidadoso.

Si una subestación está alimentada por una línea aérea sin protección o cable neutro, es importante una malla de baja resistencia, debido a que una

parte substancial del total de la corriente de falla a tierra entra en ésta causando un alza constante del potencial local de puesta a tierra (Fig. 1.1a).

Si se usa un cable de protección, de una barra aislada a gas o un cable alimentador enterrado, etc, una parte de la corriente de falla regresa a través de este camino metálico directamente a la fuente, ya que este lazo metálico provee un camino de retorno paralelo al circuito y de baja impedancia, el aumento del potencial local de puesta a tierra es en este caso de menor magnitud (Fig. 1.1b).

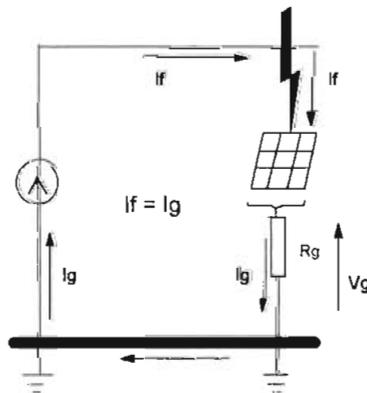


Fig 1.1a

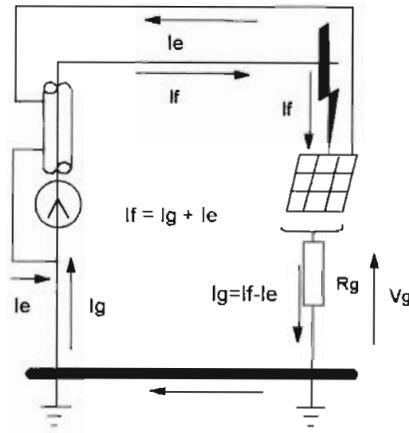


Fig. 1.1b

Fig. 1.1.- Típica avería de una subestación con o sin múltiples caminos de retorno a tierra.

En cualquiera de los casos, el efecto de esa porción de corriente de falla que entra a tierra dentro del área de la subestación debe ser analizado con más profundidad. Si la geometría, la localización de los electrodos de puesta a tierra, las características del suelo local, y otros factores contribuyen a una excesiva gradiente de potencial en la superficie de la tierra, el sistema de puesta a tierra puede ser inadecuado sin importar su capacidad de llevar la corriente de falla en magnitud y duración permitidos por los relés de protección.

Durante las condiciones típicas de falla a tierra el flujo de corriente a tierra producirá gradientes de potencial dentro y alrededor de una subestación. La Fig. 1.2 nos muestra este efecto en una subestación con una simple malla de puesta a tierra rectangular en un suelo homogéneo.

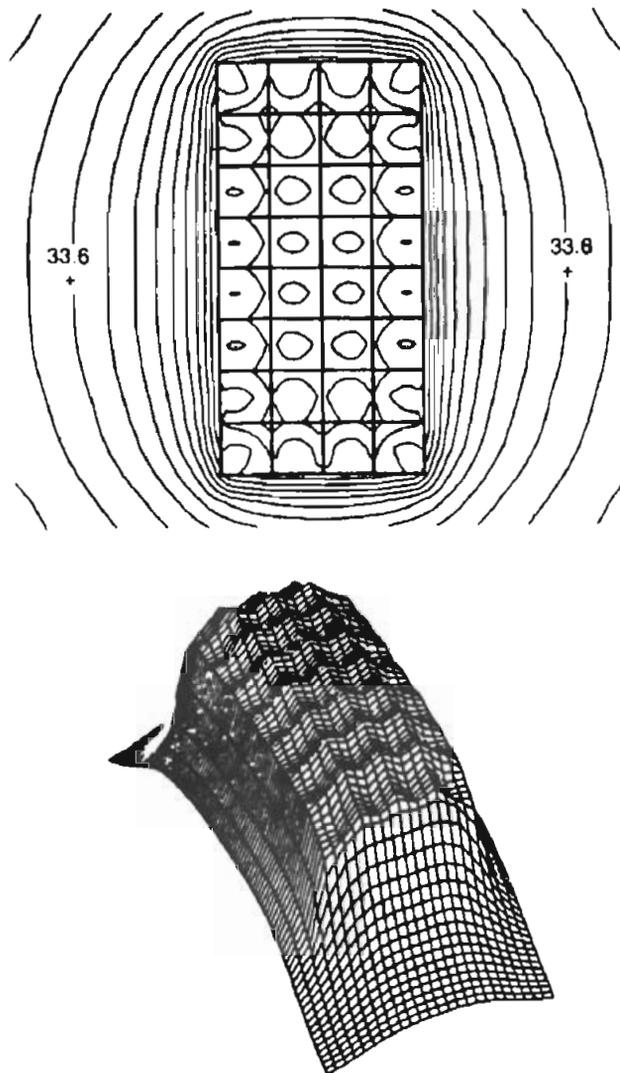


Fig. 1.2.- Contornos equipotenciales de una malla de puesta a tierra típica con o sin varillas de puesta a tierra.[1]

Cuando es diseñada la puesta a tierra de un sistema de potencia, el ingeniero eléctrico calcula la máxima corriente de falla en el sistema y se asume la localización de la falla como remota, ésto determina la configuración de la malla de puesta a tierra, así mismo deberá encontrar los diversos requerimientos eléctricos y de seguridad inicialmente asignados como criterios de diseño. Sin embargo, por una evaluación realista del comportamiento de tales puestas a tierra, es importante que en la posible falla se tome en cuenta los objetos metálicos enterrados o mallas de puesta a tierra cercanas para los cálculos. Por supuesto, en algunos casos, las decisiones adecuadas pueden ser tomadas por una cuidadosa inspección cualitativa de los problemas y por aplicación de las recomendaciones de los estándares o guías.

En otros casos, el problema puede ser bastante complejo, imposibilitando una aplicación confiable de las recomendaciones cualitativas previas, consecuentemente, el ingeniero tendrá dos posibilidades:

- 1.- Llevar a cabo una evaluación cuantitativa del problema, determinar las zonas de mayor riesgo y aplicar las medidas correctivas necesarias.
- 2.- Modificar el problema original en uno más simple de “aislamiento”

de la puesta a tierra principal y fallas remotas.

A partir de que los estándares aprobados o literatura técnica no indican métodos para resolver tales problemas, la segunda medida es prácticamente el único medio factible, aunque no siempre es el medio más económico; mientras que la primera medida puede ser un estudio costoso comparado con el clásico modo de enfrentar el problema, sin embargo, si comparamos a algunos injustificados trabajos e incremento de costos de materiales, un adecuado estudio de ingeniería ciertamente resultaría económico.

El presente trabajo intenta ser una guía para analizar los problemas que se podrían presentar cuando existan puestas a tierra cercanas, enfocando el potencial “inducido” en una puesta a tierra cuando la corriente de falla retorna por otra puesta a tierra cercana.

1.2.- GENERALIDADES. [4][2]

En principio parecería que disponer de un solo sistema (o electrodo) de puesta a tierra, común para instalaciones de potencia y electrónicas no acarrearía consecuencias molestas, principalmente a estas últimas, pero el

“ruido” eléctrico producido por las primeras si acarrea problemas técnicos en los circuitos electrónicos, especialmente si éstos contienen elementos digitales tales como computadores.

El problema de conectar computadoras o equipos con componentes digitales en un determinado sistema, no viene del sistema ruidoso, pero al conectar computadoras en varios puntos del sistema ruidoso, se incurre en lo que se conoce como una puesta a tierra de circuito cerrado.

La Fig. 1.3 muestra un sistema de puesta a tierra de computadoras conectado a múltiples puntos del sistema ruidoso que provee varios caminos para algunos voltajes de ruido.

Algunas de las corrientes circulantes en el sistema de puesta a tierra de potencia ahora fluyen a través del sistema de puesta a tierra de la computadora, introduciendo voltajes falsos superiores. Esto, por supuesto, interfiere con el sistema de señal normal de la computadora y puede causar errores.

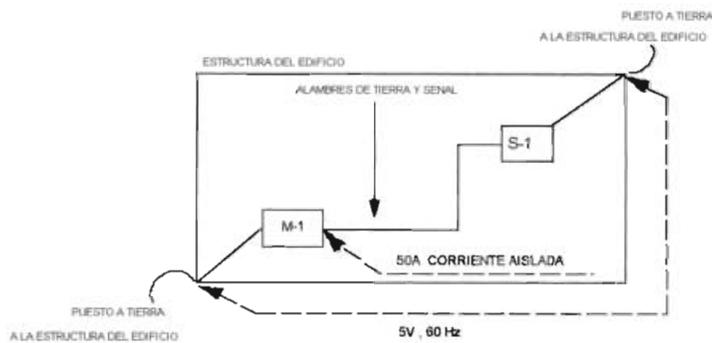


Fig. 1.3.- 5V provenientes de la puesta a tierra múltiple por el ruido de la estructura del edificio.

Históricamente, los fabricantes de computadoras y otros equipos sensitivos han requerido que sus equipos sean puestos a tierra mediante un sistema de puesta a tierra aislado, separado del sistema de puesta a tierra de potencia eléctrica. Esto fue pretendido para aislar las computadoras del sistema de puesta a tierra del equipo de potencia, que efectivamente es: ruidoso, capacitivo y con corrientes de fuga abundantes. Entre una esquina de un edificio y otra es frecuente encontrar diferencias de potencial de 5V o más, y han habido reportes de la existencia de voltajes mayores a los 125V entre varios puntos en un sistema.

Cuando en un edificio se está realizando soldadura u ocurren fallas de potencia a tierra, se recogen ruidos adicionales. Ese voltaje erróneo inyectado en un sistema de computadoras de múltiple puestas a tierra ha sido factor importante para que los fabricantes de computadoras requieran sistemas de tierra aislados.

Un fabricante de computadoras para control de procesos y sistemas de control de distribución requiere de cuatro sistemas de conexiones de puesta a tierra diferentes:

- El primer sistema al que nos referimos se llama varillas de seguridad de puesta a tierra AC (principales). “Este es aparentemente el sistema de puesta a tierra de la NEC”.
- El segundo set, es de varillas de puesta a tierra de rayos.
- El tercer set, es llamado varillas de puesta a tierra de referencia de computadoras.
- El cuarto está aislado llamado como varillas de puesta a tierra de

referencia maestro.

La Fig. 1.4 muestra un sistema de puesta a tierra de computadoras aislado del sistema de puesta a tierra de potencia y del sistema de puesta a tierra del edificio, de esa manera este ruido no ingresa a las computadoras.

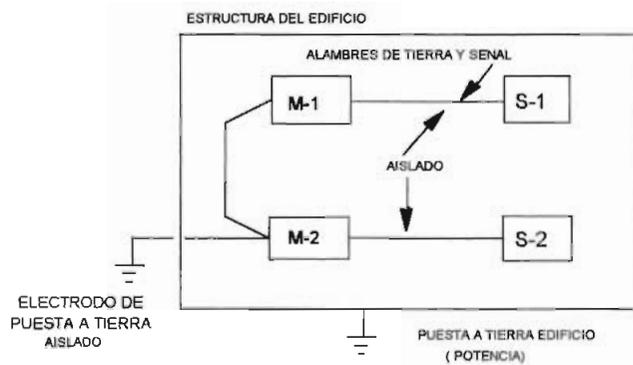


Fig. 1.4.- Puesta a tierra aislada de computadoras.

Por todo lo indicado es normal encontrar dos o más electrodos de puesta a tierra cercanos, considerados “independientes”, siendo al menos uno de ellos exclusivamente dedicado al sistema eléctrico de potencia.

Los electrodos cercanos no son en realidad totalmente independientes, sino que hay un cierto grado de acoplamiento entre ellos, proporcional a las condiciones del terreno, a la geometría de cada uno de los electrodos y del espaciamiento interelectrónico, así como de las corrientes circulantes. Este acoplamiento se manifiesta como una diferencia de potencial entre los diferentes electrodos de puesta a tierra y entre éstos y una tierra remota.

En el caso de que se eleve el potencial de tierra del edificio con respecto a la tierra remota, aparecen importantes voltajes entre el equipamiento de la computadora y la tierra del edificio como se muestra en la Fig. 1.5. Esto puede ser desarrollado por la descarga de un rayo o por el suministro o cortocircuito a tierra de las líneas de potencia. Por la interacción de este voltaje y la capacitancia entre el edificio y la computadora se imprime un voltaje apreciable en la computadora y sus componentes, con riesgo de destruir transistores, y otros elementos sensibles del sistema de la computadora o equipo electrónico.

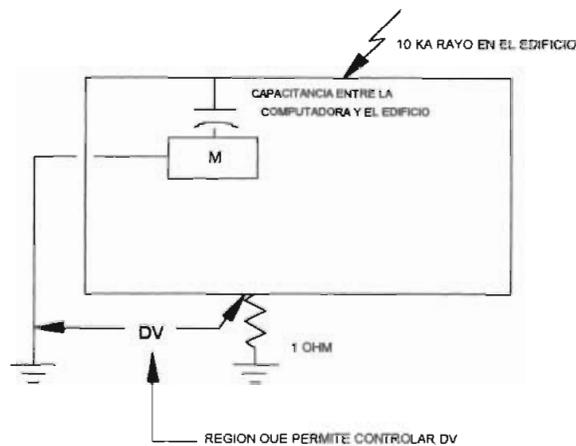


Fig. 1.5.- Efectos del rayo en el edificio con electrodo de puesta a tierra aislado.

En la eventualidad de producirse una falla a tierra en el sistema de suministro de potencia de la computadora, existiría riesgo al posibilitarse el ingreso de señales dañinas en los equipos, ya que la relativa alta resistencia del electrodo de puesta a tierra de potencia en relación al electrodo de puesta a tierra aislado que lo es para poder prevenir la operación del equipo de protección de fallas, daría la posibilidad que el voltaje del circuito de puesta a tierra de potencia sería mayor al del circuito de puesta a tierra de la computadora.

Cuando componentes lejanos (satélites) son conectados a tierra en un electrodo de puesta a tierra aislado (fuera del edificio principal), se puede desarrollar una diferencia de potencial entre los satélites y los equipos semiconductores principales, ocasionando su destrucción. La Fig.1.6 ilustra esto. Un elemento de repetición aislante llamado modem, se requiere para controlar este sobrevoltaje.

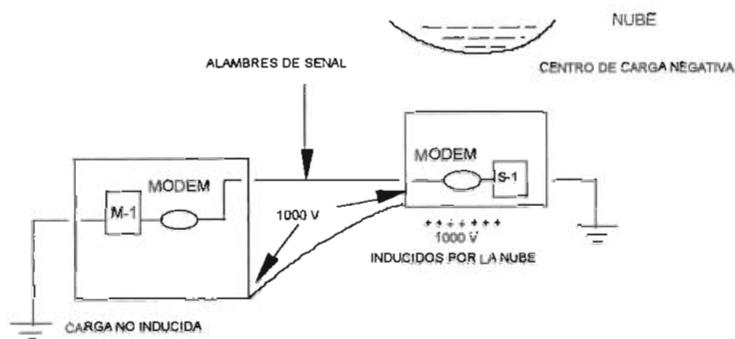


Fig. 1.6.- Unidad remota debajo del centro de una nube cargada.

En la figura anterior se puede observar que M-1 está puesto a tierra en un electrodo aislado fuera del edificio, los 1000V que se los toma como un ejemplo se desarrollan a través de M-1 en serie con la resistencia del electrodo

aislado fuera del edificio, es decir sobre los 30 ohmios. Así la tensión del voltaje sobre los semiconductores en M-1 será diferente de los 1000V. Voltajes de 20V o más son probables que destruyan equipos de semiconductores, igual si la duración es sólo un microsegundo.

En la actualidad se están desarrollando y empleando dispositivos caros, para minimizar las diferencias de potencial entre neutro (puesta a tierra del sistema de potencia) y tierra (puesta a tierra aislada). Estos dispositivos tienen un carácter dinámico, lo que constituye un factor de incertidumbre en su cometido.

El flujo de corriente que emerge de un electrodo de tierra y luego se difunde por ella, al alcanzar a otros electrodos embebidos en la tierra los cambia de potencial, produciendo una diferencia de voltaje entre estos electrodos acoplados por la tierra. El presente estudio pretende analizar los parámetros que influyen en este acoplamiento con miras a controlar (de manera estática) estas diferencias de potencial, para lo cual se debe contar con un programa computacional adecuado que permita este estudio.

1.3.- OBJETIVO.

El presente estudio pretende desarrollar un programa computacional para el análisis de las diferencias de potencial o potencial de acoplamiento entre electrodos de puesta a tierra metálicamente aislados con miras a obtener elementos de juicio para un diseño óptimo de un “sistema de puesta a tierra” con electrodos acoplados o pseudoacoplados a través de la tierra.

1.4.- ALCANCE.

Desarrollar un método de análisis del problema de acoplamiento entre electrodos acoplados a través de la tierra, para esto es necesario crear un programa computacional amigable, de simple manejo para el usuario, que despliegue gráficos y permita visualizar resultados, así como, el realizar modificaciones del problema fácilmente y con prontitud.

El programa permitirá encontrar los mapas de campo eléctrico entre dos electrodos de puesta a tierra cercanos, con tal objeto, se utilizará un método que permita determinar tanto los flujos de corriente cuanto las superficies

equipotenciales, que servirán para encontrar y monitorear los elementos de diseño con el fin de lograr un resultado óptimo.

Al tratarse de un primer trabajo sobre el tema, para el estudio a realizarse se tomarán las siguientes restricciones:

- Se considerarán suelos homogéneos.

- Se realizará un estudio bidimensional del problema.

- Se analizarán electrodos de puesta a tierra simples.

CAPITULO II

2.1.- PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. [5]

El problema general consiste en encontrar el mapa de campo eléctrico, conformado tanto por las líneas de flujo de corriente, cuanto por las líneas equipotenciales entre dos electrodos de puesta a tierra cercanos.

Cuando una corriente emerge de un electrodo de tierra y luego se difunde, al alcanzar otro electrodo embebido en la tierra lo cambia de potencial, este segundo electrodo se convierte en una equipotencial y a la vez esta nueva condición influye sobre el primer electrodo haciendo que en éste se produzca una redistribución de la densidad de corriente.

Lo expuesto anteriormente le convierte en un problema que en Teoría Electromagnética se conoce como “problema con condiciones mixtas”, debido a que no se conoce el potencial inducido en el segundo electrodo de puesta a tierra, al mismo tiempo que se constituye en una de las condiciones de frontera para resolver el problema.

Para la resolución del problema se ha escogido un corte transversal a la superficie de tierra, el cual va a constituir la región estudiada, la que debe estar

en función de las dimensiones del sistema de puesta a tierra, como lo muestra la Fig. 2.1.

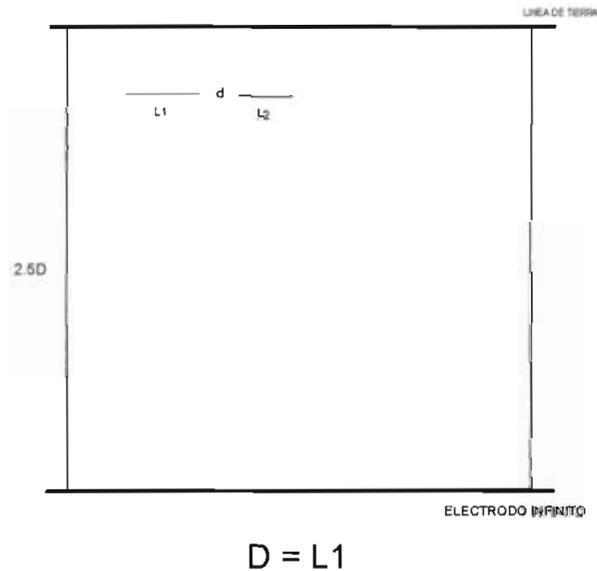


Fig. 2.1 Condiciones del problema

Donde $D = L1$. (ver anexo A)

Una malla de puesta a tierra puede ser adecuadamente representada por un disco equivalente, que para realizar un análisis bidimensional del mismo, se efectúa un corte por el centro. El mismo efecto se lograría empleando conductores cilíndricos enterrados en posición horizontal. Los valores así encontrados deberán ser lógicamente multiplicados por factores de escalamiento para ser aplicados a las mallas de puesta a tierra mediante el uso

del respectivo disco equivalente.

Como electrodos básicos se empleará entonces dos conductores horizontales, paralelos a la superficie de la tierra y con una dirección axial horizontal similar.

Es menester conocer las características de los electrodos de puesta a tierra tales como: profundidad a las que se encuentran enterrados, la distancia de separación entre ellos y dimensiones de los mismos.

El estudio se realizará considerando suelo homogéneo, con su resistividad conocida .

Se debe tener presente la existencia de un electrodo infinito de potencial cero a una distancia de la superficie de tierra que es función del tamaño del electrodo en el que ocurre la descarga de corriente de falla (o de rayo) a tierra. En el presente caso se lo toma a una profundidad 2.5 veces el tamaño del electrodo. (ver figura 2.1)

El electrodo en el que ocurre la descarga de corriente a tierra se le

asigna un potencial referencial del 100%.

2.2.- ANALISIS DE CASOS.

2.2.1.- Sistema de puesta a tierra. [6]

Los sistemas electrónicos sensitivos deben ser sólidamente conectados a tierra como lo establecen la NEC o ANSI / NFPA 780 - 1992. Los sistemas de puesta a tierra diseñados para una instalación de equipo electrónico sensitivo pueden ser conceptualizados como tres subsistemas funcionales. Ellos son:

- Subsistema de protección de falla y personal (NEC sistema de puesta a tierra del equipo), conocido como subsistema de puesta a tierra del sistema de potencia (SEP).

- Subsistema de señal de referencia, conocido como referencia maestra o “tierra lejana”, es decir una tierra sin influencia del SEP.

- Subsistema de protección de rayos.

La NEC no considera la puesta a tierra para circuitos electrónicos, que por otro lado es necesaria, conforme se expuso en 1.2.

2.2.2.- Método de puesta a tierra aislada. [6]

La puesta a tierra aislada de la puesta a tierra principal, tiene como único propósito, ser usada como un posible medio para obtener reducción de ruido eléctrico común, en el circuito en el cual es empleado, y sus efectos son variables.

2.2.3.- Consideraciones de puesta a tierra. [6]

La característica esencial de la puesta a tierra es el desempeño seguro y satisfactorio de un sistema de potencia.

Hay cuatro requerimientos para la puesta a tierra:

- 1.- Suministrar un camino de baja impedancia para el retorno de las corrientes de falla, con la finalidad de que un mecanismo de protección de sobrecorriente pueda actuar rápidamente y despejar el circuito.

2.- Mantener una baja diferencia de potencial entre partes metálicas.

3.- Control de sobrevoltajes.

4.- Disponer de una referencia de potencial común para las diferentes partes y componentes del sistema de potencia.

Como se explicara ampliamente en el capítulo I, la información tecnológica proporcionada por los fabricantes de equipos sensitivos, en lo referente a la puesta a tierra, debe contemplar entre otros aspectos: el tipo de equipo, el diseño, las comunicaciones con otros equipos por líneas de datos. Líneas de datos que muchas veces tienen sus propios conductores de potencial de referencia vinculados o no al equipo de seguridad de puesta a tierra, que pueden constituir un camino común entre los circuitos de señal y los circuitos de potencia, dando origen a los problemas de acoplamiento de ruido.

Esas líneas de datos, generalmente, llevan señales de alta frecuencia, así que las consideraciones de impedancia relacionadas a los aspectos de seguridad (potencia - frecuencia) de un sistema de puesta a tierra de potencia no pueda necesariamente suministrar la baja impedancia deseable a las

frecuencias de señal. Peor aún, pueden presentarse conflictos para los ingenieros de señal entre los objetivos de sus prácticas de puesta a tierra y los no negociables requerimientos de seguridad de las prácticas de puesta a tierra de los sistemas de potencia.

En el caso de sistemas distribuidos de computadoras en varias partes de una instalación, la situación es diferente, la conexión a tierra local en el punto donde un terminal es conectado al sistema de potencia es probable que esté en un potencial diferente de los otros elementos del sistema.

2.2.4.- Electrodo de puesta a tierra primario y auxiliar. [1]

En general la mayoría de sistemas de puesta a tierra están constituidos por dos grupos de electrodos:

- 1.- Aquellos específicamente diseñados para propósitos de puesta a tierra; y,
- 2.- Los electrodos que comprenden varias estructuras metálicas subterráneas instaladas para otros propósitos diferentes de los de una

puesta a tierra.

El presente trabajo enfoca el análisis de los primeros, a los que se los categoriza como electrodos de puesta a tierra primario o de potencia y electrodo de puesta a tierra auxiliar.

2.2.4.1.- Electrodo de puesta a tierra primario o de potencia.

Es un electrodo específicamente diseñado o adaptado para descargar la corriente de falla a tierra, aplicando un modelo específico de descarga, según requiere el diseño de puestas a tierra.

2.2.4.2.- Electrodo de puesta a tierra auxiliar.

Es un electrodo con diseño seguro y operación de reserva, su primera función debe ser diferente que la de conducir la corriente de falla a tierra.

2.3.- SELECCION DEL METODO DE SOLUCION .

En las ecuaciones de Maxwell la variación del tiempo de los campos (B

o H y E o D) son producidos en una región en donde la carga y las fuentes de corriente están variando con el tiempo. Esto es equivalente a decir que el campo E es generado por una variación del flujo magnético en el tiempo.

Cuando las variaciones de los campos en el tiempo no son muy rápidas, como en el caso de las corrientes de 60 Hz, entonces la densidad de corriente J está variando lentamente con el tiempo, y una primera aproximación para el campo E puede ser obtenida al asumir campos cuasi-estáticos.

Como consecuencia, se produce un desacoplamiento entre campo eléctrico y magnético debido a que la diferencial en el tiempo de las ecuaciones de Maxwell serán cero y se reducen a las ecuaciones de la electrostática.

El potencial es una puerta de acceso para cualquier información que se desee acerca del campo electrostático en algún punto. La intensidad del campo eléctrico se puede encontrar a partir del potencial por medio del operador gradiente, y la intensidad del campo eléctrico se puede utilizar para encontrar la densidad del flujo eléctrico, la divergencia de la densidad del flujo da la densidad de carga volumétrica, y se puede obtener rápidamente la densidad de

carga superficial sobre cualquier conductor en el campo, evaluando la densidad de flujo en la superficie.

La meta será encontrar primero el potencial. Esto no se puede lograr por medio de una configuración de carga en un problema práctico pues ninguno indica exactamente cómo están distribuidas las cargas. En realidad, se dan varios objetos conductores y fronteras conductoras y la diferencia de potencial entre ellos.

Considerando el caso general de una fuente de corriente \mathbf{I} en un medio ilimitado con una conductividad $\gamma(\mathbf{P})$ la cual debe ser una función del punto \mathbf{P} en el espacio, el potencial $\phi(\mathbf{P})$ y su gradiente $\mathbf{E}(\mathbf{P})$ están relacionados por las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{E} = \nabla\phi \tag{ec. a)}$$

$$\mathbf{J} = \gamma\mathbf{E} \tag{ec. b)}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (-\gamma \nabla \phi)$$

(ec. c)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = -\nabla \gamma \nabla \phi - \gamma \nabla^2 \phi = 0$$

(ec. d)

donde \mathbf{J} representa la densidad de corriente.

Si se asume que el medio es homogéneo, la conductividad γ es constante, la ecuación **d** se simplifica a:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

(ec. e)

La ecuación **c** es la ecuación de Laplace, y para su resolución se puede emplear el sistema de coordenadas ortogonales cartesianas y un método iterativo.

2.3.1.- Efecto de la densidad de corriente de un conductor enterrado en un suelo de resistividad uniforme. [7]

La distribución de corrientes entre varias partes de electrodos de puesta a tierra está entre los factores más importantes que gobiernan el total de respuesta eléctrica de tales electrodos.

La función densidad de corriente no es constante sobre la superficie del electrodo, pero varía generalmente acorde a algunas reglas complejas. Esta función es influenciada por la configuración del electrodo y las características de estructura del suelo.

2.3.1.1.- Electrodo formado por un conductor lineal, consideraciones básicas. [20]

Consideramos un conductor lineal que se extiende a lo largo del eje x entre $x=-L/2$ y $x=L/2$, enterrado en un medio homogéneo de resistividad ρ y que se extiende indefinidamente.

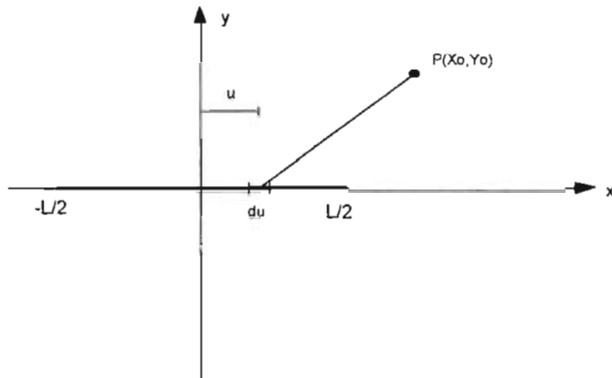


Fig. 2.2

Sea $I(u)$ la corriente que abandona el conductor a la distancia $x=u$, el potencial en un punto $P(x_0, y_0)$ debido a la corriente que abandona el elemento du del conductor es:

$$dV(x_0, y_0) = \frac{dI(u)}{du} \frac{\rho}{4\pi} \left[(x_0 - u)^2 + y_0^2 \right]^{-\frac{1}{2}} du$$

(ec. 2.1)

donde $dI(u)/du$ es el valor de la densidad de corriente en el punto u .

Luego el potencial debido a la corriente que abandona todo el electrodo es:

$$V(x_o, y_o) = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \left[(x_o - u)^2 + y_o^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dI(u)}{du} du$$

(ec. 2.2)

Si la resistencia del conductor se asume despreciable de manera que no haya caída de voltaje a lo largo del conductor, la condición de frontera a ser satisfecha en la superficie del conductor $y_o = a$ es que $dV(x_o, a)/dx = 0$. La distribución de corriente a lo largo del conductor debe satisfacer la siguiente ecuación:

$$0 = \frac{d}{dx_o} \int_{-L/2}^{L/2} \left[(x_o - u)^2 + y_o^2 \right]^{-\frac{1}{2}} \frac{dI(u)}{du} du$$

(ec. 2.3)

Por el método de aproximaciones sucesivas es posible determinar la distribución de corriente a lo largo del conductor.

2.3.1.2.- Electrodo formado por un conductor lineal. [17][18][19]

Antes de calcular el potencial en cualquier punto tiene que ser

determinada la distribución de la densidad de corriente a lo largo del electrodo.

Debido a que el radio del conductor usado en la práctica como electrodo es usualmente mucho menor que el tamaño del electrodo, la distribución superficial de corriente del conductor puede ser reemplazada por un filamento de corriente en el centro del conductor.

Si $J(x,y)$ es la distribución de corriente a lo largo del filamento equivalente que representa al electrodo, el potencial en cualquier punto $P(x_p, y_p)$ debido a un elemento infinitesimal del electrodo está dado por la siguiente ecuación:

$$d\Phi_p = \frac{J(x,y)}{4\pi\gamma} [\phi_p(s) + \phi_p(s')] dx dy$$

(ec. 2.4)

donde s, s' en la ecuación anterior representan los elementos infinitesimales de corriente localizados en el plano x, y y sus correspondientes imágenes.

La expresión anterior es una función de x, y y de x_p, y_p , y por

simplicidad la podemos escribir como función de $\Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p)$. La ecuación se convierte en:

$$d\Phi_p = \frac{J(\mathbf{x}, \mathbf{y})}{4\pi\gamma} \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p) d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

(ec. 2.5)

El potencial Φ_p debido al electrodo está entonces dado como:

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_p, \mathbf{y}_p) d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

(ec. 2.6)

Llevando la integral sobre el electrodo, y conociendo la condición de frontera de que $\Phi = V$ (constante) sobre el electrodo. En consecuencia la ecuación integral para la densidad de corriente está dada como:

$$V = \frac{1}{4\pi\gamma} \iint J(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \Psi(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e) d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

(ec. 2.7)

donde $\mathbf{x}_e, \mathbf{y}_e$ representan las coordenadas de los puntos sobre la superficie del

electrodo.

La ecuación 2.7 debe ser resuelta por subdivisión del electrodo en N razonablemente pequeños elementos, así que la densidad de corriente sea asumida uniforme en cada uno de ellos. La distribución de densidad de corriente puede ser escrita como sigue:

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^N \sigma_i \mathbf{f}_i$$

(ec. 2.8)

donde σ_i representa la densidad de corriente constante sobre el i -ésimo elemento, y la función \mathbf{f}_i es definida como:

$$\mathbf{f}_i = \begin{cases} 1 & \text{sobre el } i\text{-ésimo elemento} \\ 0 & \text{sobre todos los otros elementos} \end{cases}$$

(ec. 2.9)

Sustituyendo 2.8 en 2.7 y satisfaciendo la ecuación resultante en el punto medio $(\mathbf{x}_j, \mathbf{y}_j)$ de cada elemento, se obtiene el siguiente set de ecuaciones:

$$V = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^N I_{ji} \sigma_i, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

(ec. 2.10)

donde los coeficientes de la matriz de potencial I_{ji} son definidos por:

$$I_{ji} = \iint \Psi(x, y, x_j, y_j) dx dy$$

(ec. 2.11)

la integración es llevada sobre el i -ésimo elemento.

El sistema de coordenadas escogido debe ser cambiado de forma tal que el eje x sea paralelo al i -ésimo elemento de corriente (s) y a lo largo de la superficie de tierra, y el eje y perpendicular a éste en el punto medio del elemento de corriente, como muestra la siguiente figura.

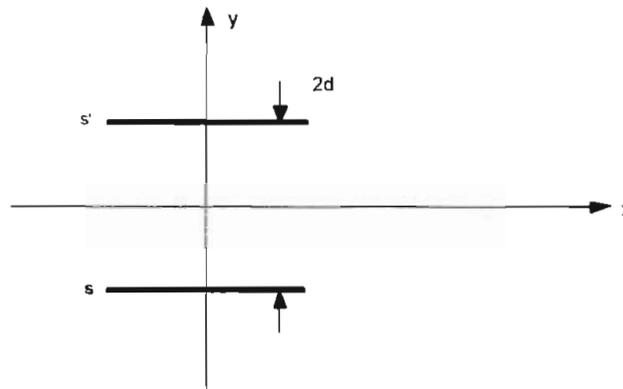


Figura 2.3

Con referencia a este sistema de coordenadas, las coordenadas del punto medio del j -ésimo elemento son x_j, y_j ; I_{ji} puede entonces ser escrito como:

$$I_{ji} = \phi_j(d) + \phi_j(-d)$$

(ec. 2.12)

donde las funciones ϕ_j son calculadas en los puntos x_j, y_j , debido al i -ésimo elemento de corriente de longitud $2L_i$ y su sistema de imágenes. La expresión general para ϕ_j puede ser escrita como:(ver anexo B)

$$\phi_j(\xi) = \ln \left(\frac{x_j + L_i + A_{ij}}{x_j - L_i + B_{ij}} \right)$$

(ec. 2.13)

con

$$A_{ij} = \sqrt{(x_j + L_i)^2 + (y_j - \xi)^2}$$

(ec. 2.14)

$$B_{ij} = \sqrt{(x_j - L_i)^2 + (y_j - \xi)^2}$$

(ec. 2.15)

La solución del set de ecuaciones lineales (ec. 2.10) da la distribución de corriente sobre el electrodo. El potencial en la vecindad del electrodo puede ser encontrado utilizando la distribución de corriente calculada.

Considerando un punto \mathbf{P} en la región, el potencial Φ_p puede ser calculado como:

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\gamma} \sum_{i=1}^N \sigma_i I_{pi}$$

(ec. 2.16)

donde I_{pi} representa la suma de las funciones ϕ para el i -ésimo elemento y sus imágenes como determina la siguiente ecuación:

$$\Phi_p = \frac{1}{4\pi\gamma} [\phi(s) + \phi(s')]$$

(ec. 2.17)

2.3.2.- Solución de las ecuaciones de Poisson y de Laplace por el método de diferencias finitas. [8][9]

La solución obtenida por el método de diferencias finitas consiste de valores en puntos discretos, espaciados de una manera ordenada sobre toda la región de la función que describe el campo. Estos valores son obtenidos por remplazo de una ecuación diferencial parcial del campo por muchas ecuaciones simples de diferencias finitas que toman la forma de ecuaciones lineales relacionando el potencial en cada punto con los potenciales de los otros puntos que le rodean. De esta manera, la solución del campo se reduce a la solución

iterativa de una ecuación para determinar el potencial en cada punto discreto considerándolos uno por uno, entonces el proceso se repite a lo largo de toda la región tantas veces como sea necesario hasta que los valores no cambien más.

Los puntos discontinuos o discretos del campo están espaciados en forma equidistante como se muestra en la Fig. 2.4, estos puntos discretos en adelante serán llamados como nodos de la malla.

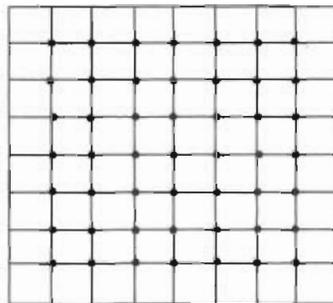


Fig. 2.4.- Distribución de puntos discretos en el campo.

Los puntos simétricos de la Fig. 2.5a son los correspondientes a todos los nodos en una malla cuadrada; si las dos diagonales de los nodos son diferentes como en la Fig. 2.5b, esto significa una malla con forma rectangular; si todas las distancias son diferentes estamos en el caso presentado en la Fig.

2.5c.

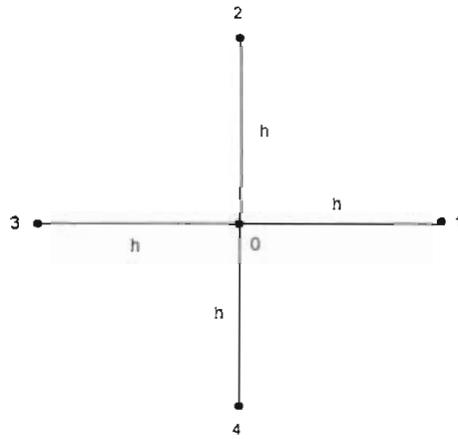


Fig. 2.5a

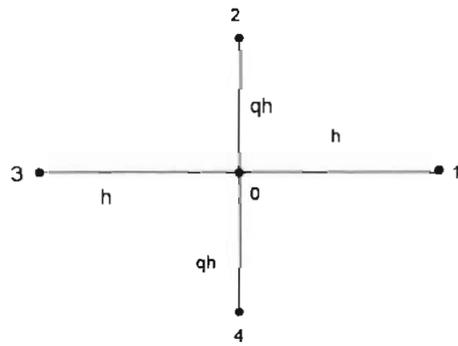


Fig. 2.5b

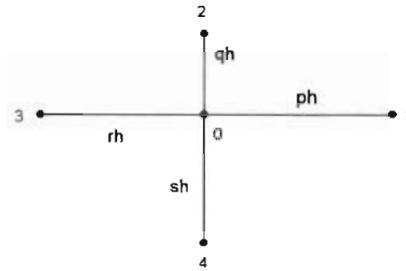


Fig. 2.5c

Fig. 2.5.- Diferentes formas de mallas.

A continuación se desarrolla la ecuación diferencial parcial para el potencial en un solo nodo de la malla.

En la Fig. 2.5c, las distancias de **1**, **2**, **3** y **4** a **0** son respectivamente iguales a **ph**, **qh**, **rh**, **sh**, donde **p**, **q**, **r** y **s** son fracciones de la unidad y **h** es la distancia entre líneas en una porción rectangular de la malla. La ecuación diferencial es desarrollada por expansión del potencial en el punto **0** en series de Taylor y derivando estas expresiones para

$$\left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{y}^2}\right)_0$$

que son utilizadas en la ecuación de Poisson.

En cualquier punto \mathbf{x} en una línea paralela al eje \mathbf{x} que pasa a través del punto $\mathbf{0}$ el potencial \mathbf{V} puede ser expandido en términos del potencial \mathbf{V}_0 en $\mathbf{0}$ por el uso de la serie de Taylor, entonces

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_0 + \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^3 + \dots$$

(ec. 2.18)

Sustituyendo en esta ecuación para los valores de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{ph}$ y $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 - \mathbf{rh}$ y obteniendo los valores del potencial en los puntos $\mathbf{1}$ y $\mathbf{3}$ respectivamente como:

$$\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0 + \mathbf{ph} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 + \frac{1}{2!} \mathbf{p}^2 \mathbf{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 + \frac{1}{3!} \mathbf{p}^3 \mathbf{h}^3 \left(\frac{\partial^3 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 + \dots$$

(ec. 2.19)

$$\mathbf{V}_3 = \mathbf{V}_0 - \mathbf{rh} \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}}\right)_0 + \frac{1}{2!} \mathbf{r}^2 \mathbf{h}^2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^2}\right)_0 - \frac{1}{3!} \mathbf{r}^3 \mathbf{h}^3 \left(\frac{\partial^3 \mathbf{V}}{\partial \mathbf{x}^3}\right)_0 + \dots$$

(ec. 2.20)

La suma de \mathbf{r} veces la ecuación 2.19 y \mathbf{p} veces la ecuación 2.20 da:

$$rV_1 + pV_3 = (p+r)V_0 + \frac{h^2}{2!} pr(p+r) \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 + \frac{h^3}{3!} pr(p^2 - r^2) \left(\frac{\partial^3 V}{\partial x^3} \right)_0 + \dots$$

(ec.2.21)

Ignorando los términos que contienen h elevado a la tercera potencia o mayor, lo que es válido cuando h es pequeña, se obtiene para $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0$ la simple expresión:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{2V_1}{p(p+r)} + \frac{2V_3}{r(p+r)} - \frac{2V_0}{pr}$$

(ec. 2.22)

De una manera exactamente similar puede ser obtenida una expresión para $\left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0$ como:

$$h^2 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} \right)_0 = \frac{2V_2}{q(q+s)} + \frac{2V_4}{s(q+s)} - \frac{2V_0}{qs}$$

(ec. 2.23)

Por lo tanto, sustituyendo los valores de $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial x^2}\right)_0$ y $\left(\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial y^2}\right)_0$ en la

ecuación de Poisson da:

$$2 \left[\frac{V_1}{p(p+r)} + \frac{V_2}{q(q+s)} + \frac{V_3}{r(p+r)} + \frac{V_4}{s(q+s)} - \left(\frac{1}{pr} + \frac{1}{qs} \right) V_0 \right] + h^2 \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

(ec. 2.24)

Por lo tanto, esta ecuación para valores pequeños de h es una aproximación válida, y ésta se usará en lugar de la ecuación de Poisson. Se debería enfatizar que, visto que la ecuación diferencial es la misma en cada punto en el campo, una ecuación diferencial particular influye en un punto solamente, sin embargo esta forma es idéntica en muchos puntos.

La forma general de la ecuación de diferencias (ec. 2.24) es raramente requerida, pero de ésta, por sustitución de los valores apropiados de p , q , r , s , cualquier ecuación necesaria es derivada inmediatamente. De todas las ecuaciones la más usada es la derivada para un nodo en una malla uniforme cuadrada y teniendo un modelo como el presentado en la Fig. 2.5a. Así, para el nodo 0 de este modelo, poniendo $p=q=r=s=1$, la ecuación de diferencias es:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 + h^2 \frac{\rho}{\epsilon} = 0$$

(ec. 2.25)

Para puntos en donde el campo es Laplaciano, la ecuación se obtiene poniendo $\rho=0$ en las ecuaciones 2.24 y 2.25 respectivamente, así:

$$2 \left[\frac{V_1}{p(p+r)} + \frac{V_2}{q(q+s)} + \frac{V_3}{r(r+p)} + \frac{V_4}{s(s+q)} - \left(\frac{1}{pr} + \frac{1}{qs} \right) V_0 \right] = 0$$

(ec.2.26)

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 - 4V_0 = 0$$

(ec. 2.27)

Cuando se emplea una computadora para las iteraciones, los potenciales iniciales que se escogen, pueden ser cero o darles valores aleatorios.

2.3.3.- Factor de aceleración. [8][9]

Cada nuevo valor de potencial en la malla es determinado satisfaciendo la ecuación de diferencias básica en términos de los valores previos de

potencial en los otros puntos. Así V^n designa el potencial después del n-ésimo ciclo iterativo, utilizando los valores de potencial más recientemente calculados. Revisando los nodos columna por columna, de izquierda a derecha y empezando de arriba hacia abajo, la forma general de la ecuación de Laplace es:

$$V^{n+1}(I, J) = \frac{1}{4} [V^n(I+1, J) + V^n(I, J+1) + V^{n+1}(I-1, J) + V^{n+1}(I, J-1)]$$

(ec. 2.28)

Aplicando sobre-relajación sistemática punto por punto, y básicamente con el mismo grado de sobre-relajación en cada etapa.

Por la introducción de un factor α , el nuevo valor de potencial se determina como la suma del valor anterior de potencial y α veces la diferencia entre el valor dado por la ecuación 2.28 y el valor anterior.

$$V^{n+1}(I, J) = V^n(I, J) + \frac{\alpha}{4} [V^n(I+1, J) + V^n(I, J+1) + V^{n+1}(I-1, J) + V^{n+1}(I, J-1) - 4V^n(I, J)]$$

(ec. 2.29)

α es un factor de aceleración que determina el grado de sobre-relajación, y se lo puede calcular por medio de la ecuación 2.30 para una región rectangular de $(p+1)*(q+1)$ nodos, y este puede oscilar entre **1** y **2**. Cuando $\alpha=1$, la ec. 2.29 se reduce a la ec. 2.28 y cuando $\alpha>2$ el proceso se convierte en inestable o sea no tiene convergencia. Cuando α tiene un valor mayor que **1** y menor que **2**, el rango de convergencia es más alto que para $\alpha=1$. El factor de aceleración es diferente y propio en cada problema. [10]

$$\alpha = 2 - \pi\sqrt{2} \sqrt{\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2}}$$

(ec. 2.30)

En la ec. 2.30 p y q son grandes. Este resultado, por supuesto, cubre el caso de una malla cuadrada, pero una alternativa resulta para el factor de convergencia para la malla cuadrada de $p+1$ nodos por lado, así:

$$\alpha = \frac{2}{1 + \text{sen}\left(\frac{\pi}{p}\right)}$$

(ec. 2.31)

2.3.4.- Ecuación de L'Hospital. [10]

En los bordes de la matriz o malla tomada en consideración y limitada por las variables $(p+1)*(q+1)$, hace que el término $\partial V/r\partial r$ de la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas con θ constante llegue a ser indeterminado; por lo tanto:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = 0$$

(ec. 2.32)

Para vencer esta dificultad, se aplica la regla de L'Hospital:

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\partial V}{r \partial r} = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)}{\frac{\partial}{\partial r} (r)} = \frac{\partial^2 V}{\partial r^2}$$

(ec. 2.33)

Por lo tanto la ecuación de Laplace en los bordes de la matriz o malla llega a ser:

$$2\frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{V}}{\partial z^2} = 0$$

(ec. 2.34)

Lo cual aplicando las técnicas de diferencias finitas y por facilidades de cálculo $\mathbf{V}(\mathbf{I}+\mathbf{J},\mathbf{J})=\mathbf{V}(\mathbf{I}+1,\mathbf{J})$; la ecuación 2.34 queda así:

$$\mathbf{V}^n(\mathbf{I}, \mathbf{J} + 1) + \mathbf{V}^{n+1}(\mathbf{I}, \mathbf{J} - 1) + 4\mathbf{V}^n(\mathbf{I} + 1, \mathbf{J}) - 6\mathbf{V}^n(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = 0$$

(ec. 2.35)

y su solución es la siguiente:

$$\mathbf{V}^{n+1}(\mathbf{I}, \mathbf{J}) = \mathbf{V}^n(\mathbf{I}, \mathbf{J}) + \frac{\alpha}{6} [\mathbf{V}^n(\mathbf{I}, \mathbf{J} + 1) + \mathbf{V}^{n+1}(\mathbf{I}, \mathbf{J} - 1) + 4\mathbf{V}^n(\mathbf{I} + 1, \mathbf{J}) - 6\mathbf{V}^n(\mathbf{I}, \mathbf{J})]$$

(ec. 2.36)

Se aplica la ecuación de Laplace en coordenadas cilíndricas para generalizar el análisis.

2.3.5.- Cuadrados curvilíneos. [8][11][12][15]

Es un método gráfico, que requiere de lápiz y papel, y es capaz de producir un campo con buena exactitud si se hace con habilidad y paciencia. Una buena exactitud (5 o 10 % en determinaciones de capacitancia) puede lograr cualquier principiante con sólo seguir las instrucciones y las sugerencias de este arte.

El método que se describirá se aplica solamente a campos en los cuales no existen variaciones en la dirección normal al plano en que se grafica. El procedimiento se basa en varios hechos que ya se han demostrado. (medio homogéneo, es decir $\rho = \text{constante}$)

- 1.- La frontera de un conductor es una superficie equipotencial.
- 2.- La intensidad del campo eléctrico y la densidad del flujo eléctrico son perpendiculares a las superficies equipotenciales.
- 3.- Entonces, \mathbf{E} y \mathbf{D} son perpendiculares a las superficies equipotenciales de los conductores y poseen valores tangenciales de

cero.

4.- Las líneas del flujo eléctrico, o líneas de flujo, empiezan y terminan en cargas y así, en un medio libre de cargas, un dieléctrico uniforme, empiezan y terminan solamente en la superficie del conductor.(ver anexo C)

Considérense las implicaciones de estos postulados dibujando las líneas de flujo en un esquema en el que ya estén dibujadas las superficies equipotenciales. En la Fig. 2.6a se muestran dos superficies conductoras.

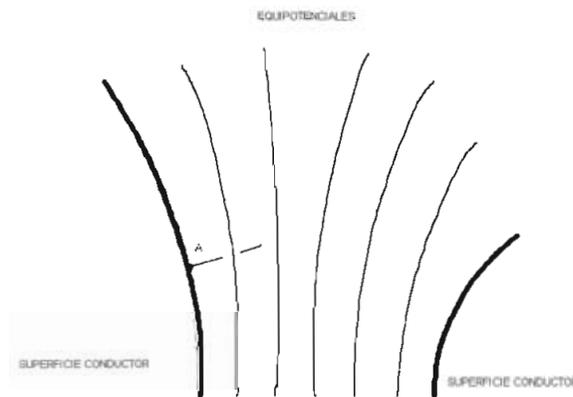


Fig. 2.6a

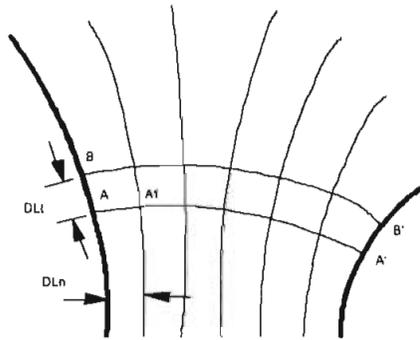


Fig. 2.6b

Fig. 2.6.- (a) Diagrama de las superficies equipotenciales entre dos conductores.

(b) Líneas de flujo.

Las superficies equipotenciales se dibujaron considerando una diferencia de potencial constante entre las líneas. Debe recordarse que estas líneas son solamente las secciones transversales de las superficies equipotenciales, las cuales son cilíndricas, ya que no se permiten variaciones en la dirección normal de la superficie del papel. Se escoge arbitrariamente, para empezar, una línea de flujo en A sobre la superficie del conductor más positivo. La línea abandona la superficie perpendicularmente y debe cruzar, formando ángulos rectos, las superficies equipotenciales que aunque no estén dibujadas tienen existencia real y se encuentran entre el conductor y la primera superficie mostrada. La

línea completa se muestra en la Fig. 2.6b.

De manera similar, se puede empezar en **B** y graficar otra línea de flujo que termine en **B'**.

La intensidad del campo eléctrico en el punto medio de la línea que une **A** con **B** puede ser encontrada aproximadamente, asumiendo un valor para el flujo en el tubo **AB**, sea este flujo $\Delta\Psi$, el cual permite expresar la densidad de flujo eléctrico como $\Delta\Psi / \Delta L_t$, donde ΔL_t es la longitud de la línea que une **A** con **B**. La magnitud de **E** es entonces :

$$E = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta\Psi}{\Delta L_t}$$

(ec. 2.37)

Sin embargo, es factible encontrar también la magnitud de **E** dividiendo la diferencia de potencial existente entre los puntos **A** y **A₁**, entre dos superficies equipotenciales adyacentes, para la distancia de **A** hasta **A₁**. Si la distancia es designada como ΔL_n y se asume el incremento de potencial entre equipotenciales de ΔV , así:

$$\mathbf{E} = \frac{\Delta V}{\Delta L_n}$$

(ec. 2.38)

Este valor es aplicado con más exactitud al punto medio del segmento de línea desde **A** hasta **A₁**, mientras que el valor previo fue más exacto en el punto medio del segmento de la línea desde **A** hasta **B**. Si, de cualquier modo, ΔV y $\Delta \Psi$ se hacen lo más pequeños posibles, los dos valores encontrados para **E** se convierten en aproximadamente iguales:

$$\frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \Psi}{\Delta L_t} = \frac{\Delta V}{\Delta L_n}$$

(ec. 2.39)

Se ha puesto, en todas las regiones del esquema, un medio homogéneo, un incremento constante de potencial entre equipotenciales y una cantidad constante de flujo en cada tubo. Para satisfacer todas estas condiciones, la ecuación 2.39 muestra que:

$$\frac{\Delta L_t}{\Delta L_n} = \text{constante} = \frac{1}{\epsilon} \frac{\Delta \Psi}{\Delta V}$$

(ec. 2.40)

Un argumento similar se puede hacer en cualquier punto de la gráfica y se llega a la conclusión de que una razón constante debe mantenerse entre la distancia de las líneas de flujo medida a lo largo de una equipotencial, y la distancia entre las equipotenciales medida a lo largo de una línea de flujo. Este es el cociente que debe tener el mismo valor en cualquier punto y no las longitudes individuales.

2.3.6.- Teoría de imágenes. [13][12]

El método de imágenes es un procedimiento para lograr resolver problemas de condiciones de frontera sin resolver específicamente una ecuación diferencial.

Resolveremos el problema de una carga puntual q colocada cerca de un plano conductor de extensión infinita. Para formular el problema matemáticamente, consideremos un plano conductor de tal forma que coincida

con el eje yz , y supongamos que la carga puntual está sobre el eje x en el punto $x = d$ (Fig. 2.7a).

Considérese ahora un problema diferente, el de dos cargas puntuales (q y $-q$) separadas por una distancia $2d$, como en la Fig. 2.7b. El potencial de estas dos cargas,

$$\phi(x, y, z) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_1} + \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r_2}$$

(ec. 2.41)

no sólo satisface la ecuación de Laplace en todos los puntos exteriores a las cargas, sino que también se reduce a una constante (es decir cero) sobre el plano que bisecta perpendicularmente al segmento que une las cargas. Debido a que las soluciones de la ecuación de Laplace son únicas, la ecuación 2.41 es el potencial correcto en todo el semiespacio exterior al plano conductor. La carga $-q$ se llama imagen de la carga puntual q . Naturalmente la imagen no existe en realidad.

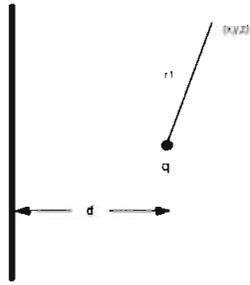


Fig. 2.7a

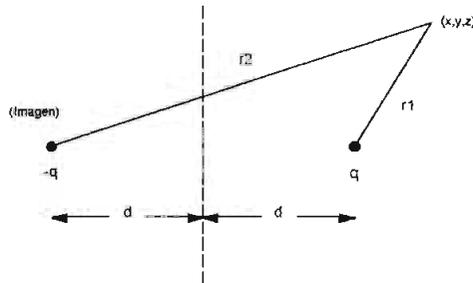


Fig. 2.7b

Fig. 2.7.- (a) Problema original. (b) Posición de la carga imagen.

La teoría de imágenes al ser aplicada a problemas de electrodos embebidos bajo la superficie de tierra, asume que esta superficie es un cuasi espejo y que toda la región bajo ella es reflejada en la región sobre la misma. Esta situación se muestra en la siguiente figura.

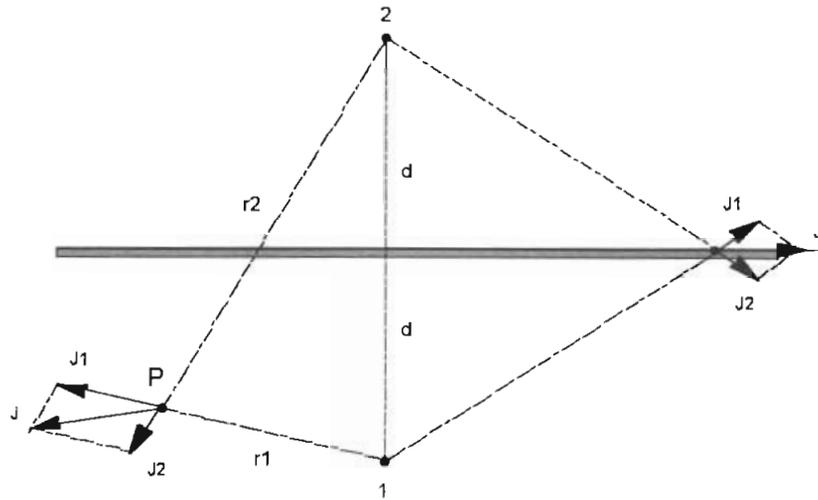


Fig. 2.8.- Un electrodo embebido en tierra y su imagen.

Se observa que ahora hay dos electrodos (1 y 2), separados una distancia $2d$, cada uno de los cuales recibe una corriente I , asumiendo que ambos están embebidos en un medio ilimitado de conductividad γ . Es importante establecer si el problema equivalente obtenido por aplicación hecha del método de la imágenes, en efecto, satisface las condiciones de frontera. Es importante primero chequear esto.

A partir de que la distribución de corriente debido a un electrodo puntual embebido en el suelo es radial, entonces, en cualquier punto P , existen dos componentes de densidad de corriente, una debido a cada electrodo (1, 2). La

densidad de corriente resultante es un vector suma de las dos componentes. Ahora, si el punto **P** es cambiado a cualquier lugar a lo largo de la superficie de tierra, se observará que la corriente es paralela a la frontera. Por consiguiente las líneas equipotenciales serán perpendiculares a la frontera en las cercanías de ésta.

El potencial en cualquier punto **P** en la región bajo la superficie de tierra es dado directamente por la siguiente ecuación, respetando el sentido de las corrientes, la expresión resultante es:

$$\Phi = \frac{1}{4\pi\gamma} \left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right)$$

(ec. 2.42)

2.4.- SIMULACION ANALOGICA. [14]

La simulación analógica es importante por que se trata de un método experimental para encontrar el potencial campo, ya sea utilizando una cuba electrolítica, un dispositivo para observar flujo de fluidos, papel de resistencia y el equipo de punteo asociado u hojas de hule. Es imposible encontrar el

potencial verdadero, pudiéndose obtener valores aproximados de utilidad en ingeniería.

Los modelos de conducción de corriente de sistemas bidimensionales son posibles construir utilizando papel resistivo comercial, colocando electrodos de las formas deseadas en contacto con el medio conductor, se asegura el contacto estrecho de los electrodos con el papel resistivo utilizando una pintura de plata, buena conductora, para producir las formas deseadas de electrodo en el papel o una cinta de plata cuando las formas de los electrodos no son complicadas.

Se utilizó el equipo de mapeo (equipo de punteo) existente en el Laboratorio de Alto Voltaje, que tiene una fuente de poder, un galvanómetro y unas puntas de prueba, y además seleccionadores de potencial para colocar las fronteras a los valores de potencial deseados y buscar el potencial requerido en la región a estudiar.

Las pruebas se realizaron para el caso de dos mallas cercanas de puesta a tierra correspondientes a cámaras de transformación, basándose en lo que indican las normas de la Empresa Eléctrica Quito S.A. para una cámara de

transformación de 100-315 KVA 6300-210/121 V, como se puede observar en el siguiente gráfico.

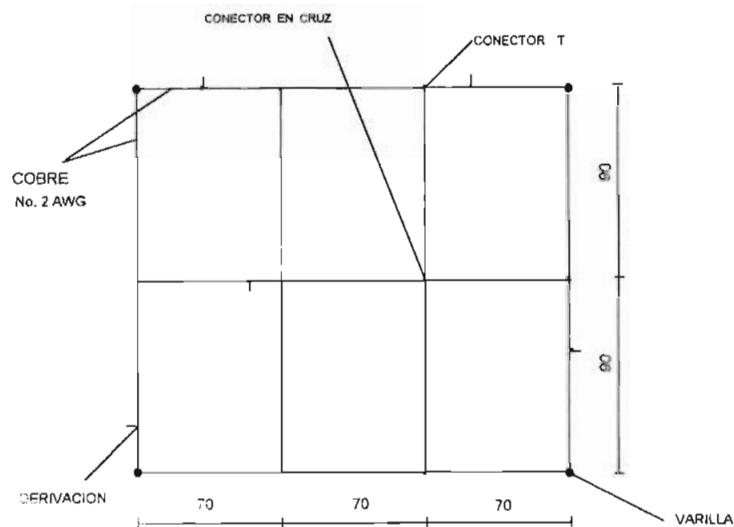
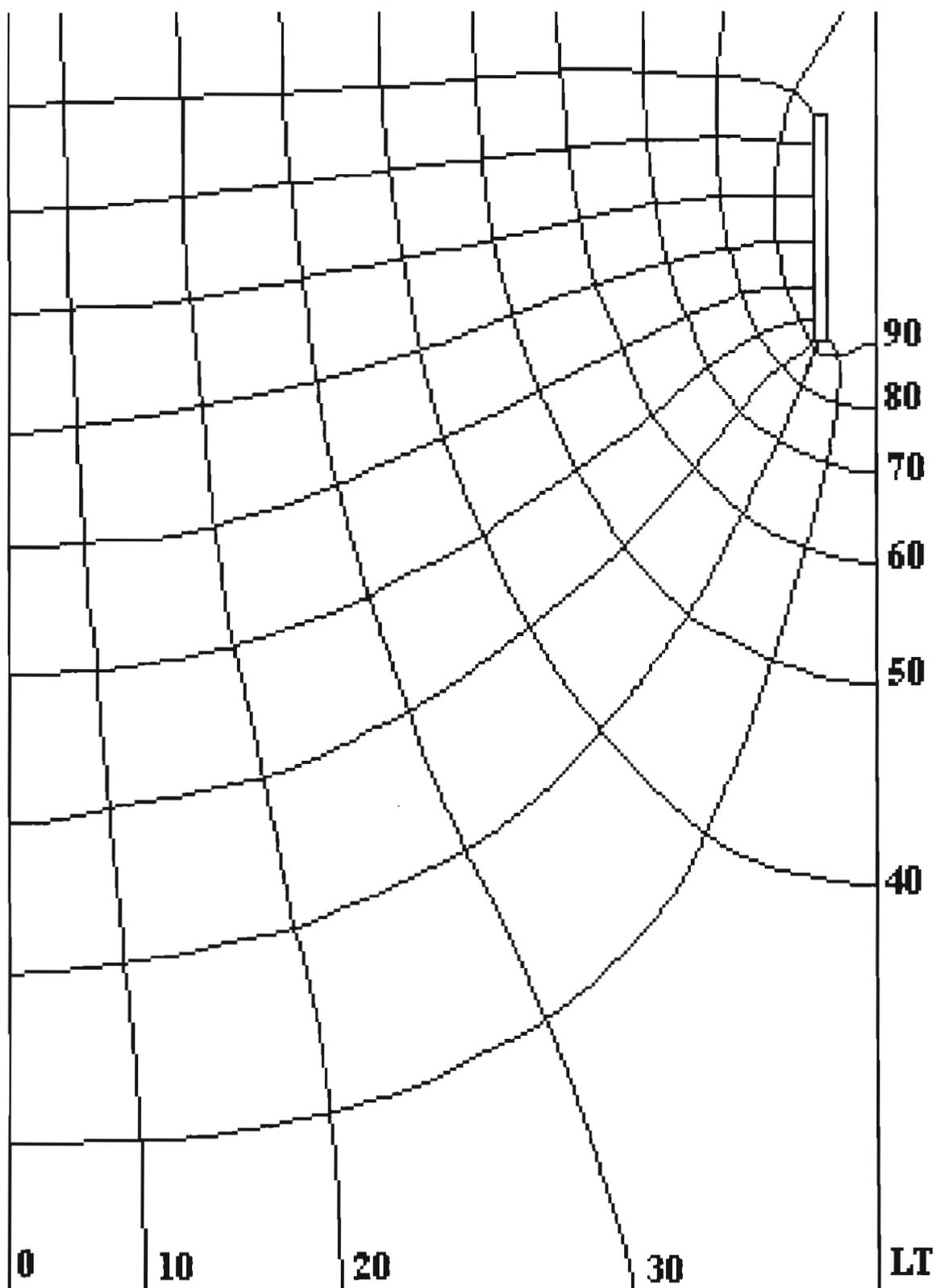


Fig. 2.9.- Malla de puesta a tierra correspondiente a la estructura tipo SNT1 de las normas de la EEQ S.A.

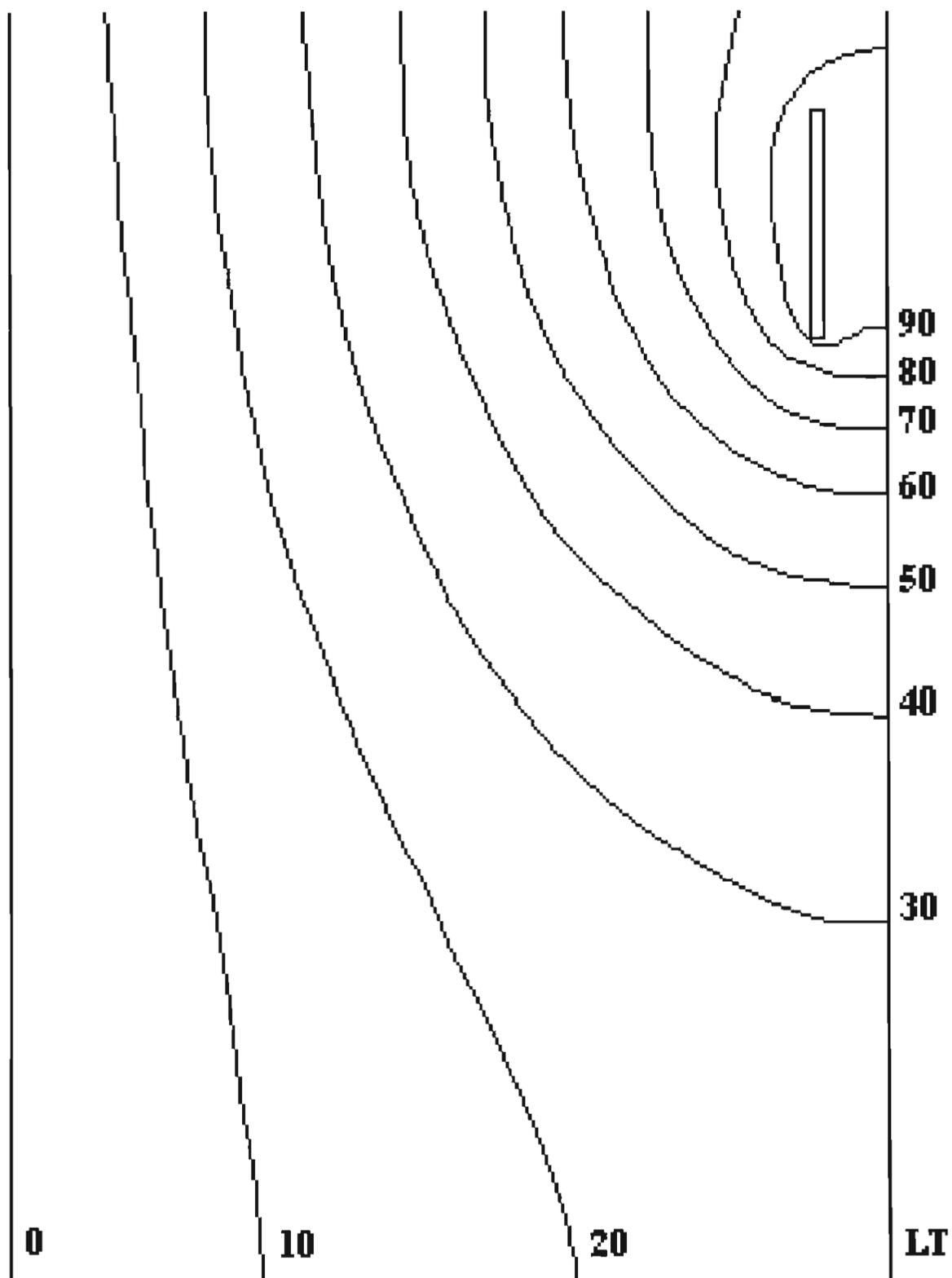
Esta malla de puesta a tierra se encuentra enterrada a una profundidad de 50 cm de la superficie del suelo.

Para la modelación analógica se trabajó a una escala 1:40, sobre un papel con una resistividad $\rho = 1168 \Omega \cdot m$. (ver anexo D)

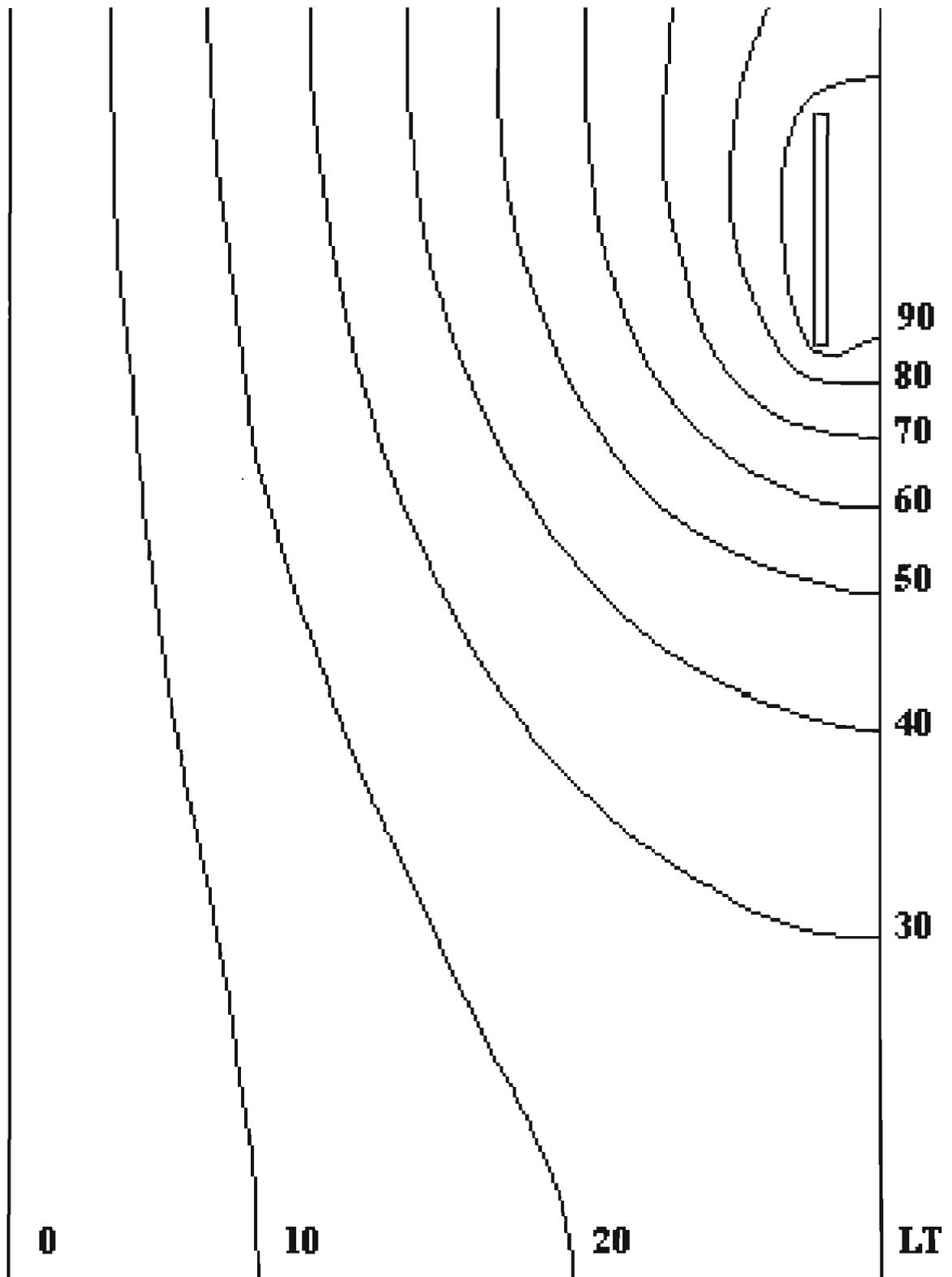
Los resultados de las pruebas realizadas se muestran a continuación.



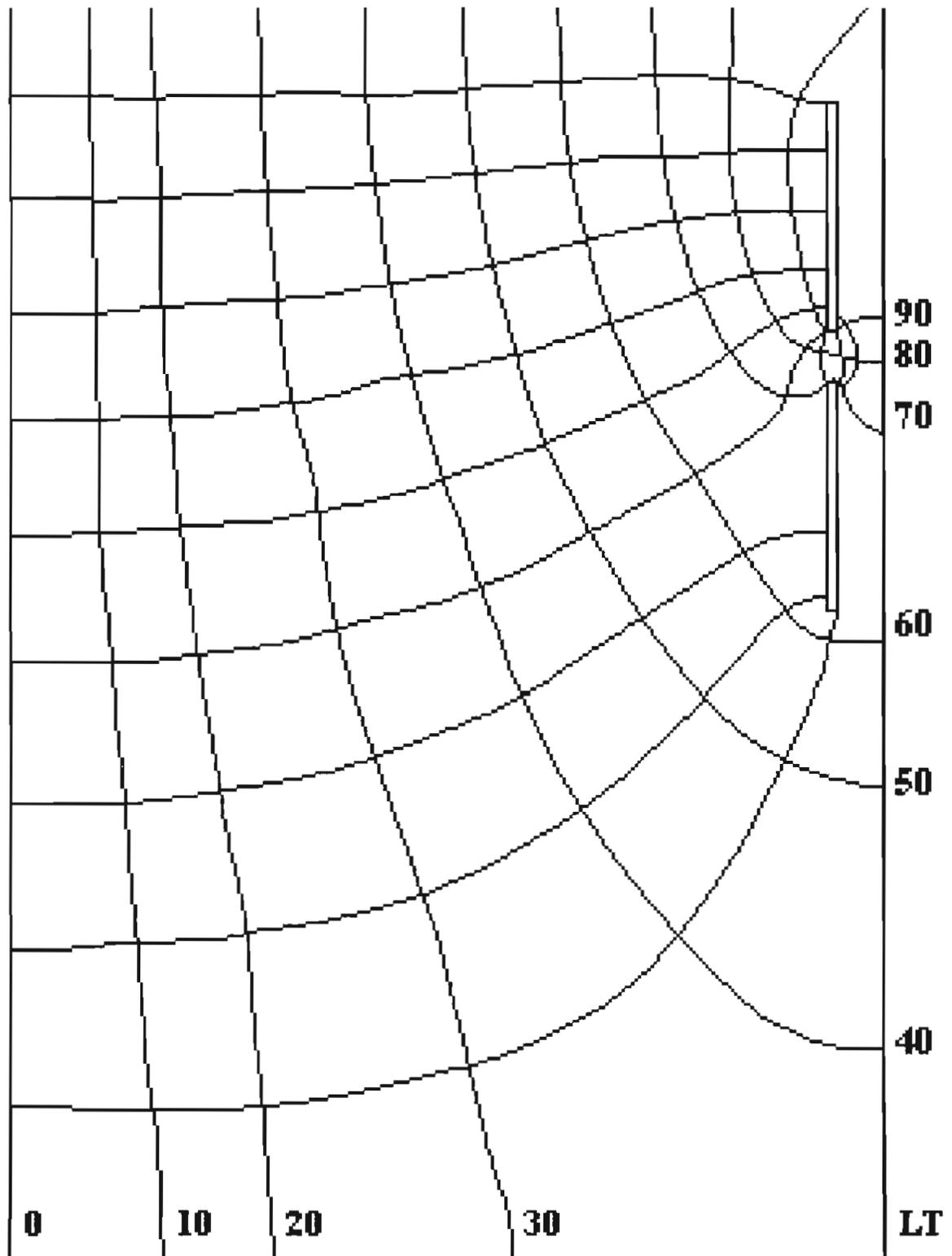
Mapa de campo producido por un electrodo horizontal en un medio homogéneo de resistividad ρ (método analógico empleando papel resistivo).



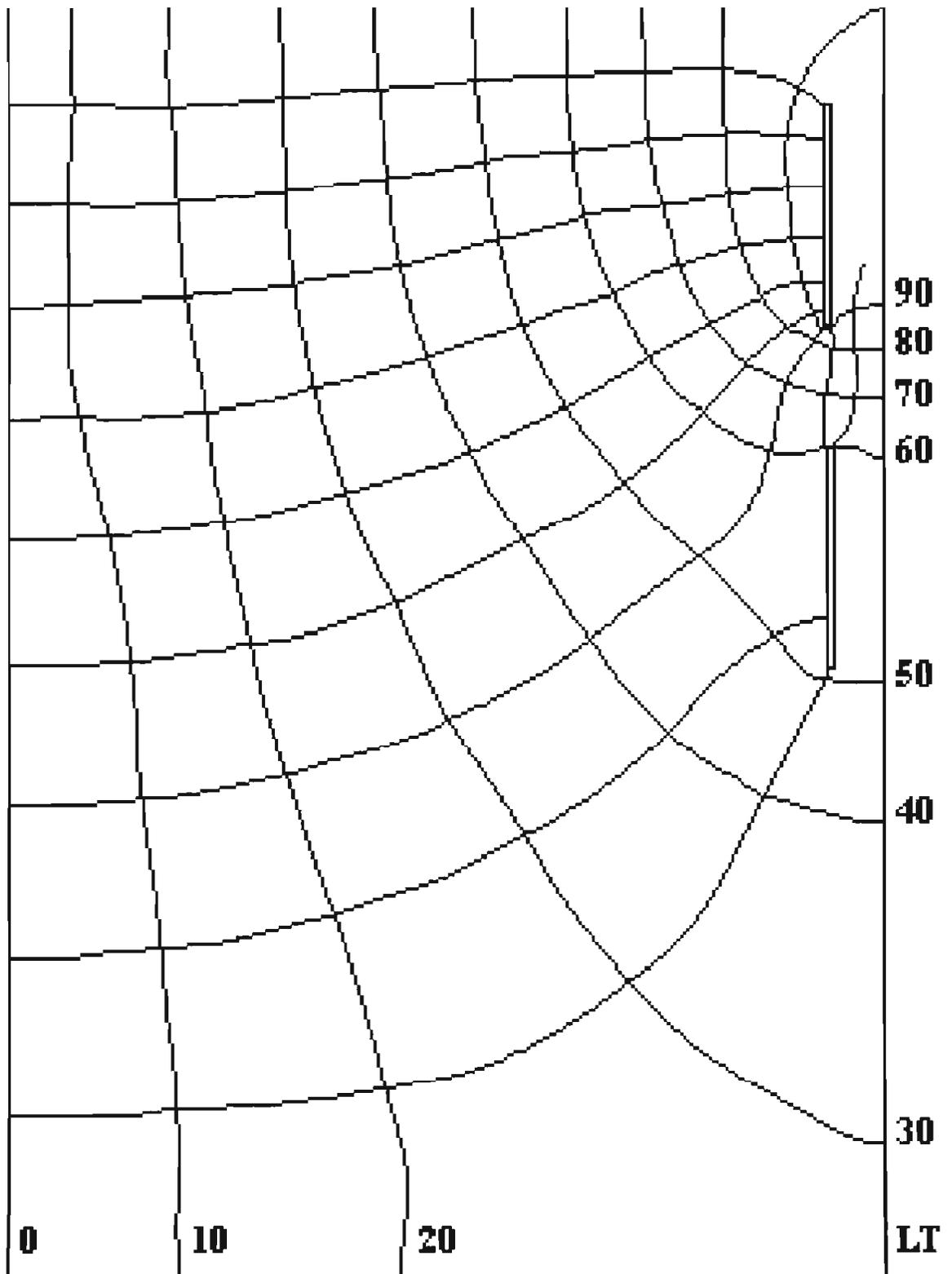
Líneas equipotenciales producidas por un electrodo horizontal en un medio homogéneo de resistividad $\rho/2$ (método analógico empleando papel resistivo).



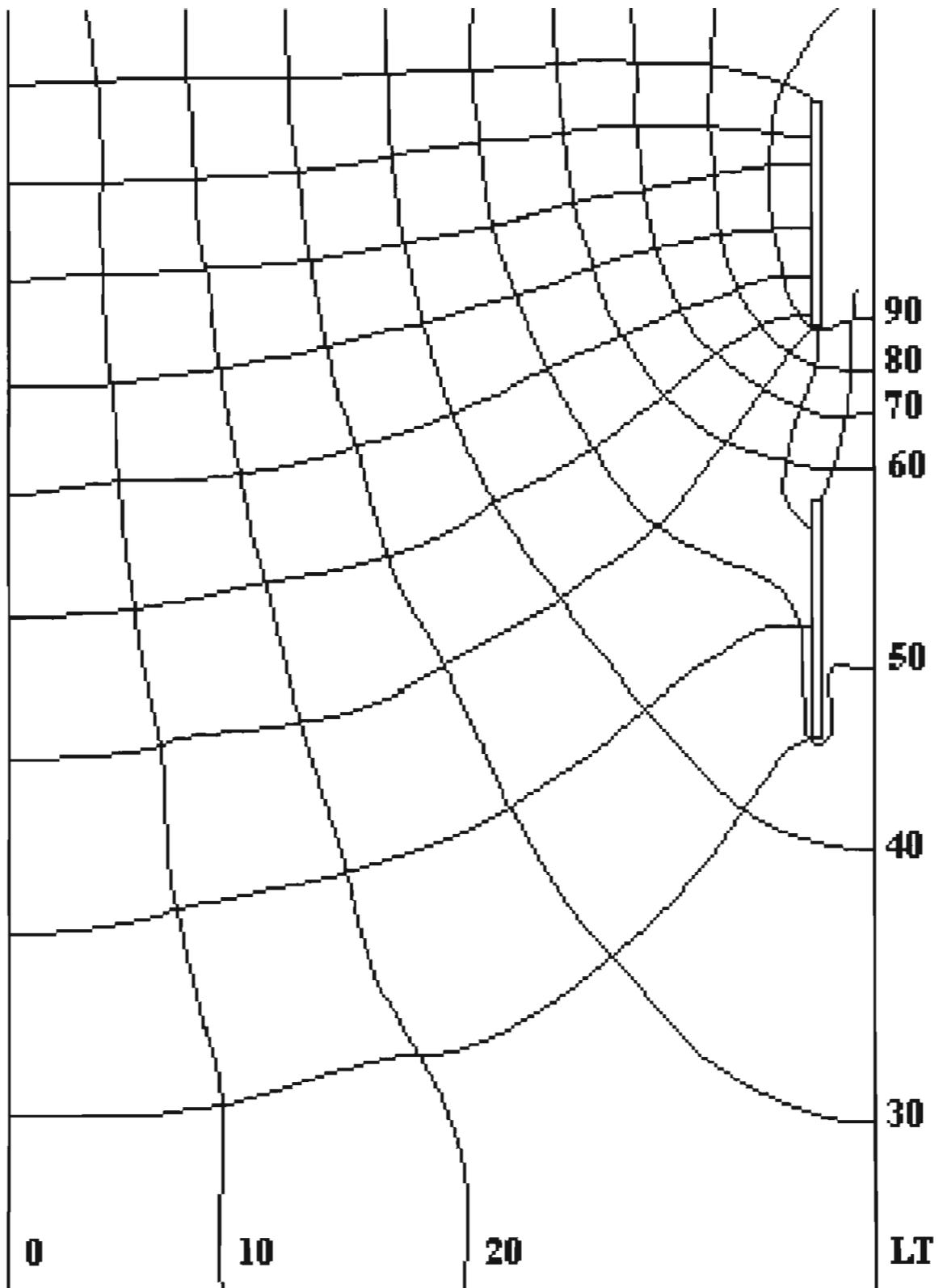
Líneas equipotenciales producidas por un electrodo horizontal en un medio homogéneo de resistividad $\rho/3$ (método analógico empleando papel resistivo).



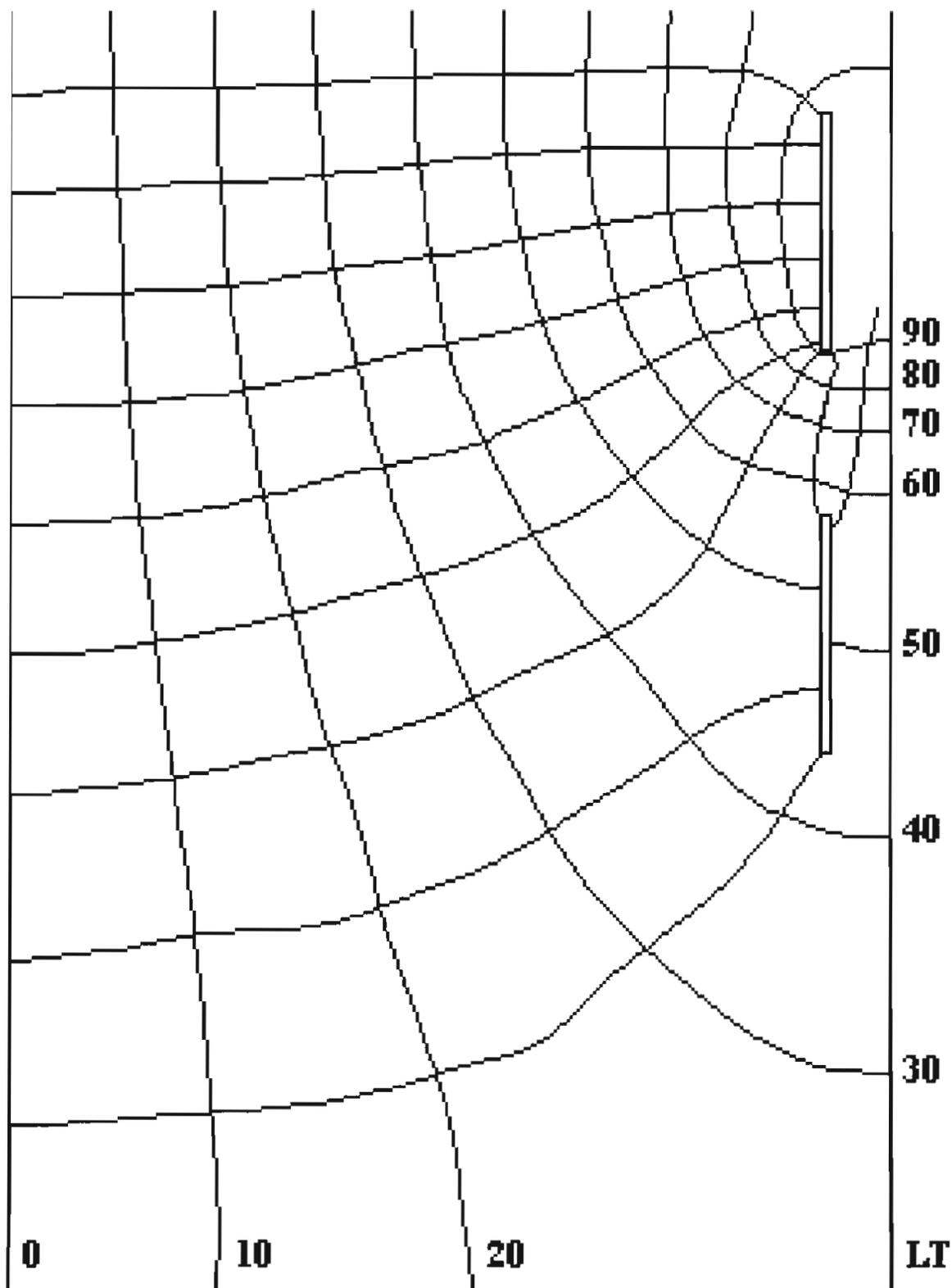
Mapa de campo producido por dos electrodos horizontales separados $L/4$ en un medio homogéneo de resistividad ρ (método analógico empleando papel resistivo).



Mapa de campo producido por dos electrodos horizontales separados $L/2$ en un medio homogéneo de resistividad ρ (método analógico empleando papel resistivo).



Mapa de campo producido por dos electrodos horizontales separados $3L/4$ en un medio homogéneo de resistividad ρ (método analógico empleando papel resistivo).



Mapa de campo producido por dos electrodos horizontales separados $3L/4$ en un medio homogéneo de resistividad $\rho/2$ (método analógico empleando papel resistivo).

CAPITULO III

3.1.- DESARROLLO DEL PROGRAMA DIGITAL.

3.1.1.- Introducción.

En este capítulo se pretende exponer con la debida amplitud la forma en la cual se ha desarrollado el programa digital, usando para el efecto el lenguaje de programación C.

A continuación ponemos algunas de las características por las cuales se escogió el lenguaje de programación C: [23][24]

- Programación estructurada.
- Economía en las expresiones.
- Abundancia en operadores y tipos de datos.
- Codificación de alto y bajo nivel simultáneamente.
- Reemplaza ventajosamente la programación en ensamblador.

- Utilización natural de las funciones primitivas del sistema.
- No está orientado a ningún área en especial.
- Producción de código objeto altamente optimizado.
- Facilidad de aprendizaje.

El lenguaje de programación **C** fue escogido por su facilidad para programar en modo gráfico, debido a que el programa a ser desarrollado debe desplegar los gráficos de campo entre dos electrodos de puesta a tierra.

Un programa en **C** es una serie de operadores y funciones que modifican los datos para obtener acciones concretas y resultados. A continuación se presenta una explicación breve de las principales librerías de funciones y sentencias de control utilizadas.

Existen operaciones que no forman parte del conjunto de sentencias de **C**, sino que pertenecen al conjunto de funciones de las librerías de **C**; por ello, para la utilización de los ficheros fuentes y funciones de las librerías

debemos utilizar las líneas:

include “librería.h”

Esta directriz ordena al compilador incluir el fichero librería.h en el programa fuente. Las dobles comillas, indican que ese fichero debe ser buscado en el directorio actual del trabajo y de no encontrarse, la búsqueda debe continuar en el directorio estándar para los ficheros con extensión **.h** (directorio include).

Si la directriz se especifica de la forma:

include <librería.h>

la búsqueda para el fichero especificado, se efectuará solamente en el directorio estándar para los ficheros con extensión **.h** (directorio include).

A continuación, se presentan las principales librerías utilizadas:

- **stdio.h**.- Contiene prototipos de funciones estándares de entrada y

salida.

- **conio.h**.- Contiene prototipos de las funciones de entrada y salida para máquinas con sistema operativo MS-DOS.

- **math.h**.- Para prototipos de funciones matemáticas.

- **graphics.h**.- Para prototipos de funciones gráficas.

- **stdlib.h**.- Contiene prototipos de funciones para conversión numérica, asignación de memoria y tareas semejantes.

- **alloc.h**.- Contiene prototipos de funciones para asignación de memoria.

El preprocesador de C, manipula el texto de un fichero fuente como primer paso en la compilación.

Las directrices para el preprocesador son utilizadas en la elaboración de programas fuente fáciles de cambiar y de compilar en diferentes situaciones. Una directriz va precedida del símbolo # e indica al preprocesador una acción

específica a ejecutar. Pueden aparecer en cualquier parte del fichero fuente, pero solamente se aplican al resto del programa fuente.

La directriz **# define** se utiliza para asociar identificadores con palabras clave, constantes, sentencias y expresiones.

Las proposiciones de control de flujo de un lenguaje especifican el orden en que se realiza el procedimiento. En **C**, el punto y coma es un terminador de proposición, las llaves **{y}** se emplean para agrupar declaraciones y proposiciones dentro de una proposición compuesta o bloque, de modo que son sintácticamente equivalentes a una proposición sencilla.

La proposición **if-else** se utiliza para expresar decisiones. Formalmente la sintaxis es:

```
if (expresión)  
    proposición 1  
else  
    proposición 2
```

donde la parte **else** es optativa.

La proposición **while** se usa en los ciclos, y su sintaxis es la siguiente:

```
while (expresión)  
proposición
```

donde la expresión se evalúa. Si es diferente de cero, se ejecuta la proposición y se reevalúa la expresión. Este ciclo continúa hasta que la expresión se hace cero, punto en el cual se suspende la ejecución para continuar después de la proposición.

La proposición **for** se utiliza cuando existe una inicialización simple e incrementos, puesto que mantiene las proposiciones de control del ciclo juntas y visibles al principio del mismo. Formalmente la sintaxis es:

```
for ( expr1; expr2; expr3 )  
proposición
```

La proposición **do-while**, prueba al final después de realizar cada paso a

través del cuerpo del ciclo, el cual se ejecuta siempre por lo menos una vez. La sintaxis del **do** es:

```
do  
  
    proposición  
  
while (expresión)
```

La proposición **switch** es una decisión múltiple que prueba si una expresión coincide con uno de un número de valores constantes enteros, y traslada el control adecuadamente, su sintaxis es:

```
switch (expresión) {  
  
    case exp-const: proposiciones  
  
    case exp-const: proposiciones  
  
    default: proposiciones  
  
}
```

cada **case** se etiqueta con uno o más valores constantes enteros o expresiones constantes enteras. Si un **case** coincide con el valor de la expresión, la ejecución comienza allí. Todas las expresiones **case** deben ser diferentes. El

etiquetado como **default** se ejecuta si ninguno de los otros se satisface. El **default** es optativo; si no está y ninguno de los casos coincide, no se toma acción alguna. Las cláusulas **case** y **default** pueden ocurrir en cualquier orden.

Algunas veces es conveniente tener la posibilidad de abandonar un ciclo, en otra forma, que no sea probando al inicio o al final. La proposición **break** proporciona una salida anticipada de un **for**, **while** y **do**, tal como lo hace el **switch**. Un **break** provoca que el ciclo o **switch** más interno que lo encierra termine inmediatamente.

El C proporciona la infinitamente abusable proposición **goto**, y etiquetas para saltar hacia ellas. Formalmente el **goto** nunca es necesario, y en la práctica es casi siempre más fácil escribir código sin él. Sin embargo, hay algunas situaciones donde los **goto** pueden encontrar un lugar.

3.1.2.- Secuencia de cálculo.

La primera función que realiza el programa digital es la solicitud de los datos necesarios para encontrar el mapa de campo; los datos solicitados son los siguientes:

En un primer cuadro solicita:

- Radio del conductor o electrodo.
- Corriente de descarga, de falla a tierra o de rayo (amperios).
- Resistividad del suelo.
- Escala utilizada.

En un segundo cuadro solicita las coordenadas de ubicación del primer electrodo dentro del campo:

Punto inicial:

- Coordenada x.
- Coordenada y.

Punto final:

- Coordenada x.

La coordenada y del punto final no es necesaria ya que el programa asume automáticamente la correspondiente al punto inicial debido a que únicamente se realizará el estudio de electrodos horizontales.

Con los datos ingresados el programa procede a calcular el potencial en voltios correspondiente al primer electrodo, este potencial es asignado como el **100%**.

A continuación realiza la asignación de las condiciones de frontera, para lo cual se utiliza una matriz de **126*126** puntos que representa nuestro campo de trabajo, la fila **126** es asignada con el valor de **0**, el primer electrodo representa el **100%**.

Luego, procede a encontrar los valores de potencial del campo en porcentaje utilizando el método de las diferencias finitas, para hallar los valores de potencial de los puntos que representan la línea de tierra utilizamos el método de las imágenes, para calcular los potenciales de los puntos de los bordes verticales de la matriz aplicamos L'Hospital.

A continuación el programa solicita las coordenadas de ubicación del segundo electrodo:

Punto inicial:

- Coordenada x.
- Coordenada y.

Punto final:

- Coordenada x.

De igual forma, la coordenada y del punto final no es necesaria ya que el programa asume automáticamente la correspondiente al punto inicial debido a que únicamente se realizará el estudio de electrodos horizontales.

Una vez ingresados los valores de las coordenadas del segundo electrodo, el programa busca el valor de potencial que corresponden a estos puntos y asigna a todo el electrodo el valor correspondiente al potencial del punto final. (ver enexo E)

Como siguiente paso, el programa evalúa, nuevamente, los valores de potencial del campo utilizando el método de las diferencias finitas, con las condiciones de borde anteriores y la nueva condición encontrada para el segundo electrodo.

Encontrado el campo, el programa pasa a dibujar las líneas equipotenciales, para lo cual, mediante un barrido horizontal y vertical determina los puntos de las equipotenciales, comenzando por la de 97.5%, 95%, 92.5%, 90%,.....,hasta llegar a la de 2.5%; y obtenidos los puntos, realiza un proceso de selección, desechando los puntos que se encuentran fuera de rango, y ordena los puntos seleccionados; luego los grafica.

Obtenidas las líneas equipotenciales, calcula los puntos que forman las líneas de flujo, para lo cual se emplea el método de los cuadrados curvilíneos.

Terminado el mapa de campo, el programa procede a calcular la resistencia de puesta a tierra o la resistencia entre dos electrodos, según sea el caso.

3.2.- SUBROUTINAS.

El programa digital se halla conformado por varios archivos, los cuales son necesarios y están relacionados, estos son:

TES52.CPP.- Es el archivo principal por cual se ejecutan los demás archivos, resuelve diferencias finitas y dibuja las equipotenciales, que consta de las siguientes subrutinas:

- **inicializar_modo_grafico.**- Inicializa la operación en modo gráfico del programa.
- **ejecucion2.**- Encuentra el siguiente punto del archivo de datos de cualquier equipotencial.
- **ejecucion7.**- Encuentra el siguiente punto del archivo de datos de cualquier equipotencial, cuando por medio del ejecución2 no se logró el objetivo.
- **ejecucion11.**- Graba el archivo desordenado en el correspondiente a

cada equipotencial.

- **lee.**- Realiza el procedimiento para leer el vector desordenado.

- **ejecucion1.**- Toma un archivo de datos de cualquier equipotencial y encuentra el menor elemento en la coordenada y.

- **ejecucion6.**- Toma un archivo de datos de cualquier equipotencial y encuentra el menor elemento en la coordenada x.

- **ejecucion3.**- Reordena el archivo de datos correspondiente a cualquier equipotencial.

- **ejecucion4.**- Graba el archivo ordenado en coord1.txt.

- **ejecucion5.**- Comprueba que no existan valores fuera de rango.

- **ejecucion12.**- Comprueba que no existan valores fuera de rango.

- **ejecucion8.**- Graba el archivo ordenado en coord21.txt desechando los

puntos fuera de rango.

- **ejecucion9**.- Copia el archivo ordenado desde coord21.txt a coord1.txt.

- **ejecucion10**.- Copia el archivo coord1.txt en el archivo correspondiente a cada equipotencial.

- **Trazar_linea**.- Subrutina que grafica.

- **copiar**.- Copia el archivo ordenado a cada curva equipotencial en coord21.txt.

- **Trazar**.- Grafica las líneas equipotenciales.

- **Dar_Valores_iniciales**.- Fija las condiciones de frontera.

- **Dar_Valores_puntos**.- Encuentra los valores de la matriz por medio del método de las diferencias finitas, L'Hospital y el método de las imágenes.

- **Fijar_puntos.**- Encuentra los puntos de las equipotenciales mediante un barrido horizontal y vertical de la matriz de potenciales.

- **Dibuje_fondo.**- Presenta en pantalla los puntos de la matriz de potenciales, por medio de puntos blancos.

- **Quite_fondo.**- Quita de pantalla los puntos que representan la matriz de potenciales.

- **Limpiar estructura.**- Encera los valores de la matriz, para el caso de **NUEVO**.

- **main.**- Función principal.

TES11.CPP.- Es el archivo que traza la primera línea de flujo y ordena los datos de las equipotenciales en el mismo sentido en todos los archivos de éstas, consta de las siguientes subrutinas:

- **ejecucion10.**- Copia el archivo coord1.txt en el archivo correspondiente a cada equipotencial.

- **medio**.- Encuentra el punto medio entre dos puntos.

- **pendiente**.- Encuentra la pendiente entre dos puntos.

- **copiar**.- Copia el archivo ordenado a cada curva equipotencial en coord21.txt.

- **lea**.- Determina el sentido de ordenamiento de los archivos y encuentra la primera línea de flujo.

- **virar**.- Toma los archivos ordenados y a todos los ordena en el mismo sentido, proceso que realiza a los datos de todas las equipotenciales.

- **Corriente**.- Encuentra las líneas de flujo.

- **main**.- Función principal.

TES36.CPP.- Es el archivo que encuentra las líneas de flujo hacia la derecha, está compuesto de las siguientes subrutinas:

- **ejecucion10.**- Copia el archivo coord1.txt en el archivo correspondiente a cada equipotencial.

- **pendiente.**- Encuentra la pendiente entre dos puntos.

- **copiar.**- Copia el archivo ordenado a cada curva equipotencial en coord21.txt.

- **nuevo_punto.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante perpendicularidad.

- **siguiente.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante traslación de la distancia.

- **leer.**- Realiza la selección de entre el punto encontrado por perpendicularidad y el encontrado mediante la traslación de la distancia.

- **Corriente.**- Encuentra los puntos de las líneas de flujo.

- **main.**- Función principal.

TES37.CPP.- Es el archivo que encuentra las líneas de flujo hacia la izquierda, consta de las siguientes subrutinas:

- **ejecucion10.**- Copia el archivo coord1.txt en el archivo correspondiente a cada equipotencial.

- **pendiente.**- Encuentra la pendiente entre dos puntos.

- **copiar.**- Copia el archivo ordenado a cada curva equipotencial en coord21.txt.

- **nuevo_punto.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante perpendicularidad.

- **siguiente.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante traslación de la distancia.

- **leer.**- Realiza la selección de entre el punto encontrado por perpendicularidad y el encontrado mediante la traslación de la distancia.

- **Corriente.**- Subrutina que encuentra las líneas de flujo.

- **main.**- Función principal.

MATRIN5.CPP .- Archivo que mediante la lectura de conexion.txt que es creado por **TES52.CPP**, procesa esta información y como resultado crea el archivo **VOLTAJE.TXT** en donde se encuentra grabado el valor del potencial en voltios correspondiente al primer electrodo, **MATRIN5.CPP** tiene las siguientes subrutinas:

- **Inversa.**- Halla la inversa a la matriz de resistencias encontrada.

- **puntos_medios.**- Encuentra la matriz de resistencias y la distribución de corriente del primer electrodo, y determina el potencial en voltios del primer electrodo.

- **main.**- Subrutina principal que crea el archivo voltaje.txt.

TES38.CPP.- Encuentra todos los puntos de intersección hacia la derecha del primer flujo entre las líneas equipotenciales entre las que se

encuentra ubicado el segundo electrodo y las líneas de flujo, inclusive los puntos correspondientes a las líneas de flujo no dibujados, consta de las siguientes subrutinas:

- **ejecucion10.**- Copia el archivo coord1.txt en el archivo correspondiente a cada equipotencial.

- **pendiente.**- Encuentra la pendiente entre dos puntos.

- **copiar.**- Copia el archivo ordenado a cada curva equipotencial en coord21.txt.

- **nuevo_punto.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante perpendicularidad.

- **siguiente.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante traslación de la distancia.

- **leer.**- Realiza la selección de entre el punto encontrado por perpendicularidad y el encontrado mediante la traslación de la distancia.

- **Corriente.**- Subrutina que encuentra las líneas de flujo.

- **main.**- Función principal.

TES39.CPP.- Encuentra todos los puntos de intersección hacia la izquierda del primer flujo entre las líneas equipotenciales entre las que se encuentra ubicado el segundo electrodo y las líneas de flujo, inclusive los puntos correspondientes a las líneas de flujo no dibujados, consta de las siguientes subrutinas:

- **ejecucion10.**- Copia el archivo coord1.txt en el archivo correspondiente a cada equipotencial.

- **pendiente.**- Encuentra la pendiente entre dos puntos.

- **copiar.**- Copia el archivo ordenado a cada curva equipotencial en coord21.txt.

- **nuevo_punto.**- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante perpendicularidad.

- **siguiente**.- Encuentra el siguiente punto de la línea de flujo mediante traslación de la distancia.

- **leer**.- Realiza la selección de entre el punto encontrado por perpendicularidad y el encontrado mediante la traslación de la distancia.

- **Corriente**.- Subrutina que encuentra las líneas de flujo.

- **main**.- Función principal.

RESIST.CPP.- Encuentra el valor de la resistencia entre los dos electrodos utilizando el método de los cuadrados curvilíneos, tiene las siguientes subrutinas:

- **pendiente**.- Encuentra la pendiente entre dos puntos.

- **main**.- Función principal, mediante la cual se calcula la resistencia entre los dos electrodos usando el método de los cuadrados curvilíneos.

MOUSE.CPP.- Archivo de rutinas para el manejo del mouse.

VERIFI.CPP.- Archivo que contiene las funciones para verificar ingreso de datos.

FONDO.CPP.- Archivo de rutinas de presentación de la pantalla.

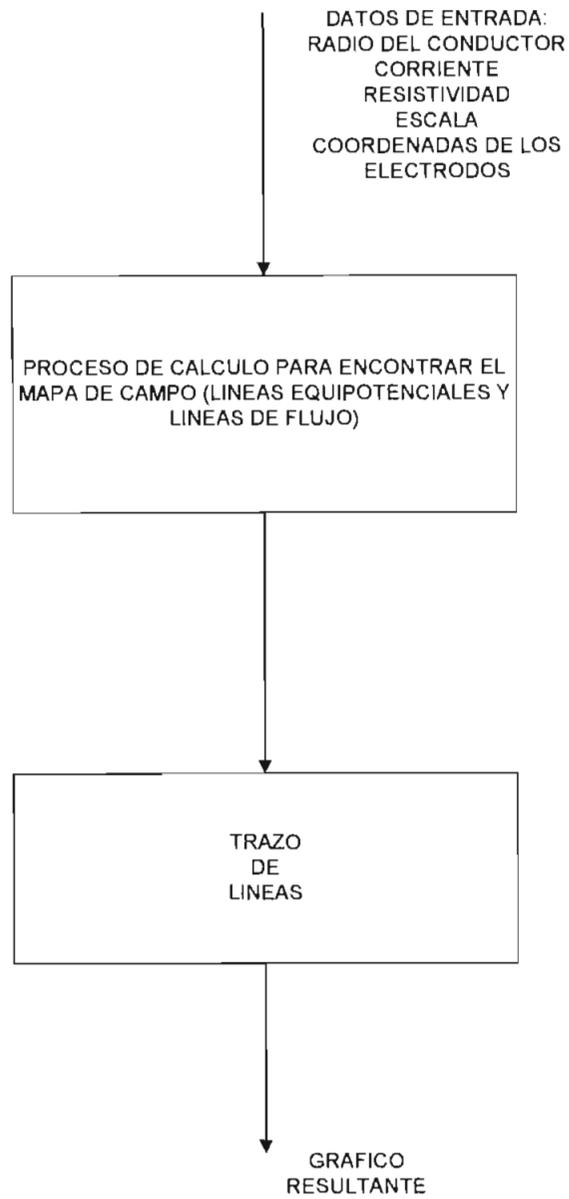
ARCHIVO.H.- Archivo que contiene definiciones de variables.

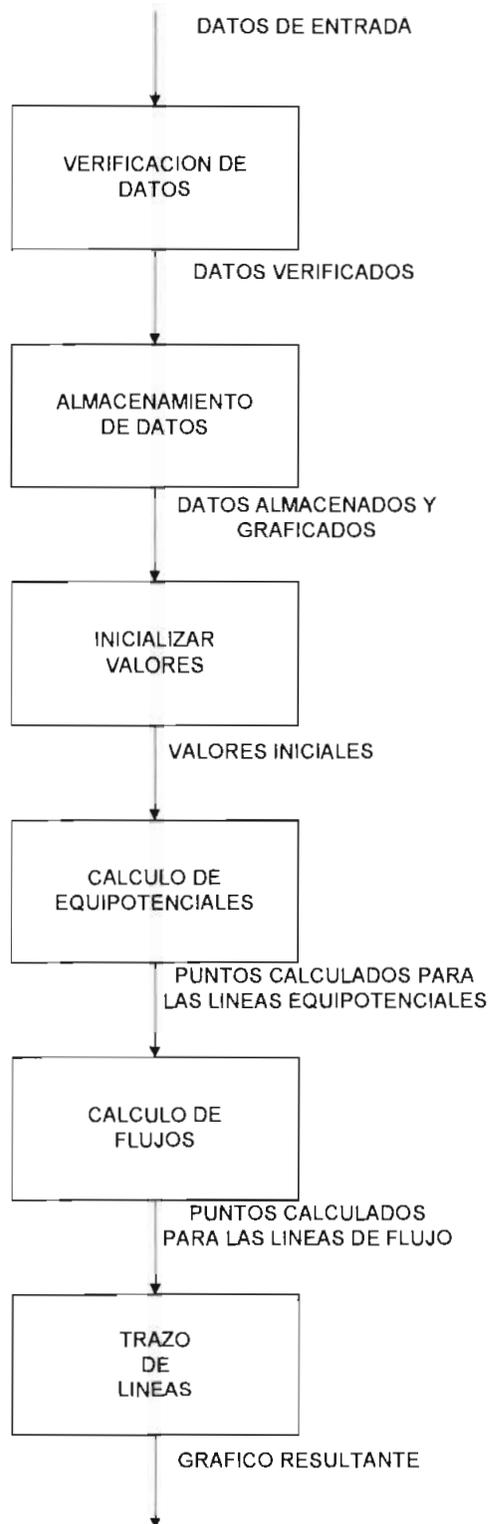
INTERF.BAT.- Archivo de interfase que activa el **graphics** del **DOS** para poder obtener los reportes por impresora, también realiza la presentación, y activa el ejecutable de **TES52**.

3.3.- DIAGRAMAS DE FLUJO.

3.3.1.- Diagrama de flujo de datos.

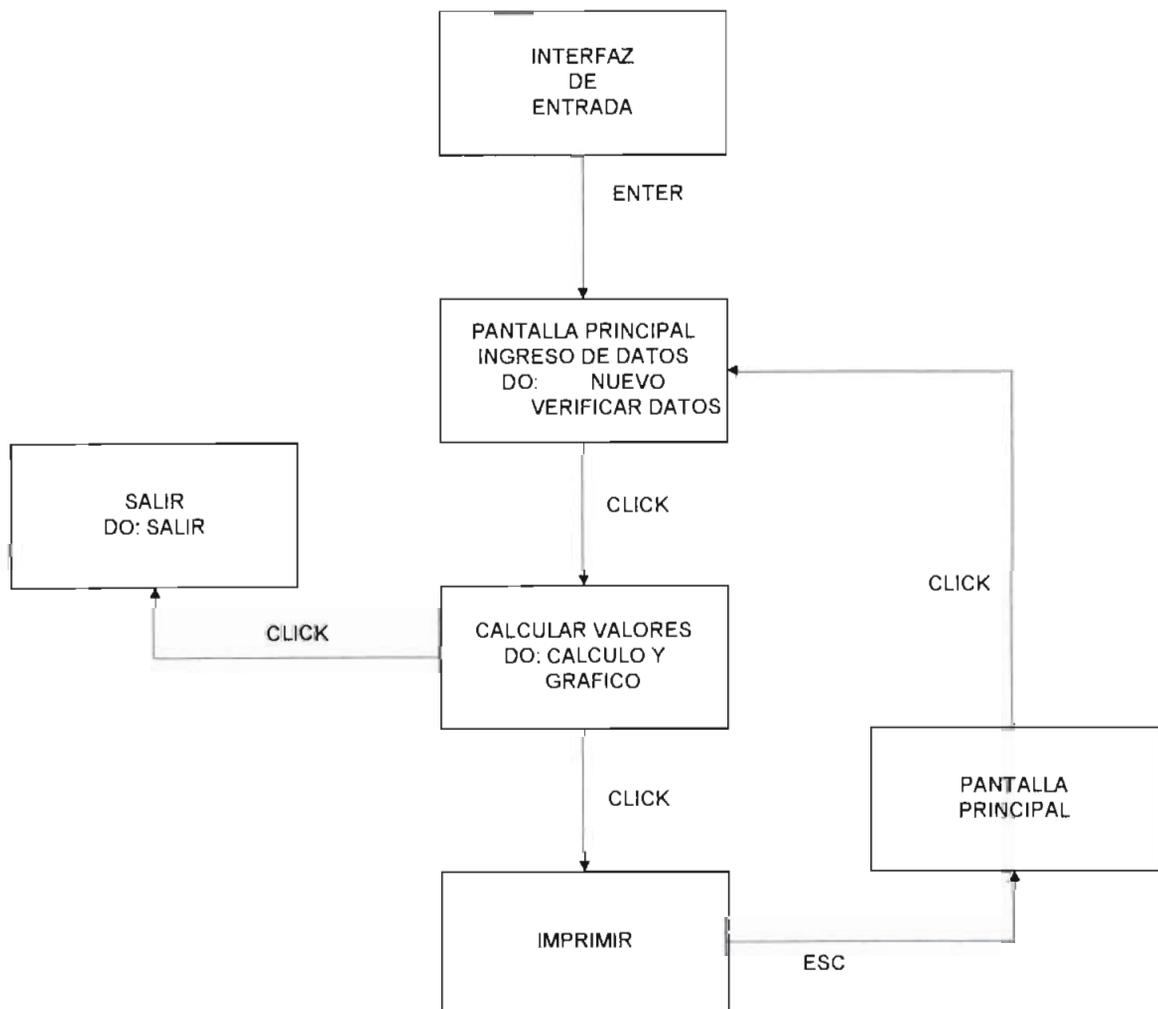
A continuación se presenta el diagrama de flujo de datos del programa digital.





3.3.2.- Transición de estados.

A continuación se presenta el diagrama de transición de estados del programa digital.



3.4.- PROGRAMA DIGITAL.

El listado del programa digital **MCAMPO** se presenta en un anexo a esta tesis.

CAPITULO IV

4.1.- PRESENTACION DE RESULTADOS.

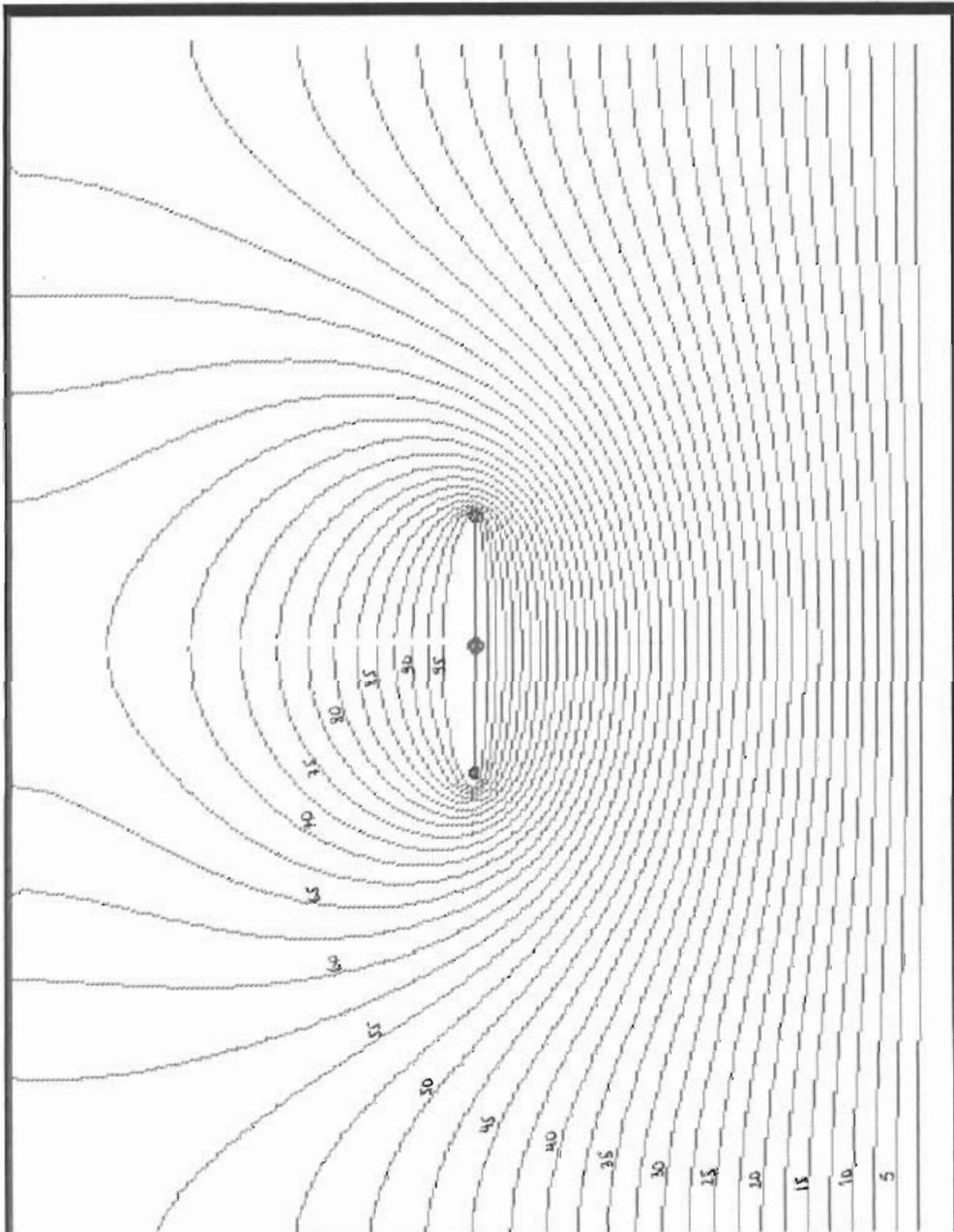
En esta sección se presentan las diferentes corridas de prueba que han sido realizadas del programa **MCAMPO**, las que serán analizadas, en forma detallada, en el siguiente numeral del capítulo.

Con el propósito señalado, se utiliza una malla de puesta a tierra wazzu con similares características que las usadas para la simulación analógica realizada en el capítulo II, con una escala adecuada de acuerdo a las particularidades del programa.

CASO # 1

TIERRA
1008,00

RADIO =0,70
CORRI =2000,00
RSTVD=10000,00
ESC =2,00
ELECTRODO# 2
83350,88
ELECTRODO# 1
83350,88

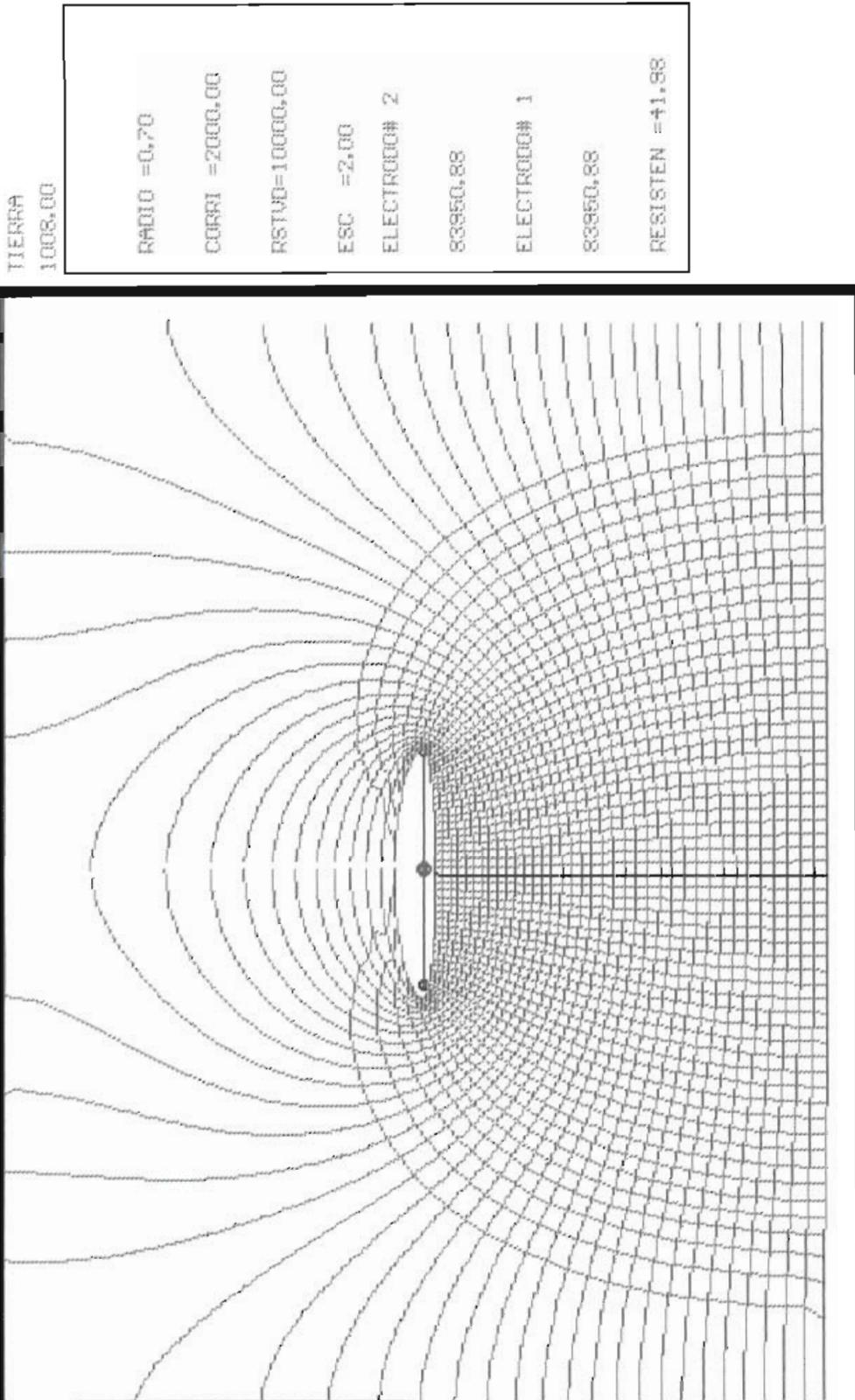


756,00

EQUIPOTENCIALES ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 1 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 3.8m.

CASO # 1



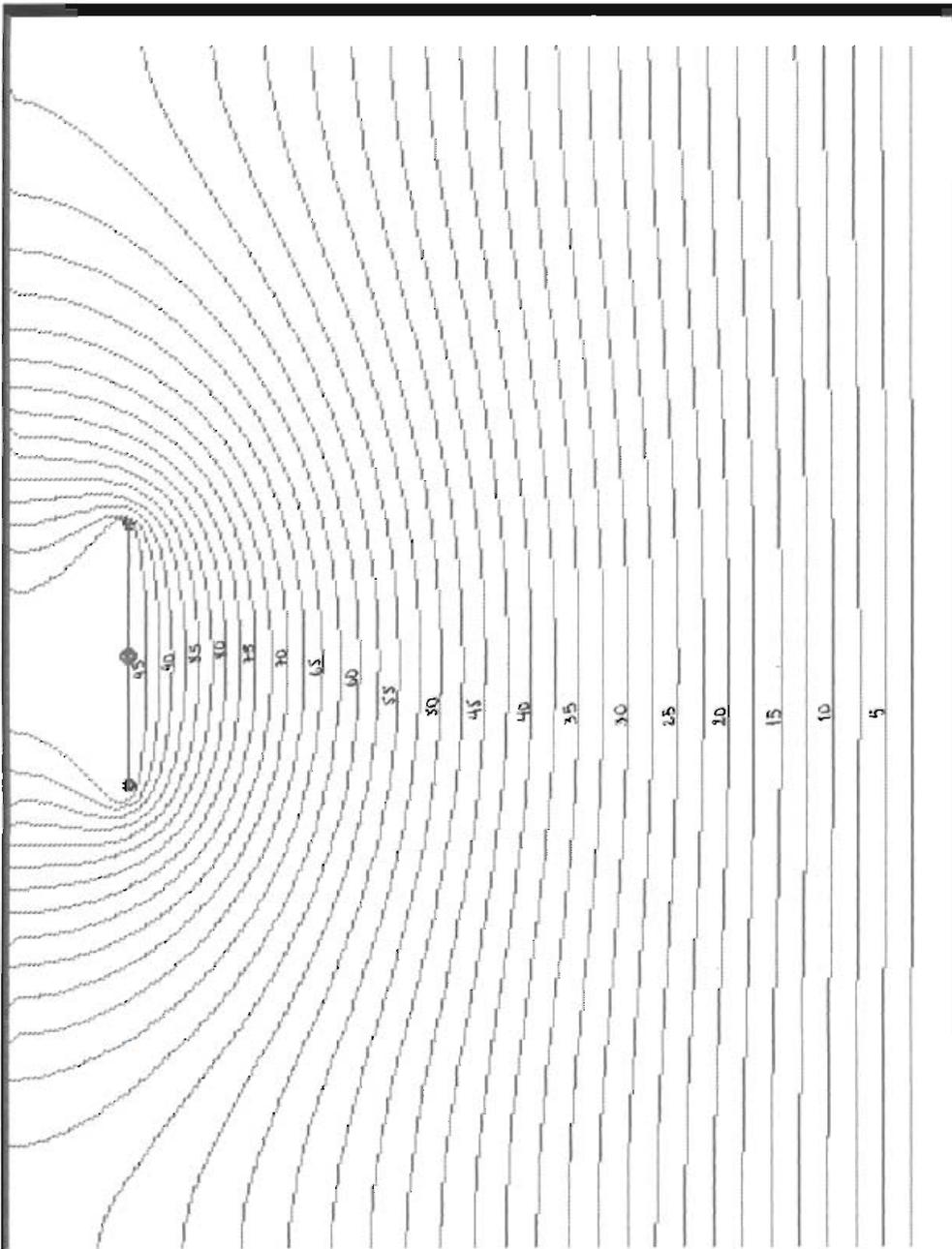
MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 1 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 3.8m.

CASO # 2

TIERRA
1008,00

RADIO =0,70
CORRI =2000,00
RSTMD=10000,00
ESC =2,00
ELECTROD# 2
88218,04
ELECTROD# 1
88218,04

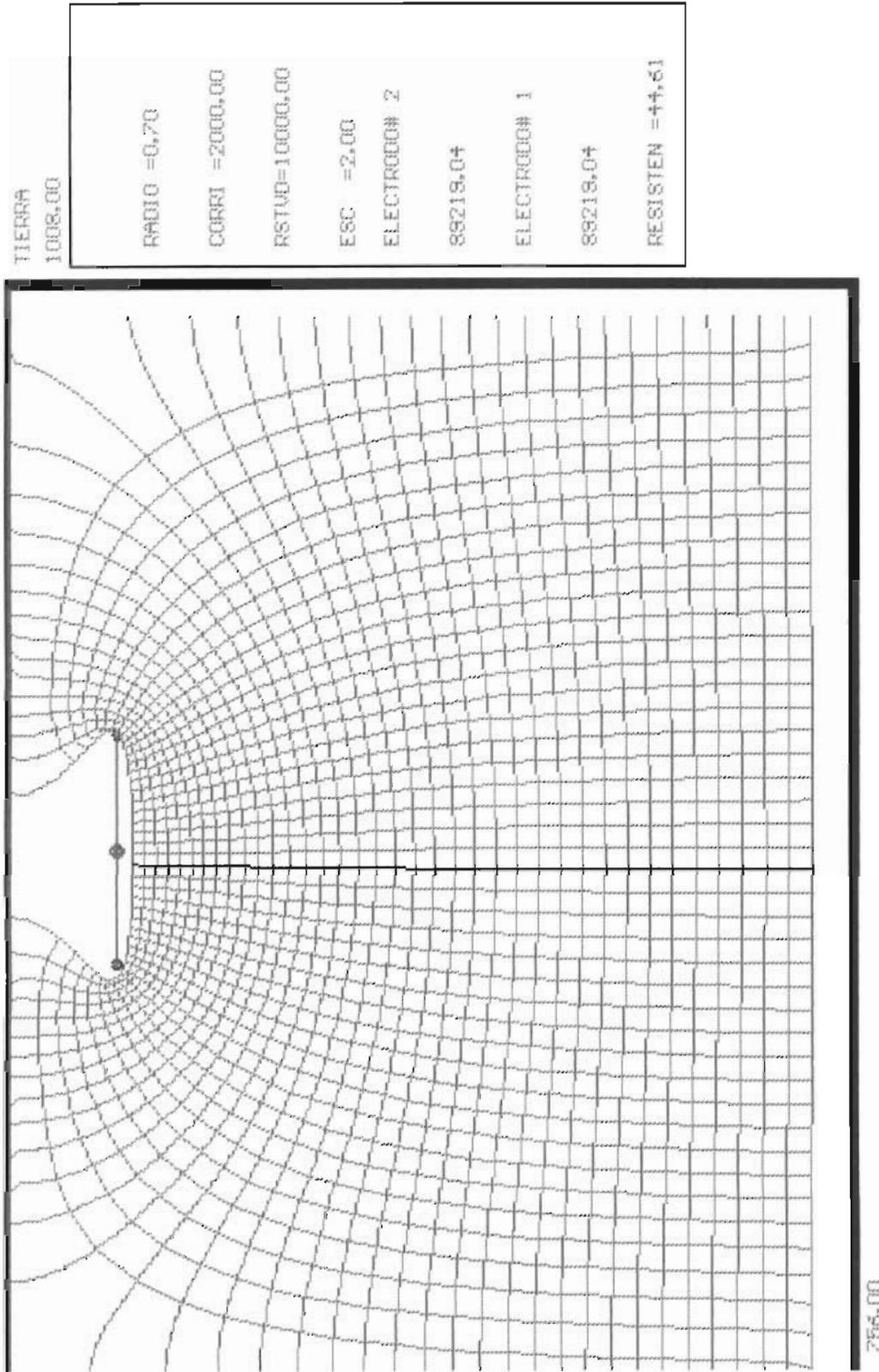


756,00

EQUIPOTENCIALES ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 2 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 1m.

CASO #2



MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 2 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 1m.

CASO # 3

TIERRA
1008,00

RADIO =0,70

CORRI =2000,00

RSTVD=10000,00

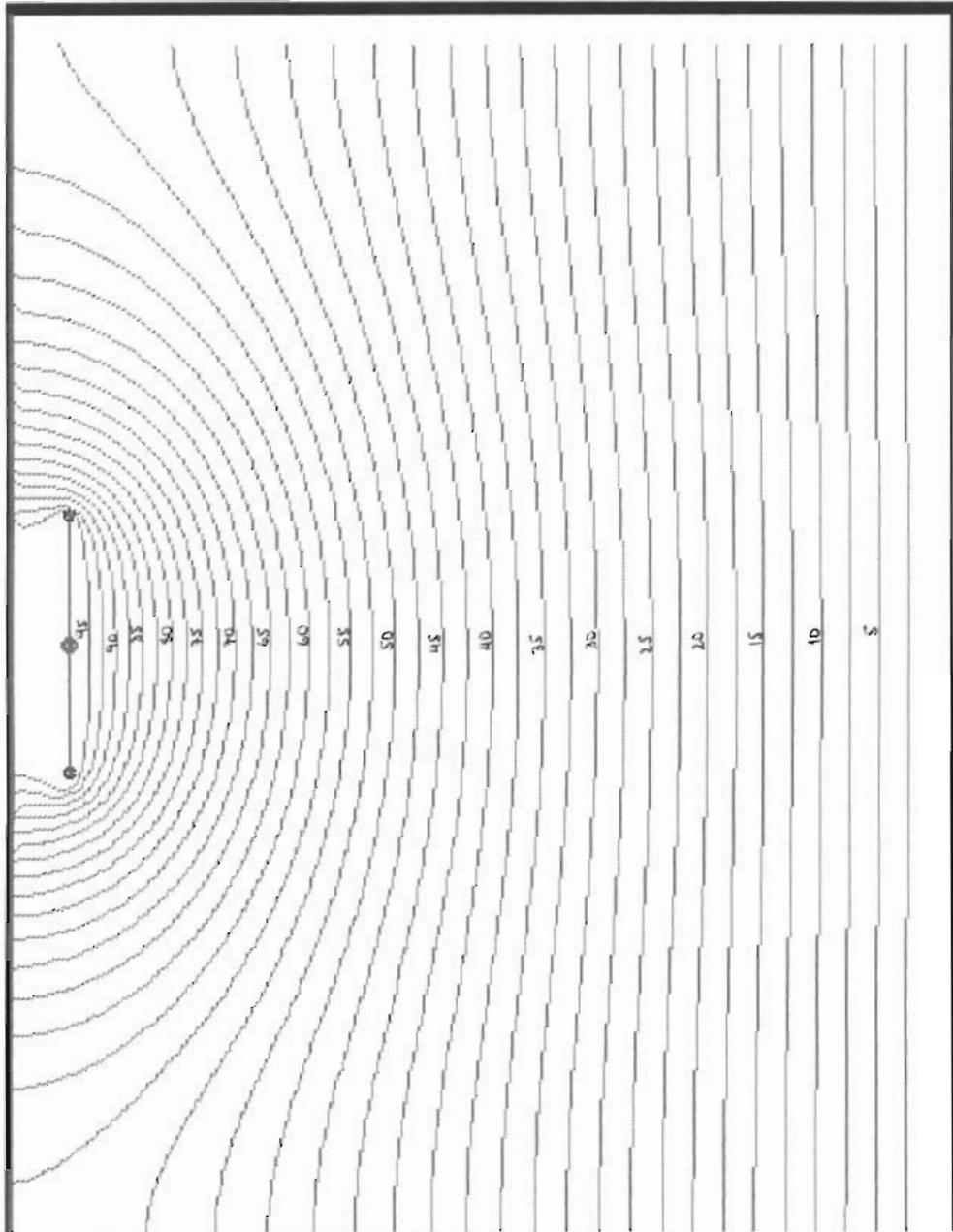
ESC =2,00

ELECTRODO# 2

94678,75

ELECTRODO# 1

94678,75

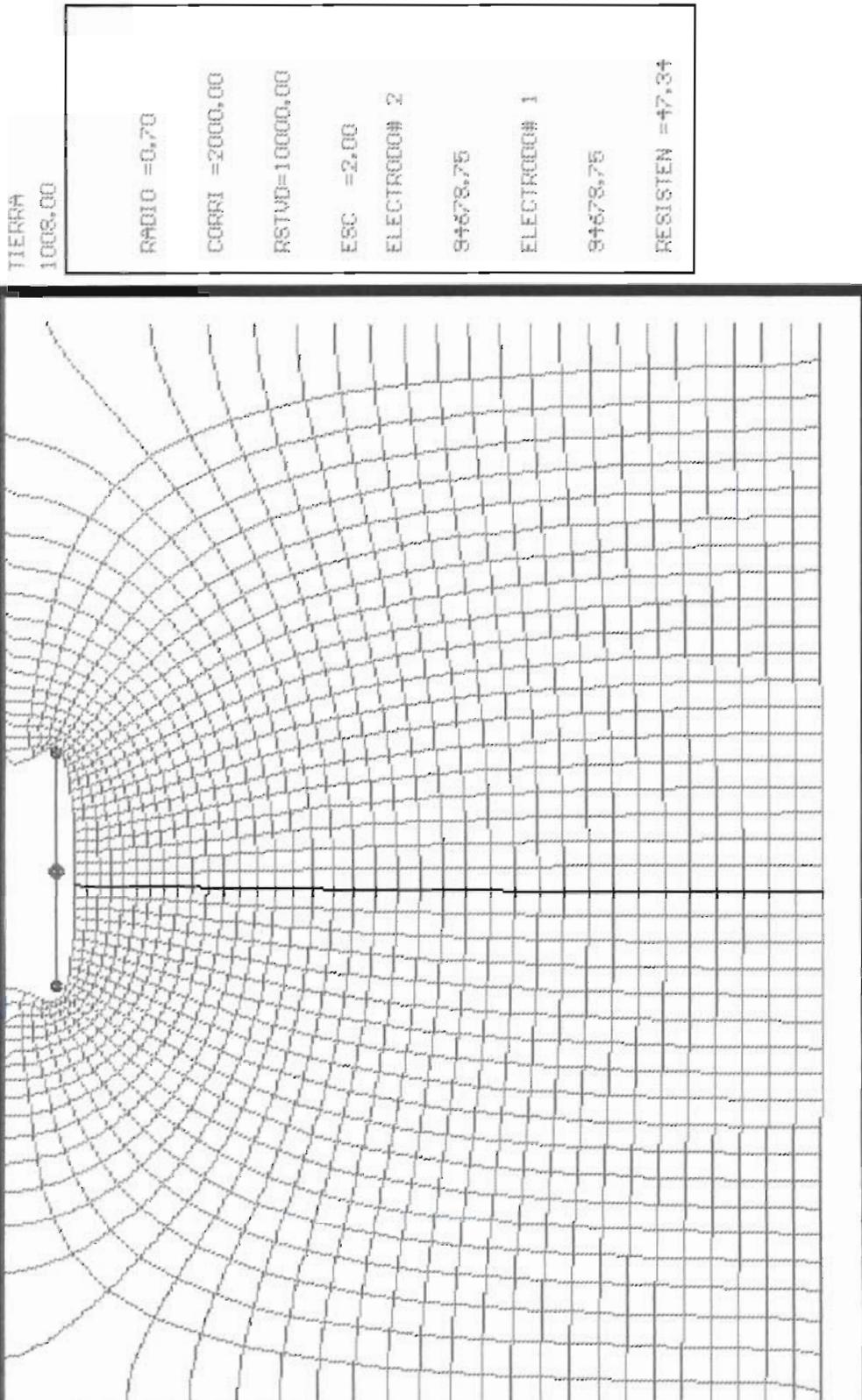


75,5,00

EQUIPOTENCIALES ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 3 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 0.5m.

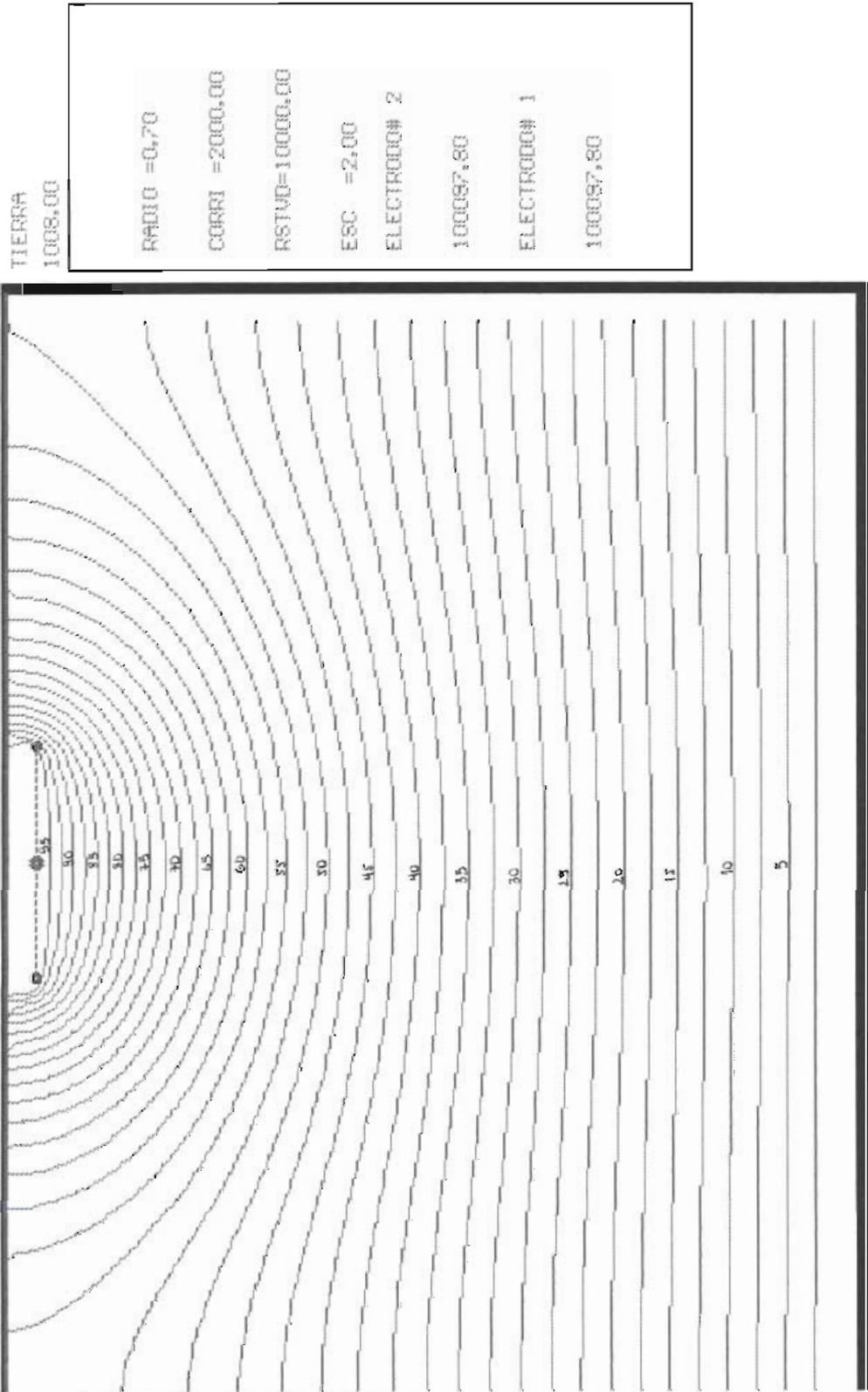
CASO # 3



MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 3 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 0.5m.

CASO # 4

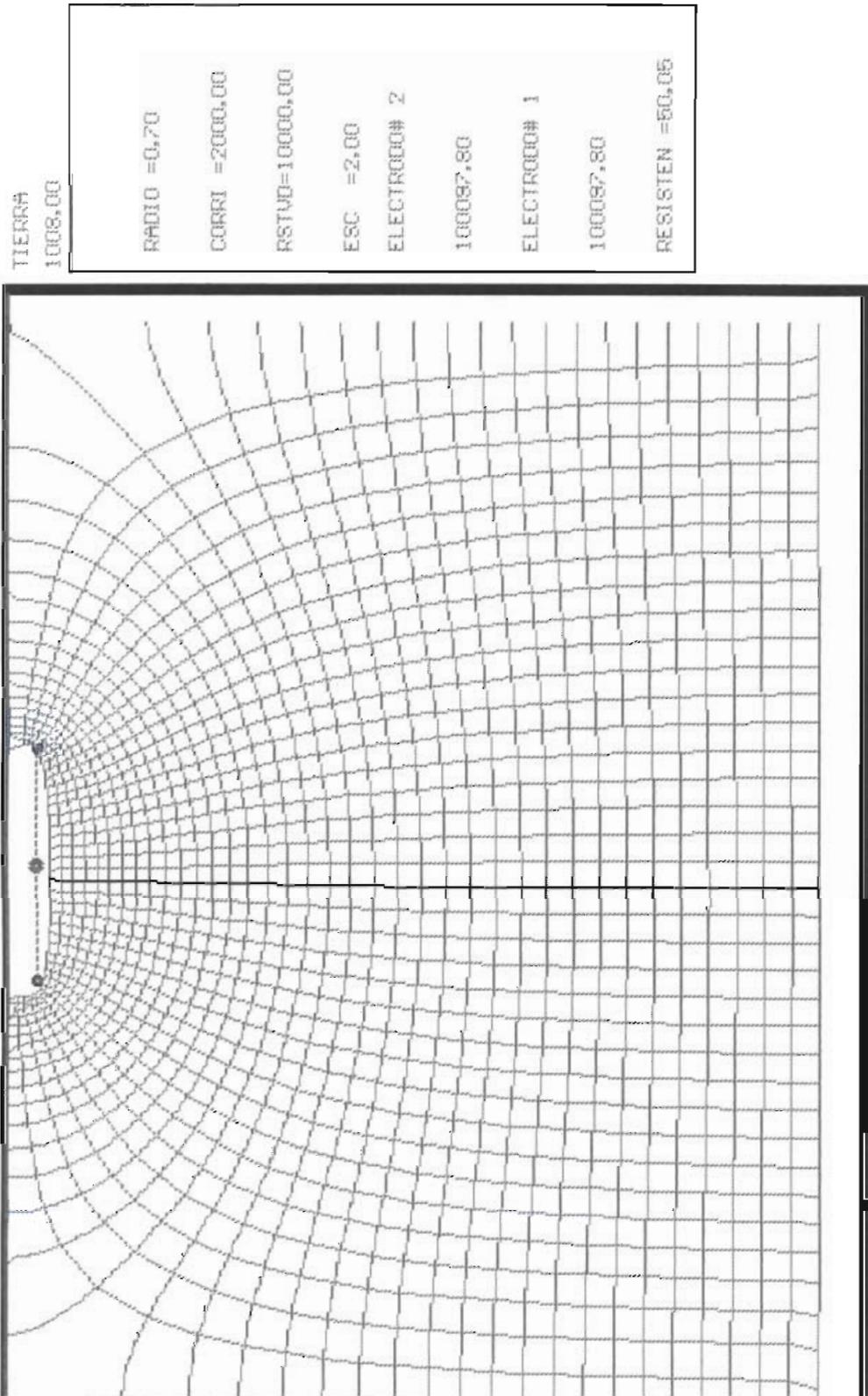


TIERRA	1008,00
RADIO	=0,70
CORRI	=2000,00
RSTVD	=10000,00
ESC	=2,00
ELECTRODO# 2	
	100097,80
ELECTRODO# 1	
	100097,80

EQUIPOTENCIALES ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 4 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 0.3m.

CASO # 4

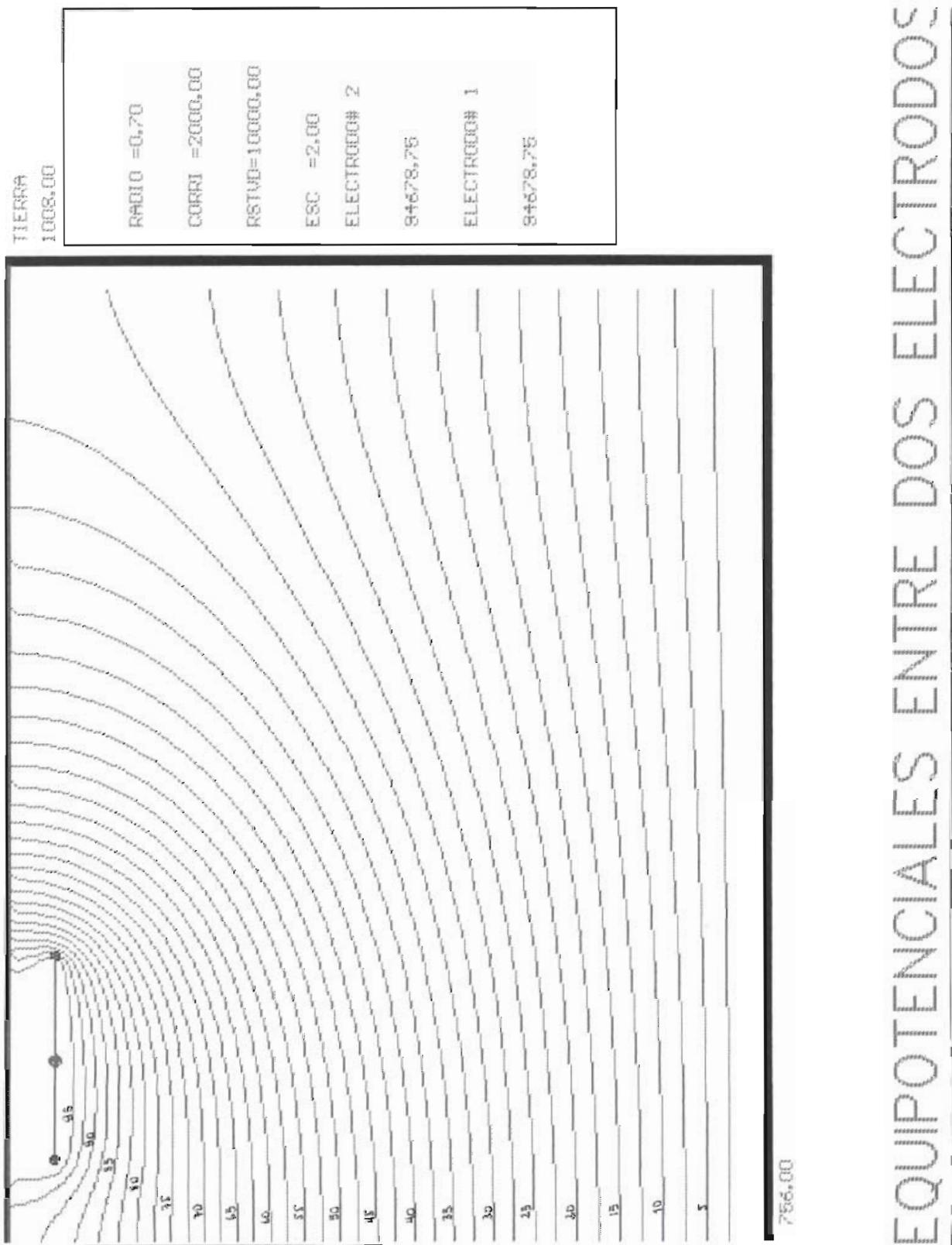


TIERRA	1008,00
RADIO	=0,70
CORRI	=2000,00
RSTVD	=10000,00
ESC	=2,00
ELECTRODO# 2	100097,80
ELECTRODO# 1	100097,80
RESISTEN	=50,05

MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

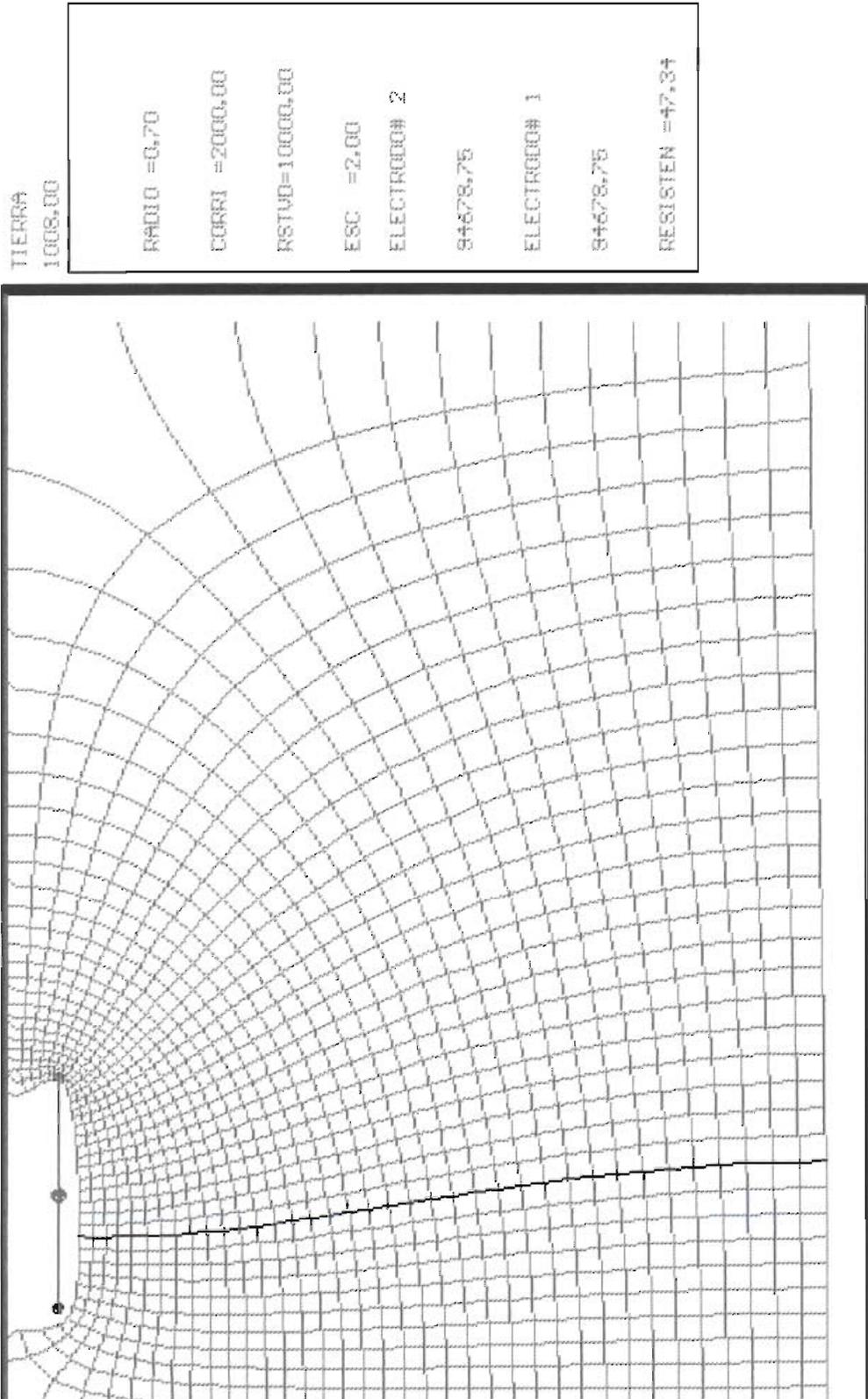
CASO # 4 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 0.3m.

CASO # 5



CASO # 5 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 0.5m. Campo extendido hacia la derecha.

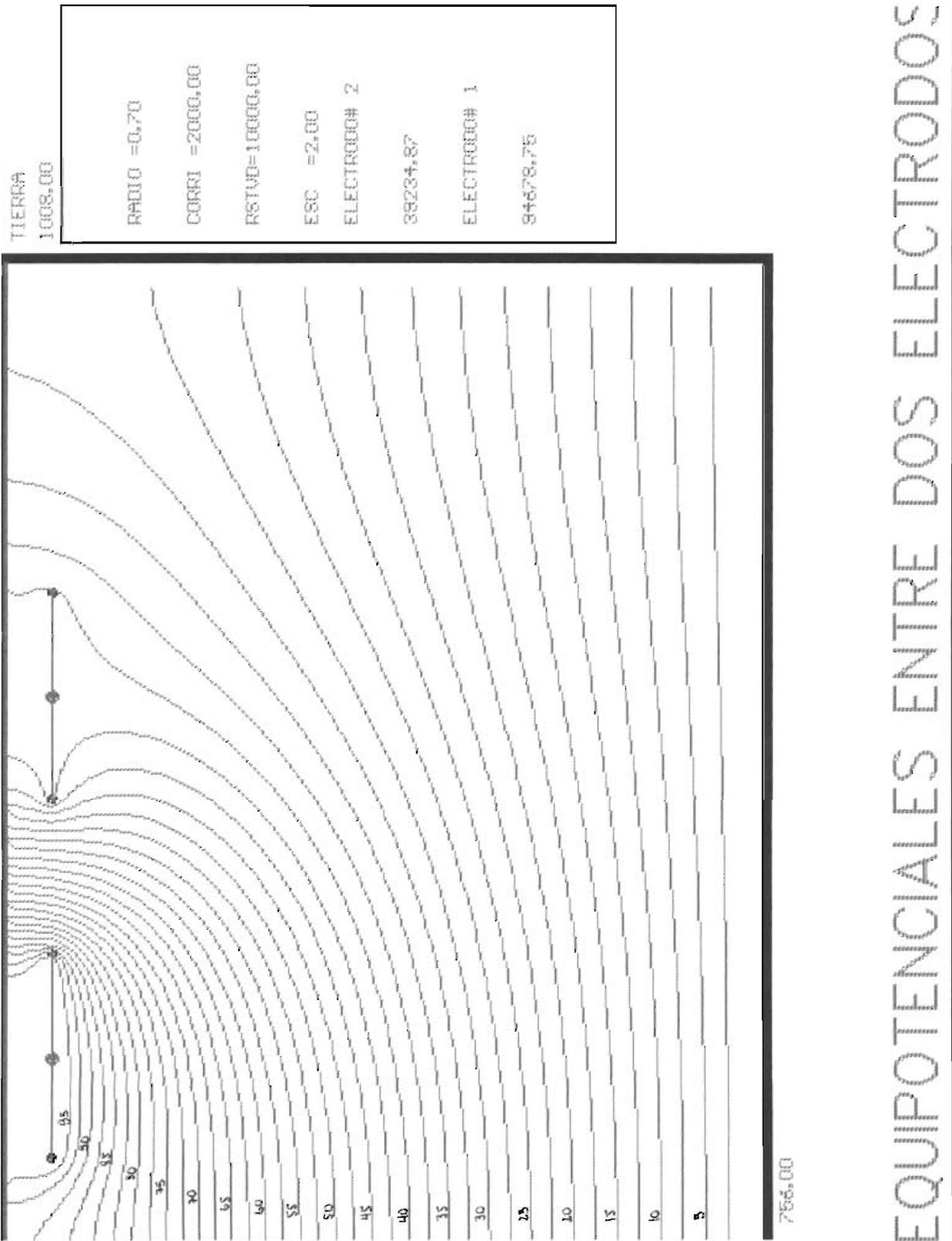
CASO # 5



MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

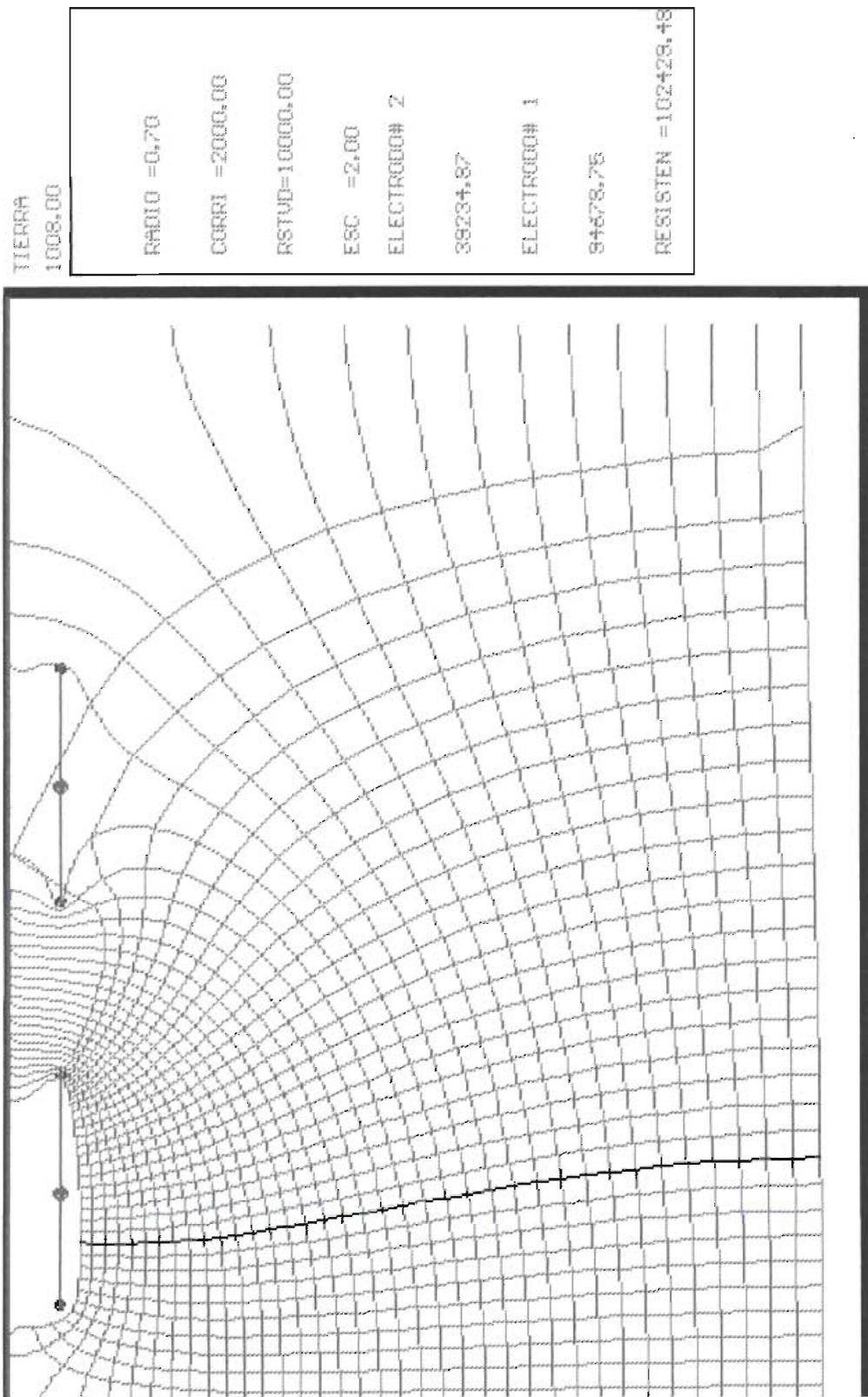
CASO # 5 Electrodo de puesta a tierra horizontal de longitud 2.1m a una profundidad de enterramiento de 0.5m. Campo extendido hacia la derecha.

CASO # 6



CASO # 6 Dos electrodos de puesta a tierra horizontales de longitud $L=2.1m$ separados $3L/4$ a una profundidad de enterramiento de $0.5m$.

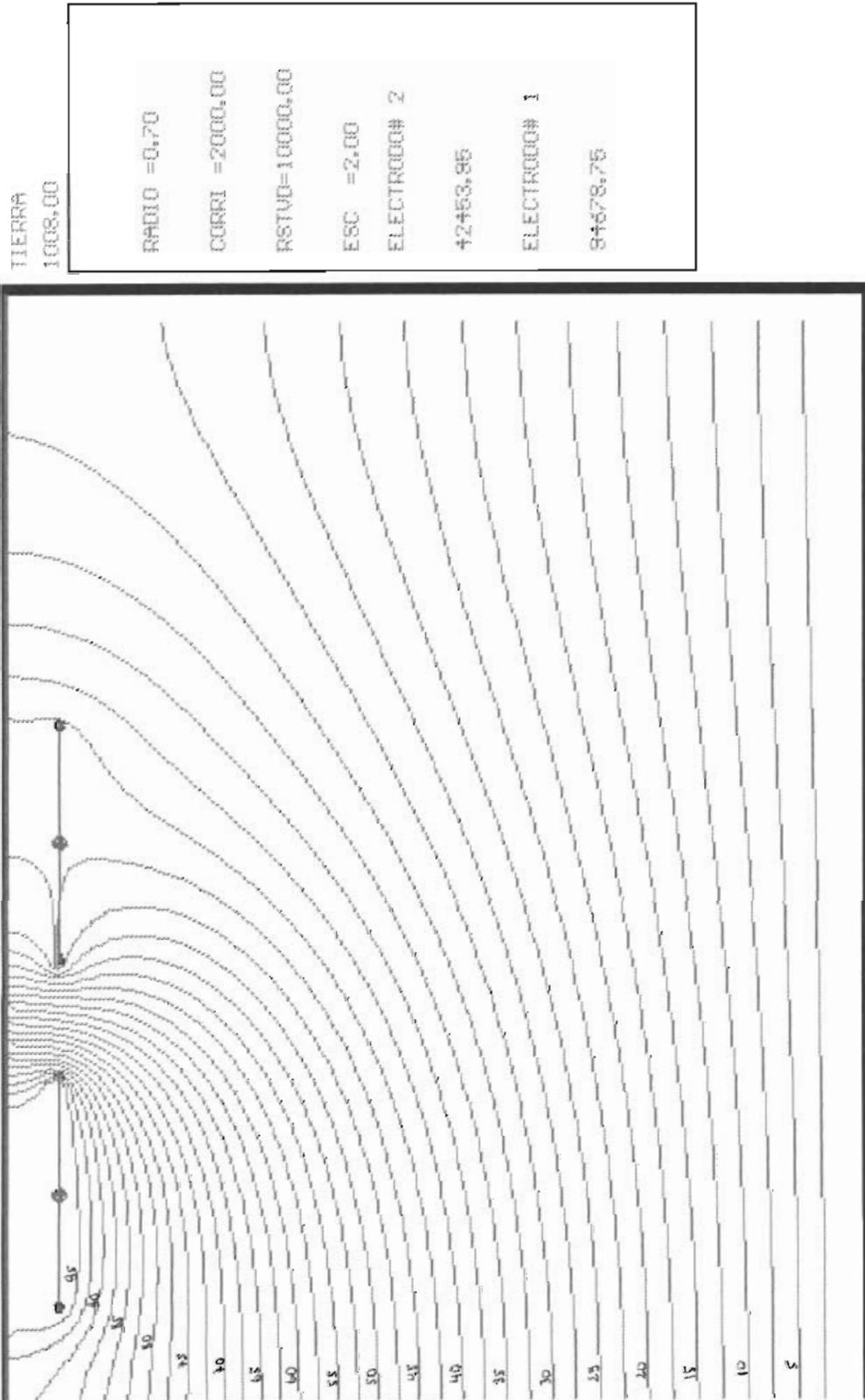
CASO # 6



MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 6 Dos electrodos de puesta a tierra horizontales de longitud $L=2.1m$ separados $3L/4$ a una profundidad de enterramiento de $0.5m$.

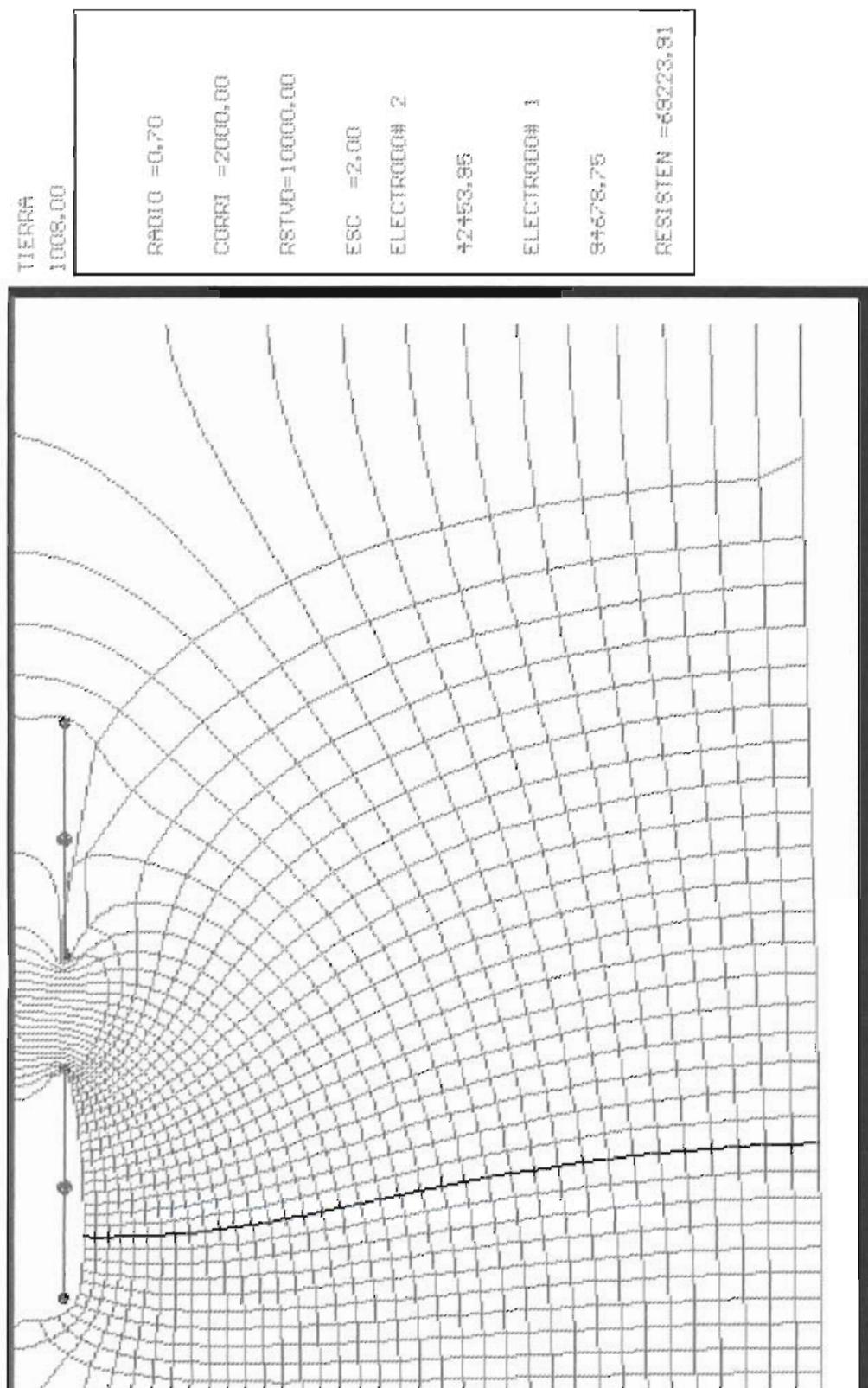
CASO # 7



EQUIPOTENCIALES ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 7 Dos electrodos de puesta a tierra horizontales de longitud $L=2.1$ m separados $L/2$ a una profundidad de enterramiento de 0.5m.

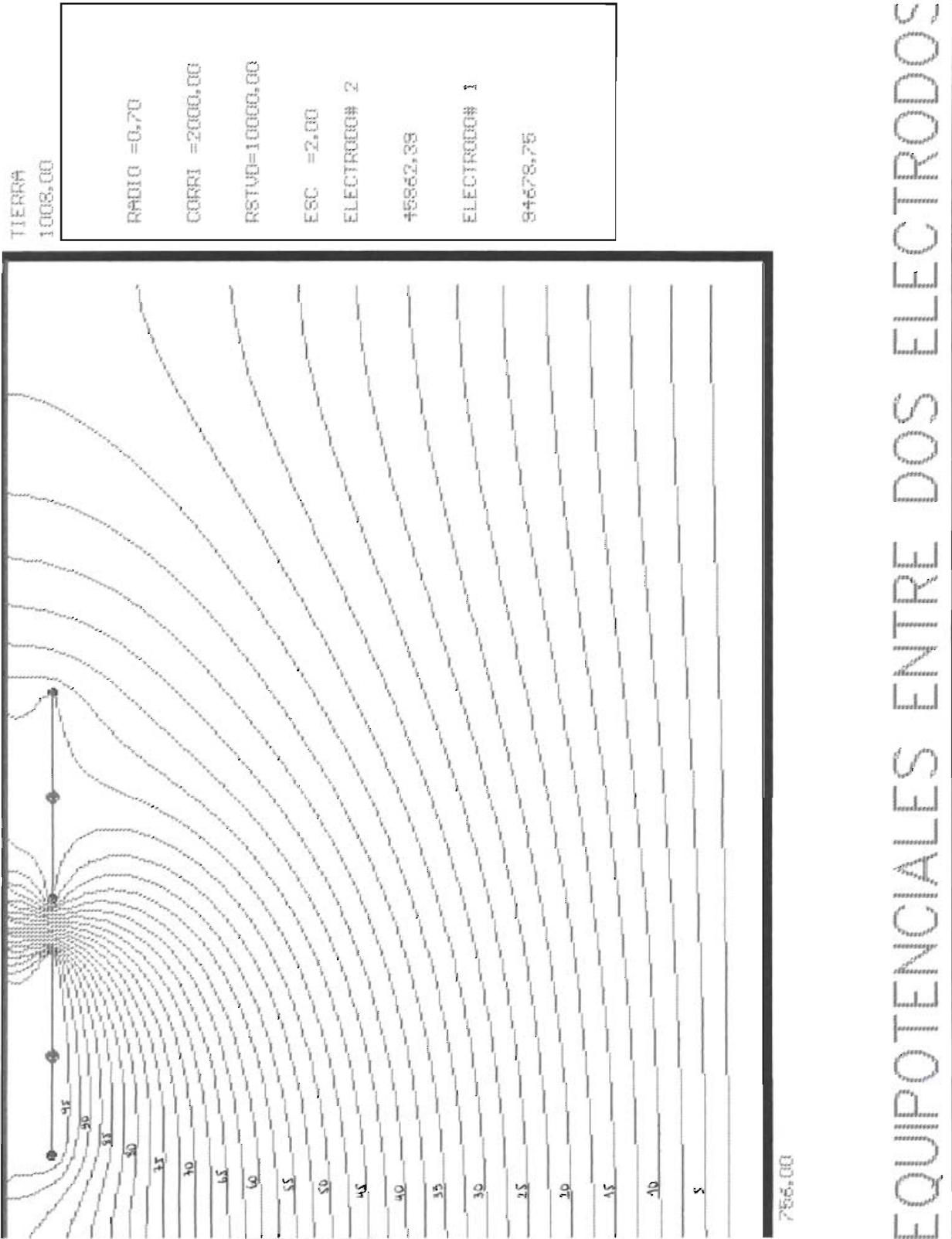
CASO #7



MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

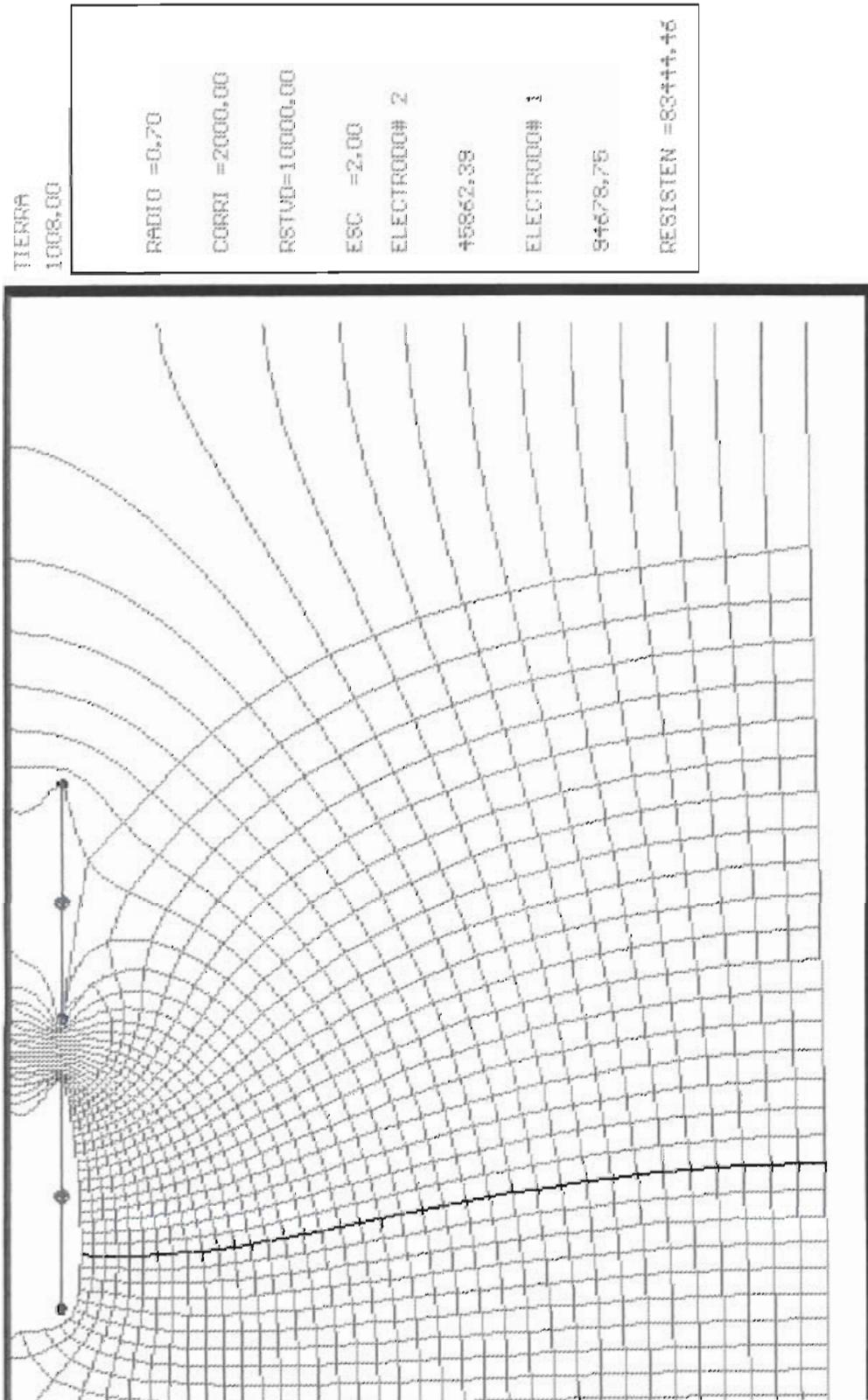
CASO # 7 Dos electrodos de puesta a tierra horizontales de longitud $L=2.1\text{m}$ separados $L/2$ a una profundidad de enterramiento de 0.5m .

CASO # 8



CASO # 8 Dos electrodos de puesta a tierra horizontales de longitud $L=2.1\text{m}$ separados $L/4$ a una profundidad de enterramiento de 0.5m .

CASO # 8



MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

CASO # 8 Dos electrodos de puesta a tierra horizontales de longitud $L=2.1\text{m}$ separados $L/4$ a una profundidad de enterramiento de 0.5m .

4.2.- ANALISIS DE RESULTADOS.

En los ejemplos de prueba de los casos # 1 y # 2 no se va a realizar un análisis de los valores obtenidos de voltaje y de resistencia, los que se efectúan en los ejemplos posteriores.

En el gráfico de la página 99 (CASO # 1) se presenta un electrodo de puesta a tierra de 2.1 m. de longitud y 0.007 m. de radio (4/0 AWG) enterrado a una profundidad de 3.8 m., a una escala de 2, en centímetros.

En un análisis detallado de las equipotenciales se observa una simetría aceptable para los fines que se persiguen, por ejemplo se puede ver en las equipotenciales correspondientes al 50% y 52.5%, que la distancia que las separa en la parte superior izquierda no es igual a la distancia que las separa en la parte superior derecha pero es suficientemente exacta, lo cual nos da la idea de que los resultados obtenidos son aceptables, y que el error cometido por el método utilizado es de igual forma aceptable para los fines que se persiguen, el ser una guía y dar una concepción general de lo que sucede con las equipotenciales y el flujo de corriente, para que el ingeniero pueda tomar las decisiones adecuadas según sea el caso.

Este gráfico y los siguientes tienen por finalidad demostrar la validez de la resolución obtenida con el programa. Para el ingeniero dedicado al análisis de campos estos gráficos evidencian la bondad de los resultados, lo que garantiza su empleo para análisis posteriores.

El gráfico de la página 100 presenta el mapa de campo completo del CASO # 1, se observa la existencia de una línea de flujo resaltada, la cual es una línea generatriz, a partir de ella se generan las demás líneas de flujo. El campo en general tiene una buena resolución.

En el gráfico de la página 101 (CASO # 2) se presenta un electrodo de puesta a tierra de las mismas características que el del ejemplo anterior , pero con la diferencia que éste se encuentra a una profundidad de enterramiento de 1 m.

En este gráfico, de igual forma que en el caso anterior, se observa que la simetría es aceptable, la cual es posible concluir con tan solo observar detenidamente la equipotencial correspondiente al 52.5%.

También podemos observar la presencia de cierta concentración de

potencial en los extremos del electrodo, lo que conlleva a que en estas regiones el voltaje de paso pueda ser peligroso.

El gráfico de la página 102 presenta el mapa de campo del electrodo del CASO # 2, el cual se genera de la forma antes señalada, es decir a partir de la línea de flujo que se encuentra resaltada en el gráfico, como podemos ver la resolución de cuadrados curvilíneos es coherente.

El gráfico de la página 103 (CASO # 3) presenta al electrodo estudiado, pero esta vez a una profundidad de enterramiento de 0.5 m.

De igual forma que para los casos anteriores la simetría es aceptable, lo que se concluye al observar la equipotencial del 52.5%.

El voltaje de paso en los extremos del electrodo se vuelve aún más crítico para este caso.

El voltaje en el electrodo se puede calcular de la siguiente forma: [25]

$$R = \frac{\rho}{4\pi L} \left(\ln \frac{4L}{a} + \ln \frac{4L}{s} - 2 + \frac{s}{2L} - \frac{s^2}{16L^2} + \frac{s^4}{512L^4} \dots \right)$$

donde:

$2L$ es la longitud del electrodo

$s/2$ es la profundidad de enterramiento

a el radio del conductor

Que para el caso estudiado resulta $R = 47.3912 \Omega$., que es la resistencia de puesta a tierra del electrodo.

$$V = R I$$

donde $I = 2000 \text{ A}$, $V = 94782.41 \text{ V}$.

El valor del potencial que encuentra el programa utilizando el método de segmentación del electrodo es: $V = 94678.75 \text{ V}$., que comparado con el valor calculado mediante la fórmula aproximada para determinar la resistencia de puesta a tierra, es cercano, y por consiguiente aceptable. En el anexo F se

presenta un análisis de error de cálculo del potencial sobre el electrodo utilizando el método de la segmentación, pero debemos aclarar que para este cálculo no se toma en cuenta la influencia del segundo electrodo en caso de que éste estuviere presente, es decir que para el cálculo del potencial no se utiliza la nueva distribución de densidad de corriente.

Comentario: Los valores de **R** y **V** resultan ser altos debido a la configuración simple de un electrodo de tierra. No es el caso de la presente tesis optimizar estos valores y por lo tanto deben ser tomados sólo como referenciales. En el caso real un electrodo de puesta a tierra ideal (baja resistencia óhmica) tendrá el mismo comportamiento en la forma de los campos.

El mapa de campo del electrodo de puesta a tierra del CASO # 3, se presenta en la página 104.

El valor que se presenta como resistencia, para este caso, concierne a la de puesta a tierra del electrodo estudiado, y que corresponde a un valor de **47.34 Ω .**, que comparado con el valor calculado mediante la fórmula dada en la referencia 25, se aprecia que existe una pequeña diferencia, por consiguiente podemos decir que el valor es muy aceptable.

En el gráfico de la página 105 (CASO # 4) se presenta el electrodo analizado, pero esta vez, a una profundidad de enterramiento de 0.3 m, lo cual no es usual para electrodos reales, pero permite visualizar la bondad del programa.

De igual forma que para los casos anteriores la simetría y el valor de voltaje son aceptables.

En el presente caso se puede observar que la concentración de potencial en los extremos del electrodo es mayor y por consiguiente el voltaje de paso en esta región es más crítico todavía.

En el gráfico de la página 106 se presenta el mapa de campo del CASO # 4. De igual forma que en los ejemplos anteriores el valor de resistencia se refiere a la de puesta a tierra del electrodo.

En la página 107 (CASO # 5) encontramos al electrodo enterrado a una profundidad de 0.5 m. pero ubicado hacia la izquierda del área de trabajo.

Este es el caso análogo al obtenido mediante simulación analógica y

presentado en la página 63, y que al analizarlos comparativamente resultan muy similares, por lo tanto se concluye que la resolución del programa es aceptable hacia la derecha del campo de trabajo.

En la página 108 se presenta el mapa de campo del CASO # 5.

En la página 109 y 110 (CASO # 6) se presentan las equipotenciales y mapa de campo de dos electrodos de puesta a tierra separados $3L/4$, siendo L la longitud de los electrodos.

Al realizar la comparación con el resultado obtenido mediante simulación analógica (página 68), se observa que difieren en el valor que adquiere el segundo electrodo, pero los mapas de campo son bastante semejantes.

En este caso el valor que se presenta como resistencia se refiere a la resistencia entre los dos electrodos, valor determinado utilizando el método de los cuadrados curvilíneos. Cabe resaltar la presencia de concentración de potencial entre los dos electrodos.

En las páginas 111 y 112 (CASO # 7) constan las equipotenciales y mapa de campo entre dos electrodos separados una distancia $L/2$, siendo L la longitud de los electrodos.

Mediante contrastación con su similar analógico (página 67), se observa que existe diferencia en el valor adquirido por el segundo electrodo, en consecuencia existe diferencias entre los mapas contrastados, pero en general tienen gran similitud. Para este caso anotamos que la concentración de potencial entre los dos electrodos es mayor.

En las páginas 113 y 114 (CASO # 8) se presentan las equipotenciales y mapa de campo entre dos electrodos separados una distancia $L/4$, siendo L la longitud de los electrodos.

Mediante contrastación con su similar analógico (página 66), se observa que existe diferencia en el valor adquirido por el segundo electrodo, similarmente a lo sucedido en los dos últimos casos analizados, que en general los mapas contrastados son semejantes, y la concentración de potencial entre los dos electrodos es aún mayor todavía.

4.3.- CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.

El programa ha sido contrastado con resultados obtenidos mediante simulación analógica, encontrándose concordancia, con esto se corrobora una validez adecuada de la metodología implementada y del programa en cuestión.

El programa es amigable y funcional, el manejo del mismo es básicamente fácil, cualquier particularidad propia se ha señalado oportunamente en el manual del usuario.

No se ha comentado mayormente sobre el tiempo que el programa emplea para resolver un problema determinado, por no ser éste uno de los objetivos básicos a tomarse en consideración para desarrollar el presente trabajo, pero sí se debe aclarar, que el mismo disminuirá si se superan los requerimientos de hardware establecidos como mínimos (por ejemplo si se trata de un computador 486 DX4 con 100 MHz).

La aplicación en cuestión tiene limitaciones en lo referente a resolución, debido al método utilizado, que es un método gráfico de resolución, que el operador lo tendría que desarrollar normalmente de forma manual, lo que le

llevaría mucho tiempo.

Los valores de voltaje y de resistencia de puesta a tierra obtenidos por medio del programa son muy próximos a los que se pueden calcular por medio de fórmulas.

El método de segmentación utilizado para el cálculo del potencial sobre el primer electrodo y la resistencia de puesta a tierra, proporcionará resultados más exactos mientras mayor sea el número de segmentos utilizados, y esto dependerá mucho de la escala con la que se trabaje, ya que el programa asume internamente el número de segmentos a utilizarse para dicho cálculo (ver anexo F).

De las pruebas realizadas se puede concluir que, la profundidad de enterramiento es un factor determinante en la presencia de concentración de potencial en los extremos de un electrodo de puesta a tierra, ya que esta concentración aumenta cuando disminuye la profundidad de enterramiento del electrodo (ver anexo G).

De igual forma, la distancia de separación entre dos electrodos es un

factor determinante en la presencia de concentración de potencial entre ellos, y se agrava el voltaje de paso entre los mismos cuando éstos están muy cercanos (ver anexo H).

Para obtener una buena resolución y resultados aceptables se recomienda escoger una escala de trabajo adecuada (ver anexo I).

4.4.- ANEXOS.

ANEXO A

La resistencia de un electrodo rectilíneo de longitud L y diámetro d , enterrado en un medio de resistividad ρ a una profundidad h , es expresada por[1]:

$$R = 0.366 \frac{\rho}{L} \left(\log \frac{3L}{2d} + \log \frac{3L}{8h} \right)$$

(ec. A1)

El segundo término, dentro del paréntesis, es el apropiado para pequeñas profundidades, pero puede ser reemplazado por cero para una profundidad infinita y por el valor del primer término para un electrodo semienterrado.

Para un electrodo semiesférico enterrado en la superficie la resistencia se calcula de la siguiente manera:

$$R = \frac{\rho}{2\pi r}$$

(ec. A2)

Si igualamos las ecuaciones **A1** y **A2** encontramos el radio de la semiesfera conductora equivalente que representará al electrodo horizontal, obtenemos la siguiente ecuación:

$$r = \frac{0.43485L}{\left(\log \frac{3L}{2d} + \log \frac{3L}{8h} \right)}$$

(ec. A3)

Considerando la influencia del medio, la cual está expresada a través de la expresión **A4**, donde si r_1 es muy grande, se regresa a la ecuación de la semiesfera. [21]

$$R = \frac{\rho}{2\pi} \left[\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right]$$

(ec. A4)

Por consiguiente se determina que:

$$r_1 = \frac{100r}{(100 - x)}$$

(ec. A5)

donde x es el grado de aproximación o de exactitud en porcentaje, así si deseamos un 99% de exactitud en los valores obtenidos $r_1=100r$.

Por ejemplo, para un electrodo de 100 metros de longitud, enterrado a 1 metro de profundidad, de diametro 0.0065 metros, su radio de la semiesfera conductora equivalente es $r=7.32415$ metros, y si deseamos una exactitud del 99%, $r_1=732.415$ metros, lo que significa 7 veces L ; pero si la exactitud deseada es del 95%, $r_1=20r$, es decir $r_1=146.483$ metros, lo que significa 1.5 veces L .

En consecuencia, en lo que corresponde a nuestro análisis, si dimensionamos el campo con una profundidad de 2.5 veces la longitud del primer electrodo, obtendremos una aproximación razonable en nuestros resultados, comprendida entre el 95% y 99%; no es necesario dimensionar la sección horizontal ya que al aplicar para estas regiones L'Hospital le estamos dando continuidad.

ANEXO B

Una fuente de corriente lineal debe ser considerada como una sucesión de fuentes de corriente distribuidas sobre la longitud L del electrodo. Si la distribución de corriente es asumida uniforme e igual a $\mathbf{J}=\mathbf{I}/L$, cada fuente de corriente puntual inyectará una corriente $d\mathbf{I}=\mathbf{J}d\mathbf{l}$ en la tierra circundante. Con un sistema de coordenadas apropiado como muestra la siguiente figura, el potencial en el punto $\mathbf{P}(x_p, y_p)$ producido por una fuente elemental $d\mathbf{I}$ es dado como: [18]

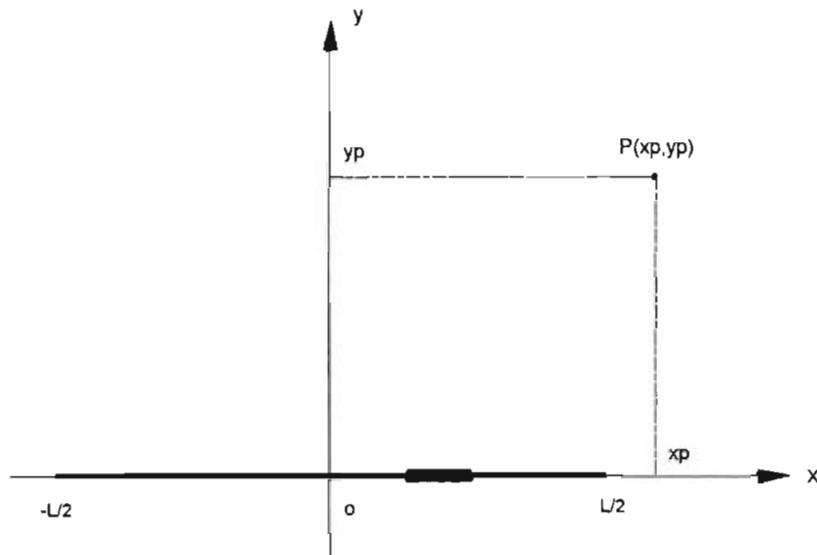


Fig. B1.- Fuente de corriente lineal en un medio ilimitado.

$$d\phi(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{J}}{4\pi\gamma} \frac{d\mathbf{x}}{\left[(\mathbf{x}_p - \mathbf{x})^2 + y_p^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

(ec. B1)

Integrando esta expresión con respecto de x desde $x=-L/2$ a $x=L/2$, obtenemos la expresión del potencial en el punto $\mathbf{P}(x_p, y_p)$ producido por el electrodo lineal.

$$\Phi(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{I}}{4\pi\gamma\mathbf{L}} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{d\mathbf{x}}{\left[(\mathbf{x}_p - \mathbf{x})^2 + y_p^2 \right]^{\frac{1}{2}}}$$

(ec. B2)

$$\Phi(\mathbf{P}) = \frac{\mathbf{I}}{4\pi\gamma\mathbf{L}} \mathbf{Ln} \left[\frac{x_p + L/2 + \sqrt{(x_p + L/2)^2 + y_p^2}}{x_p - L/2 + \sqrt{(x_p - L/2)^2 + y_p^2}} \right]$$

(ec. B3)

Es preciso anotar que al revisar la referencia 18 se detectó un error en la ecuación correspondiente a la ec. B3 de este anexo, en dicha referencia se encuentra cambiado el tercer signo del denominador del logaritmo en la que el signo + debe ser remplazado por el -.

ANEXO C

Hay una analogía muy estrecha entre un sistema electrostático de conductores y dieléctricos, por una parte, y un sistema que conduce una corriente constante, por otra.

Consideremos un medio conductor óhmico, homogéneo, bajo condiciones de conducción de estado estacionario. Puesto que estamos tratando específicamente con el estado estacionario, la densidad de carga local ρ está en su valor de equilibrio. En consecuencia la ecuación **C1** se reduce a la ecuación **C2**.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

(ec. C1)

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$$

(ec. C2)

Utilizando la ley de Ohm en combinación con la ecuación **C2** obtenemos:

$$\nabla \cdot \mathbf{gE} = 0$$

(ec. C3)

que para un medio homogéneo se reduce a:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$$

(ec. C4)

pero ya que $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ para un campo estático, \mathbf{E} puede derivarse de un potencial escalar:

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

(ec. C5)

La combinación de las dos últimas ecuaciones da:

$$\nabla^2 \phi = 0$$

(ec. C6)

que es la ecuación de Laplace. [13]

Por consiguiente al tratarse del suelo, un medio que no es un buen conductor, pero tampoco es un medio dieléctrico, se puede aplicar en el la ecuación de Laplace como se ha demostrado aquí.

ANEXO D

Se procede a establecer la resistividad del papel resistivo utilizado en la simulación analógica empleando para ello el método Wenner, que consiste en cuatro electrodos ubicados en línea recta, separados una distancia A entre ellos. [21][22]

Dos electrodos son de corriente y los otros dos son de potencial, como se indica en la siguiente figura. Se mide la diferencia de potencial (V) entre los electrodos de potencial, y se determina la corriente (I) que circula entre los dos electrodos de corriente.

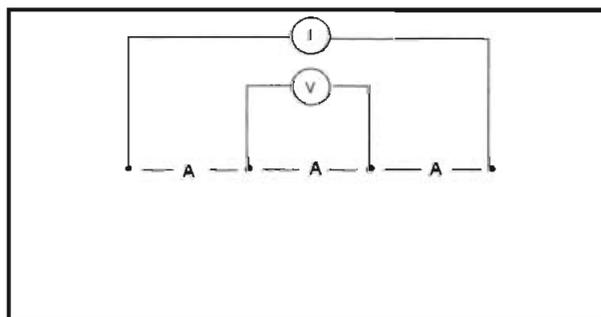


Fig. D1.- Configuración Wenner.

En nuestro caso se determinó:

$$V = 0.334 \text{ V}$$

$$I = 107.8 \text{ } \mu\text{A}$$

$$A = 0.06 \text{ m}$$

Se calcula la resistividad mutua R según la fórmula $R = V/I$

Donde:

$$R = 0.334 / 107.8 \cdot 10^{-6}$$

$$R = 3098.33 \text{ } \Omega$$

Luego se determina la resistividad ρ del papel con la siguiente fórmula:

$$\rho = 2 \pi A R$$

$$\rho = 2 \pi (6 \cdot 10^{-2}) (3098.33)$$

$$\rho = 1168.043 \text{ } \Omega \cdot \text{m.}$$

ANEXO E

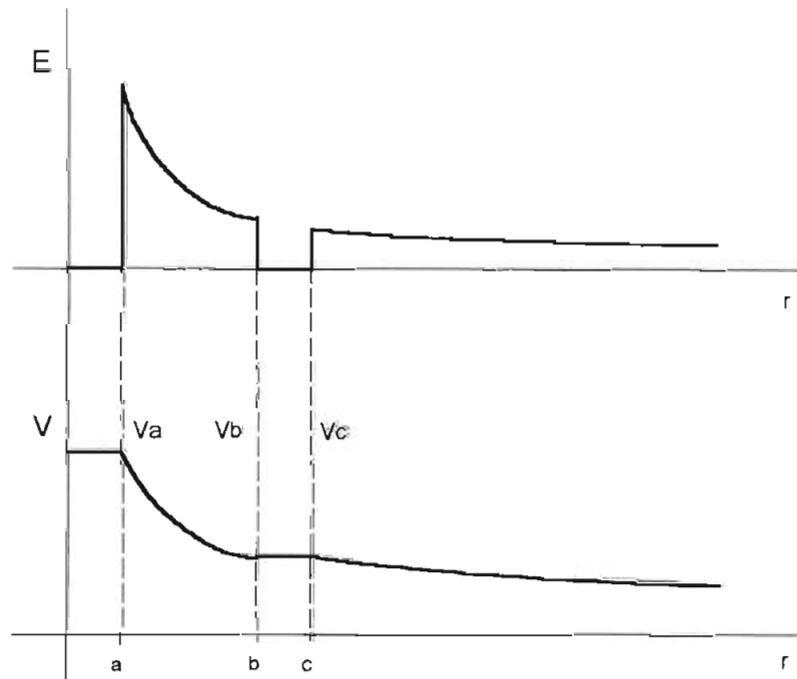
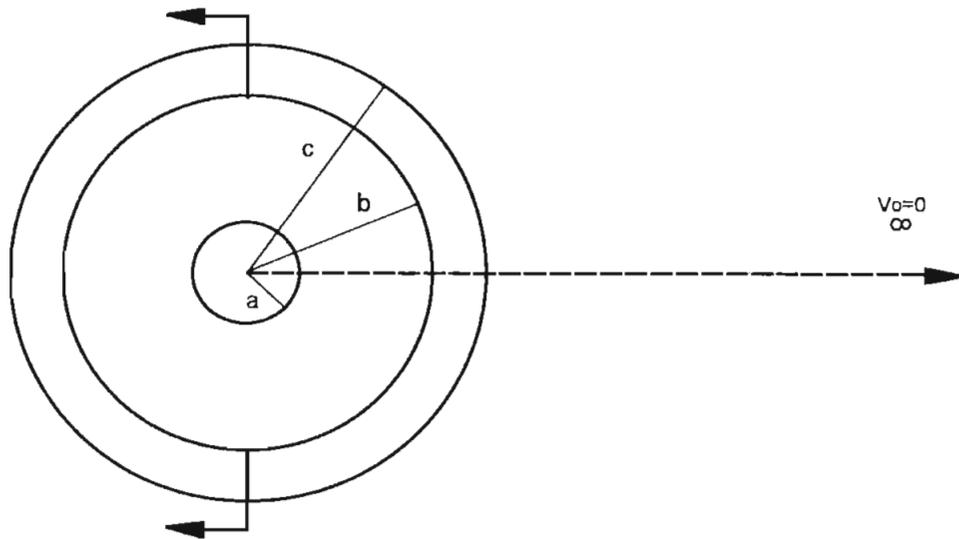


Fig. E1.- Gráficos que ilustran la variación de la intensidad del campo E y el potencial V de esferas coaxiales.

El campo E en un punto cualesquiera a una distancia r se expresa: [15]

$$E_r = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

(ec. E1)

El potencial, con la siguiente relación:

$$V = -\int E_r dr$$

(ec. E2)

Para $r > c$ tenemos:

$$V = -\int_{\infty}^r \frac{Qdr}{4\pi \epsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r}$$

(ec. E3)

El potencial entre a y b se calcula:

$$V_{ab} = -\int_b^a \frac{Qdr}{4\pi \epsilon_0 r^2}$$

(ec. E4)

$$V_{ab} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(ec. E5)

El potencial en el punto **a** se puede calcular:

$$V_a = V_b + V_{ab}$$

(ec. E6)

Ya que el potencial en **c** es igual al potencial en **b**, se tiene:

$$V_a = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left(\frac{1}{c} + \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right)$$

(ec. E7)

Por consiguiente, se llega a la conclusión de que, la sección conductora exterior de las esferas coaxiales analizadas transporta el potencial del punto exterior **c** al punto interior **b**, que puede ser aplicado en nuestro estudio.

ANEXO F

ANALISIS DE ERRORES DEL SUBPROGRAMA MATRIN5.CPP

Se realiza el análisis de errores del subprograma **MATRIN5.CPP** debido a que este subprograma realiza el cálculo del potencial sobre la superficie del primer electrodo de puesta a tierra, y para ello utiliza el método de la segmentación del electrodo, debiendo aclarar que para este cálculo no se ha tomado en cuenta la presencia del segundo electrodo en caso de éste existir.

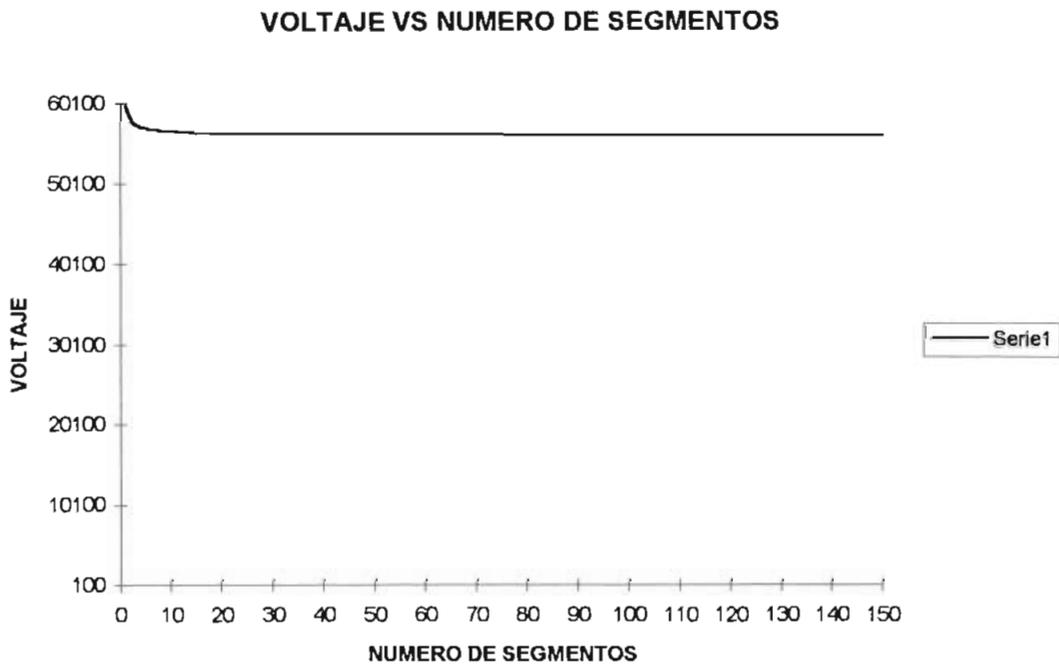
A continuación se presenta el gráfico voltaje vs número de segmentos, para un electrodo horizontal de 4 m de largo enterrado a una profundidad de 0.7 m en un medio homogéneo de resistividad $100 \Omega \cdot \text{m}$, con un radio de 0.007 m, por el cual circula una corriente de 2000 A.

Los resultados se presentan en el siguiente cuadro:

Número de segmentos	Voltaje (V)
1	59703.941406

2	58006.789062
3	57411.812500
4	57103.769531
5	56978.953125
6	56785.718750
7	56753.187500
8	56605.761719
9	56556.585938
10	56517.562500
15	56361.320312
20	56255.589844
25	56227.976562
30	56147.125000
35	56139.359375
40	56134.898438
45	56127.144531
50	56054.718750
60	56059.410156
70	56043.761719
80	56047.546875

90	55986.632842
100	55995.921875
150	55916.289062



El error relativo más alto se presenta cuando se asume al electrodo como un solo segmento y éste es de 2.93%.

En consecuencia, a mayor número de segmentos el valor del potencial será más exacto.

El valor de voltaje que se puede calcular mediante el uso de la ecuación dada para un electrodo horizontal en la referencia 25 es de **56532.63 V**.

ANEXO G

Se presenta el gráfico Voltaje vs Profundidad de enterramiento, para un electrodo de puesta a tierra de longitud 2.1m, radio del conductor de 0.7cm, enterrado en un medio homogéneo de resistividad $100\Omega.m$, y por el que circula una corriente de 2000A.

Los resultados son los siguientes:

Profundidad de enterramiento (m)	Voltaje (V)
3.8	83950
2.0	85756.69
1.0	89219.04
0.7	91775.86
0.5	94678.75
0.3	100097.80

VOLTAJE VS PROFUNDIDAD DE ENTERRAMIENTO

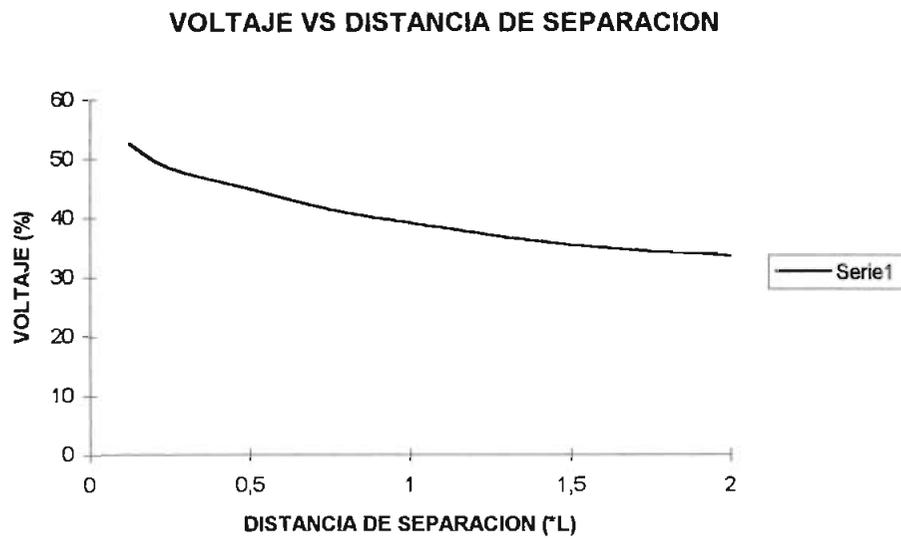


ANEXO H

A continuación se presenta el gráfico Voltaje (%) vs Distancia de separación (*L), para dos electrodos de longitud $L=2.1\text{m}$, con un radio de 0.7cm y una profundidad de enterramiento de 0.5m en un medio homogéneo de resistividad $100\Omega\cdot\text{m}$, y por el primero circula una corriente de 2000A .

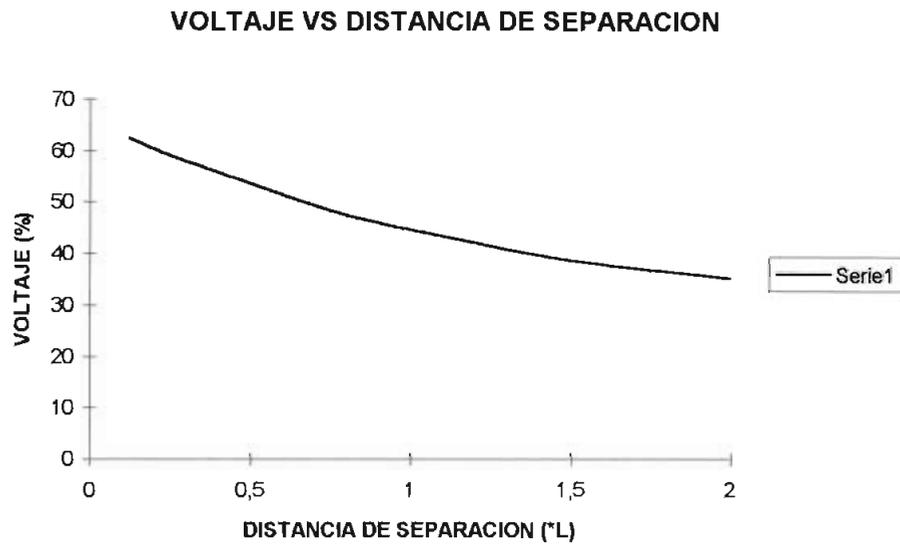
Los resultados son los siguientes:

Distancia de separación	Voltaje (%)
$L/8$	50.52
$L/4$	48.44
$L/2$	44.84
$3L/4$	41.44
L	39.10
$3L/2$	35.30
$2L$	33.53



Cuando $L_1 > L_2$, $L_2=L/2$, los resultados son los siguientes:

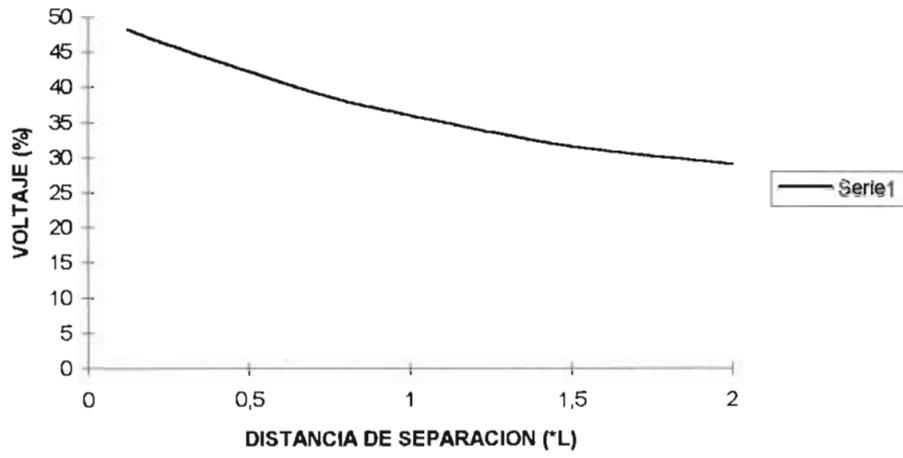
Distancia de separación	Voltaje (%)
$L/8$	62.51
$L/4$	59.22
$L/2$	53.64
$3L/4$	48.44
L	44.84
$3L/2$	38.75
$2L$	35.30



Cuando $L_1 < L_2$, $L_1=L/2$, los resultados son los siguientes:

Distancia de separación	Voltaje (%)
L/8	48.18
L/4	46.01
L/2	42.22
3L/4	38.58
L	36.00
3L/2	31.56
2L	28.98

VOLTAJE VS DISTANCIA DE SEPARACION



ANEXO I

MANUAL DE USUARIO DEL PROGRAMA

MCAMPO es un programa que tiene por objetivo, encontrar el mapa de campo entre dos electrodos horizontales de puesta a tierra, embebidos en un medio homogéneo (tierra), esto es la líneas equipotenciales y la líneas de flujo de corriente entre los dos electrodos.

Todo esto orientado como una herramienta de ayuda para los ingenieros de diseño de mallas de puesta a tierra.

El presente manual contiene los siguientes tópicos:

- 1.- Instalación.
- 2.- Descripción del programa.
- 3.- Terminología utilizada.
- 4.- Procedimiento de operación del sistema.
- 5.- Descripción de pantallas.

6.- Corrida tipo.

1.- INSTALACION.

El programa consta de un disco de intalación, el mismo que contiene los siguientes archivos:

DISCO UNICO:

EGAVGA.BGI

BOLD.CHR

EURO.CHR

GOTH.CHR

LCOM.CHR

LITT.CHR

SANS.CHR

SCRI.CHR

SIMP.CHR

TRIP.CHR

TSCR.CHR

ING.PCX

ING1.PCX

ESLAVON.TXT

MCAMPO.BAT

INSTALAR.BAT

CARGAR1.EXE

MATRIN5.EXE

TES52.EXE

TES11.EXE

TES36.EXE

TES37.EXE

TES38.EXE

TES39.EXE

RESIST.EXE

Debe digitarse **B: INSTALAR**, en el caso del drive **B**, si el drive es reconocido como **A** entonces se debe digitar **A: INSTALAR**. Para iniciar la instalación de la aplicación **MCAMPO**. La instalación es automática a partir de este momento.

El objeto de utilizar el **INSTALAR** es el que se cree automáticamente el directorio **MCAMPO** en el disco duro de la computadora, en el cual van a ser copiados los archivos necesarios para correr la aplicación, y en donde van a ser grabados todos los archivos que el programa necesita crear para su funcionamiento.

1.1.- REQUERIMIENTOS DEL PROGRAMA MCAMPO.

El programa MCAMPO necesita ciertos requerimientos mínimos para su adecuado funcionamiento. Estos requerimientos pueden ser sobrepasados dando como resultado una mejora en el rendimiento general del programa en tiempo de ejecución. Estos requerimientos son claramente diferenciados en dos tipos:

Requerimientos de hardware.

El programa MCAMPO, requiere de un computador que cumpla con las siguientes características básicas mínimas:

- **Procesador:**..... 486 DX.

- **Memoria RAM**..... 4MB.
- **Velocidad**..... 40 Mhz.
- **Monitor**..... VGA.
- **Espacio en disco**..... 5 MB.

Sistema operativo.

El programa fue desarrollado, para que sea utilizado en DOS versión 6.0 en adelante.correspondientes

2.- DESCRIPCION DEL PROGRAMA.

El programa **MCAMPO** tiene por objetivo hallar el mapa de campo entre dos electrodos de puesta a tierra horizontales embebidos en un medio homogéneo (tierra). Por aplicación del método de las diferencias finitas se encuentra la líneas equipotenciales y por medio del método de los cuadrados curvilineos se determina las líneas de flujo de corriente; que son desplegadas en pantalla conjuntamente.

Todo esto para ser utilizada como una herramienta de ayuda a los

ingenieros de diseño de mallas de puesta a tierra.

3.- TERMINOLOGIA UTILIZADA.

Campo.

Es una región de pantalla donde se puede escribir algún valor que le solicita el programa.

ESC.

ESC también llamada escape, permite regresar de la pantalla de impresión a la pantalla de trabajo.

Print Screen.

Permite obtener el reporte por impresora.

4.- PROCEDIMIENTO DE OPERACION DEL PROGRAMA.

4.1.- Ingreso al programa.

Digite **MCAMPO** y presione la tecla **ENTER** para inicializar la aplicación.

4.2.- Salida del sistema.

De un **CLICK** con el mouse en el botón **SALIR** para abandonar la aplicación.

5.- DESCRIPCION DE PANTALLAS.

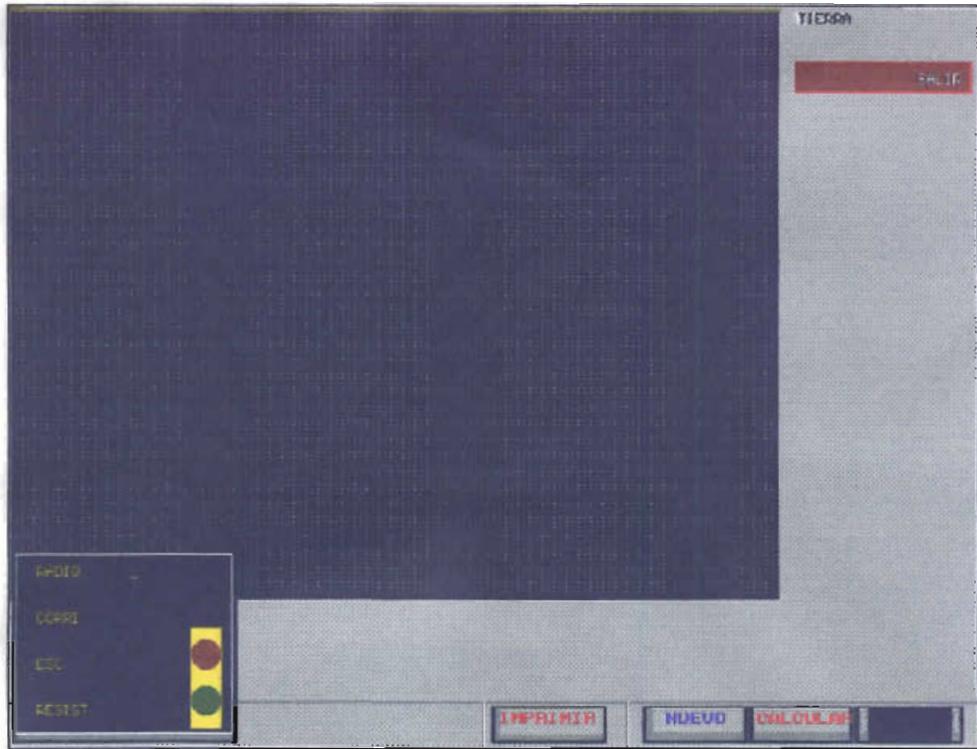
Las siguientes pantallas conforman la aplicación:

- Pantalla de presentación:



Dar un ENTER para pasar a la siguiente pantalla.

- Pantalla principal de trabajo:



El programa solicita varios valores, el operador luego de ingresar dichos valores, con el MOUSE debe dar un CLICK en el círculo verde al estar de acuerdo con los valores ingresados, caso contrario, debe hacerlo en el círculo rojo y volver a ingresar dichos valores.

El operador a continuación debe dar un CLICK con el MOUSE en el botón CALCULAR, de esta forma pasa a la siguiente pantalla.

- Pantalla de ingreso de coordenadas:



El programa solicita al operador los datos de las coordenadas del primer electrodo, de igual forma, si los datos ingresados son correctos, dar un CLICK en el círculo verde, caso contrario hacerlo en el círculo rojo y volver a ingresar los datos que son solicitados.

El programa le hará saber al operador cuando ha terminado de realizar los primeros cálculos mediante un sonido, el operador entonces debe proceder de la misma manera que para ingresar los datos del primer electrodo, es decir dar un CLICK con el MOUSE en el botón CALCULAR, y proceder a ingresar las coordenadas del segundo electrodo.

Cuando el programa haya terminado de realizar los cálculos le anunciará al operador mediante un sonido, a continuación el operador podrá elegir la operación que desee realizar dando un CLICK con el MOUSE en el botón correspondiente. Las opciones son las siguientes:

- Salir del programa, botón SALIR.

- Realizar una nueva corrida, botón NUEVO.

- Obtener reporte por impresora, botón IMPRIMIR.

- Completar el mapa de campo, botón FLUJOS.

En el caso de haber escogido FLUJOS, el programa procede a encontrar el mapa de campo completo, cuando este proceso haya terminado el operador puede optar por:

- Salir del programa, botón SALIR.

- Realizar una nueva corrida, botón NUEVO.

- Obtener reporte por impresora, botón IMPRIMIR.

5.1.- DETERMINACION DE LA ESCALA.

Para determinar la escala adecuada de trabajo, se deben tener en cuenta los siguientes factores:

- Longitudes de los electrodos.
- Profundidades de enterramiento de los electrodos.
- El área de trabajo está formada por 504 puntos horizontales y 378 puntos verticales.
- La matriz de potenciales es una matriz de 126*126 puntos.

Ejemplo: Dos electrodos de puesta a tierra de longitudes $L=2.1\text{m}$, enterrados a una profundidad de 0.7m , con una separación entre ellos de L , el radio de los conductores es 0.007m .

Al trabajar en centímetros, la separación entre puntos del área de trabajo es de un centímetro, por lo que la longitud de cada electrodo sería igual a 210 puntos y la distancia que los separa igualmente 210, mientras que la profundidad de enterramiento sería igual a 70 puntos. Lo que al realizar la suma de las distancias horizontales supera el número de puntos del área de trabajo, en consecuencia, al escoger una escala de 2, implicaría que la longitud de los electrodos sea de 105 puntos, al igual que la separación entre ellos, mientras que la profundidad de enterramiento sería de 35 puntos.

También, se debe verificar se cumpla con la condición de que la longitud vertical sea por lo menos 2.5 veces la longitud del primer electrodo, que en el caso de este ejemplo, se da cumplimiento.

6.- CORRIDA TIPO.

Se procede a encontrar las equipotenciales y el mapa de campo de un electrodo de puesta a tierra de 2.1 m. de longitud, de radio del conductor 0.7 cm. y con una profundidad de enterramiento de 0.7 m, con una corriente de falla de 2000 A, la resistividad del suelo es de 10000 Ω .cm.

Se escoge trabajar en centímetros, con una escala de 2.

Las coordenadas a ingresar al programa son las siguientes:

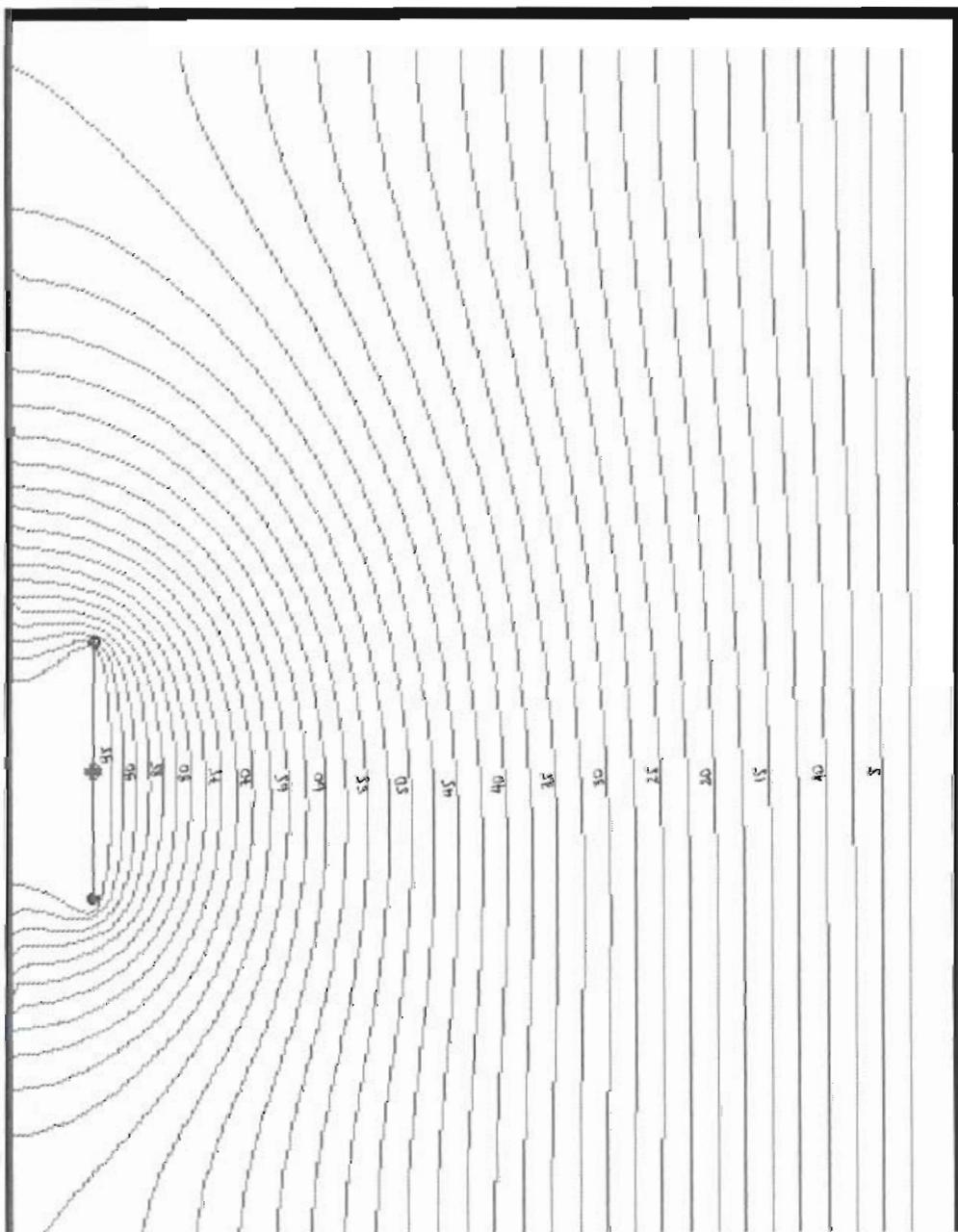
Electrodo # 1: (150,35) (255,35)

Electrodo # 2: (150,35) (255,35)

Los resultados de equipotenciales y mapa de campo de este ejemplo se presentan a continuación.

TIERRA
1008,00

RADIO =0,70
CORRI =2000,00
RSTVD=10000,00
ESC =2,00
ELECTROD# 2
81775,86
ELECTROD# 1
81775,86



EQUIPOTENCIALES ENTRE DOS ELECTRODOS

TIERRA
1008,00

RADIO =0,70

CORRI =2000,00

RSTUD=10000,00

ESC =2,00

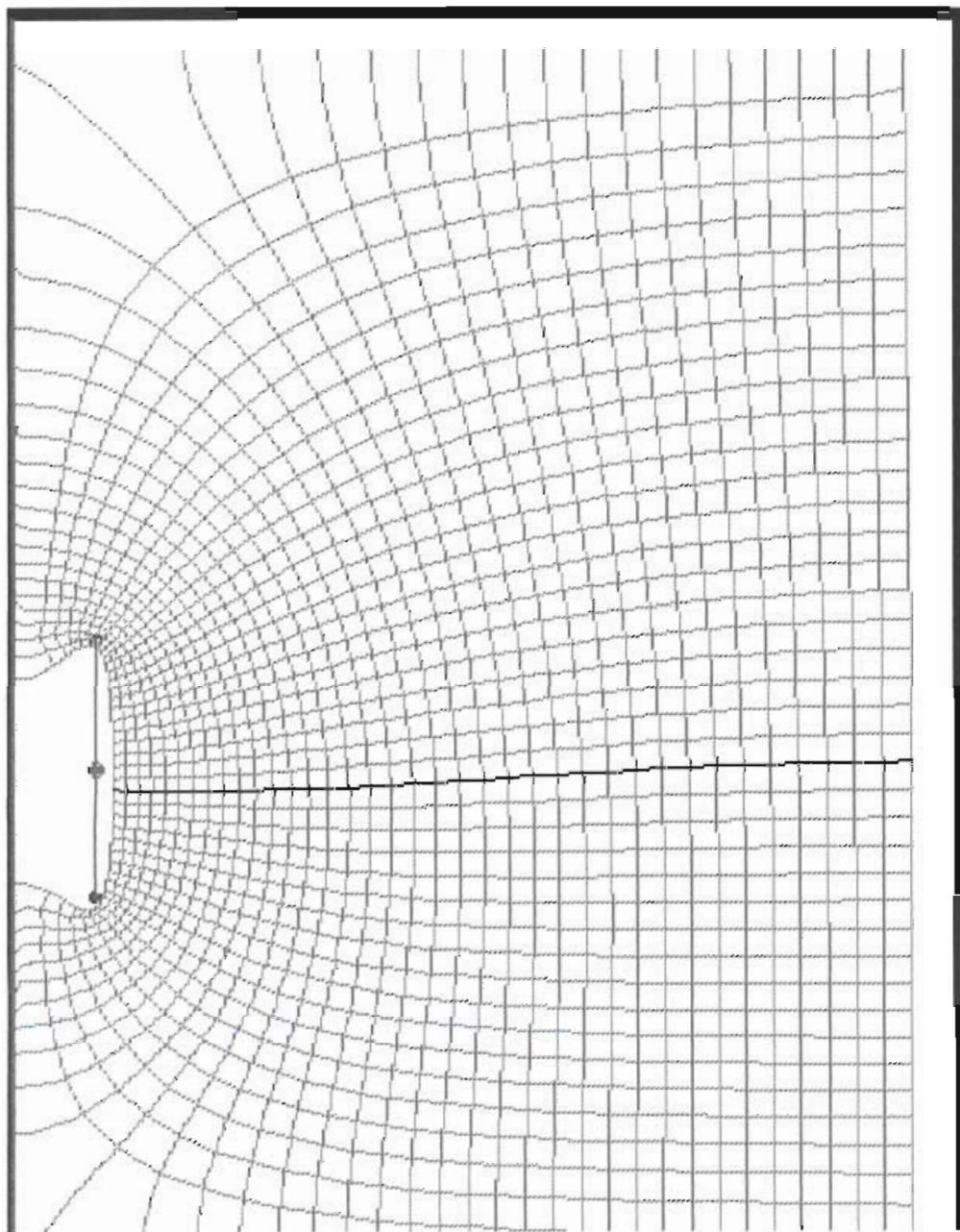
ELECTRODO# 2

91775,86

ELECTRODO# 1

91775,86

RESISTEN =45,89



756,00

MAPA DE CAMPO ENTRE DOS ELECTRODOS

BIBLIOGRAFIA.

- [1] IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding , IEEE Standard 80 - 1986 .
- [2] Lee Ralph H, “Grounding of Computers and other Similar Sensitive Equipment” . IEEE Transactions , Vol IA - 23 , No 3 , May / June 1987 , pp 408 - 411 .
- [3] Maggioli Victor J, “Grounding and Computer Technology” . IEEE Transactions , Vol IA - 23 , No 3 , May / June 1987 , pp 412 - 416 .
- [4] Zipse Donald W, “Grounding for Process Control Computers and Distributed Control Systems : The National Electrical Code and Present Grounding Practice” . IEEE Transactions , Vol IA - 23 , No 3 , May / June 1987 , pp 417 - 421 .
- [5] Gambirasio G, Ribeiro F.S, Cardoso J.R, “Um Procedimiento Versátil para Cálculo de Malhas de Terra Pelo Método Dos Elementos Finitos”. JIEE, Vol 8, 1987, pp 69 - 75.
- [6] IEEE Recommended Practice for Powering and Grounding Sensitive Electronic Equipment, IEEE Standard 1100 - 1992.
- [7] Dawalibi F, Mukhedkar D, Bensted D, “Measured and Computed Current Densities in Buried Ground Conductors”, IEEE Transactions, Vol PAS - 100,

No 8, August 1981, pp 4083 - 4090.

[8] Correa Proaño René, “Diseño de Aisladores”, Tesis de Grado EPN, 1984.

[9] Binns K.J, Lawrenson P.J, “Analysis and Computation of Electric and Magnetic Field Problems”, Second Edition, 1973.

[10] Terán Polloroza Raúl José, “Diseño y Construcción de una Cámara de Aislación para Pruebas Bajo Condiciones de Aislación”, Tesis de Grado EPN, 1978.

[11] Hayt William, “Teoría Electromagnética”, Quinta Edición, 1991.

[12] Seely Samuel, “Introduction to Electromagnetic Fields”, 1958.

[13] Reitz John R, Milford Frederick J, Christy Robert W, “Fundamentos de la Teoría Electromagnética”, Tercera Edición, 1984.

[14] Jhonk Carl T.A, “Teoría Electromagnética”, 1990.

[15] Kraus John Daniel, “Electromagnetismo”, 1986.

[16] Dawalibi F, Mukhedkar D, “Transferred Earth Potentials in Power Systems”, IEEE Transactions, Vol PAS-97, No 1, January/February 1978, pp 90-101.

[17] Giao Trinh N, Sarma Maruvanda P, “Effect of a Two-Layer Earth on the Electric Field Near HVDC Ground Electrodes”, IEEE Transactios, Vol PAS-91, No 6, Nov/Dec 1972, pp 2356-65.

- [18] Giao Trinh N, Sarma Maruvanda P, “On the Potential and Field Distribution Around a Ground Electrode for HVDC Transsmision”, IEEE Transactios, Vol PAS-90, No 6, Nov/Dec 1970,pp 2793-2801.
- [19] Dawalibi F, Mukhedkar D, “Optimum Design of Substation Grounding in a Two Layer Earth Structure Part I - Analytical Study”, IEEE Transactions, Vol PAS-94, No 2, March/April 1975, pp 252-261.
- [20] Sunde Erlingd, “Earth Conduction Effects in Transsmision”, 1949.
- [21] Ayora G. Paúl A, “Apuntes de Alto Voltaje II”, EPN, 1993.
- [22] Freire A. Jaime, “Experimentación en suelos para el diseño de mallas de tierra”, Tesis de Grado EPN, 1978.
- [23] Kernigham Brian W, Ritchie Dennis M, “El Lenguaje de Programación C”, Segunda Edición, 1992.
- [24] Ceballos Sierra Fco. Javier, “Curso de Programación C”, 1989.
- [25] IEEE Recommended Practice for Grounding of Industrial and Comercial Power Systems, IEEE Standard 142 - 1991.
- [26] Bruño G.M, “Elementos de Geometría Analítica y Cálculo Infinitesimal”.

INDICE.

CAPITULO I

1.1.- Introducción.	1
1.2.- Generalidades.	8
1.3.- Objetivo.	17
1.4.- Alcance.	17

CAPITULO II

2.1.- Planteamiento del problema.	19
2.2.- Análisis de casos.	22
2.2.1.- Sistema de puesta a tierra.	22
2.2.2.- Método de puesta a tierra aislada.	23
2.2.3.- Consideraciones de puesta a tierra.	23
2.2.4.- Electrodo de puesta a tierra primario y auxiliar.	25
2.2.4.1.- Electrodo de puesta a tierra primario o de potencia.	26
2.2.4.2.- Electrodo de puesta a tierra auxiliar.	26
2.3.- Selección del método de solución.	26
2.3.1.- Efecto de la densidad de corriente de un conductor.	

enterrado en un suelo de resistividad uniforme.	30
2.3.1.1.- Electrodo formado por un conductor lineal, consideraciones básicas.	30
2.3.1.2.- Electrodo formado por un conductor lineal.	32
2.3.2.- Solución de las ecuaciones de Poisson y de Laplace por el método de diferencias finitas.	39
2.3.3.- Factor de aceleración.	46
2.3.4.- Ecuación de L'Hospital.	49
2.3.5.- Cuadrados curvilíneos.	51
2.3.6.- Teoría de imágenes.	56
2.4.- Simulación analógica.	60

CAPITULO III

3.1.- Desarrollo del programa digital.	70
3.1.1.- Introducción.	70
3.1.2.- Secuencia de cálculo.	77
3.2.- Subrutinas.	82
3.3.- Diagramas de flujo.	93
3.3.1.- Diagramas de flujo de datos.	93
3.3.2.- Transición de estados.	96

3.4.- Programa digital.	97
-------------------------	----

CAPITULO IV

4.1.- Presentación de resultados.	98
-----------------------------------	----

4.2.- Análisis de resultados.	115
-------------------------------	-----

4.3.- Conclusiones y recomendaciones.	123
---------------------------------------	-----

4.4 Anexos.	125
-------------	-----

Anexo A.	126
----------	-----

Anexo B.	129
----------	-----

Anexo C.	131
----------	-----

Anexo D.	134
----------	-----

Anexo E.	136
----------	-----

Anexo F.	139
----------	-----

Anexo G.	143
----------	-----

Anexo H.	145
----------	-----

Anexo I. (Manual de usuario del programa.)	149
--	-----

Bibliografía.	165
---------------	-----