

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL  
FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

"CALCULO DIGITAL DE VOLTAJES Y CORRIENTES TRANSITORIOS DEBIDOS  
A MANIOBRAS EN LINEAS DE TRANSMISION TRIFASICAS"

JOSE MEDARDO CADENA MOSQUERA

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE INGENIERO  
ELECTRICO

AGOSTO - 1986



A MIS PADRES Y HERMANO

## AGRADECIMIENTO

Mi profundo agradecimiento para el Sr. Ing. Patricio Orbe Garcés, por los conocimientos impartidos, por sus valiosos consejos y por todo el apoyo brindado; al Sr. Dr. Ramiro Rodas por su invaluable colaboración y a todas las personas que prestaron su concurso para que este trabajo llegue a su culminación.

Certifico que el presente trabajo ha sido realizado por el Sr. Medardo Cadena Mosquera bajo mi dirección.



Ing. Patricio Orbe G.

Director

## INDICE

Pág.

### SUMARIO

#### Capítulo I : INTRODUCCION

1.1.	Importancia del estudio de transitorios debidos a maniobra de una línea de transmisión -----	1
1.2.	Estudios realizados sobre el tema -----	3
1.3.	Objetivos y alcance -----	6

#### Capítulo II : ECUACION GENERAL DE VOLTAJES Y CORRIENTES PARA UNA LINEA DE TRANSMISION LARGA USANDO EL MODELO DE PARAMETROS DISTRIBUIDOS

2.1.	Introducción -----	7
2.2.	Circuito equivalente de una línea de transmisión trifásica eléctricamente larga -----	9
2.3.	Aplicación de las leyes de Kirchoff de voltajes y corrientes -----	11
2.4.	Conversión a dominio de frecuencia usando la transformada de Laplace -----	15
2.5.	Aplicación de la transformación modal -----	21
2.6.	Resolución de las ecuaciones diferenciales -----	26

Capítulo III : CALCULO DE VOLTAJES Y CORRIENTES TRANSITO -  
RIOS

3.1.	Cálculo de voltajes en dominio de frecuencia ---	38
3.1.1.	Voltajes al energizar una línea en vacío desde una barra infinita -----	38
3.1.1.1.	Determinación de las condiciones de borde y cálculo de las constantes -----	40
3.1.1.2.	Determinación de los voltajes de generación en dominio de frecuencia -----	47
3.1.2.	Voltajes al energizar una línea con carga desde una barra infinita -----	54
3.1.3.	Voltajes al energizar una línea en vacío desde un generador real -----	67
3.1.4.	Voltajes al energizar una línea con carga desde un generador real -----	82
3.2.	Cálculo de corrientes en dominio de frecuencia -	96
3.2.1.	Corrientes al energizar una línea en vacío desde una barra infinita -----	96
3.2.2.	Corrientes al energizar una línea con carga desde una barra infinita -----	99
3.2.3.	Corrientes al energizar una línea en vacío desde un generador real -----	102
3.2.4.	Corrientes al energizar una línea con carga desde un generador real -----	104

	Pág.
3.3. Aplicación del teorema del residuo -----	107
3.3.1. Cálculo de voltajes transitorios -----	116
3.3.1.1. Respuesta en secuencia positiva -----	117
3.3.1.2. Respuesta en secuencia cero -----	122
3.3.1.3. Respuesta total -----	124
3.3.2. Cálculo de corrientes transitorias -----	124
3.3.2.1. Respuesta en secuencia positiva -----	125
3.3.2.2. Respuesta en secuencia cero -----	130
3.3.2.3. Respuesta total -----	131

#### Capítulo IV : PROGRAMA DIGITAL

4.1. Generalización del modelo matemático -----	132
4.2. Efecto del tipo de cierre del interruptor -----	138
4.2.1. Cierre simultáneo -----	139
4.2.2. Cierre no simultáneo -----	141
4.3. Descripción del programa principal y subrutinas-	142
4.3.1. Programa principal -----	142
4.3.2. Descripción de las subrutinas -----	145

#### Capítulo V : EJEMPLOS Y APLICACIONES

5.1. Comprobación de la validez del modelo matemáti- co -----	155
5.2. Efecto del número de componentes de frecuencia -	156

	Pág.
5.3. Aplicaciones -----	158
5.3.1. Efecto del ángulo de energización -----	158
5.3.2. Efecto del cierre secuencial del disyuntor -----	162
5.3.3. Efecto del acoplamiento mutuo entre fases -----	165
5.3.4. Efecto de la carga conectada en el terminal de recepción -----	166
5.3.5. Efecto de la carga y de la impedancia del genera dor en las frecuencias de oscilación -----	167
5.3.6. Variación de las frecuencias de oscilación con la longitud de la línea -----	168
5.3.7. Espectro de frecuencias -----	168
5.3.8. Variación del máximo sobrevoltaje con la longi tud de la línea -----	170
 Capítulo VI: CONCLUSIONES	 239

#### Apéndice A : DIAGONALIZACION DE MATRICES

- A.1. Ecuación característica de una matriz.
- A.2. Matrices semejantes a una matriz diagonal.

#### Apéndice B :

- B.1. Teoría de la variable compleja.
- B.1.1. Puntos singulares.

- B.1.2. Residuos.
- B.1.3. Teorema del residuo.
- B.2. Fórmula de inversión compleja.
- B.2.1. Utilización del teorema del residuo para hallar la transformada inversa de Laplace.
- B.3. Respuesta debida a raíces complejas conjugadas.

#### Apéndice C : MANUAL DE USO DEL PROGRAMA

- C.1. Generalidades.
  - C.1.1. Selección del tipo de energización.
  - C.1.2. Efecto del ángulo de energización.
  - C.1.3. Cierre no simultáneo del disyuntor.
  - C.1.4. Cierre secuencial del disyuntor.
  - C.1.5. Efecto del acoplamiento mutuo entre fases.
- C.2. Descripción de las variables.
  - C.2.1. Variables de entrada.
  - C.2.2. Variables de salida.
  - C.2.3. Forma de proporcionar datos al programa.
- C.3. Indicaciones complementarias.
- C.4. Alcance y restricciones.

#### Apéndice D : DIAGRAMAS DE FLUJO

#### Apéndice E : EJEMPLO DE APLICACION

#### Bibliografía.

## SUMARIO

El objetivo de esta Tesis es desarrollar un modelo matemático que permita calcular los voltajes y corrientes transitorios que se producen al energizar una línea de transmisión trifásica ya sea en vacío o con carga; desde una barra infinita o desde un generador real. Para ello se implementa un programa digital que considera el efecto del ángulo de energización e incluye tiempos de retardo en el cierre de los polos del disyuntor.

Se pone especial énfasis en la importancia del espectro de frecuencias como mecanismo para conocer la influencia de cada armónico en la respuesta total de voltaje y corriente.

Esta tesis incluye la ecuación general de una línea de transmisión larga, en dominio de frecuencia; aplicación de las condiciones de borde para cada tipo de energización, aplicación del teorema del residuo para obtener la respuesta en dominio del tiempo, implementación del programa digital y análisis de resultados.

## CAPITULO I

### INTRODUCCION

#### 1.1. IMPORTANCIA DEL ESTUDIO DE TRANSITORIOS DEBIDOS A MANIOBRA EN UNA LINEA DE TRANSMISION

En el diseño de un Sistema Eléctrico de Potencia, es de fundamental importancia, la determinación del nivel de aislamiento de cada uno de sus elementos. Aparentemente dicho nivel está dado por el voltaje nominal de operación del sistema, pero en la realidad, ésto no se cumple.

Los continuos cambios que se producen en las condiciones del sistema, tales como: apertura y cierre de interruptores, descargas atmosféricas, fallas, etc., determinan la aparición de voltajes transitorios, cuyos valores pico en ciertas ocasiones exceden enormemente - al voltaje nominal de operación.

Dependiendo del voltaje de operación del sistema, los transitorios predominantes tienen diferente origen.

Para niveles de transmisión de hasta 400 KV, las descargas atmosféricas constituyen el factor determinante en la selección del nivel de aislamiento; para niveles de EHV, extra high - voltaje, es decir hasta 700 KV, el aislamiento se determina en base al comportamiento del sistema en condiciones de apertura y cierre de interruptores y para niveles mayores UHV, Ultra - high - voltaje , el factor prepon

derante es el comportamiento del sistema en condiciones de falla, principalmente debido a las sobretensiones que se producen en las fases sanas durante fallas asimétricas.

Es por tanto, en niveles de transmisión superiores a 400 KV, en donde radica la importancia y la necesidad de analizar y estudiar profundamente los sobrevoltajes producidos por maniobra y principalmente aquellos relacionados con el cierre y apertura de interruptores.

Paralelamente con el desarrollo y crecimiento de los sistemas de potencia se ha hecho más imperiosa la necesidad de tiempos ultra - cortos en el despeje de las fallas, por tal motivo se ha puesto mucho interés en el desarrollo de interruptores de gran velocidad; por otro lado, con el uso de relés de estado sólido se han obtenido tiempos de operación menores que un ciclo, en condiciones normales. Sin embargo, ante la presencia de componentes de alta frecuencia en la señal de llegada disminuye notablemente la velocidad de operación.

En un intento por obtener métodos más rápidos de despeje se ha recurrido a técnicas digitales, pero a menudo han sido desechadas debido principalmente al escaso conocimiento de las formas de onda exactas.

De aquí se desprende la enorme importancia de desarrollar métodos que a más de los niveles de sobrevoltaje proporcionen un conocimiento completo del espectro de frecuencias de voltajes y corrientes del sistema en condiciones anormales ya que, en el futuro, las subestaciones de maniobra serán reemplazadas por equipo digital de alta velocidad.

El espectro de frecuencias proporciona toda la información de los armónicos que se presentan en los transitorios y de la influencia de cada uno de ellos.

Con este conocimiento se pueden diseñar filtros que eliminen los componentes de frecuencia más influyentes sobre todo en las señales de entrada a los equipos de protección, garantizando de esta manera una operación confiable del sistema de protecciones.<sup>15</sup>

Sin embargo, el tratamiento de este problema trae consigo múltiples complicaciones originadas principalmente en la complejidad que representa el determinar un modelo matemático que se ajuste a cada una de las realidades, que obedecen a circunstancias de lo más diversas.

Este tipo de estudios requiere necesariamente la utilización de técnicas digitales que a más de velocidad y precisión permiten tener acceso a una gran cantidad de información.

## 1.2. ESTUDIOS REALIZADOS SOBRE EL TEMA

Las técnicas utilizadas en el estudio de transitorios en sistemas eléctricos de potencia han tenido un desarrollo acorde con el crecimiento de los sistemas; su exactitud y grado de sofisticación cada día van en aumento.

Los primeros métodos se basaron en pruebas realizadas sobre modelos de líneas de transmisión, pero han sido reemplazados por otros más eficientes, algunos de los cuales se describen a continuación:

Uram y Miller<sup>1-2</sup> plantean un modelo matemático de una línea de transmisión trifásica equilibrada basada en un sistema de ecuaciones diferenciales parciales en función del tiempo y de la posición con respecto a uno de los terminales de la línea.

Utilizando la transformada de Laplace obtienen un sistema de ecuaciones diferenciales en función de la frecuencia que se convierten luego en ecuaciones diferenciales homogéneas de segundo orden al aplicar la transformación modal.

Luego, utilizando una función de Laplace de retardo de tiempo que es la base de su método, calculan los sobrevoltajes por energización en vacío.

La estructura de las ecuaciones generales de voltaje y corriente dan la posibilidad de incluir cualquier condición de borde en los dos terminales de la línea.

Francisco Garcia<sup>4</sup> aplica la teoría de las ondas viajeras en líneas de transmisión, utilizando el diagrama de lattice propuesto por Bewley y extendido a líneas multiconductoras. Calcula los voltajes y corrientes transitorias por energización en distintas condiciones, tales como: energización en carga, en vacío, inclusión de resistencias de preinserción en el disyuntor, etc.

Cabe indicar que los resultados que obtiene para energización en vacío son muy similares a los de Uram y Miller.

Mauricio Leser<sup>3</sup> utiliza el modelo matemático obtenido por Uram y Miller para líneas de transmisión trifásicas balanceadas y lo aplica al caso de energización en vacío utilizando el teorema del residuo como método para hallar la transformada inversa de Laplace. Los resultados son prácticamente los mismos obtenidos por Uram y Miller.

Incluye además la posibilidad de considerar tiempos de retardo en el cierre de los polos del disyuntor.

Battison<sup>12</sup>, utiliza la transformada inversa de Fourier modificada, que consiste en incluir en la frecuencias un parámetro de amortiguamiento. La solución se da con la integración de ecuaciones matriciales en función de la frecuencia, para luego dar una respuesta en dominio del tiempo. El principal problema radica en el tiempo de ejecución del programa digital.

Entre otros autores se puede mencionar:

A. J. Mc Elroy y R. M. Porter<sup>13</sup>, desarrollan un programa digital para el cálculo de transitorios en sistemas eléctricos lineales basándose en los principios de superposición, en la técnica del diagrama de Lattice y en la aproximación de terminales complejos mediante fragmentos de líneas de transmisión.

D. E. Hedman<sup>14</sup>, desarrolla un programa para el estudio de transitorios por maniobra en sistemas monofásicos y trifásicos, poniendo especial énfasis en el tratamiento de la atenuación y distorsión de las ondas viajeras.

### 1.3. OBJETIVOS Y ALCANCE

El propósito de esta tesis es desarrollar un algoritmo e implementar un programa digital que permita determinar los voltajes y las corrientes transitorias que se presentan al energizar una línea de transmisión ya sea en vacío o con carga; desde una barra infinita o desde un generador real; proporcionando además la posibilidad de incluir un tiempo de retardo en el cierre de los polos del disyuntor y de variar el ángulo de energización de la fase A que se toma como referencia.

El programa proporciona además información detallada del espectro de frecuencias, de cuyo análisis se puede desprender alternativas para disminuir los sobrevoltajes producidos por energización.

En esta Tesis no se considera la presencia de carga atrapada en la línea.

En el caso de energización con carga, se considera que ésta es perfectamente balanceada.

El modelo matemático utilizado considera que los parámetros de la línea permanecen constantes a lo largo de todo el tiempo de estudio lo cual es una aproximación. En la realidad, los parámetros varían con las frecuencias de las armónicas presentes en el transitorio.

## CAPITULO II

ECUACION GENERAL DE VOLTAJES Y CORRIENTES PARA UNA LINEA DE TRANSMISION LARGA USANDO EL MODELO DE PARAMETROS DISTRIBUIDOS

## 2.1. INTRODUCCION

El primer paso a seguirse para realizar el estudio de transitorios es obtener un modelo matemático que represente fielmente el comportamiento de una Línea de Transmisión, para ello se considerará una línea trifásica compuesta por tres conductores individuales paralelos a la superficie de tierra. Se asume además que la línea es perfectamente transpuesta y equilibrada, por lo tanto los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  serán iguales para cada una de las tres fases.

Para propósito de este estudio se fija el terminal izquierdo de la línea como terminal de envío y el terminal derecho como terminal de recepción. El terminal de envío por tanto estará conectado a la fuente, sea esta una barra infinita, otra línea o un generador real y el terminal de recepción estará asociado con la carga que puede ser puramente resistiva; del tipo  $R - L$  o bien este terminal puede estar abierto.

Para la ubicación de cualquier punto a lo largo de la línea se tomará como referencia ( $x = 0$ ) el terminal de envío y la longitud irá aumentando de izquierda a derecha, tal como se muestra en la figura 2.1.

Las magnitudes de interés en este modelo son los voltajes con respecto a tierra en cualquier punto de la línea y las corrientes en los conductores.

Tanto los voltajes como las corrientes son función de dos variables: la distancia  $x$  a lo largo de la línea, medida desde la referencia  $x = 0$  y el tiempo  $t$ , medido desde alguna referencia, que generalmente es el momento en que se cierran los disyuntores ( $t = 0$ ).

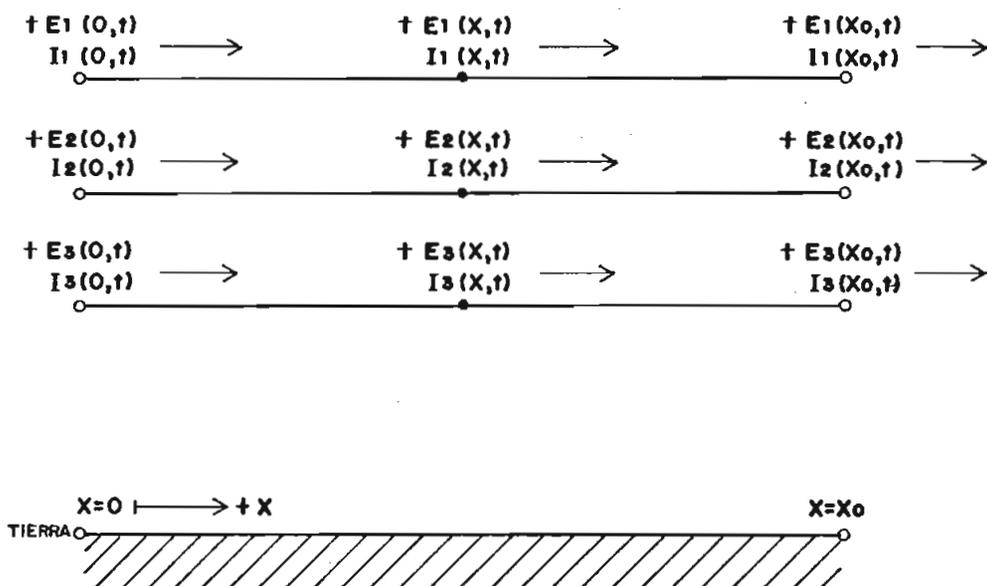


Fig. 2.1.

Para la representación matemática de una línea, puede considerarse que los parámetros  $R$ ,  $L$ ,  $C$  están concentrados en un punto cualquiera o bien que se encuentran uniformemente distribuidos a lo largo de ella; el modelo depende principalmente de la longitud de la línea; para líneas cortas es preferible usar parámetros concentrados y para líneas largas, parámetros distribuidos.

Pero, el hecho que a una línea se la considere corta o larga, no depende únicamente de su longitud física, sino de las frecuencias de interés que se presenten en ella. A frecuencias industriales de 50 Hz ó 60 Hz la mayoría de líneas pueden considerarse cortas, pero a frecuencias de 50 KHz a 500 KHz, las líneas son "Electricamente Largas" y requieren de una representación más detallada.

Cuando se estudian los voltajes transitorios de energización o los voltajes de recuperación durante condiciones de falla, se presenta un amplio margen de frecuencias que generalmente están dentro del rango indicado anteriormente y es por tanto aconsejable, para este tipo de estudios, considerar a la línea "eléctricamente larga" y usar un modelo de "parámetros distribuidos".

## 2.2. CIRCUITO EQUIVALENTE DE UNA LINEA DE TRANSMISION TRIFASICA ELECTRICAMENTE LARGA

Para la implementación del modelo de parámetros distribuidos, se debe representar un elemento diferencial de línea por un circuito equivalente.

Tradicionalmente se selecciona una sección  $\pi$  o una sección L formadas de resistencia, inductancia y capacitancia por unidad de longitud.

En esta tesis se utilizará una sección L, cuya representación gráfica se muestra en la figura 2.2.

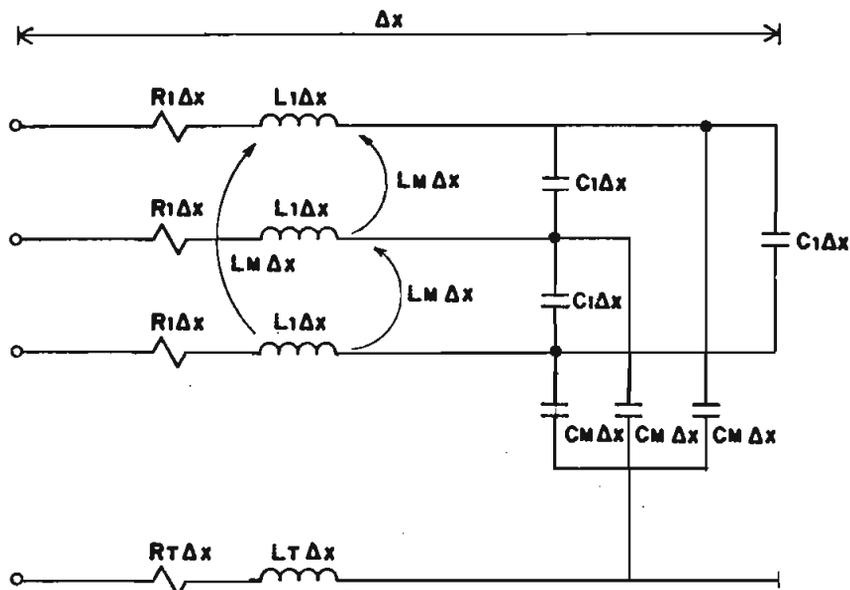


Fig. 2.2. Representación de una sección "L" de una línea de transmisión trifásica.

En el circuito de la figura 2.2., unificando las capacitancias entre líneas con las capacitancias a tierra, las resistencias e inductancias de línea con la resistencia e inductancia de tierra, se pueden plantear las siguientes igualdades:

$$3R_T + R_1 = R_0 \longrightarrow R_T = \frac{R_0 - R_1}{3} \quad (2.1)$$

$$3L_T + L_1 = L_0 \longrightarrow L_T = \frac{L_0 - L_1}{3} \quad (2.2)$$

$$\frac{3}{C_T} + \frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_0} \longrightarrow \frac{1}{C_T} = \frac{1}{3} \left( \frac{C_1 - C_0}{C_1 \cdot C_0} \right) \quad (2.3)$$

Con lo que la figura 2.2. se transforma en el circuito mostrado en

en la figura 2.3.

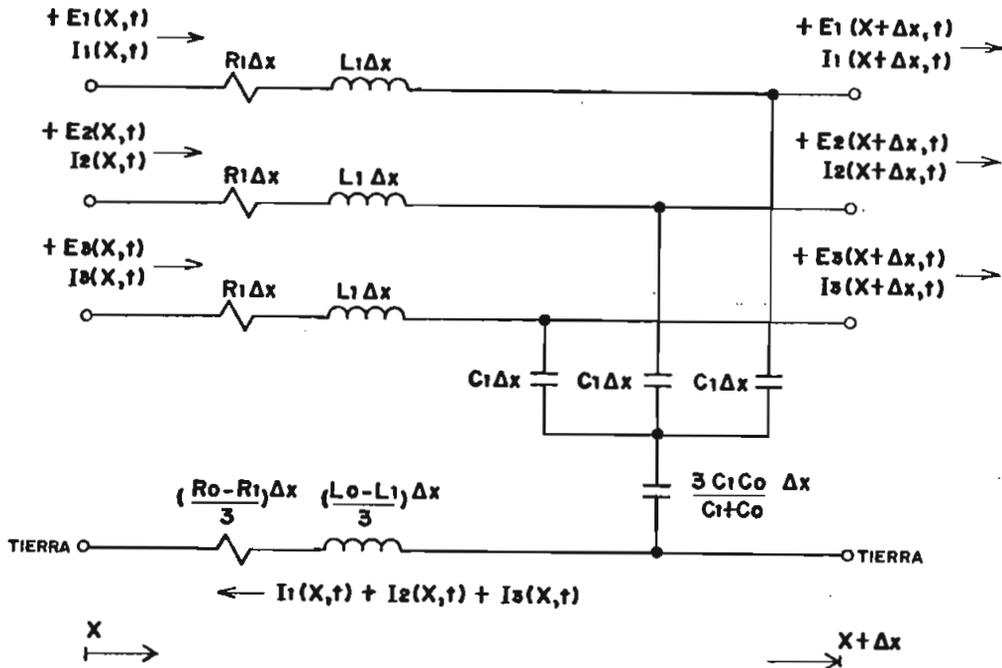


Fig. 2.3. Circuito equivalente para una línea de transmisión trifásica.

En este circuito los conductores de fase se describen por medio de sus parámetros de secuencia positiva, mientras que los efectos del camino de retorno se consideran a través de los parámetros de secuencia cero.

### 2.3. APLICACION DE LAS LEYES DE KIRCHOFF DE VOLTAJES Y CORRIENTES

Siguiendo el método descrito por Uram y Miller<sup>1</sup>, a partir del circui

to equivalente mostrado en la figura 2.3. se determinan dos grupos de ecuaciones; el primer grupo se obtiene al aplicar la ley de Kirchoff para voltajes en el lazo formado por cada conductor de fase y tierra; el segundo grupo proviene de aplicar la ley de Kirchoff de corrientes en la unión de cada conductor con la rama capacitiva a tierra.

Primer grupo (Aplicación de la ley de Kirchoff de voltajes).-

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial x} E_1(x,t) &= R_1 I_1(x,t) + L_1 \frac{\partial}{\partial t} I_1(x,t) + \left(\frac{R_0 - R_1}{3}\right) [ I_1(x,t) + \\
 &+ I_2(x,t) + I_3(x,t) ] + \left(\frac{L_0 - L_1}{3}\right) \frac{\partial}{\partial t} [ I_1(x,t) + \\
 &+ I_2(x,t) + I_3(x,t) ] \qquad \qquad \qquad (2.4)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial x} E_2(x,t) &= R_1 I_2(x,t) + L_1 \frac{\partial}{\partial t} I_2(x,t) + \left(\frac{R_0 - R_1}{3}\right) [ I_1(x,t) + \\
 &+ I_2(x,t) + I_3(x,t) ] + \left(\frac{L_0 - L_1}{3}\right) \frac{\partial}{\partial t} [ I_1(x,t) + \\
 &+ I_2(x,t) + I_3(x,t) ] \qquad \qquad \qquad (2.5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial x} E_3(x,t) &= R_1 I_3(x,t) + L_1 \frac{\partial}{\partial t} I_3(x,t) + \left(\frac{R_0 - R_1}{3}\right) [ I_1(x,t) + \\
 &+ I_2(x,t) + I_3(x,t) ] + \left(\frac{L_0 - L_1}{3}\right) \frac{\partial}{\partial t} [ I_1(x,t) + \\
 &+ I_2(x,t) + I_3(x,t) ] \qquad \qquad \qquad (2.6)
 \end{aligned}$$

Si las ecuaciones 2.4. , 2.5. y 2.6. se desarrollan y se agrupan tér

minos en función de  $I_1(x,t)$ ,  $I_2(x,t)$ ,  $I_3(x,t)$ ; toman la forma:

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x} E_1(x,t) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) + 2(R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_1(x,t) + \\
 & + \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) - (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_2(x,t) + \\
 & \left. + \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) - (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_3(x,t) \right\} \quad (2.7)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x} E_2(x,t) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) - (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_1(x,t) + \\
 & + \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) + 2(R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_2(x,t) + \\
 & \left. + \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) - (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_3(x,t) \right\} \quad (2.8)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial x} E_3(x,t) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) - (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_1(x,t) + \\
 & + \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) - (R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_2(x,t) + \\
 & \left. + \left[ (R_0 + L_0 \frac{\partial}{\partial t}) + 2(R_1 + L_1 \frac{\partial}{\partial t}) \right] I_3(x,t) \right\} \quad (2.9)
 \end{aligned}$$

Segundo grupo (Aplicación de la ley de Kirchoff de corrientes)

En la fase 1:

$$-C_1 \frac{\partial}{\partial t} E_1(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t)$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} E_1(x,t) = \frac{1}{C_1} \frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t) \quad (2.10)$$

Si se asume que la tierra tiene un voltaje  $E_0(x,t)$ , se puede plantear la ecuación:

$$\frac{3 C_1 C_0}{C_1 - C_0} \frac{\partial}{\partial t} E_0(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} [I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t)]$$

De donde:

$$\frac{\partial}{\partial t} E_0(x,t) = \frac{1}{3} \left( \frac{C_1 - C_0}{C_1 C_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} [I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t)]$$

Pero el voltaje de tierra para cualquier  $x$  y cualquier  $t$  es igual a cero, por tanto:

$$0 = \frac{1}{3} \left( \frac{C_1 - C_0}{C_1 C_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} [I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t)] \quad (2.11)$$

Si se suman las ecuaciones (2.10) y (2.11) entre sí, se tiene:

$$-\frac{\partial}{\partial t} E_1(x,t) = \frac{1}{C_1} \frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t) + \frac{1}{3} \left( \frac{C_1 - C_0}{C_1 C_0} \right) \frac{\partial}{\partial x} [I_1(x,t) + I_2(x,t) + I_3(x,t)] \quad (2.12)$$

Desarrollando la ecuación (2.12) y agrupando términos en función de  $I_1(x,t)$ ,  $I_2(x,t)$ ,  $I_3(x,t)$ , ésta toma la forma:

$$-\frac{\partial}{\partial t} E_1(x,t) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{C_0} + \frac{2}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t) + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_2(x,t) + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_3(x,t) \right\} \quad (2.13)$$

Por analogía, para las otras dos fases:

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial t} E_2(x,t) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t) + \left( \frac{1}{C_0} + \frac{2}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_2(x,t) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_3(x,t) \right\} \quad (2.14)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - \frac{\partial}{\partial t} E_3(x,t) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t) + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_2(x,t) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{C_0} + \frac{2}{C_1} \right) \frac{\partial}{\partial x} I_3(x,t) \right\} \quad (2.15)
 \end{aligned}$$

#### 2.4. CONVERSION A DOMINIO DE FRECUENCIA USANDO LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

En el desarrollo seguido hasta este punto se han obtenido dos grupos de ecuaciones, cuyas variables son función de la distancia  $x$  y el tiempo  $t$ ; además dichas variables se ven afectadas por derivadas parciales, en consecuencia, lo que se ha obtenido en un grupo de "Ecuaciones Diferenciales Parciales".

La aplicación de la Transformada de Laplace presenta una doble utilidad: en primer lugar permite trabajar en dominio de frecuencia y en segundo lugar y como consecuencia de lo anterior, convierte las derivadas parciales en derivadas totales obteniéndose un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Así, para el primer grupo de ecuaciones:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial x} E_1(x,t)\right) = \frac{d}{dx} E_1(x,s) \quad (2.16)$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial t} I_1(x,t)\right) = s I_1(x,s) - i_1(x,0^+) \quad (2.17)$$

si se considera que la línea ha permanecido desenergizada por mucho tiempo, no existe carga atrapada en el momento de la energización, por lo tanto:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\partial}{\partial t} I_1(x,t)\right) = s I_1(x,s) \quad (2.18)$$

Si se obtiene la transformada de Laplace de cada uno de los términos en las ecuaciones (2.7), (2.8) y (2.9) y se aplican las igualdades (2.16) y (2.18) se tiene:

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} E_1(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & [(R_0 + sL_0) + 2(R_1 + sL_1)] I_1(x,s) + \\ & + [(R_0 + sL_0) - (R_1 + sL_1)] I_2(x,s) + \\ & \left. + [(R_0 + sL_0) - (R_1 + sL_1)] I_3(x,s) \right\} \quad (2.19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\frac{d}{dx} E_2(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & [(R_0 + sL_0) - (R_1 + sL_1)] I_1(x,s) + \\ & + [(R_0 + sL_0) + 2(R_1 + sL_1)] I_2(x,s) + \\ & \left. + [(R_0 + sL_0) - (R_1 + sL_1)] I_3(x,s) \right\} \quad (2.20) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} E_3(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & \left[ (R_0 + sL_0) - (R_1 + sL_1) \right] I_1(x,s) + \\
& + \left[ (R_0 + sL_0) - (R_1 + sL_1) \right] I_2(x,s) + \\
& \left. + \left[ (R_0 + sL_0) + 2(R_1 + sL_1) \right] I_3(x,s) \right\} \quad (2.21)
\end{aligned}$$

A los términos  $(R_0 + sL_0)$  y  $(R_1 + sL_1)$  se los puede definir como las impedancias serie de secuencia cero y secuencia positiva de la línea, respectivamente

$$Z_0 = R_0 + sL_0 \quad (2.22)$$

$$Z_1 = R_1 + sL_1 \quad (2.23)$$

Reemplazando las igualdades (2.2) y (2.23) en (2.15), (2.20) y (2.21) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} E_1(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & (Z_0 + 2Z_1)I_1(x,s) + (Z_0 - Z_1)I_2(x,s) + \\
& \left. + (Z_0 - Z_1)I_3(x,s) \right\} \quad (2.24)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} E_2(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & (Z_0 - Z_1)I_1(x,s) + (Z_0 + 2Z_1)I_2(x,s) + \\
& \left. + (Z_0 - Z_1)I_3(x,s) \right\} \quad (2.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-\frac{d}{dx} E_3(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \right. & (Z_0 - Z_1)I_1(x,s) + (Z_0 - Z_1)I_2(x,s) + \\
& \left. + (Z_0 + 2Z_1)I_3(x,s) \right\} \quad (2.26)
\end{aligned}$$

Que expresadas en forma matricial tienen la forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{d}{dx} E_1(x,s) \\ -\frac{d}{dx} E_2(x,s) \\ -\frac{d}{dx} E_3(x,s) \end{bmatrix}}_{-\frac{d}{dx} |E|} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} (Z_0+2Z_1) & (Z_0-Z_1) & (Z_0-Z_1) \\ (Z_0-Z_1) & (Z_0+2Z_1) & (Z_0-Z_1) \\ (Z_0-Z_1) & (Z_0-Z_1) & (Z_0+2Z_1) \end{bmatrix}}_{|Z|} \underbrace{\begin{bmatrix} I_1(x,s) \\ I_2(x,s) \\ I_3(x,s) \end{bmatrix}}_{|I|} \quad (2.27)$$

De manera similar, atendiendo al segundo grupo de ecuaciones, se pueden plantear las siguientes igualdades al aplicar la teoría de la transformada de Laplace:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial x} I_1(x,t)\right] = \frac{d}{dx} I_1(x,s) \quad (2.28)$$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial t} E_1(x,t)\right] = sE_1(x,s) - e_j(x,0^+) \quad (2.29)$$

Como se había indicado anteriormente, se considera que la línea en el momento de la energización no tiene carga atrapada; por tanto:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial}{\partial t} E_1(x,t)\right] = sE_1(x,s) \quad (2.30)$$

Al obtener la transformada de Laplace de cada uno de los términos de las ecuaciones (2.13), (2.14), (2.15) y aplicando las igualdades (2.28) y (2.30) se obtienen las ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 -sE_1(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{C_0} + \frac{2}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -sE_2(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{C_0} + \frac{2}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.32)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -sE_3(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{C_0} - \frac{1}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{C_0} + \frac{2}{C_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

Si de cada una de las tres últimas ecuaciones se despejan los voltajes se tiene:

$$\begin{aligned}
 -E_1(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{sC_0} + \frac{2}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(s,x) + \left( \frac{1}{sC_0} - \frac{1}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{sC_0} - \frac{1}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.34)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 -E_2(x,s) = \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{sC_0} - \frac{1}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{sC_0} + \frac{2}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 \left. + \left( \frac{1}{sC_0} - \frac{1}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.35)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - E_3(x,s) = \frac{1}{3} & \left\{ \left( \frac{1}{sC_0} - \frac{1}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{sC_0} - \frac{1}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{sC_0} + \frac{2}{sC_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.36)
 \end{aligned}$$

A los términos  $sC_0$  y  $sC_1$  se los puede definir como las admitancias paralelo de secuencia cero y secuencia positiva respectivamente,

$$Y_0 = sC_0 \quad (2.37)$$

$$Y_1 = sC_1 \quad (2.38)$$

Reemplazando estas dos últimas igualdades en (2.34), (2.35) y (2.36) se tiene:

$$\begin{aligned}
 - E_1(x,s) = \frac{1}{3} & \left\{ \left( \frac{1}{Y_0} + \frac{2}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.39)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - E_2(x,s) = \frac{1}{3} & \left\{ \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{Y_0} + \frac{2}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.40)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 - E_3(x,s) = & \frac{1}{3} \left\{ \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_1(x,s) + \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_2(x,s) + \right. \\
 & \left. + \left( \frac{1}{Y_0} + \frac{2}{Y_1} \right) \frac{d}{dx} I_3(x,s) \right\} \quad (2.41)
 \end{aligned}$$

Expresando estas ecuaciones en forma matricial:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} - E_1(x,s) \\ - E_2(x,s) \\ - E_3(x,s) \end{bmatrix}}_{- |E|} = \frac{1}{3} \underbrace{\begin{bmatrix} \left( \frac{1}{Y_0} + \frac{2}{Y_1} \right) & \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) & \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \\ \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) & \left( \frac{1}{Y_0} + \frac{2}{Y_1} \right) & \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) \\ \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) & \left( \frac{1}{Y_0} - \frac{1}{Y_1} \right) & \left( \frac{1}{Y_0} + \frac{2}{Y_1} \right) \end{bmatrix}}_{|Y|} \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{d}{dx} I_1(x,s) \\ \frac{d}{dx} I_2(x,s) \\ \frac{d}{dx} I_3(x,s) \end{bmatrix}}_{\frac{d}{dx} |I|} \quad (2.42)$$

## 2.5. APLICACION DE LA TRANSFORMACION MODAL

Los dos grupos de ecuaciones obtenidos aplicando las leyes de Kirchoff se transforman en dos ecuaciones que escritas en notación matricial son:

$$- \frac{d}{dx} [ E ] = \frac{1}{3} [ Z ] [ I ] \quad (2.43)$$

$$- [ E ] = \frac{1}{3} [ Y ] \frac{d}{dx} [ I ] \quad (2.44)$$

Derivando la ecuación (2.43) con respecto a x:

$$-\frac{d^2}{dx^2} [ E ] = \frac{1}{3} [ Z ] \frac{d}{dx} [ I ] \quad (2.45)$$

De la ecuación (2.44) se obtiene:

$$\frac{d}{dx} [ I ] = -3 [ Y ]^{-1} [ E ] \quad (2.46)$$

Reemplazando (2.46) en (2.45):

$$\frac{d^2}{dx^2} [ E ] - [ Z ][ Y ]^{-1} [ E ] = [ 0 ] \quad (2.47)$$

$$\text{si: } [ \alpha ] = [ Z ][ Y ]^{-1} \quad (2.48)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} [ E ] - [ \alpha ] [ E ] = [ 0 ] \quad (2.49)$$

Donde:

$$[ Y ]^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} (Y_0 + 2Y_1) & (Y_0 - Y_1) & (Y_0 - Y_1) \\ (Y_0 - Y_1) & (Y_0 + 2Y_1) & (Y_0 - Y_1) \\ (Y_0 - Y_1) & (Y_0 - Y_1) & (Y_0 + 2Y_1) \end{bmatrix} \quad (2.50)$$

Entonces  $[ \alpha ]$  es:

$$[\alpha] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} (Z_0Y_0 + 2Z_1Y_1) & (Z_0Y_0 - Z_1Y_1) & (Z_0Y_0 - Z_1Y_1) \\ (Z_0Y_0 - Z_1Y_1) & (Z_0Y_0 + 2Z_1Y_1) & (Z_0Y_0 - Z_1Y_1) \\ (Z_0Y_0 - Z_1Y_1) & (Z_0Y_0 - Z_1Y_1) & (Z_0Y_0 + 2Z_1Y_1) \end{bmatrix} \quad (2.51)$$

En la igualdad (2.51) se puede notar claramente que  $[\alpha]$  es una matriz completamente llena; es decir, ninguno de sus elementos es igual a cero, por lo tanto, la ecuación (2.45) en forma desarrollada toma la forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} E_1(x,s) - \alpha_{11}E_1(x,s) - \alpha_{12}E_2(x,s) - \alpha_{13}E_3(x,s) = 0 \quad (2.52)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} E_2(x,s) - \alpha_{21}E_1(x,s) - \alpha_{22}E_2(x,s) - \alpha_{23}E_3(x,s) = 0 \quad (2.53)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} E_3(x,s) - \alpha_{31}E_1(x,s) - \alpha_{32}E_2(x,s) - \alpha_{33}E_3(x,s) = 0 \quad (2.54)$$

La resolución de este sistema de ecuaciones se hace bastante complicado porque en cada ecuación están presentes las tres variables  $E_1(x,s)$ ,  $E_2(x,s)$  y  $E_3(x,s)$ .

Afortunadamente la técnica matricial proporciona un instrumento que permite solventar este inconveniente; este instrumento es la "Transformación modal".

La transformación modal es un mecanismo que permite diagonalizar una

matriz, al aplicar esta técnica se puede transformar la matriz llena  $[\alpha]$  en una matriz diagonal  $[\gamma]$ .

La ecuación gencial (2.49) va a transformarse en la ecuación:

$$\frac{d^2}{dx^2} [F] - [\gamma][F] = [0] \quad (2.55)$$

que en forma desarrollada es:

$$\frac{d^2}{dx^2} F_1(x,s) - \gamma_{11} F_1(x,s) = 0 \quad (2.56)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} F_2(x,s) - \gamma_{22} F_2(x,s) = 0 \quad (2.57)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} F_3(x,s) - \gamma_{33} F_3(x,s) = 0 \quad (2.58)$$

Planteadas de esta manera las ecuaciones, la resolución se hace bastante simple, pues cada una de ellas puede considerarse como una ecuación diferencial homogénea de segundo orden, cuya solución es directa.

El problema radica en determinar la matriz  $[\gamma]$  y para ello se considera que las matrices  $[E]$  y  $[F]$  se encuentran relacionadas linealmente; así:

$$[E] = [T][F] \quad (2.59)$$

$$[F] = [T]^{-1}[E] \quad (2.60)$$

Reemplazando (2.59) en (2.49) se tiene:

$$\frac{d^2}{dx^2} [T][F] - [\alpha][T][F] = [0] \quad (2.61)$$

Dado que  $[T]$  es una matriz numérica, independiente de  $x$ :

$$\frac{d^2}{dx^2} [F] - [T]^{-1} [\alpha] [T] [F] = [0] \quad (2.62)$$

De donde se deduce que:

$$[\gamma] = [T]^{-1} [\alpha] [T] \quad (2.63)$$

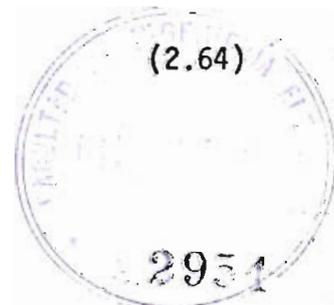
La matriz  $[T]$  se obtiene aplicando la teoría de los valores y vectores propios de una matriz.

El procedimiento consiste en hallar primero los valores propios o raíces características de la matriz  $[\alpha]$ , luego se determina el vector propio correspondiente a cada valor propio. Finalmente la matriz de transformación  $[T]$  se compone de los vectores columna proporcionales a los vectores propios de  $[\alpha]$ .

El resultado de esta operación matricial es el siguiente:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.64)$$

(Ver apéndice A)



$$[T]^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Entonces, la matriz  $[\gamma]$  es igual a:

$$[\gamma] = [T]^{-1}[\alpha][T] = \begin{bmatrix} Z_0 Y_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1 Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_1 Y_1 \end{bmatrix} \quad (2.66)$$

Las ecuaciones (2.56), (2.57) y (2.58) por lo tanto toman la forma:

$$\frac{d^2}{dx^2} F_1(x,s) - Z_0 Y_0 F_1(x,s) = 0 \quad (2.67)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} F_2(x,s) - Z_1 Y_1 F_2(x,s) = 0 \quad (2.68)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} F_3(x,s) - Z_1 Y_1 F_3(x,s) = 0 \quad (2.69)$$

## 2.6. RESOLUCION DE LAS ECUACIONES DIFERENCIALES

La solución de las ecuaciones diferenciales (2.67), (2.68) y (2.69) tiene la forma:

$$F_1(x,s) = K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} + K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} \quad (2.70)$$

$$F_2(x,s) = K_{21} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + K_{22} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \quad (2.71)$$

$$F_3(x,s) = K_{31} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + K_{33} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \quad (2.72)$$

Expresando en notación matricial:

$$[ F ] = [ K_1 e_x^- ] + [ K_2 e_x^+ ] \quad (2.73)$$

Donde:

$$[ K_1 e_x^- ] = \begin{bmatrix} K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} \\ K_{21} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} \\ K_{31} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

$$[ K_2 e_x^+ ] = \begin{bmatrix} K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} \\ K_{22} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \\ K_{32} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Por la ecuación (2.59) se sabe que:

$$[ E ] = [ T ] [ F ]$$

Por lo tanto:

$$[ E ] = [ T ][ K_1 e_x^- ] + [ T ][ K_2 e_x^+ ] \quad (2.76)$$

Desarrollando esta última igualdad:

$$\begin{bmatrix} E_1(x,s) \\ E_2(x,s) \\ E_3(x,s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} \\ K_{21} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} \\ K_{31} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} \\ K_{22} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \\ K_{32} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Realizando las operaciones matriciales:

$$\begin{aligned} E_1(x,s) &= K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} + K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} + K_{21} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + \\ &+ K_{22} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} E_2(x,s) &= K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} + K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} + K_{31} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + \\ &+ K_{32} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} E_3(x,s) &= K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} + K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} - (K_{21} + K_{31}) e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} \\ &- (K_{22} + K_{32}) e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \end{aligned} \quad (2.80)$$

En las tres últimas ecuaciones se nota que los coeficientes correspondientes a  $e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x}$  y a  $e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x}$  son comunes para las tres ecuaciones, lo que no sucede con los coeficientes de  $e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x}$  y  $e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x}$ .

Para facilitar las operaciones se define:

$$[R] = \begin{bmatrix} K_{21} \\ K_{31} \\ -(K_{21} + K_{31}) \end{bmatrix} \quad [S] = \begin{bmatrix} K_{22} \\ K_{32} \\ -(K_{22} + K_{32}) \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$R' = K_{11} \quad S' = K_{12} \quad (2.82)$$

$$[v] = \text{vector unitario} \quad (2.83)$$

Al escribirse las ecuaciones (2.78), (2.79) y (2.80) en notación matricial de la forma:

$$[E] = [R] e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + [S] e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} + [v] (R' e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} + S' e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x}) \quad (2.84)$$

Se pueden definir dos matrices  $[A]$  y  $[B]$ , de tal modo que cumplan las condiciones:

$$[ S ] = [ \frac{A + B}{2} ] \quad (2.85)$$

$$[ R ] = [ \frac{B - A}{2} ] \quad (2.86)$$

De manera similar se definen dos constantes  $A'$  y  $B'$  de modo que:

$$S' = \frac{A' + B'}{2} \quad (2.87)$$

$$R' = \frac{B' - A'}{2} \quad (2.88)$$

Reemplazando (2.85), (2.86), (2.87) y (2.88) en (2.84) se tiene:

$$[ E ] = [ \frac{B - A}{2} ] e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + [ \frac{A + B}{2} ] e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} + \\ + [v] \left( \frac{B' - A'}{e} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} + \frac{A' + B'}{2} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} \right) \quad (2.89)$$

Desarrollando y reagrupando términos en esta última ecuación:

$$[ E ] = [B] \left( \frac{e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} + e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x}}{2} \right) + [A] \left( \frac{e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} - e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x}}{2} \right) \\ + [v] \left[ B' \left( \frac{e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} + e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x}}{2} \right) + \right. \\ \left. + A' \left( \frac{e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} - e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x}}{2} \right) \right] \quad (2.90)$$

Se conoce por definición que:

$$\cos h x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad ; \quad \text{sen } h = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (2.91)$$

Reemplazando las igualdades (2.91) en la ecuación (2.90)

$$\begin{aligned} [E] = [B] \cos h \sqrt{Z_1 Y_1} x + [A] \text{sen } h \sqrt{Z_1 Y_1} x + \\ + [v] (B' \cos h \sqrt{Z_0 Y_0} x + A' \text{sen } h \sqrt{Z_0 Y_0} x) \end{aligned} \quad (2.92)$$

Para facilitar las operaciones posteriores se define:

$$\lambda_1 = \sqrt{Z_1 Y_1} \quad (2.93)$$

$$\lambda_0 = \sqrt{Z_0 Y_0} \quad (2.94)$$

Reemplazando estas últimas igualdades en (2.92)

$$\begin{aligned} [E] = [B] \cos h \lambda_1 x + [A] \text{sen } h \lambda_1 x + [v] (B' \cos h \lambda_0 x + \\ + A' \text{sen } h \lambda_0 x) \end{aligned} \quad (2.95)$$

Esta es la ecuación general que permite calcular el voltaje de cada una de las fases de la línea, en cualquier punto de la misma, dependiendo de las condiciones de borde que se planteen.

La respuesta viene dada en dominio de frecuencia.

Para obtener la ecuación general de corrientes; al despejar  $[ I ]$  en la ecuación (2.43) queda:

$$[ I ] = - 3 [ Z ]^{-1} \frac{d}{dx} [ E ] \quad (2.96)$$

Si se determina la derivada  $\frac{d}{dx} [ E ]$  tomando como base la ecuación (2.76) se obtiene como resultado:

$$\frac{d}{dx} [ E ] = [ T ] \frac{d}{dx} [ K_1 e_x^- ] + [ T ] \frac{d}{dx} [ K_2 e_x^+ ] \quad (2.97)$$

$$\frac{d}{dx} [ E ] = - [ T ] [ \gamma ] [ K_1 e_x^- ] + [ T ] [ \gamma ] [ K_2 e_x^+ ] \quad (2.98)$$

Reemplazando (2.98) en (2.96):

$$[ I ] = 3 [ Z ]^{-1} [ T ] [ \gamma ] [ K_1 e_x^- ] - 3 [ Z ]^{-1} [ T ] [ \gamma ] [ K_2 e_x^+ ] \quad (2.99)$$

$$[ Z ]^{-1} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} \left( \frac{1}{Z_0} + \frac{2}{Z_0} \right) & \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) & \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) \\ \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) & \left( \frac{1}{Z_0} + \frac{2}{Z_1} \right) & \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) \\ \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) & \left( \frac{1}{Z_0} - \frac{1}{Z_1} \right) & \left( \frac{1}{Z_0} + \frac{2}{Z_1} \right) \end{bmatrix} \quad (2.100)$$

Para facilitar las operaciones la ecuación (2.99) se modifica a una ecuación de la forma:

$$[I] = [T][K][K_1 e_x^-] - [T][K][K e_x^+] \quad (2.101)$$

Para determinar la matriz  $[K]$  se plantea la ecuación

$$3 [Z]^{-1} [T] [Y] = [T] [K] \quad (2.102)$$

De donde:

$$[K] = 3 [T]^{-1} [Z]^{-1} [T] [Y] \quad (2.103)$$

Realizando las operaciones correspondiente se llega a determinar que

$$[K] = \begin{bmatrix} \sqrt{Y_0/Z_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{Y_1/Z_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{Y_1/Z_1} \end{bmatrix} \quad (2.104)$$

Si se invierte esta matriz se obtiene la matriz "Impedancia Característica".

$$[K]^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{Z_0/Y_0} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{Z_1/Y_1} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{Z_1/Y_1} \end{bmatrix} = [\Omega] \quad (2.105)$$

$[\Omega]$  → matriz impedancia característica.

Donde:

$$\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} = \Omega_0 \quad \text{impedancia característica de secuencia cero.} \quad (2.106)$$

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} = \Omega_1 \quad \text{impedancia característica de secuencia positiva.} \quad (2.107)$$

Reemplazando los valores de  $Z_0$ ,  $Z_1$ ,  $Y_0$ ,  $Y_1$  se tiene

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{R_0 + sL_0}{sC_0}} \quad (2.108)$$

$$\Omega_1 = \sqrt{\frac{R_1 + sL_1}{sC_1}} \quad (2.109)$$

Sin embargo, para Líneas de Transmisión de Potencia se acepta como válida la simplificación<sup>1</sup>:

$$\Omega_0 = \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} \quad \Omega_1 = \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} \quad (2.110)$$

Aplicando la igualdad (2.105) se tiene:

$$[I] = [T][\Omega]^{-1}[K_1 e_x^-] - [T][\Omega]^{-1}[K_2 e_x^+] \quad (2.111)$$

Desarrollando la ecuación matricial, realizando las operaciones indicadas y reagrupando términos se obtienen las siguientes igualdades:

$$\begin{aligned}
 I_1(x,s) = & \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [ K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} - K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} ] + \\
 & + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} [ K_{21} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} - K_{22} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} ] \quad (2.112)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(x,s) = & \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [ K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} - K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} ] + \\
 & + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} [ K_{31} e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} - K_{32} e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} ] \quad (2.113)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(x,s) = & \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [ K_{11} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} - K_{12} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} ] + \\
 & + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} [ - (K_{21} + K_{31}) e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} + (K_{22} + K_{32}) e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} ] \quad (2.114)
 \end{aligned}$$

Aplicando las igualdades (2.81), (2.82) y (2.83) y utilizando notación matricial se tiene:

$$\begin{aligned}
 |I| = & \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \left\{ [R] e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} - [S] e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \right\} + \\
 & + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [v] [R' e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} - S' e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x}] \quad (2.115)
 \end{aligned}$$

Aplicando las igualdades (2.85), (2.86), (2.87) y (2.88) se tiene:

$$\begin{aligned}
 |I| = & \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \left\{ \left[ \frac{B-A}{2} \right] e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} - \left[ \frac{A+B}{2} \right] e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} \right\} + \\
 & + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [v] \left\{ \frac{B'-A'}{2} e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} - \frac{A'+B'}{2} e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} \right\}
 \end{aligned} \tag{2.116}$$

Desarrollando y reagrupando términos:

$$\begin{aligned}
 [I] = & \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \left\{ [B] \left( \frac{e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x} - e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x}}{2} \right) - \right. \\
 & \left. - [A] \left( \frac{e^{\sqrt{Z_1 Y_1} x} + e^{-\sqrt{Z_1 Y_1} x}}{2} \right) \right\} + \\
 & + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [v] \left\{ B' \left( \frac{e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x} - e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x}}{2} \right) - \right. \\
 & \left. - A' \left( \frac{e^{\sqrt{Z_0 Y_0} x} + e^{-\sqrt{Z_0 Y_0} x}}{2} \right) \right\}
 \end{aligned} \tag{2.117}$$

Aplicando las igualdades (2.91)

$$\begin{aligned}
 |I| = & -\sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} ([A] \cos h \sqrt{Z_1 Y_1} x + [B] \sen h \sqrt{Z_1 Y_1} x) - \\
 & -\sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [v] (A' \cos h \sqrt{Z_0 Y_0} x + B' \sen h \sqrt{Z_0 Y_0} x)
 \end{aligned} \tag{2.118}$$

Aplicando las igualdades (2.93) y (2.94)

$$\begin{aligned}
 [I] = & - \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} ([A] \cos h \lambda_1 x + [B] \operatorname{sen} h \lambda_1 x) + \\
 & - \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} [v] (A' \cos h \lambda_0 x + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x) \quad (2.119)
 \end{aligned}$$

Esta es la ecuación que permite calcular la corriente en cada una de las fases de la línea para cualquier punto  $x$  de la misma; dependiendo de las condiciones de borde que se impongan. La respuesta, al igual que en la ecuación general de voltajes, viene dada en dominio de frecuencia.

## CAPITULO III

CALCULO DE VOLTAJES Y CORRIENTES TRANSITORIOS

## 3.1. CALCULO DE VOLTAJES EN DOMINIO DE FRECUENCIA

3.1.1. Voltajes al energizar una línea en vacío desde una barra infinita

Para resolver la ecuación general (2.85) se deben determinar las constantes  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $A'$  y  $B'$ , aplicando condiciones de borde adecuadas para el caso planteado, recordando que no se considera la existencia de carga atrapada en el momento de la energización.

Antes de aplicar las condiciones de borde, se deben hacer las siguientes consideraciones:

En las ecuaciones (2.85) y (2.86) al despejar  $[A]$  se obtiene:

$$[A] = [2S - B] \quad [A] = [B - 2R] \quad (3.1)$$

Iguando las dos ecuaciones:

$$[2S - B] = [B - 2R] \quad (3.2)$$

$$\text{De donde:} \quad [B] = [S] + [R] \quad (3.3)$$

Reemplazando (3.3) en (3.1)

$$[ A ] = [ S ] - [ R ] \quad (3.4)$$

Si se suman entre si los términos de los vectores  $[ S ]$  y  $[ R ]$  separadamente se tiene:

$$K_{21} + K_{31} - K_{21} - K_{31} = 0 \quad (3.5)$$

$$K_{22} + K_{32} - K_{22} - K_{32} = 0 \quad (3.6)$$

Es decir, que si los términos de  $[ R ]$  son  $R_1, R_2, R_3$  y los términos del vector  $[ S ]$  son  $S_1, S_2, S_3$ , se concluye:

$$R_1 + R_2 + R_3 = 0 \quad S_1 + S_2 + S_3 = 0 \quad (3.7)$$

En la relación (3.4), si los términos del vector  $[ A ]$  son  $A_1, A_2, A_3$ , entonces:

$$A_1 = S_1 - R_1 \quad A_2 = S_2 - R_2 \quad A_3 = S_3 - R_3 \quad (3.8)$$

Sumando las tres igualdades:

$$A_1 + A_2 + A_3 = (S_1 + S_2 + S_3) - (R_1 + R_2 + R_3)$$

Por (3.7)  $A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad (3.9)$

Si se hace lo mismo en la ecuación (3.3) y si los términos del vector  $[B]$  son  $B_1, B_2, B_3$  se concluye que:

$$B_1 + B_2 + B_3 = 0 \quad (3.10)$$

Las ecuaciones (3.9) y (3.10) no significan que los términos de  $[A]$  o de los de  $[B]$  sean cero

$$A_1 \neq A_2 \neq A_3 \neq 0 \quad B_1 \neq B_2 \neq B_3 \neq 0 \quad (3.11)$$

### 3.1.1.1. Determinación de las condiciones de borde y cálculo de las constantes

El circuito equivalente para el caso de energización de la línea en vacío desde una barra infinita tiene la forma:

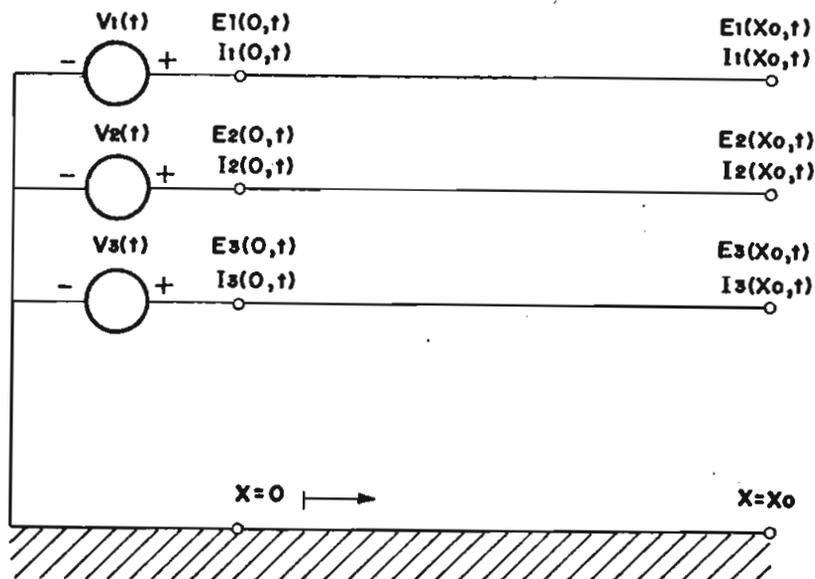


Fig. 3.1. Línea trifásica con el terminal de recepción abierto y el terminal de envío conectado a una fuente ideal (barra infinita)

Las condiciones de borde determinan que:

$$\text{para } x = 0, \quad t \geq 0 \quad E(0, s) = V(s) \quad (3.12)$$

$$\text{para } x = x, \quad t \leq 0 \quad I(x, s) = 0 \quad (3.13)$$

Si en la ecuación general de voltajes (2.95) se reemplaza  $x = 0$ ,

ésta toma la forma:

$$[ E_0 ] = [ B ] + [ v ] B' \quad (3.14)$$

Que en forma desarrollada es:

$$E_1(0, s) = B_1 + B' \quad (3.15.a)$$

$$E_2(0, s) = B_2 + B' \quad (3.15.b)$$

$$E_3(0, s) = B_3 + B' \quad (3.15.c)$$

Así mismo la igualdad (3.12) en forma desarrollada es:

$$E_1(0, s) = V_1(s) \quad (3.16.a)$$

$$E_2(0, s) = V_2(s) \quad (3.16.b)$$

$$E_3(0, s) = V_3(s) \quad (3.16.c)$$

Igualando las ecuaciones (3.15) y (3.16)

$$B_1 + B' = V_1(s) \quad (3.17.a)$$

$$B_2 + B' = V_2(s) \quad (3.17.b)$$

$$B_3 + B' = V_3(s) \quad (3.17.c)$$

Sumando las ecuaciones (3.17) entre sí se tiene:

$$(B_1 + B_2 + B_3) + 3 B' = V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)$$

Por la igualdad (3.10) se sabe que  $B_1 + B_2 + B_3 = 0$ , entonces

$$B' = \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \quad (3.18)$$

Reemplazando (3.18) en (3.17) se obtiene:

$$B_1 = \frac{2 V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \quad (3.19.a)$$

$$B_2 = \frac{2 V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \quad (3.19.b)$$

$$B_3 = \frac{2 V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \quad (3.19.c)$$

Aplicando la segunda condición de borde (3.13) en la ecuación general de corriente (2.119); y si además se define:

$$\gamma_{c1} = \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \quad (3.20)$$

$$\gamma_{c0} = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} \quad (3.21)$$

$$\begin{aligned} I_1(x_0, s) = & - \gamma_{c1}(A_1 \cos h \lambda_1 x_0 + B_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0) - \\ & - \gamma_{c0}(A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.22.a)$$

$$\begin{aligned} I_2(x_0, s) = & - \gamma_{c1}(A_2 \cos h \lambda_1 x_0 + B_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0) - \\ & - \gamma_{c0}(A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.22.b)$$

$$\begin{aligned} I_3(x_0, s) = & - \gamma_{c1}(A_3 \cos h \lambda_1 x_0 + B_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0) - \\ & - \gamma_{c0}(A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0) = 0 \end{aligned} \quad (3.22.c)$$

Si se suman entre si las ecuaciones (3.22) se tiene:

$$\begin{aligned} - \gamma_{c1}(A_1 + A_2 + A_3) \cos h \lambda_1 x_0 - \gamma_{c1}(B_1 + B_2 + B_3) \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 - \\ - \gamma_{c0} 3A' \cos h \lambda_0 x_0 - \gamma_{c0} 3B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 = 0 \end{aligned} \quad (3.23)$$

Por (3.9) y (3.10), (3.23) se convierte en:

$$- \gamma_{c0} 3A' \cos h \lambda_0 x_0 - \gamma_{c0} 3B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 = 0 \quad (3.24)$$

Despejando A':

$$A' = - B' \frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\operatorname{cos} h \lambda_0 x_0} = - B' \operatorname{tan} h \lambda_0 x_0 \quad (3.25)$$

Reemplazando (3.18) en (3.25):

$$A' = - \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \operatorname{tan} h \lambda_0 x_0 \quad (3.26)$$

Si en las ecuaciones (3.22) se despeja  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  se tiene:

$$A_1 = - \frac{Y_{C_0}}{Y_{C_1}} \left( \frac{A' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\operatorname{cos} h \lambda_1 x_0} \right) - B_1 \operatorname{tan} h \lambda_1 x_0 \quad (3.27.a)$$

$$A_2 = - \frac{Y_{C_0}}{Y_{C_1}} \left( \frac{A' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\operatorname{cos} h \lambda_1 x_0} \right) - B_2 \operatorname{tan} h \lambda_1 x_0 \quad (3.27.b)$$

$$A_3 = - \frac{Y_{C_0}}{Y_{C_1}} \left( \frac{A' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\operatorname{cos} h \lambda_1 x_0} \right) - B_3 \operatorname{tan} h \lambda_1 x_0 \quad (3.28.c)$$

En el factor:  $A' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0$

si se reemplaza (3.25):  $A' = - B' \operatorname{tan} h \lambda_0 x_0$ , queda

$$- B' \frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\operatorname{cos} h \lambda_0 x_0} \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 = 0$$

Por lo tanto:

$$A_1 = - B_1 \operatorname{tan} h \lambda_1 x_0 \quad (3.29.a)$$

$$A_2 = - B_2 \operatorname{tan} h \lambda_1 x_0 \quad (3.29.b)$$

$$A_3 = - B_3 \tan h \lambda_1 x_0 \quad (3.29.c)$$

Reemplazando el valor de las constantes obtenido en la ecuación general de voltajes (2.95) se tiene:

$$E_1(x,s) = B_1 \cos h \lambda_1 x + A_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x + B' \cos h \lambda_0 x + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x \quad (3.30.a)$$

$$E_2(x,s) = B_2 \cos h \lambda_1 x + A_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x + B' \cos h \lambda_0 x + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x \quad (3.30.b)$$

$$E_3(x,s) = B_3 \cos h \lambda_1 x + A_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x + B' \cos h \lambda_0 x + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x \quad (3.30.c)$$

En el estudio de sobrevoltajes por energización interesa conocer únicamente el voltaje que aparece en el terminal de recepción de la línea, por lo tanto, se resolverán las ecuaciones (3.30) para  $x = x_0$ , así:

$$E_1(x_0,s) = B_1 \cos h \lambda_1 x_0 - B_1 \tan h \lambda_1 x_0 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 - B' \tan h \lambda_0 x_0 \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \quad (3.31.a)$$

$$\begin{aligned}
 E_2(x_0, s) &= B_2 \cos h \lambda_1 x_0 - B_2 \tan h \lambda_1 x_0 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + \\
 &+ B' \cos h \lambda_0 x_0 - B' \tan h \lambda_0 x_0 \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \quad (3.31.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_3(x_0, s) &= B_3 \cos h \lambda_1 x_0 - B_3 \tan h \lambda_1 x_0 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + \\
 &+ B' \cos h \lambda_0 x_0 - B' \tan h \lambda_0 x_0 \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \quad (3.31.c)
 \end{aligned}$$

Agrupando términos semejantes:

$$\begin{aligned}
 E_1(x_0, s) &= B_1 \left( \cos h \lambda_1 x_0 - \frac{\operatorname{sen} h^2 \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} \right) + \\
 &+ B' \left( \cos h \lambda_0 x_0 - \frac{\operatorname{sen} h^2 \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \right) \quad (3.32.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(x_0, s) &= B_2 \left( \cos h \lambda_1 x_0 - \frac{\operatorname{sen} h^2 \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} \right) + \\
 &+ B' \left( \cos h \lambda_0 x_0 - \frac{\operatorname{sen} h^2 \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \right) \quad (3.32.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_3(x_0, s) &= B_3 \left( \cos h \lambda_1 x_0 - \frac{\operatorname{sen} h^2 \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} \right) + \\
 &+ B' \left( \cos h \lambda_0 x_0 - \frac{\operatorname{sen} h^2 \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \right) \quad (3.32.c)
 \end{aligned}$$

$$\text{El factor } \cos h x - \frac{\operatorname{sen} h^2 x}{\cos h x} = \frac{\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x}{\cos h x}$$

$$\text{Pero } \cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = 1$$

$$\text{Por lo tanto } \cos h x - \frac{\operatorname{sen} h^2 x}{\cos h x} = \frac{1}{\cos h x} \quad (3.33)$$

Entonces:

$$E_1(x_0, s) = \frac{B_1}{\cos h \lambda_1 x_0} + \frac{B'}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.34.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{B_2}{\cos h \lambda_1 x_0} + \frac{B'}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.34.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{B_3}{\cos h \lambda_1 x_0} + \frac{B'}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.34.c)$$

Reemplazando (3.19) en (3.34) se tiene:

$$E_1(x_0, s) = \frac{2 V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3 \cos h \lambda_1 x_0} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3 \cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.35.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{2 V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3 \cos h \lambda_1 x_0} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3 \cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.35.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{2 V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3 \cos h \lambda_1 x_0} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3 \cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.35.c)$$

### 3.1.1.2. Determinación de los voltajes de generación en dominio de frecuencia

Se se parte del hecho de que el estudio se realiza en un sistema tri fásico, el defasamiento entre los voltajes de cada fase es de  $120^\circ$ , - por lo tanto se puede expresar el voltaje de cada fase en dominio del tiempo de la siguiente manera:

$$V_1(t) = V \text{ sen } \omega t \quad (3.36.a)$$

$$V_2(t) = V \text{ sen } (\omega t + 2\pi/3) \quad (3.36.b)$$

$$V_3(t) = V \text{ sen } (\omega t - 2\pi/3) \quad (3.36.c)$$

En estas ecuaciones se considera que el voltaje máximo es igual para cada fase y además que la energización se produce exactamente en el instante en que el voltaje en la fase A pasa por cero, tal como lo muestra la figura 3.2.

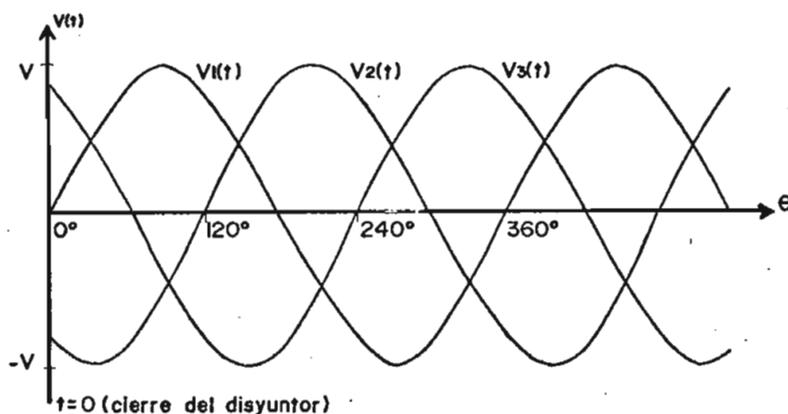


Fig. 3.2. Voltajes en la barra infinita considerando que el interruptor se cierra a  $t = 0$ .

La aplicación de las ecuaciones (3.36) limita las posibilidades de análisis, razón por la cual deben ser modificadas de tal manera que al tiempo  $t = 0$ , en que se cierran los interruptores, el voltaje de la fase A no se encuentre necesariamente en  $0^\circ$  sino en cualquier ángulo  $\phi$ .

Por otro lado, es importante mantener la posibilidad de la presencia

de voltajes desbalanceados en la fuente; aunque la probabilidad de ocurrencia de este evento en la práctica es muy pequeña; para propósitos de análisis puede considerarse.

Con estos antecedentes, las ecuaciones (3.36) toman la forma:

$$V_1(t) = V_1 \text{ sen } (wt + \phi) \quad (3.37.a)$$

$$V_2(t) = V_2 \text{ sen } (wt + 2\pi/3 + \phi) \quad (3.37.b)$$

$$V_3(t) = V_3 \text{ sen } (wt + \phi - 2\pi/3) \quad (3.37.c)$$

Dado que en estas ecuaciones están expresados los voltajes de fase en dominio del tiempo y que todo el estudio se realiza en dominio de frecuencia, es necesario obtener la transformada de Laplace para cada una de ellas, así:

$$\mathcal{L}\{V_1(t)\} = V_1(s) = V_1 \frac{S \text{ sen } \phi + w \text{ cos } \phi}{s^2 + w^2} \quad (3.38.a)$$

$$\mathcal{L}\{V_2(t)\} = V_2(s) = V_2 \frac{S \text{ sen } (\phi + 2\pi/3) + w \text{ cos } (\phi + 2\pi/3)}{s^2 + w^2} \quad (3.38.b)$$

$$\mathcal{L}\{V_3(t)\} = V_3(s) = V_3 \frac{S \text{ sen } (\phi - 2\pi/3) + w \text{ cos } (\phi - 2\pi/3)}{s^2 + w^2} \quad (3.38.c)$$

Utilizando estas expresiones es posible determinar el valor de los numeradores en las ecuaciones (3.35):

$$\frac{2 V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} = \frac{1}{(s^2 + w^2)} \frac{1}{3} \left\{ 2 V_1 S \operatorname{sen} \phi + 2 V_1 w \cos \phi \right. \\ \left. - V_2 S \operatorname{sen} (\phi + 2\pi/3) - V_2 w \cos (\phi + 2\pi/3) \right. \\ \left. - V_3 S \operatorname{sen} (\phi - 2\pi/3) - V_3 w \cos (\phi - 2\pi/3) \right\}$$

Agrupando términos:

$$\frac{2V_1(s)-V_2(s)-V_3(s)}{3} = \frac{1}{(s^2+w^2)} \left\{ S \left( \frac{2V_1 \operatorname{sen} \phi - V_2 \operatorname{sen} (\phi + 2\pi/3) - V_3 \operatorname{sen} (\phi - 2\pi/3)}{3} \right) + \right. \\ \left. + w \left( \frac{2V_1 \cos \phi - V_2 \cos (\phi + 2\pi/3) - V_3 \cos (\phi - 2\pi/3)}{3} \right) \right\} \quad (3.39)$$

Si se define:

$$\frac{2 V_1 \operatorname{sen} \phi - V_2 \operatorname{sen} (\phi + 2\pi/3) - V_3 \operatorname{sen} (\phi - 2\pi/3)}{3} = \text{VAL 1} \quad (3.40)$$

$$\frac{2 V_1 \cos \phi - V_2 \cos (\phi + 2\pi/3) - V_3 \cos (\phi - 2\pi/3)}{3} = \text{VAL 2} \quad (3.41)$$

Entonces:

$$\frac{2 V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} = \frac{1}{(s^2 + w^2)} (S \text{ VAL1} + w \text{ VAL2}) \quad (3.42)$$

De manera similar para los otros casos:

$$\frac{2 V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} = \frac{1}{(s^2 + w^2)} (S \text{ VAL3} + w \text{ VAL4}) \quad (3.43)$$

$$\frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} = \frac{1}{(s^2 + w^2)} (S \text{ VAL5} + w \text{ VAL6}) \quad (3.44)$$

$$\frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} = \frac{1}{(s^2 + w^2)} (S \text{ VAL7} + w \text{ VAL8}) \quad (3.45)$$

En donde:

$$\text{VAL3} = \frac{2V_2 \text{sen}(\phi + 2\pi/3) - V_1 \text{sen}\phi - V_3 \text{sen}(\phi - 2\pi/3)}{3} \quad (3.46)$$

$$\text{VAL4} = \frac{2V_2 \text{cos}(\phi + 2\pi/3) - V_1 \text{cos}\phi - V_3 \text{cos}(\phi - 2\pi/3)}{3} \quad (3.47)$$

$$\text{VAL5} = \frac{2V_3 \text{sen}(\phi - 2\pi/3) - V_1 \text{sen}\phi - V_2 \text{sen}(\phi + 2\pi/3)}{3} \quad (3.48)$$

$$\text{VAL6} = \frac{2V_3 \text{cos}(\phi - 2\pi/3) - V_1 \text{cos}\phi - V_2 \text{cos}(\phi + 2\pi/3)}{3} \quad (3.49)$$

$$\text{VAL7} = \frac{V_1 \text{sen}\phi + V_2 \text{sen}(\phi + 2\pi/3) + V_3 \text{sen}(\phi - 2\pi/3)}{3} \quad (3.50)$$

$$\text{VAL8} = \frac{V_1 \text{cos}\phi + V_2 \text{cos}(\phi + 2\pi/3) + V_3 \text{cos}(\phi - 2\pi/3)}{3} \quad (3.51)$$

Los términos VAL1, VAL2, VAL3, VAL4, VAL5, VAL6, VAL7, VAL8 son constantes pues dependen de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  y  $\phi$  que son valores constantes.

Aplicando las relaciones (3.42), (3.43), (3.44) y (3.45) en las ecuaciones (3.35) se tiene:

$$\begin{aligned}
 E_1(x_0, s) &= \frac{S}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_1 x_0} \text{ VAL1} + \frac{W}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_1 x_0} \text{ VAL2} \\
 &+ \frac{S}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_0 x_0} \text{ VAL7} + \frac{W}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_0 x_0} \text{ VAL8}
 \end{aligned} \tag{3.58.a}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(x_0, s) &= \frac{S}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_1 x_0} \text{ VAL3} + \frac{W}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_1 x_0} \text{ VAL4} \\
 &+ \frac{S}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_0 x_0} \text{ VAL7} + \frac{W}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_0 x_0} \text{ VAL8}
 \end{aligned} \tag{3.58.b}$$

$$\begin{aligned}
 E_3(x_0, s) &= \frac{S}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_1 x_0} \text{ VAL5} + \frac{W}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_1 x_0} \text{ VAL6} \\
 &+ \frac{S}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_0 x_0} \text{ VAL7} + \frac{W}{(s^2+w^2)\cos h \lambda_0 x_0} \text{ VAL8}
 \end{aligned} \tag{3.58.c}$$

Las ecuaciones (3.52) permiten determinar el voltaje de cada fase en el terminal de recepción en dominio de frecuencia.

Se nota que cada una de las ecuaciones está compuesta de dos partes principales: una que tiene relación con los valores de secuencia positiva, que es propia para cada fase y la segunda que tiene relación con los valores de secuencia cero y es común para las tres fases.

Si se analiza un poco las ecuaciones (3.50) y (3.51) se puede concluir que los términos correspondientes a secuencia cero en las ecuaciones (3.52) son nulos cuando el sistema es perfectamente equilibra

do; así, cuando  $V_1 = V_2 = V_3$  los términos VAL7 y VAL8 son iguales a cero.

Los componentes de secuencia cero aparecen cuando el cierre del interruptor no es simultáneo para las tres fases.

Por ejemplo, si los voltajes en la barra infinita (antes del interruptor) son  $V_1 = V_2 = V_3 = 1$  pu y al cerrar el circuito falla el interruptor de la fase A los voltajes aplicados a la línea en el terminal de envío serían:

$$V_2 = V_3 = 1 \text{ pu}$$

$$V_1 = 0$$

Al reemplazar estos valores en las ecuaciones (3.50) y (3.51) con un defasaje  $\phi$  cualquiera, se obtienen valores de VAL7 y VAL8 diferentes de cero que determinan la presencia de componentes de secuencia cero en el voltaje resultante.

Otra circunstancia en la que aparecen las componentes de secuencia cero es cuando los voltajes en la barra infinita están desequilibrados, es decir cuando:  $V_1 \neq V_2 \neq V_3$ , pero la probabilidad de ocurrencia de este caso, como se había indicado anteriormente es casi nula.

### 3.1.2. Voltajes al energizar una línea con carga desde una barra infinita

#### 3.1.2.1. Determinación de las condiciones de borde y cálculo de las constantes

Considerando que las cargas en un sistema de potencia son generalmente del tipo R - L el circuito equivalente para este análisis tiene la siguiente forma:

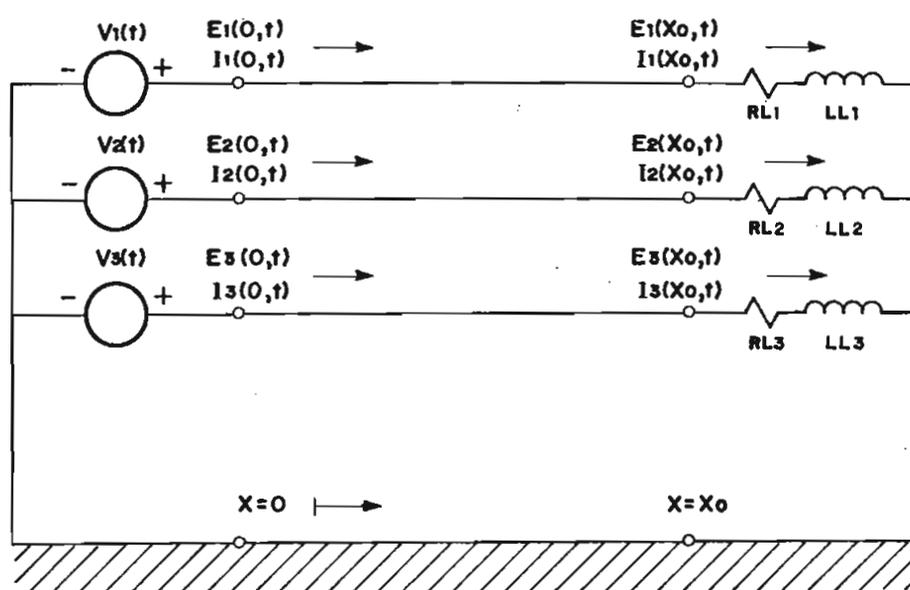


Fig. 3.3. Línea trifásica con el terminal de recepción conectado a una carga R-L y con el terminal de envío asociado a una barra infinita.

En este caso, solo se conoce una condición de borde:

$$\text{para } x = 0 \quad ; \quad t \geq 0 \quad E(0,s) = V(s) \quad (3.53)$$

Reemplazando  $x = 0$  en la ecuación general de voltajes (2.95) se tiene:

$$[ E_0 ] = [ B ] + [ v ] B' \quad (3.54)$$

Que en forma desarrollada es:

$$E_1(0,s) = B_1 + B' \quad (3.55.a)$$

$$E_2(0,s) = B_2 + B' \quad (3.55.b)$$

$$E_3(0,s) = B_3 + B' \quad (3.55.c)$$

La ecuación (3.53) en forma desarrollada es:

$$E_1(0,s) = V_1(s) \quad (3.56.a)$$

$$E_2(0,s) = V_2(s) \quad (3.56.b)$$

$$E_3(0,s) = V_3(s) \quad (3.56.c)$$

Iguando las ecuaciones (3.55) y (3.56):

$$B_1 + B' = V_1(s) \quad (3.57.a)$$

$$B_2 + B' = V_2(s) \quad (3.57.b)$$

$$B_3 + B' = V_3(s) \quad (3.57.c)$$

Si se suman entre si las ecuaciones (3.57) se tiene:

$$(B_1 + B_2 + B_3) + 3 B' = V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)$$

Por (3.10) se concluye

$$B' = \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \quad (3.58)$$

Al reemplazar (3.58) en cada una de las ecuaciones (3.57) se obtiene

$$B_1 = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \quad (3.59.a)$$

$$B_2 = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \quad (3.59.b)$$

$$B_3 = \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \quad (3.59.c)$$

En el terminal de recepción se plantea la ecuación:

$$[E_{x_0}] = [I_{x_0}][R_L] + [L_L] \frac{d}{dt} [I_{x_0}] \quad (3.60)$$

que en dominio de frecuencia toma la forma:

$$[E_{x_0}(s)] = \left\{ [R_L] + s [L_L] \right\} [I_{x_0}] \quad (3.61)$$

Donde:

$$[R_L] = \begin{bmatrix} R_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & R_{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & R_{L_3} \end{bmatrix} ; [L_L] = \begin{bmatrix} L_{L_1} & 0 & 0 \\ 0 & L_{L_2} & 0 \\ 0 & 0 & L_{L_3} \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

Si en la ecuación (3.61) se despeja la corriente:

$$[I(x_0, s)] = [R_L + sL_L]^{-1} [E(x_0, s)] \quad (3.63)$$

Realizando las operaciones indicadas se concluye:

$$[I(x_0, s)] = \begin{bmatrix} E_1(x_0, s)/(R_{L_1} + sL_{L_1}) \\ E_2(x_0, s)/(R_{L_2} + sL_{L_2}) \\ E_3(x_0, s)/(R_{L_3} + sL_{L_3}) \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

Utilizando la ecuación general (2.95) y las ecuaciones (3.18) y (3.19) se plantean las siguientes ecuaciones:

$$E_1(x_0, s) = A_1 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 + \left[ \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \right] \cos h\lambda_1 x_0 \\ + A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \cos h\lambda_0 x_0 \quad (3.65.a)$$

$$E_2(x_0, s) = A_2 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 + \left[ \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \right] \cos h\lambda_1 x_0$$

$$+ A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \cos h\lambda_0 x_0 \quad (3.65.b)$$

$$E_3(x_0, s) = A_3 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 + \left[ \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \right] \cos h\lambda_1 x_0$$

$$+ A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \cos h\lambda_0 x_0 \quad (3.65.c)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.65) en (3.64) y considerando:

$$R_{L_1} = R_{L_2} = R_{L_3} = R_L \quad (3.66.a)$$

$$L_{L_1} = L_{L_2} = L_{L_3} = L_L \quad (3.66.b)$$

Se tiene:

$$I_1(x_0, s) = A_1 \frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}$$

$$+ A' \frac{\operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \quad (3.67.a)$$

$$I_2(x_0, s) = \frac{A_2 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}$$

$$+ \frac{A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \quad (3.67.b)$$

$$\begin{aligned}
 I_3(x_0, s) = & \frac{A_3 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} \\
 & + \frac{A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L}
 \end{aligned} \tag{3.67.c}$$

Considerando ahora la ecuación general de corrientes (2.119) para  $x = x_0$  y empleando las igualdades (3.20) y (3.21) se tiene:

$$\begin{aligned}
 I_1(x_0, s) = & - Yc_1 \left\{ A_1 \cos h\lambda_1 x_0 + \left[ \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \right] \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \right\} \\
 & - Yc_0 \left\{ A' \cos h\lambda_0 x_0 + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.68.a}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(x_0, s) = & - Yc_1 \left\{ A_2 \cos h\lambda_1 x_0 + \left[ \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \right] \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \right\} \\
 & - Yc_0 \left\{ A' \cos h\lambda_0 x_0 + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.68.b}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(x_0, s) = & - Yc_1 \left\{ A_3 \cos h\lambda_1 x_0 + \left[ \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \right] \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \right\} \\
 & - Yc_0 \left\{ A' \cos h\lambda_0 x_0 + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \right\}
 \end{aligned} \tag{3.68.c}$$

Iguando las ecuaciones (3.67) y (3.68) para cada fase se tiene:

$$\begin{aligned}
& A_1 \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{A' \text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \\
& + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} = - Y_{c1} \left\{ A_1 \cos h\lambda_1 x_0 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \right] \text{sen } h\lambda_1 x_0 \right\} - Y_{c0} \left\{ A' \cos h\lambda_0 x_0 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \text{sen } h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.69.a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_2 \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{A' \text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \\
& + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} = - Y_{c1} \left\{ A_2 \cos h\lambda_1 x_0 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \right] \text{sen } h\lambda_1 x_0 \right\} - Y_{c0} \left\{ A' \cos h\lambda_0 x_0 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \text{sen } h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.69.b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& A_3 \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \left[ \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{A' \text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \\
& + \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} = - Yc_1 \left\{ A_3 \cos h\lambda_1 x_0 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \right] \text{sen } h\lambda_1 x_0 \right\} - Yc_0 \left\{ A' \cos h\lambda_0 x_0 + \right. \\
& + \left. \left[ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \right] \text{sen } h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.69.c)
\end{aligned}$$

Si se suman las tres ecuaciones (3.69) entre si, el resultado es:

$$\begin{aligned}
& \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} (A_1 + A_2 + A_3) + \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} (B_1 + B_2 + B_3) + 3A' \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \\
& + 3B' \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} = - Yc_1 \left\{ \cos h\lambda_1 x_0 (A_1 + A_2 + A_3) + \text{sen } h\lambda_1 x_0 (B_1 + B_2 + B_3) \right\} - \\
& - Yc_0 \left\{ 3A' \cos h\lambda_0 x_0 + 3B' \text{sen } h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.70)
\end{aligned}$$

Por las ecuaciones (3.9) y (3.10) se sabe que:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0$$

$$B_1 + B_2 + B_3 = 0$$

Por lo tanto la ecuación (3.70), queda:

$$\frac{3A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{3B' \operatorname{cos} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} = -Y_{c0} \left\{ 3A' \operatorname{cos} h\lambda_0 x_0 + 3B' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.71)$$

Despejando A' se llega al siguiente resultado:

$$A' = -B' \frac{\frac{\operatorname{cos} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} \operatorname{cos} h\lambda_0 x_0} \quad (3.72)$$

Reemplazando (3.72) en las ecuaciones (3.69) y despejando  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$  se obtiene como resultado:

$$A_1 = -B_1 \frac{\frac{\operatorname{cos} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{cos} h\lambda_1 x_0} \quad (3.73.a)$$

$$A_2 = -B_2 \frac{\frac{\operatorname{cos} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{cos} h\lambda_1 x_0} \quad (3.73.b)$$

$$A_3 = -B_3 \frac{\frac{\operatorname{cos} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{cos} h\lambda_1 x_0} \quad (3.73.c)$$

Los voltajes en el terminal de recepción ( $x = x_0$ ) de acuerdo a la ecuación general (2.95) son:

$$E_1(x_0, s) = B_1 \cos h\lambda_1 x_0 + A_1 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 + B' \cos h\lambda_0 x_0 + A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \quad (3.74.a)$$

$$E_2(x_0, s) = B_2 \cos h\lambda_1 x_0 + A_2 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 + B' \cos h\lambda_0 x_0 + A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \quad (3.74.b)$$

$$E_3(x_0, s) = B_3 \cos h\lambda_1 x_0 + A_3 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 + B' \cos h\lambda_0 x_0 + A' \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \quad (3.74.c)$$

Reemplazando los valores de las constantes obtenidas, en las ecuaciones (3.74):

$$E_1(x_0, s) = B_1 \cos h\lambda_1 x_0 - B_1 \frac{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} \cos h\lambda_1 x_0} \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0$$

$$+ B' \cos h\lambda_0 x_0 - B' \frac{\frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} \cos h\lambda_0 x_0} \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \quad (3.75)$$

Luego de realizar las operaciones indicadas y agrupar términos, la ecuación (3.75) se convierte en:

$$E_1(x_0, s) = \frac{B_1}{\cos h\lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}} + \frac{B'}{\cos h\lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \frac{\operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L}} \quad (3.76.a)$$

Por analogía para las otras fases:

$$E_2(x_0, s) = \frac{B_2}{\cos h\lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1} \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}}} + \frac{B'}{\cos h\lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0} \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L}}} \quad (3.76.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{B_3}{\cos h\lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1} \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}}} + \frac{B'}{\cos h\lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0} \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L}}} \quad (3.76.c)$$

Reemplazando los valores obtenidos de  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B'$  se obtiene como resultado:

$$E_1(x_0, s) = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h\lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1} \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}}} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h\lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0} \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L}}} \quad (3.77.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h\lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1} \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L}}} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h\lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0} \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L}}} \quad (3.77.b)$$

$$\begin{aligned}
 E_3(x_0, s) = & \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{R_L + S L_L}} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{R_L + S L_L}}
 \end{aligned}
 \tag{3.77.c}$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44) y (3.45) en (3.77) y si además se recuerda que

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \Omega_1$$

$$\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \Omega_0$$

se obtienen los siguientes resultados:

$$\begin{aligned}
 E_1(x_0, s) = & \frac{S}{(s^2 + w^2)(\cos h \lambda_1 x_0 + \Omega_1 \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{R_L + S L_L})} \text{VAL1} + \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2)(\cos h \lambda_1 x_0 + \Omega_1 \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{R_L + S L_L})} \text{VAL2} + \\
 & + \frac{S}{(s^2 + w^2)(\cos h \lambda_0 x_0 + \Omega_0 \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{R_L + S L_L})} \text{VAL3} + \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2)(\cos h \lambda_0 x_0 + \Omega_0 \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{R_L + S L_L})} \text{VAL8}
 \end{aligned}
 \tag{3.78.a}$$

$$\begin{aligned}
 E_2(x_0, s) = & \frac{S}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_1 x_0 + \frac{\Omega_1 \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL3} + \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_1 x_0 + \frac{\Omega_1 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL4} + \\
 & + \frac{S}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_0 x_0 + \frac{\Omega_0 \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL7} + \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_0 x_0 + \frac{\Omega_0 \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL8} \quad (3.78.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 E_3(x_0, s) = & \frac{S}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_1 x_0 + \frac{\Omega_1 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL5} + \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_1 x_0 + \frac{\Omega_1 \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL6} + \\
 & + \frac{S}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_0 x_0 + \frac{\Omega_0 \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL7} + \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2) \left( \cos h\lambda_0 x_0 + \frac{\Omega_0 \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \right)} \text{ VAL8}
 \end{aligned}$$

Quando la línea terminada en carga R-L se energiza desde una barra in finita las ecuaciones obtenidas, permiten calcular el voltaje en cada fase y vienen dadas en dominio de frecuencia.

La estructura de estas ecuaciones es similar a la de las ecuaciones obtenidas anteriormente para el caso de energización en vacío; hay una componente de secuencia positiva y una componente de secuencia cero que aparece cuando hay un desbalance en el sistema.

Se nota también que estas ecuaciones pueden ser utilizadas para energización en vacío; reemplazando simplemente

$$\frac{1}{R_L + SL_L} = 0$$

o bien, pueden analizarse casos en los cuales la carga conectada a la línea sea puramente resistiva o puramente inductiva; reemplazando por cero la inductancia  $L_L$  o la resistencia  $R_L$ , respectivamente.

### 3.1.3. Voltajes al energizar una línea en vacío desde un generador real

#### 3.1.3.1. Determinación de las condiciones de borde y cálculo de las constantes

Un caso más real es aquel en el cual se considera la impedancia del generador, que generalmente es una reactancia inductiva, pero para generalizar el estudio se va a considerar que dicha impedancia está constituida de una resistencia en serie con una reactancia inductiva.

El circuito equivalente se presenta en la figura 3.4.

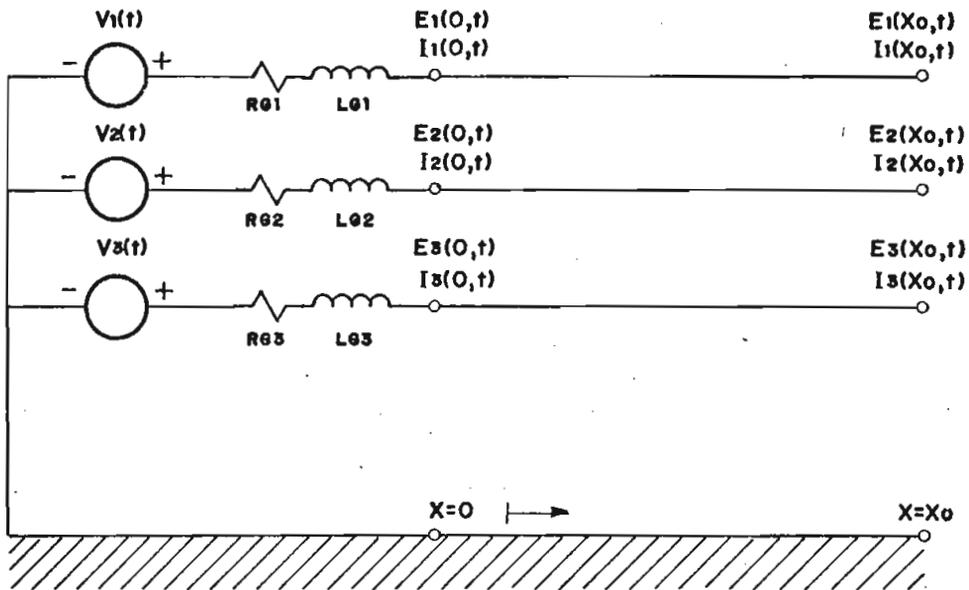


Fig. 3.4. Línea trifásica con el terminal de recepción abierto y el terminal de envío conectado a un generador con impedancia serie.

En este caso no se conoce ninguna condición de borde en el terminal de envío; pero si se conocen los voltajes que están presentes antes de la impedancia del generador, con los cuales se plantea la siguiente relación:

$$[V(t)] = [Lg] \frac{d}{dt} [I_o(t)] + [Rg] [I_o(t)] + [E_o(t)] \quad (3.79)$$

Donde:

$[V(t)]$  es el vector de los voltajes a la salida del generador.

$[E_o(t)]$  es el vector de los voltajes en el terminal de envío ( $x=0$ )

$[I_0(t)]$  es el vector de las corrientes en el terminal de envío ( $x = 0$ )

$[Lg]$  es la matriz inductancia del generador y tiene la forma:<sup>1</sup>

$$[Lg] = \begin{bmatrix} Lg_1 & 0 & 0 \\ 0 & Lg_2 & 0 \\ 0 & 0 & Lg_3 \end{bmatrix}$$

$[Rg]$  es la matriz resistencia del generador y tiene la forma:

$$[Rg] = \begin{bmatrix} Rg_1 & 0 & 0 \\ 0 & Rg_2 & 0 \\ 0 & 0 & Rg_3 \end{bmatrix}$$

Si se aplica la transformada de Laplace en la ecuación (3.79) se obtiene una ecuación en dominio de frecuencia, de la forma:

$$[V(s)] = [Lg] S [I_0(s)] + [Rg] [I_0(s)] + [E_0(s)] \quad (3.80)$$

de donde:

$$[E_0(s)] = [V(s)] - [Rg + s Lg] [I_0(s)] \quad (3.81)$$

Considerando:

$$Rg_1 = Rg_2 = Rg_3 = Rg \quad (3.82.a)$$

$$Lg_1 = Lg_2 = Lg_3 = Lg \quad (3.82.b)$$

la ecuación (3.81) en forma desarrollada es:

$$E_1(o,s) = V_1(s) - (Rg + sLg) I_1(o,s) \quad (3.83.a)$$

$$E_2(o,s) = V_2(s) - (Rg + sLg) I_2(o,s) \quad (3.83.b)$$

$$E_3(o,s) = V_3(s) - (Rg + sLg) I_3(o,s) \quad (3.83.c)$$

Si en la ecuación general de corrientes (2.119) se reemplaza  $x = 0$ , y se aplican las igualdades (3.20) y (3.21), ésta toma la forma:

$$[I_0(s)] = - Yc_1 [A] - Yc_0 [v] A' \quad (3.84)$$

Que en forma desarrollada es:

$$I_1(o,s) = - Yc_1 A_1 - Yc_0 A' \quad (3.85.a)$$

$$I_2(o,s) = - Yc_1 A_2 - Yc_0 A' \quad (3.85.b)$$

$$I_3(o,s) = - Yc_1 A_3 - Yc_0 A' \quad (3.85.c)$$

Reemplazando las ecuaciones (3.85) en (3.83):

$$E_1(o,s) = V_1(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_1 - Yc_0 A') \quad (3.86.a)$$

$$E_2(o,s) = V_2(s) - (Rg + SLg)(- Yc_2 A_2 - Yc_0 A') \quad (3.86,b)$$

$$E_3(o,s) = V_3(s) - (Rg + SLg)(- Yc_3 A_3 - Yc_0 A') \quad (3.86.c)$$

Por otro lado, si en la ecuación general de voltajes, se reemplaza  $x = 0$ , ésta toma la forma:

$$[E_0(s)] = [B] + [v] B' \quad (3.87)$$

Que en forma desarrollada es:

$$E_1(o,s) = B_1 + B' \quad (3.88.a)$$

$$E_2(o,s) = B_2 + B' \quad (3.88.b)$$

$$E_3(o,s) = B_3 + B' \quad (3.88.c)$$

Iguando las ecuaciones (3.86) y (3.88):

$$V_1(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_1 - Yc_0 A') = B_1 + B' \quad (3.89.a)$$

$$V_2(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_2 - Yc_0 A') = B_2 + B' \quad (3.89.b)$$

$$V_3(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_3 - Yc_0 A') = B_3 + B' \quad (3.89.c)$$

Si se suman las ecuaciones (3.89) entre si:

$$V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) - (Rg + SLg) \left\{ - Yc_1(A_1 + A_2 + A_3) - Yc_0 3A' \right\} =$$

$$= B_1 + B_2 + B_3 + 3 B'$$

Por las ecuaciones (3.9) y (3.10) se sabe que:

$$A_1 + A_2 + A_3 = 0 \quad y \quad B_1 + B_2 + B_3 = 0$$

Por lo tanto:

$$V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) + (Rg + SLg) Yc_0 3 A' = 3 B'$$

Al despejar B' se obtiene:

$$B' = \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} + A' Yc_0 (Rg + SLg) \quad (3.90)$$

En el terminal de recepción se plantea la siguiente condición de borde:

$$\text{para } x = x_0, \quad t \geq 0 \quad I(x_0, s) = 0 \quad (3.91)$$

Reemplazando  $x = x_0$  en la ecuación general de corrientes (2.119):

$$\begin{aligned}
 [ Ix_0(s) ] &= - Yc_1 \left\{ [ A ] \cos h \lambda_1 x_0 + [ B ] \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} \\
 &\quad - Yc_0 [v] \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} = 0 \quad (3.92)
 \end{aligned}$$

Que en forma desarrollada es:

$$\begin{aligned}
 &- Yc_1 \left\{ A_1 \cos h \lambda_1 x_0 + B_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} + \\
 &- Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} = 0 \quad (3.93.a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- Yc_1 \left\{ A_2 \cos h \lambda_1 x_0 + B_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} + \\
 &- Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} = 0 \quad (3.93.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &- Yc_1 \left\{ A_3 \cos h \lambda_1 x_0 + B_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} + \\
 &- Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} = 0 \quad (3.93.c)
 \end{aligned}$$

Sumando entre si las ecuaciones (2.93) se tiene:

$$\begin{aligned}
 &- Yc_1 \left\{ \cos h \lambda_1 x_0 (A_1 + A_2 + A_3) + \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 (B_1 + B_2 + B_3) \right\} \\
 &- Yc_0 \left\{ 3 A' \cos h \lambda_0 x_0 + 3 B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} = 0 \quad (3.94)
 \end{aligned}$$

Por las igualdades (3.9) y (3.10), la ecuación (3.94) queda:

$$- Yc_0 \left\{ 3A' \cos h \lambda_0 x_0 + 3B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} = 0 \quad (3.95)$$

Al despejar  $B'$  en (3.95):

$$B' = - A' \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{\operatorname{sech} h \lambda_0 x_0} \quad (3.96)$$

Iguando (3.96) y (3.90):

$$\frac{V_1(s)+V_2(s)+V_3(s)}{3} + A' Y_{c_0}(Rg + SLg) = - A' \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0} \quad (3.97)$$

Si en (3.97) se despeja  $A'$ , el resultado es:

$$A' = - \frac{V_1(s)+V_2(s)+V_3(s)}{3} \frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0 + \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 Y_{c_0}(Rg + SLg)} \quad (3.98)$$

Al reemplazar  $A'$  en (3.96):

$$B' = \frac{V_1(s)+V_2(s)+V_3(s)}{3} \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0 + \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 Y_{c_0}(Rg + SLg)} \quad (3.99)$$

Despejando  $A'$  en la ecuación (3.96):

$$A' = - B' \frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.100)$$

Si en las ecuaciones (3.89) se despeja  $B_1, B_2, B_3$  y se aplica la igualdad (3.100) se obtiene:

$$B_1 = V_1(s) + (Rg + SLg) Y_{c_1} A_1 - \left\{ (Rg + SLg) Y_{c_0} \frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} + 1 \right\} B' \quad (3.101.a)$$

$$B_2 = V_2(s) + (Rg + SLg)Yc_1 A_2 - \left\{ (Rg + SLg)Yc_0 \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} + 1 \right\} B' \quad (3.101.b)$$

$$B_3 = V_3(s) + (Rg + SLg)Yc_1 A_3 - \left\{ (Rg + SLg)Yc_0 \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} + 1 \right\} B' \quad (3.101.c)$$

Al reemplazar (3.99) en (3.101):

$$B_1 = V_1(s) + (Rg + SLg) Yc_1 A_1 - \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \quad (3.102.a)$$

$$B_2 = V_2(s) + (Rg + SLg) Yc_1 A_2 - \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \quad (3.102.b)$$

$$B_3 = V_3(s) + (Rg + SLg) Yc_1 A_3 - \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \quad (3.102.c)$$

Reagrupando términos:

$$B_1 = (Rg + SLg) Yc_1 A_1 + \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \quad (3.103.a)$$

$$B_2 = (Rg + SLg) Yc_2 A_2 + \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \quad (3.103.b)$$

$$B_3 = (Rg + SLg) Yc_3 A_3 + \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \quad (3.103.c)$$

Si en las ecuaciones (3.93) se aplica la igualdad (3.100):

$$- Yc_1 \left\{ A_1 \cos h \lambda_1 x_0 + B_1 \text{sen } h \lambda_1 x_0 \right\} = 0 \quad (3.104.a)$$

$$- Yc_1 \left\{ A_2 \cos h \lambda_1 x_0 + B_2 \text{sen } h \lambda_1 x_0 \right\} = 0 \quad (3.104.b)$$

$$- Yc_1 \left\{ A_3 \cos h \lambda_1 x_0 + B_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} = 0 \quad (3.105.c)$$

De las ecuaciones (3.104) se puede obtener como resultado:

$$B_1 = - A_1 \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} \quad (3.106.a)$$

$$B_2 = - A_2 \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} \quad (3.106.b)$$

$$B_3 = - A_3 \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} \quad (3.106.c)$$

Al igualar (3.103) y (3.106) se obtiene:

$$(Rg + SLg)Yc_1 A_1 + \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} = - A_1 \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} \quad (3.107.a)$$

$$(Rg + SLg)Yc_1 A_2 + \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} = - A_2 \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} \quad (3.107.b)$$

$$(Rg + SLg)Yc_1 A_3 + \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} = - A_3 \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} \quad (3.107.c)$$

Si en (3.107) se despeja  $A_1, A_2, A_3$ :

$$A_1 = - \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0 + \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \cdot Yc_1(Rg+SLg)} \quad (3.108.a)$$

$$A_2 = - \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{\operatorname{Sen} h \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0 + \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \cdot Yc_1(Rg+SLg)} \quad (3.108.b)$$

$$A_3 = - \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{\operatorname{sen} h\lambda_1 x_0}{\cos h\lambda_1 x_0 + \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \cdot Y_{c_1} (R_g + SL_g)} \quad (3.108.c)$$

Al reemplazar (3.108) en (3.106):

$$B_1 = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{\cos h\lambda_1 x_0 + \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \cdot Y_{c_1} (R_g + SL_g)} \quad (3.109.a)$$

$$B_2 = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{\cos h\lambda_1 x_0 + \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \cdot Y_{c_1} (R_g + SL_g)} \quad (3.109.b)$$

$$B_3 = \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{\cos h\lambda_1 x_0 + \operatorname{sen} h\lambda_1 x_0 \cdot Y_{c_1} (R_g + SL_g)} \quad (3.109.c)$$

Si en (3.106) se despeja  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ :

$$A_1 = - B_1 \frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} \quad (3.110.a)$$

$$A_2 = - B_2 \frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} \quad (3.110.b)$$

$$A_3 = - B_3 \frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} \quad (3.110.c)$$

Los voltajes en el terminal de recepción ( $x = x_0$ ) de acuerdo con la ecuación general (2.95) son:

$$E_1(x_0, s) = B_1 \cos h \lambda_1 x_0 + A_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \quad (3.111.a)$$

$$E_2(x_0, s) = B_2 \cos h \lambda_1 x_0 + A_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \quad (3.111.b)$$

$$E_3(x_0, s) = B_3 \cos h \lambda_1 x_0 + A_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \quad (3.111.c)$$

Al reemplazar (3.100) y (3.110) en (3.111) y reagrupar términos se tiene:

$$E_1(x_0, s) = B_1 \frac{\cos h^2 \lambda_1 x_0 - \operatorname{sen} h^2 \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} + B' \frac{\cos h^2 \lambda_0 x_0 - \operatorname{sen} h^2 \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.112.a)$$

$$E_2(x_0, s) = B_2 \frac{\cos h^2 \lambda_1 x_0 - \operatorname{sen} h^2 \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} + B' \frac{\cos h^2 \lambda_0 x_0 - \operatorname{sen} h^2 \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.112.b)$$

$$E_3(x_0, s) = B_3 \frac{\cos h^2 \lambda_1 x_0 - \operatorname{sen} h^2 \lambda_1 x_0}{\cos h \lambda_1 x_0} + B' \frac{\cos h^2 \lambda_0 x_0 - \operatorname{sen} h^2 \lambda_0 x_0}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.112.c)$$

Pero,  $\cos h^2 x - \operatorname{sen} h^2 x = 1$  (3.113)

por lo tanto:

$$E_1(x_0, s) = \frac{B_1}{\cos h \lambda_1 x_0} + \frac{B'}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.114.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{B_2}{\cos h \lambda_1 x_0} + \frac{B'}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.114.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{B_3}{\cos h \lambda_1 x_0} + \frac{B'}{\cos h \lambda_0 x_0} \quad (3.114.c)$$

Reemplazando los valores de  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $B_3$  y  $B'$  se obtiene como resultado:

$$E_1(x_0, s) = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} (Rg+SLg) \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} (Rg+SLg) \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0} \quad (3.115.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} (Rg+SLg) \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} (Rg+SLg) \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0} \quad (3.115.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_1 x_0 + \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} (Rg+SLg) \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{\cos h \lambda_0 x_0 + \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} (Rg+SLg) \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0} \quad (3.115.c)$$

Finalmente reemplazando (3.42), (3.43), (3.44) y (3.45) en (3.115) y

si se recuerda que:

$$\sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}} \approx \sqrt{\frac{L_1}{C_1}} = \Omega_1$$

$$\sqrt{\frac{Z_0}{Y_0}} \approx \sqrt{\frac{L_0}{C_0}} = \Omega_0$$

se obtiene como resultado:

$$\begin{aligned}
 E_1(x_0, s) = & \frac{s}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \cos h \lambda_1 x_0 \right\}} \quad \text{VAL1} \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \cos h \lambda_1 x_0 \right\}} \quad \text{VAL 2} \\
 & + \frac{s}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} + \cos h \lambda_0 x_0 \right\}} \quad \text{VA17} \\
 & + \frac{w}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} + \cos h \lambda_0 x_0 \right\}} \quad \text{VAL8}
 \end{aligned}$$

(3.116.a)

$$E_2(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \cos h \lambda_1 x_0 \right\}} \quad \text{VAL3}$$

$$+ \frac{w}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \cos h \lambda_1 x_0 \right\}} \quad \text{VAL4}$$

$$+ \frac{s}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} + \cos h \lambda_0 x_0 \right\}} \quad \text{VAL7}$$

$$+ \frac{w}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} + \cos h \lambda_0 x_0 \right\}} \quad \text{VAL8}$$

(3.116.b)

$$E_3(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \cos h \lambda_1 x_0 \right\}} \quad \text{VAL5}$$

$$+ \frac{w}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \cos h \lambda_1 x_0 \right\}} \quad \text{VAL6}$$

$$+ \frac{s}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} + \cos h \lambda_0 x_0 \right\}} \quad \text{VAL7}$$

$$+ \frac{w}{(s^2 + w^2) \left\{ (sLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} + \cos h \lambda_0 x_0 \right\}} \quad \text{VAL8}$$

(3.116.c)

Las ecuaciones (3.116) permiten determinar el voltaje de cada una de las fases en el terminal de recepción de la línea; la respuesta vie

ne dada en dominio de frecuencia.

Su estructura es similar a la de las ecuaciones obtenidas para los casos anteriores, con una componente de secuencia positiva propia para cada fase y una componente de secuencia cero, igual para las tres fases que aparece solo cuando se produce un desbalance en el sistema.

Estas ecuaciones ofrecen algunas alternativas de estudio: si se reemplaza  $L_g = 0$  ó  $R_g = 0$  permiten analizar los casos en los cuales la línea se energiza desde una fuente resistiva ó inductiva, respectivamente; o bien, si  $L_g = 0$  y  $R_g = 0$  corresponde al caso en que la línea se energiza desde una barra infinita.

#### 3.1.4. Voltajes al energizar una línea con carga desde un generador real

En el presente caso se considera que la carga es del tipo R - L y la impedancia del generador compuesta de una resistencia en serie con una reactancia inductiva.

El circuito equivalente se muestra en la figura 3.5.

En este caso no se conoce ninguna condición de borde, ni en el terminal de envío, ni en el terminal de recepción; las únicas magnitudes conocidas son los voltajes antes de la impedancia del generador.

En el terminal de envío se presenta la siguiente relación:

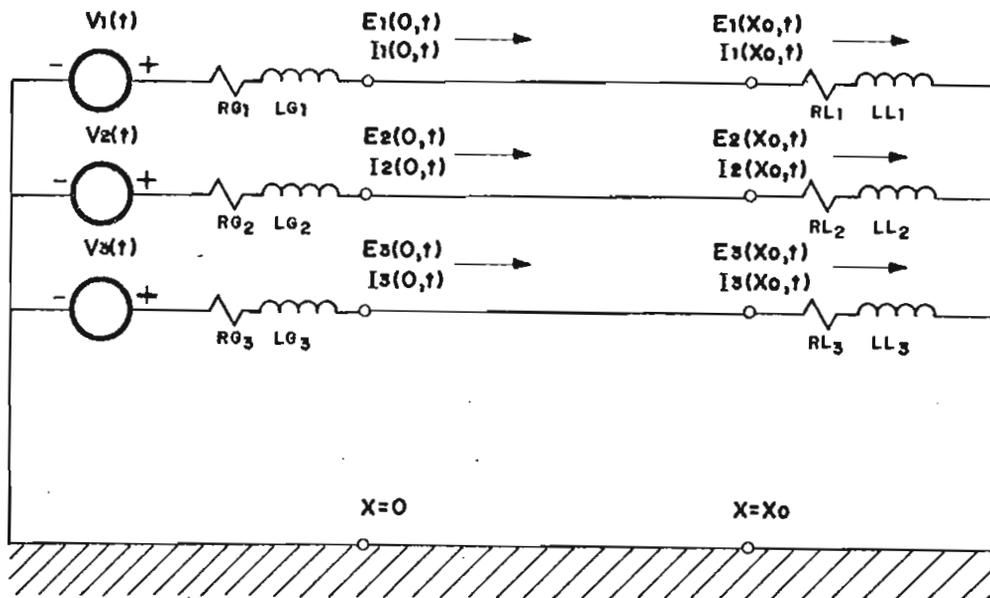


Fig. 3.5. Línea trifásica con el terminal de recepción conectado a una carga R - L y el terminal de envío asociado con un generador.

$$[V(t)] = [Lg] \frac{d}{dt} [I_0(t)] + [Rg][I_0(t)] + [E_0(t)]$$

el significado de cada matriz se dió en la sección 3.1.3.

Expresando la ecuación anterior en dominio de frecuencia:

$$[V(s)] = [Lg] s [I_0(s)] + [Rg][I_0(s)] + [E_0(s)]$$

despejando

$$[E_0(s)] = [V(s)] - [Rg + sLg][I_0(s)] \quad (3.117)$$

Considerando:

$$Rg_1 = Rg_2 = Rg_3 = Rg$$

$$Lg_1 = Lg_2 = Lg_3 = Lg$$

La ecuación (3.117) en forma desarrollada es:

$$E_1(o,s) = V_1(s) - (Rg + sLg) I_1(o,s) \quad (3.118.a)$$

$$E_2(o,s) = V_2(s) - (Rg + sLg) I_2(o,s) \quad (3.118.b)$$

$$E_3(o,s) = V_3(s) - (Rg + sLg) I_3(o,s) \quad (3.118.c)$$

Al evaluar la ecuación general de corrientes (2.119) para  $x = 0$  y aplicar las igualdades (3.20) y (3.21) se tiene:

$$[ I_0(s) ] = - Yc_1 [ A ] - Yc_0 [ v ] A' \quad (3.119)$$

que en forma desarrollada es:

$$I_1(o,s) = - Yc_1 A_1 - Yc_0 A' \quad (3.120.a)$$

$$I_2(o,s) = - Yc_1 A_2 - Yc_0 A' \quad (3.120.b)$$

$$I_3(o,s) = - Yc_1 A_3 - Yc_0 A' \quad (3.120.c)$$

Reemplazando (3.120) en (3.118):

$$E_1(o,s) = V_1(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_1 - Yc_0 A') \quad (3.121.a)$$

$$E_2(o,s) = V_2(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_2 - Yc_0 A') \quad (3.121.b)$$

$$E_3(o,s) = V_3(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_3 - Yc_0 A') \quad (3.121.c)$$

Si se evalúa la ecuación general de voltajes (2.95) para  $x = 0$  se obtiene:

$$[ E_0(s) ] = [ B ] + [ v ] B' \quad (3.122)$$

en forma desarrollada es:

$$E_1(o,s) = B_1 + B' \quad (3.123.a)$$

$$E_2(o,s) = B_2 + B' \quad (3.123.b)$$

$$E_3(o,s) = B_3 + B' \quad (3.123.c)$$

Iguando las ecuaciones (3.121) y (3.123):

$$V_1(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_1 - Yc_0 A') = B_1 + B' \quad (3.124.a)$$

$$V_2(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_2 - Yc_0 A') = B_2 + B' \quad (3.124.b)$$

$$V_3(s) - (Rg + SLg)(- Yc_1 A_3 - Yc_0 A') = B_3 + B' \quad (3.124.c)$$

Sumando entre sí las ecuaciones (3.124):

$$V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) - (Rg + SLg) \left\{ - Yc_1 (A_1 + A_2 + A_3) - Yc_0 3A' \right\} =$$

$$= (B_1 + B_2 + B_3) + 3 B' \quad (3.125)$$

Como  $A_1 + A_2 + A_3 = 0$  y  $B_1 + B_2 + B_3 = 0$

$$V_1(s) + V_2(s) + V_3(s) + (Rg + SLg) Yc_0 3 A' = 3 B' \quad (3.126)$$

Despejando  $B'$ :

$$B' = \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} + A' Yc_0 (Rg + SLg) \quad (3.127)$$

En el terminal de recepción se presenta la siguiente relación:

$$[ Ex_0(t) ] = [ Ix_0(t) ] [ R_L ] + [ L_L ] \frac{d}{dt} [ Ix_0(t) ] \quad (3.128)$$

el significado de cada matriz se dió en la sección 3.1.2.

La ecuación (3.128) expresada en dominio de frecuencia toma la forma:

$$[ Ex_0(s) ] = \left\{ [ R_L ] + S [ L_L ] \right\} [ Ix_0(s) ] \quad (3.129)$$

Despejando la corriente:

$$[ I_{x_0}(s) ] = [ R_L + SL_L ]^{-1} [ E_{x_0}(s) ] \quad (3.130)$$

que en forma desarrollada es:

$$I_1(x_0, s) = E_1(x_0, s) / (R_{L_1} + SL_{L_1}) \quad (3.131.a)$$

$$I_2(x_0, s) = E_2(x_0, s) / (R_{L_2} + SL_{L_2}) \quad (3.131.b)$$

$$I_3(x_0, s) = E_3(x_0, s) / (R_{L_3} + SL_{L_3}) \quad (3.131.c)$$

Evaluando la ecuación general de voltajes es (2.95) para  $x = x_0$ :

$$\begin{aligned} E_1(x_0, s) &= A_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B_1 \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 + \\ &+ B' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 \end{aligned} \quad (3.132.a)$$

$$\begin{aligned} E_2(x_0, s) &= A_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B_2 \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 + \\ &+ B' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 \end{aligned} \quad (3.132.b)$$

$$\begin{aligned} E_3(x_0, s) &= A_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B_3 \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 + \\ &+ B' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0 \end{aligned} \quad (3.132.c)$$

Reemplazando (3.132) en (3.131) y considerando:

$$R_{L_1} = R_{L_2} = R_{L_3} = R_L$$

$$L_{L_1} = L_{L_2} = L_{L_3} = L_L$$

se tiene:

$$I_1(x_0, s) = \frac{A_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{B \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{B' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \quad (3.133.a)$$

$$I_2(x_0, s) = \frac{A_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{B \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{B' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \quad (3.133.b)$$

$$I_3(x_0, s) = \frac{A_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{B \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{B' \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} \quad (3.133.c)$$

Por otro lado, si en la ecuación general de corrientes (2.119) se reemplaza  $x = x_0$  y se aplican las igualdades (3.20) y (3.21) se tiene:

$$I_1(x_0, s) = - Yc_1 \left\{ A_1 \cos h \lambda_1 x_0 + B_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} \\ - Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.134.a)$$

$$I_2(x_0, s) = - Yc_1 \left\{ A_2 \cos h \lambda_1 x_0 + B_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} \\ - Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.134.b)$$

$$I_3(x_0, s) = - Yc_1 \left\{ A_3 \cos h \lambda_1 x_0 + B_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} \\ - Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.134.c)$$

Si se igualan las ecuaciones (3.133) y (3.134) se tiene:

$$\frac{1}{R_L + SL_L} \left\{ A_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B_1 \cos h \lambda_1 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 \right\} = \\ - Yc_1 \left\{ A_1 \cos h \lambda_1 x_0 + B_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} - Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.135.a)$$

$$\frac{1}{R_L + SL_L} \left\{ A_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B_2 \cos h \lambda_1 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 \right\} = \\ - Yc_1 \left\{ A_2 \cos h \lambda_1 x_0 + B_2 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} - Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.135.b)$$

$$\frac{1}{R_L + SL_L} \left\{ A_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 + B_3 \cos h \lambda_1 x_0 + A' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 + B' \cos h \lambda_0 x_0 \right\} = \\ - Yc_1 \left\{ A_3 \cos h \lambda_1 x_0 + B_3 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 \right\} - Yc_0 \left\{ A' \cos h \lambda_0 x_0 + B' \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.135.c)$$

Si se suman entre si las ecuaciones (3.135) se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_L + SL_L} \left\{ \text{sen } h\lambda_1 x_0 (A_1 + A_2 + A_3) + \text{cos } h\lambda_1 x_0 (B_1 + B_2 + B_3) + 3A' \text{ sen } h\lambda_0 x_0 \right. \\ \left. + 3B' \text{ cos } h\lambda_0 x_0 \right\} = - Yc_1 \left\{ \text{cos } h\lambda_1 x_0 (A_1 + A_2 + A_3) + \text{sen } h\lambda_1 x_0 (B_1 + B_2 + B_3) \right\} \\ - Yc_0 \left\{ 3A' \text{ cos } h\lambda_0 x_0 + 3B' \text{ sen } h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.136) \end{aligned}$$

Como  $A_1 + A_2 + A_3 = 0$  y  $B_1 + B_2 + B_3 = 0$

La ecuación (3.136) queda:

$$\frac{1}{R_L + SL_L} \left\{ 3A' \text{ sen } h\lambda_0 x_0 + 3B' \text{ cos } h\lambda_0 x_0 \right\} = - Yc_0 \left\{ 3A' \text{ cos } h\lambda_0 x_0 + \right. \\ \left. + 3B' \text{ sen } h\lambda_0 x_0 \right\} \quad (3.137)$$

Al despejar B' en (3.137) se obtiene:

$$B' = - A' \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Yc_0 \text{ cos } h\lambda_0 x_0}{\frac{\text{cos } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Yc_0 \text{ sen } h\lambda_0 x_0} \quad (3.138)$$

Iguando (3.127) y (3.138):

$$\begin{aligned} \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} + A' Yc_0 (Rg + SLg) = \\ - A' \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Yc_0 \text{ cos } h\lambda_0 x_0}{\frac{\text{cos } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Yc_0 \text{ sen } h\lambda_0 x_0} \quad (3.139) \end{aligned}$$

Despejando  $A'$  se tiene:

$$A' = - \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{\frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{c_0} \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{\text{DENO}} \quad (3.140)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \text{DENO} = (SLg + Rg)Y_{c_0} & \left( \frac{\cos h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{c_0} \operatorname{sen} h\lambda_0 x_0 \right) \\ & + \left( \frac{\operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{c_0} \cos h\lambda_0 x_0 \right) \end{aligned} \quad (3.141)$$

Reemplazando (3.140) en (3.138):

$$B' = \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{\frac{\operatorname{sen} h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{c_0} \cos h\lambda_0 x_0}{\text{DENO}} \quad (3.142)$$

Al despejar  $B_1, B_2, B_3$  en las ecuaciones (3.124) queda:

$$B_1 = V_1(s) - (SLg + Rg)(- Y_{c_1} A_1 - Y_{c_0} A') - B' \quad (3.143.a)$$

$$B_2 = V_2(s) - (SLg + Rg)(- Y_{c_1} A_2 - Y_{c_0} A') - B' \quad (3.143.b)$$

$$B_3 = V_3(s) - (SLg + Rg)(- Y_{c_1} A_3 - Y_{c_0} A') - B' \quad (3.143.c)$$

Si se despeja  $B_1, B_2, B_3$  en las ecuaciones (3.135) se obtienen los siguientes resultados:

$$B_1 = - A_1 \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0}{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0} \quad (3.144.a)$$

$$B_2 = - A_2 \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0}{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0} \quad (3.144.b)$$

$$B_3 = - A_3 \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0}{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0} \quad (3.144.c)$$

Si se iguala (3.143) y (3.144), se despeja  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  y se reemplaza los valores de  $A'$  y  $B'$  obtenidos anteriormente, el resultado es:

$$A_1 = - \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0}{\text{DEN1}} \quad (3.145.a)$$

$$A_2 = - \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0}{\text{DEN1}} \quad (3.145.b)$$

$$A_3 = - \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{\frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0}{\text{DEN1}} \quad (3.145.c)$$

Reemplazando (3.145) en (3.144):

$$B_1 = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0}{\text{DEN1}} \quad (3.146.a)$$

$$B_2 = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0}{\text{DEN1}} \quad (3.146.b)$$

$$B_3 = \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{\frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0}{\text{DEN1}} \quad (3.146.c)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \text{DEN1} = (S1g + Rg) Y_{C1} & \left( \frac{\cos h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h\lambda_1 x_0 \right) + \\ & + \left( \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \cos h\lambda_1 x_0 \right) \end{aligned} \quad (3.147)$$

Regresando a la ecuación general de voltajes, si ésta se evalúa para  $x = x_0$  se tiene:

$$E_1(x_0, s) = A_1 \text{sen } h\lambda_1 x_0 + B_1 \cos h\lambda_1 x_0 + A' \text{sen } h\lambda_0 x_0 + B' \cos h\lambda_0 x_0 \quad (3.148.a)$$

$$E_2(x_0, s) = A_2 \text{sen } h\lambda_1 x_0 + B_2 \cos h\lambda_1 x_0 + A' \text{sen } h\lambda_0 x_0 + B' \cos h\lambda_0 x_0 \quad (3.148.b)$$

$$E_3(x_0, s) = A_3 \text{sen } h\lambda_1 x_0 + B_3 \cos h\lambda_1 x_0 + A' \text{sen } h\lambda_0 x_0 + B' \cos h\lambda_0 x_0 \quad (3.148.c)$$

Al reemplazar en (3.148) los valores de las constantes  $A_1, A_2, A_3, A', B_1, B_2, B_3, B'$  se obtiene el siguiente resultado:

$$E_1(x_0, s) = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \frac{1}{D_1} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{D_0} \quad (3.149.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \frac{1}{D_1} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{D_0} \quad (3.149.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \frac{1}{D_1} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \frac{1}{D_0} \quad (3.149.c)$$

Donde:

$$D_1 = (SLg + Rg) \left( \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \right) + \left( \frac{\Omega_1 \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \cos h \lambda_1 x_0 \right) \quad (3.150)$$

$$D_0 = (SLg + Rg) \left( \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} \right) + \left( \frac{\Omega_0 \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \cos h \lambda_0 x_0 \right) \quad (3.151)$$

Al reemplazar las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44) y (3.45) en (3.149) se tiene:

$$E_1(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2) D_1} \text{VAL1} + \frac{w}{(s^2 + w^2) D_1} \text{VAL2} \\ + \frac{s}{(s^2 + w^2) D_0} \text{VAL7} + \frac{w}{(s^2 + w^2) D_0} \text{VAL8} \quad (3.152.a)$$

$$E_2(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2) D_1} \text{VAL3} + \frac{w}{(s^2 + w^2) D_1} \text{VAL4}$$

$$+ \frac{s}{(s^2 + w^2) D_0} \text{VAL7} + \frac{w}{(s^2 + w^2) D_0} \text{VAL8} \quad (3.152.b)$$

$$E_3(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2) D_1} \text{VAL5} + \frac{w}{(s^2 + w^2) D_1} \text{VAL6}$$

$$+ \frac{s}{(s^2 + w^2) D_0} \text{VAL7} + \frac{w}{(s^2 + w^2) D_0} \text{VAL8} \quad (3.152.c)$$

Las ecuaciones obtenidas (3.152) permiten calcular el voltaje de cada fase, en el terminal de recepción de la línea; la respuesta viene dada en dominio de frecuencia.

Si se pone atención a las ecuaciones (3.150) y (3.151) se nota claramente que éstas contemplan los casos analizados anteriormente en las secciones 3.1.1., 3.1.2. y 3.1.3.

Así:

- Si se introduce como datos:  $L_g = 0$ ,  $R_g = 0$  y además se tiene que

$$\frac{1}{R_L + sL_L} = 0$$

las ecuaciones (3.152) se convierten en las ecuaciones (3.52) obtenidas en la sección 3.1.1.

- Si se introduce como datos :  $I_g = 0$  y  $R_g = 0$  , las ecuaciones (3.152) se convierten en las ecuaciones (3.78) obtenidas en la sección 3.1.2.
- Si se introduce como dato:  $\frac{1}{R_L + sL_L} = 0$ , se tendrían las ecuaciones (3.116) obtenidas en la sección 3.1.3.

Con estos antecedentes, las ecuaciones (3.152) se consideran las ecuaciones generales que abarcan todos los casos estudiados.

## 3.2. CALCULO DE CORRIENTES EN DOMINIO DE FRECUENCIA

### 3.2.1. Corrientes al energizar una línea en vacío desde una barra infinita

Debido a que los interruptores están ubicados en el terminal de envío de la línea, es importante conocer las corrientes que se presentan en este punto, por lo tanto, dentro de esta Tesis se calcularán únicamente las corrientes que se presentan en el terminal de envío ( $x = 0$ ).

Si en la ecuación general de corrientes se reemplaza  $x = 0$  y se consideran las igualdades (3.20) y (3.21) se tiene:

$$[ I_0(s) ] = - Y_{c1} [ A ] - Y_{c0} [ v ] A' \quad (3.153)$$

que en forma desarrollada es:

$$I_1(0,s) = - Y_{C_1} A_1 - Y_{C_0} A' \quad (3.154.a)$$

$$I_2(0,s) = - Y_{C_1} A_2 - Y_{C_0} A' \quad (3.154.b)$$

$$I_3(0,s) = - Y_{C_1} A_3 - Y_{C_0} A' \quad (3.154.c)$$

Como las constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A'$  son las mismas para las ecuaciones de voltaje y corriente; se reemplazan dichas constantes por sus valores respectivos determinados en las ecuaciones (3.19), (3.26) y (3.29) y se obtiene como resultado:

$$I_1(0,s) = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} Y_{C_1} \tan h \lambda_1 x_0 + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} Y_{C_0} \tan h \lambda_0 x_0 \quad (3.155.a)$$

$$I_2(0,s) = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} Y_{C_1} \tan h \lambda_1 x_0 + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} Y_{C_0} \tan h \lambda_0 x_0 \quad (3.155.b)$$

$$I_3(0,s) = \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} Y_{C_1} \tan h \lambda_1 x_0 + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} Y_{C_0} \tan h \lambda_0 x_0 \quad (3.155.c)$$

Si en (3.155) se reemplazan las igualdades (3.42), (3.43), (3.44) y (3.45):

$$\begin{aligned}
 I_1(o,s) &= \frac{s \cdot \text{VAL1}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_1} \tan h \lambda_1 x_0 + \frac{w \cdot \text{VAL2}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_1} \tan h \lambda_1 x_0 \\
 &+ \frac{s \cdot \text{VAL7}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_0} \tan h \lambda_0 x_0 + \frac{w \cdot \text{VAL8}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_0} \tan h \lambda_0 x_0
 \end{aligned} \tag{3.156.a}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(o,s) &= \frac{s \cdot \text{VAL3}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_1} \tan h \lambda_1 x_0 + \frac{w \cdot \text{VAL4}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_1} \tan h \lambda_1 x_0 \\
 &+ \frac{s \cdot \text{VAL7}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_0} \tan h \lambda_0 x_0 + \frac{w \cdot \text{VAL8}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_0} \tan h \lambda_0 x_0
 \end{aligned} \tag{3.156.b}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(o,s) &= \frac{s \cdot \text{VAL5}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_1} \tan h \lambda_1 x_0 + \frac{w \cdot \text{VAL6}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_1} \tan h \lambda_1 x_0 \\
 &+ \frac{s \cdot \text{VAL7}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_0} \tan h \lambda_0 x_0 + \frac{w \cdot \text{VAL8}}{(s^2 + w^2)} Y_{c_0} \tan h \lambda_0 x_0
 \end{aligned} \tag{3.156.c}$$

$$\text{Como: } Y_{c_1} = \sqrt{\frac{Y_1}{Z_1}} = \Omega_1^{-1} \quad ; \quad Y_{c_0} = \sqrt{\frac{Y_0}{Z_0}} = \Omega_0^{-1} \tag{3.157}$$

$$\text{y } \tan h \lambda_1 x_0 = \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\text{cos } h \lambda_1 x_0} \quad ; \quad \tan h \lambda_0 x_0 = \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\text{cos } h \lambda_0 x_0} \tag{3.158}$$

Las ecuaciones (3.156) se convierten en:

$$\begin{aligned}
 I_1(o,s) = & \frac{s \cdot \text{sen } h\lambda_1 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_1 \cos h\lambda_1 x_0} \text{ VAL1} + \frac{w \cdot \text{sen } h\lambda_1 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_1 \cos h\lambda_1 x_0} \text{ VAL2} \\
 & + \frac{s \cdot \text{sen } h\lambda_0 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_0 \cos h\lambda_0 x_0} \text{ VAL7} + \frac{w \cdot \text{sen } h\lambda_0 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_0 \cos h\lambda_0 x_0} \text{ VAL8}
 \end{aligned} \quad (3.159.a)$$

$$\begin{aligned}
 I_2(o,s) = & \frac{s \cdot \text{sen } h\lambda_1 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_1 \cos h\lambda_1 x_0} \text{ VAL3} \quad \frac{w \cdot \text{sen } h\lambda_1 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_1 \cos h\lambda_1 x_0} \text{ VAL4} \\
 & + \frac{s \cdot \text{sen } h\lambda_0 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_0 \cos h\lambda_0 x_0} \text{ VAL7} \quad \frac{w \cdot \text{sen } h\lambda_0 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_0 \cos h\lambda_0 x_0} \text{ VAL8}
 \end{aligned} \quad (3.159.b)$$

$$\begin{aligned}
 I_3(o,s) = & \frac{s \cdot \text{sen } h\lambda_1 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_1 \cos h\lambda_1 x_0} \text{ VAL5} \quad \frac{w \cdot \text{sen } h\lambda_1 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_1 \cos h\lambda_1 x_0} \text{ VAL6} \\
 & + \frac{s \cdot \text{sen } h\lambda_0 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_0 \cos h\lambda_0 x_0} \text{ VAL7} \quad \frac{w \cdot \text{sen } h\lambda_0 x_0}{(s^2+w^2)\Omega_0 \cos h\lambda_0 x_0} \text{ VAL8}
 \end{aligned} \quad (3.159.c)$$

Las ecuaciones (3.159) permiten calcular en dominio de frecuencia las corrientes en el terminal de envío de la línea, cuando ésta se energiza en vacío desde una barra infinita.

### 3.2.2. Corrientes al energizar una línea con carga desde una barra finita

Al reemplazar en la ecuación (3.154) los valores de constantes  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$ ,  $A'$  determinados en la sección 3.1.2. se tiene:

$$\begin{aligned}
 I_1(o,s) = & \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} Y_{C_1} \frac{\frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_1} \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_1} \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} Y_{C_0} \frac{\frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_0} \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_0} \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.160.a}$$

$$\begin{aligned}
 I(o,s) = & \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} Y_{C_1} \frac{\frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_1} \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_1} \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} Y_{C_0} \frac{\frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_0} \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_0} \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.160.b}$$

$$\begin{aligned}
 I(o,s) = & \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} Y_{C_1} \frac{\frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_1} \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_1} \operatorname{cos} h \lambda_1 x_0} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} Y_{C_0} \frac{\frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_0} \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\frac{\operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C_0} \operatorname{cos} h \lambda_0 x_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.160.c}$$

Si en (3.160) se reemplazan las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44) - (3.45), (3.157) y (3.158) se tiene:

$$I_1(o,s) = \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL1} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL2} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL7}$$

$$+ \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL8} \quad (3.161.a)$$

$$I_2(o,s) = \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL3} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL4} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL7}$$

$$+ \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL8} \quad (3.161.b)$$

$$I_3(o,s) = \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL5} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL6} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL7}$$

$$+ \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL8} \quad (3.161.c)$$

Donde:

$$G_1 = \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \quad (3.162)$$

$$G_0 = \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} \quad (3.163)$$

$$H_1 = \frac{\Omega_1}{R_L + SL_L} \text{sen } h \lambda_1 x_0 + \cos h \lambda_1 x_0 \quad (3.164)$$

$$H_0 = \frac{\Omega_0}{R_L + SL_L} \text{ sen } h \lambda_0 x_0 + \text{cos } h \lambda_0 x_0 \quad (3.165)$$

Las ecuaciones (3.161) permiten calcular la corriente en el terminal de envío para cada una de las fases. La respuesta viene dada en do minio de frecuencia.

### 3.2.3. Corrientes al energizar una línea de vacío desde un generador real

Si en las ecuaciones (3.154) se reemplazan los valores de las constan tes obtenidos en la sección 3.1.3. se tiene:

$$I_{1(0,s)} = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \cdot Y_{C_1} \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{\text{cos } h\lambda_1 x_0 + \text{sen } h\lambda_1 x_0 \cdot Y_{C_1}(Rg + SLg)}$$

$$+ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \cdot Y_{C_0} \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{\text{cos } h\lambda_0 x_0 + \text{sen } h\lambda_0 x_0 \cdot Y_{C_0}(Rg + SLg)}$$

(3.166.a)

$$I_{2(0,s)} = \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \cdot Y_{C_1} \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{\text{cos } h\lambda_1 x_0 + \text{sen } h\lambda_1 x_0 \cdot Y_{C_1}(Rg + SLg)}$$

$$+ \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \cdot Y_{C_0} \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{\text{cos } h\lambda_0 x_0 + \text{sen } h\lambda_0 x_0 \cdot Y_{C_0}(Rg + SLg)}$$

(3.166.b)

$$\begin{aligned}
 I_3(o,s) = & \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \cdot Yc_1 \frac{\text{sen } h\lambda_1 x_0}{\cos h\lambda_1 x_0 + \text{sen } h\lambda_1 x_0 \cdot Yc_1 (Rg+SLg)} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \cdot Yc_0 \frac{\text{sen } h\lambda_0 x_0}{\cos h\lambda_0 x_0 + \text{sen } h\lambda_0 x_0 \cdot Yc_0 (Rg+SLg)}
 \end{aligned}
 \tag{3.166.c}$$

Reemplazando en (3.166) las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44), (3.45) (3.157) y (3.158) se tiene:

$$\begin{aligned}
 I_1(o,s) = & \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL1} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL2} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL7} \\
 & + \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL8}
 \end{aligned}
 \tag{3.167.a}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(o,s) = & \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL3} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL4} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL7} \\
 & + \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL8}
 \end{aligned}
 \tag{3.167.b}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(o,s) = & \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL5} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)H_1} \text{VAL6} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL7} \\
 & + \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)H_0} \text{VAL8}
 \end{aligned}
 \tag{3.167.c}$$

Pero en este caso:

$$G_1 = \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \quad (3.168)$$

$$G_0 = \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_0} \quad (3.169)$$

$$H_1 = (SLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} + \text{cos } h \lambda_1 x_0 \quad (3.170)$$

$$H_0 = (SLg + Rg) \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_0} + \text{cos } h \lambda_0 x_0 \quad (3.171)$$

Las ecuaciones (3.167) permiten calcular la corriente para  $x = 0$  en cada fase. La respuesta viene dada en dominio de frecuencia.

### 3.2.4. Corrientes al energizar una línea con carga desde un generador real

Al reemplazar los valores de las constantes  $A_1, A_2, A_3, A'$  obtenidos en la sección 3.1.4. en la ecuación (3.154), el resultado es:

$$I_1(0,s) = \frac{2V_1(s) - V_2(s) - V_3(s)}{3} \cdot Y_{C1} \frac{\frac{\text{cos } h\lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \text{sen } h \lambda_1 x_0}{\text{DEN}_1} + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \cdot Y_{C0} \frac{\frac{\text{cos } h\lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C0} \text{sen } h \lambda_0 x_0}{\text{DEN}_0} \quad (3.172.a)$$

$$\begin{aligned}
 I_2(o,s) = & \frac{2V_2(s) - V_1(s) - V_3(s)}{3} \cdot Y_{C1} \frac{\frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\text{DEN}_1} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \cdot Y_{C0} \frac{\frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C0} \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\text{DEN}_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.172.b}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(o,s) = & \frac{2V_3(s) - V_1(s) - V_2(s)}{3} \cdot Y_{C1} \frac{\frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C1} \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0}{\text{DEN}_1} \\
 & + \frac{V_1(s) + V_2(s) + V_3(s)}{3} \cdot Y_{C0} \frac{\frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + Y_{C0} \operatorname{sen} h \lambda_0 x_0}{\text{DEN}_0}
 \end{aligned}
 \tag{3.172.c}$$

Reemplazando en (3.172) las ecuaciones (3.42), (3.43), (3.44), (3.45) (3.157) y (3.158) se tiene:

$$\begin{aligned}
 I_1(o,s) = & \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)D_1} \text{VAL1} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)D_1} \text{VAL2} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)D_0} \text{VAL7} \\
 & + \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)D_0} \text{VAL8}
 \end{aligned}
 \tag{3.173.a}$$

$$\begin{aligned}
 I_2(o,s) = & \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)D_1} \text{VAL3} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)D_1} \text{VAL4} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)D_0} \text{VAL7} \\
 & + \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)D_0} \text{VAL8}
 \end{aligned}
 \tag{3.173.b}$$

$$\begin{aligned}
 I_3(o,s) = & \frac{s \cdot G_1}{(s^2 + w^2)D_1} \text{VAL5} + \frac{w \cdot G_1}{(s^2 + w^2)D_1} \text{VAL6} + \frac{s \cdot G_0}{(s^2 + w^2)D_0} \text{VAL7} \\
 & + \frac{w \cdot G_0}{(s^2 + w^2)D_0} \text{VAL8} \qquad (3.173.c)
 \end{aligned}$$

En donde:

$$G_1 = \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \qquad (3.174)$$

$$G_0 = \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} \qquad (3.175)$$

$$\begin{aligned}
 D_1 = & (SLg + Rg) \left( \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_0} \right) \\
 & + \left( \frac{\Omega_1}{R_L + SL_L} \text{sen } h \lambda_1 x_0 + \cos h \lambda_1 x_0 \right) \qquad (3.176)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 D_0 = & (SLg + Rg) \left( \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} \right) \\
 & + \left( \frac{\Omega_0}{R_L + SL_L} \text{sen } h \lambda_0 x_0 + \cos h \lambda_0 x_0 \right) \qquad (3.177)
 \end{aligned}$$

Las ecuaciones (3.173) permiten calcular las corrientes en el terminal de envío de la línea, cuando ésta se energiza con carga desde un gene-

rador real; sin embargo, con un adecuado manejo de las variables, es posible analizar una serie de alternativas, como las siguientes:

a) Para  $R_g = L_g = 0$  y  $\frac{1}{R_L + SL_L} = 0$

las ecuaciones (3.173) se convierten en las ecuaciones (3.159) obtenidas en la sección 3.2.1.

b) Para  $R_g = L_g = 0$

las ecuaciones (3.179) se convierten en las ecuaciones (3.161) obtenidas en la sección 3.2.2.

c) Para  $\frac{1}{R_L + SL_L} = 0$

las ecuaciones (3.173) toman la forma de las ecuaciones (3.167) obtenidas en la sección 3.2.3.

Con estos antecedentes, se concluye que las ecuaciones (3.167) son ecuaciones generales que incluyen todos los efectos analizados anteriormente, por lo que, serán utilizadas para los procesos posteriores.

### 3.3. APLICACION DEL TEOREMA DEL RESIDUO

El Teorema del Residuo es un instrumento que permite transformar una expresión que se encuentra en dominio de frecuencia a dominio de tiempo, en otras palabras es un método para determinar la transformada in

versa de Laplace.

En forma bastante general, el Teorema del Residuo dice: "La Transformada inversa de Laplace de una expresión en dominio de frecuencia es igual a la suma de los residuos debidos a cada uno de los polos de dicha función".

$$F(t) = \sum \text{residuos de } e^{st} F(s) \quad (\text{en los polos de } f(s)) \quad (3.178)$$

La aplicación del Teorema del Residuo requiere por tanto, del cálculo previo de los polos de las funciones determinados en dominio de frecuencia.

Para tener una idea clara de la forma de los polos, se analiza la forma general de las expresiones determinadas para la energización de una línea en vacío desde una barra infinita, que es el caso más sencillo:

$$E(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2) \cos h \lambda_1 x_0} K_1 + \frac{w}{(s^2 + w^2) \cos h \lambda_1 x_0} K_2$$

$$+ \frac{s}{(s^2 + w^2) \cos h \lambda_0 x_0} K_3 + \frac{w}{(s^2 + w^2) \cos h \lambda_0 x_0} K_4 \quad (3.179)$$

En esta ecuación aparecen dos componentes: una de secuencia positiva y otra de secuencia cero.

Si una función  $F(s)$  se expresa de la forma:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)} \quad (3.180)$$

entonces los polos de  $F(s)$  son las raíces de  $B(s)$ , es decir, aquellos valores de  $s$  que hacen  $B(s) = 0$ .

En la componente de secuencia positiva se plantea la ecuación:

$$(s^2 + w^2) \cos h \lambda_1 x_0 = 0 \quad (3.181)$$

De aquí se obtienen dos igualdades:

$$a) \quad s^2 + w^2 = 0 \quad (3.182)$$

$$\text{de donde:} \quad s = \pm jw \quad (3.183)$$

La igualdad (3.182) determina la existencia de un par de polos complejos comjugados que corresponden a la frecuencia fundamental de oscilación. Esta frecuencia, impuesta por la fuente, es totalmente independiente de los parámetros de la línea.

$$b) \quad \cos h \lambda_1 x_0 = 0 \quad (3.184)$$

Por definición de coseno hiperbólico se tiene:

$$\frac{e^{\lambda_1 x_0} + e^{-\lambda_1 x_0}}{2} = 0 \quad (3.185)$$

De donde: 
$$e^{2\lambda_1 x_0} = -1 \quad (3.186)$$

Pero  $\lambda_1$  es una función de  $s$  que es una variable compleja.

La teoría de variable compleja plantea lo siguiente:

"Si se tiene una relación  $e^y = z$  ; de donde:

$$y = u + j v$$

entonces  $z$  debe tener la forma:

$$s = r e^{j(\theta + 2K\pi)}$$

y por lo tanto:

$$u = \ln r$$

$$v = \theta + 2K\pi$$

La variable compleja  $w$  tiene la forma:

$$y = \ln r + j (\theta + 2n\pi) \quad " \quad \textcircled{8}$$

Acomodando la ecuación (3.186) al caso general indicado, se tiene:

$$y = 2 \lambda_1 x_0$$

$$z = -1 = r [ \cos (\theta + 2n\pi) + j \operatorname{sen} (\theta + 2n\pi) ] \quad (3.187)$$

De (3.187) se obtienen dos ecuaciones:

$$r \cos (\theta + 2n\pi) = -1 \quad (3.188)$$

$$r \operatorname{sen} (\theta + 2n\pi) = 0 \quad (3.189)$$

si  $\theta = -\pi$

$$\cos (-\pi + 2n\pi) = -1 \quad \text{para cualquier } n=1,2,3,\dots$$

$$\operatorname{sen} (-\pi + 2n\pi) = 0 \quad \text{para cualquier } n$$

por lo tanto  $r = 1$

En conclusión:

$$2 \lambda_1 x_0 = \ln 1 + j \pi (2n - 1)$$

pero  $\ln 1 = 0$

entonces  $2 \lambda_1 x_0 = j \pi (2n - 1) \quad n=1,2,3,\dots$

$$\lambda_1 = \frac{1}{2x_0} j \pi (2n - 1) \quad (3.190)$$

Por otro lado se conoce que:

$$\lambda_1 = \sqrt{Z_1 Y_1} = \sqrt{s^2 L_1 C_1 + s R_1 C_1} \quad (3.191)$$

Iguando (3.190) y (3.191):

$$\sqrt{s^2 L_1 C_1 + s R_1 C_1} = \frac{1}{2X_0} j \pi (2n - 1) \quad (3.192)$$

Elevando al cuadrado ambos miembros:

$$s^2 L_1 C_1 + s R_1 C_1 = - \frac{1}{(2X_0)^2} \pi^2 (2n - 1)^2$$

$$s^2 L_1 C_1 + s R_1 C_1 + \frac{1}{(2X_0)^2} \pi^2 (2n - 1)^2 = 0 \quad (3.193)$$

Resolviendo (3.193) se tiene:

$$S_n = - \frac{R_1}{2L_1} \pm j \sqrt{\frac{1}{L_1 C_1} \left(\frac{\pi}{2X_0}\right)^2 (2n - 1)^2 - \left(\frac{R_1}{2L_1}\right)^2} \quad (3.194)$$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

Los polos debidos a (3.184) tienen la forma:

$$S_n = a \pm j b n \quad (3.195)$$

Se ha obtenido por lo tanto una serie infinita de polos complejos conjugados.

Estos polos corresponden a las frecuencias naturales de oscilación del sistema y dependen de los parámetros y longitud de la línea.

La respuesta para la componente de secuencia cero tiene la misma forma:

a)  $s = \pm j\omega$  frecuencia fundamental

b)  $S_{n0} = a_0 \pm j b n_0$  frecuencias naturales en secuencia cero  
 $n = 1, 2, 3, \dots$

En la ecuación general de voltajes en dominio de frecuencia (3.152) - se puede realizar el mismo análisis, para determinar los polos, así:

a)  $s^2 + \omega^2 = 0$

b)  $s = \pm j\omega$  Frecuencia Fundamental

b)  $D_1 = 0$

Reemplazando el valor de  $D_1$  dado en la ecuación (3.150)

$$(SL_g + Rg) \left( \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \right) + \left( \frac{\Omega_1 \text{sen } h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \cos h \lambda_1 x_0 \right) = 0 \quad (3.196)$$

Esta ecuación no tiene una solución directa, para su resolución es necesario recurrir a métodos iterativos.

Luego de implementar en el Computador Digital una técnica numérica - que utiliza el Método Iterativo de Newton se determinó que las raíces

o soluciones de la ecuación (3.196) tienen la forma:

$$S_n = a_n \pm j b_n \quad (3.197)$$

y para la componente de secuencia cero:

$$S_{n_0} = a_{n_0} \pm j b_{n_0} \quad (3.198)$$

La solución corresponde a una serie infinita de raíces complejas conjugadas, que físicamente corresponden a las frecuencias naturales de oscilación del sistema.

La respuesta en dominio del tiempo será la suma del residuo correspondiente a la frecuencia fundamental más el sumatorio de los residuos correspondientes a las frecuencias naturales.

La respuesta en dominio del tiempo debida a la frecuencia fundamental tiene la forma:

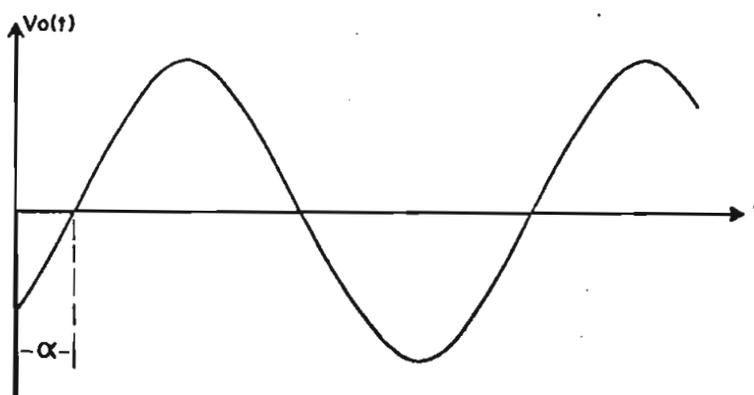


FIG. 3.6

La respuesta debida a cada frecuencia natural de oscilación tiene la forma:

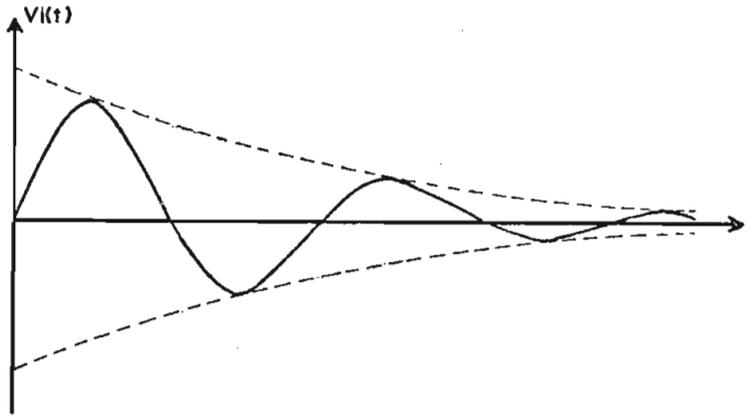


FIG. 3.7

El voltaje total en dominio del tiempo es la suma de una señal sinusoidal más una serie de sinusoides amortiguadas.

Cada senoide amortiguada tiene su propia atenuación, frecuencia de oscilación y ángulo de fase.

Si  $s = a \pm j b$

la atenuación viene dada por "a" y la frecuencia por "b".

Por el desarrollo realizado en el Apéndice B se sabe que si una función tiene la forma:

$$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

El residuo debido a un par de raíces complejas conjugadas de la forma:

$$s = a \pm j b$$

se calcula mediante la expresión:

$$R = \frac{e^{at}}{b} \left| \frac{A(s)}{B(s)/(s^2 - 2as + a^2 + b^2)} \right|_{s=a+jb} \quad \text{sen}(bt + \alpha) \quad (3.199)$$

donde  $\alpha$  es el ángulo de fase de

$$\frac{A(s)}{B(s)/(s^2 - 2as + a^2 + b^2)} \Big|_{s=a+jb} \quad (3.200)$$

### 3.3.1. Cálculo de voltajes transitorios

Como se había indicado anteriormente se trabajará en base a las ecuaciones (3.152) porque éstas incluyen todos los casos analizados.

El modelo general de las ecuaciones (3.152) es el siguiente:

$$E(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2)D_1} K_1 + \frac{w}{(s^2 + w^2)D_1} K_2 \quad (\text{sec. positiva})$$

$$+ \frac{s}{(s^2 + w^2)D_0} K_3 + \frac{w}{(s^2 + w^2)D_0} K_4 \quad (\text{sec. cero}) \quad (3.201)$$

## 3.3.1.1. Respuesta para secuencia positiva

La componente de secuencia positiva viene dada por la expresión:

$$E^{(+)}(x_0, s) = \frac{s}{(s^2 + w^2)D_1} K_1 + \frac{w}{(s^2 + w^2)D_1} K_2 \quad (3.202)$$

a) Respuesta a frecuencia fundamental ( $s = \pm j w$ )

De acuerdo a la forma general de s:

$$a = 0 \quad (3.202.a)$$

$$b = w \quad (3.202.b)$$

Reemplazando (3.202) en (3.199) se tiene

$$R = \frac{1}{w} \left| \frac{s}{(s^2 + w^2)D_1/(s^2 + w^2)} \right|_{s=jw} K_1 \text{ sen } (wt + \alpha') + \frac{1}{w} \left| \frac{w}{(s^2 + w^2)D_1/(s^2 + w^2)} \right|_{s=jw} K_2 \text{ sen } (wt + \alpha) \quad (3.203)$$

De donde:

$$R = \frac{1}{w} \left| \frac{s}{D_1} \right|_{s=jw} K_1 \text{ sen } (wt + \alpha') + \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=jw} K_2 \text{ sen } (wt + \alpha) \quad (3.204)$$

Si en el primer término de (3.204) se aplica la propiedad de la transformada de Laplace que dice:

$$\text{" Si } \mathcal{L}^{-1} \{ F(s) \} = f(t)$$

$$\text{entonces } \mathcal{L}^{-1} \{ s F(s) \} = f'(t) \text{ " } \quad (3.205)$$

se obtiene:

$$R = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} K_1 \cos(\omega t + \alpha) + \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} K_2 \sin(\omega t + \alpha) \quad (3.206)$$

Sacando factor común:

$$R = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} (K_1 \cos(\omega t + \alpha) + K_2 \sin(\omega t + \alpha)) \quad (3.207)$$

El factor  $D_1$  contiene dentro de sí a términos de la forma  $\sin h\lambda_1 x_0$  y  $\cos h\lambda_1 x_0$ , en este caso

$$\lambda_1 = \sqrt{j \omega \underbrace{R_1 C_1}_B - \omega^2 \underbrace{L_1 C_1}_A} \quad (3.08)$$

Por otro lado:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im} (1/D_1)}{\text{Re} (1/D_1)} \right\} \quad (3.209)$$

Aplicando la ecuación (3.207) para cada una de las fases:

$$RE_1 = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ VAL1 \cos (\omega t + \alpha) + VAL2 \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \right\} \quad (3.210.a)$$

$$RE_2 = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ VAL3 \cos (\omega t + \alpha) + VAL4 \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \right\} \quad (3.210.b)$$

$$RE_3 = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ VAL5 \cos (\omega t + \alpha) + VAL6 \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \right\} \quad (3.210.c)$$

b) Respuesta a frecuencias de la forma  $s_n = a_n \pm j b_n$

Aplicando (3.199) a (3.202):

$$R = \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{s N}{(s^2 + \omega^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left[ K_1 \operatorname{sen} (b_n t + \alpha_1) \right] + \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{\omega N}{(s^2 + \omega^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left[ K_2 \operatorname{sen} (b_n t + \alpha_1) \right] \quad (3.211)$$

$$\text{Donde:} \quad N = s_n^2 - 2 a_n s_n + a_n^2 + b_n^2 \quad (3.212)$$

Aplicando la propiedad de la transformada de Laplace (3.205) se tiene:

$$R = \frac{1}{b_n} \left| \frac{N}{(s^2 + \omega^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left[ K_1 \frac{d}{dt} e^{a_n t} \operatorname{sen} (b_n t + \alpha_1) \right] + \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{N}{(s^2 + \omega^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left[ \omega K_2 \operatorname{sen} (b_n t + \alpha_1) \right] \quad (3.213)$$

$$\frac{d}{dt} e^{a_n t} \sin(b_n t + \alpha_1) = a_n e^{a_n t} \sin(b_n t + \alpha_1) + b_n e^{a_n t} \cos(b_n t + \alpha_1) \quad (3.214)$$

Reemplazando (3.214) en (3.213) y agrupando términos semejantes se obtiene:

$$R = \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{N}{(s^2 + w^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left\{ K_1 b_n \cos(b_n t + \alpha_1) + (K_1 a_n + K_2 w) \sin(b_n t + \alpha_1) \right\} \quad (3.215)$$

Pero al reemplazar  $s_n = a_n + j b_n$  en

$$\frac{N}{(s^2 + w^2) D_1}$$

$N$  se hace cero al igual que  $D_1$ ; es decir, se produce una indeterminación de la forma  $0/0$  que puede superarse aplicando la propiedad de L'Hôpital que consiste en derivar numerador y denominador independientemente.

Así:

$$\frac{d}{ds} N = 2 (s_n - a_n) \quad (3.216)$$

$$\frac{d}{ds} D_1 = \text{DER} F_1 \quad (3.217)$$

$$\begin{aligned}
\text{DERF}_1 = & (\text{SLg} + \text{Rg}) \left\{ \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{R_L + \text{SL}_L} \frac{d \lambda_1 x_0}{ds} - \frac{\text{cos } h \lambda_1 x_0}{(R_L + \text{SL}_L)^2} L_L + \right. \\
& \left. + \frac{\text{cos } h \lambda_1 x_0}{ds} \frac{d \lambda_1 x_0}{ds} \right\} + \left\{ \frac{\text{cos } h \lambda_1 x_0}{(R_L + \text{SL}_L)^2} + \frac{\text{sen } h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \right\} Lg \\
& + \frac{\Omega_1}{R_L + \text{SL}_L} \text{cos } h \lambda_1 x_0 \frac{d \lambda_1 x_0}{ds} - \frac{\Omega_1 L_L \text{sen } h \lambda_1 x_0}{(R_L + \text{SL}_L)^2} + \\
& + \text{sen } h \lambda_1 x_0 \frac{d \lambda_1 x_0}{ds} \quad (3.218)
\end{aligned}$$

$$\text{Dónde: } \frac{d \lambda_1 x_0}{ds} = x_0 \frac{2 \text{sn } L_1 C_1 + R_1 C_1}{2 \sqrt{\text{sn}^2 L_1 C_1 + \text{sn } R_1 C_1}} \quad (3.219)$$

Aplicando (3.216) y (3.218) en (3.215) se obtiene:

$$\begin{aligned}
R = & \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{2(\text{sn} - a_n)}{(s^2 + w^2)\text{DERF}_1} \right|_{\text{sn}=a_n+j b_n} \left\{ K_1 b_n \text{cos}(b_n t + \alpha_1) + \right. \\
& \left. + (K_1 a_n + K_2 w) \text{sen}(b_n t + \alpha_1) \right\} \quad (3.220)
\end{aligned}$$

Extendiendo la ecuación general (3.219) para cada fase:

$$\begin{aligned}
\text{RRE}_1 = & \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{2(\text{sn} - a_n)}{(s^2 + w^2)\text{DERF}_1} \right|_{\text{sn}=a_n+j b_n} \left\{ \text{VAL1} \cdot b_n \cdot \text{cos}(b_n t + \alpha_1) \right. \\
& \left. + (\text{VAL1} \cdot a_n + \text{VAL2 } w) \text{sen}(b_n t + \alpha_1) \right\} \quad (3.221.a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 RRE_2 = \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{2 (s_n - a_n)}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} & \left\{ \text{VAL3 } b_n \cos (b_n t + \alpha_1) \right. \\
 & \left. + (\text{VAL3} \cdot a_n + \text{VAL4 } w) \text{sen} (b_n t + \alpha_1) \right\} \quad (3.221.b)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 RRE_3 = \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{2 (s_n - a_n)}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} & \left\{ \text{VAL5 } b_n \cos (b_n t + \alpha_1) \right. \\
 & \left. + (\text{VAL5} \cdot a_n + \text{VAL6 } w) \text{sen} (b_n t + \alpha_1) \right\} \quad (3.221.c)
 \end{aligned}$$

$$\text{Si } \frac{2(s_n - a_n)}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \Big|_{s_n = a_n + j b_n} = H(s_n) \quad (3.222)$$

$$\text{Entonces: } \alpha_1 = \text{tg}^{-1} \left\{ \text{Im} (H(s_n)) / \text{Re} (H(s_n)) \right\} \quad (3.223)$$

### 3.3.1.2. Respuesta para secuencia cero

Las expresiones para secuencia cero pueden obtenerse por analogía, directamente de las ecuaciones halladas para secuencia positiva, recordando que la componente de secuencia cero es igual para las tres fases.

a) Respuesta a frecuencia fundamental  $s = \pm j w$

$$RE_{10} = RE_{20} = RE_{30} = \left| \frac{1}{D_0} \right|_{s=jw} \left\{ \text{VAL7 } \cos(wt + \alpha_0) + \text{VAL8 } \text{sen}(wt + \alpha_0) \right\} \quad (3.224)$$

$$\text{Donde: } \alpha_0 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im} (1/D_0)}{\text{Re} (1/D_0)} \right\} \quad (3.225)$$

Dentro del factor  $D_0$  aparecen los términos  $\text{sen } h \lambda_0 x_0$  y  $\text{cos } h \lambda_0 x_0$  en los cuales:

$$\lambda_0 = \sqrt{j \omega R_0 C_0 - \omega^2 L_0 C_0} \quad (3.226)$$

b) Respuesta a frecuencias de la forma  $s_{n_0} = a_{n_0} + j b_{n_0}$

$$\text{RRE}_{1_0} = \text{RRE}_{2_0} = \text{RRE}_{3_0} = \frac{e^{a_{n_0} t}}{b_{n_0}} \left| \frac{2(s_{n_0} - a_{n_0})}{(s^2 + \omega^2) \text{DERF}_0} \right|_{s_{n_0} = a_{n_0} + j b_{n_0}} \times$$

$$\left\{ \text{VAL7 } b_{n_0} \cos (b_{n_0} t + \alpha_{1_0}) + (\text{VAL7 } a_{n_0} + \text{VAL8 } \omega) \text{sen } (b_{n_0} t + \alpha_{1_0}) \right\} \quad (3.227)$$

Donde:

$$\begin{aligned} \text{DERF}_0 = & (\text{SLg} + \text{Rg}) \left\{ \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{R_L + sL_L} \frac{d\lambda_0 x_0}{ds} - \frac{L_L \cos h \lambda_0 x_0}{(R_L + sL_L)^2} + \right. \\ & \left. + \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} \frac{d\lambda_0 x_0}{ds} \right\} + \left\{ \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + sL_L} + \frac{\text{sen } h \lambda_0 x_0}{\Omega_0} \right\} \text{Lg} \\ & + \frac{\Omega_0 \cos h \lambda_0 x_0}{R_L + sL_L} \frac{d\lambda_0 x_0}{ds} - \frac{\Omega_0 L_L \text{sen } h \lambda_0 x_0}{(R_L + sL_L)^2} + \text{sen } h \lambda_0 x_0 \frac{d\lambda_0 x_0}{ds} \end{aligned} \quad (3.228)$$

$$\frac{d \lambda_0 x_0}{ds} = x_0 \cdot \frac{2 s_{n_0} L_0 C_0 + R_0 C_0}{2 \sqrt{s_{n_0}^2 L_0 C_0 + s_{n_0} R_0 C_0}} \quad (3.229)$$

$$\text{Si: } \left. \frac{2(s_{n_0} - a_{n_0})}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_0} \right|_{s_{n_0} = a_{n_0} + j b_{n_0}} = H(s_{n_0}) \quad (3.230)$$

$$\alpha_{10} = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im} (H(s_{n_0}))}{\text{Re} (H(s_{n_0}))} \right\} \quad (3.231)$$

### 3.3.1.3. Respuesta total

Finalmente el voltaje total para cada fase en dominio del tiempo se calcula mediante las siguientes relaciones:

$$E_{1T}(x_0, t) = RE_1 + RE_{10} + \sum_1^n (RRE_1 + RRE_{10}) \quad (3.232.a)$$

$$E_{2T}(x_0, t) = RE_2 + RE_{10} + \sum_1^n (RRE_2 + RRE_{10}) \quad (3.232.b)$$

$$E_{3T}(x_0, t) = RE_3 + RE_{10} + \sum_1^n (RRE_3 + RRE_{10}) \quad (3.232.c)$$

Respuesta  
forzada

Respuesta libre  
o transitoria

### 3.3.2. Calculo de corrientes transitorias

Para la aplicación del teorema del Residuo se consideran las ecuaciones (3.173) que abarcan todos los casos analizados.

El modelo general de estas ecuaciones es el siguiente:

$$\begin{aligned}
 I(0,s) = & \frac{s}{(s^2 + w^2)} \frac{G_1}{D_1} K_1 + \frac{w}{(s^2 + w^2)} \frac{G_1}{D_1} K_2 \\
 & + \frac{s}{(s^2 + w^2)} \frac{G_0}{D_0} K_3 + \frac{w}{(s^2 + w^2)} \frac{G_0}{D_0} K_4
 \end{aligned} \tag{3.233}$$

### 3.3.2.1. Respuesta para secuencia positiva

La componente de secuencia positiva viene dada por la expresión:

$$I^{(+)}(0,s) = \frac{s}{(s^2 + w^2)} \frac{G_1}{D_1} K_1 + \frac{w}{(s^2 + w^2)} \frac{G_1}{D_1} K_2 \tag{3.234}$$

En la ecuación (3.234) se puede notar que el denominador es igual al de la ecuación (3.202) correspondiente a la componente de secuencia positiva del voltaje; por lo tanto los polos o frecuencias de oscilación son los mismos indicados anteriormente.

a) Respuesta a frecuencia fundamental ( $s = \pm j w$ )

De acuerdo con la forma general de  $s = a \pm j b$ ; para este caso

$$a = 0 \tag{3.235.a}$$

$$b = w \tag{3.235.b}$$

Aplicando (3.199) en (3.234) se tiene:

$$\begin{aligned}
 R = & \frac{1}{w} \left| \frac{s G_1}{(s^2 + w^2) D_1 / (s^2 + w^2)} \right|_{s=jw} K_1 \text{ sen } (wt + \beta') \\
 & + \frac{1}{w} \left| \frac{w G_1}{(s^2 + w^2) D_1 / (s^2 + w^2)} \right|_{s=jw} K_2 \text{ sen } (wt + \beta) \quad (3.236)
 \end{aligned}$$

De donde:

$$R = \frac{1}{w} \left| \frac{s G_1}{D_1} \right|_{s=jw} K_1 \text{ sen}(wt+\beta') + \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=jw} K_2 \text{ sen}(wt+\beta) \quad (3.237)$$

Al aplicar la propiedad de la transformada de Laplace indicada en (3.205) se tiene:

$$R = \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=jw} K_1 \cos (wt + \beta) + \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=jw} K_2 \text{ sen } (wt + \beta) \quad (3.238)$$

Sacando factor común

$$R = \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=jw} \left\{ K_1 \cos (wt + \beta) + K_2 \text{ sen } (wt + \beta) \right\} \quad (3.238)$$

Los factores  $G_1$  y  $D_1$  contienen a términos de la forma  $\text{sen } h \lambda_1 x_0$  y  $\text{cos } h \lambda_1 x_0$ , en los cuales:

$$\lambda_1 = \sqrt{j w R_1 C_1 - w^2 L_1 C_1} \quad (3.239)$$

Por otro lado:

$$\beta = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im} (G_1/D_1)}{\operatorname{Re} (G_1/D_1)} \right\} \quad (3.240)$$

Aplicando la ecuación general (3.238) a cada fase se obtiene:

$$RI_1 = \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ \operatorname{VAL1} \cos (\omega t + \beta) + \operatorname{VAL2} \operatorname{sen} (\omega t + \beta) \right\} \quad (3.241.a)$$

$$RI_2 = \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ \operatorname{VAL3} \cos (\omega t + \beta) + \operatorname{VAL4} \operatorname{sen} (\omega t + \beta) \right\} \quad (3.241.b)$$

$$RI_3 = \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ \operatorname{VAL5} \cos (\omega t + \beta) + \operatorname{VAL5} \operatorname{sen} (\omega t + \beta) \right\} \quad (3.241.c)$$

b) Respuesta a frecuencias de la forma:  $s_n = a_n \pm j b_n$

Reemplazando (3.199) en (3.234) cuando:

$$a = a_n$$

$$b = b_n$$

se tiene:

$$R = \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{S N G_1}{(s^2 + \omega^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} K_1 \operatorname{sen} (b_n t + \beta_1') \\ + \frac{e^{a_n t}}{b_n} \left| \frac{\omega N G_1}{(s^2 + \omega^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} K_2 \operatorname{sen} (b_n t + \beta_1) \quad (3.242)$$

$$\text{Donde: } N = s_n^2 - 2 a_n s_n + a_n^2 + b_n^2 \quad (3.243)$$

Aplicando la propiedad de la transformada de Laplace indicada en (3.205) y sacando factor común el resultado es:

$$R = \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{N G_1}{(s^2 + w^2) D_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left\{ K_1 b_n \cos (b_n t + \beta_1) + \right. \\ \left. + (k_1 \cdot a_n + k_2 w) \sin (b_n t + \beta_1) \right\} \quad (3.244)$$

Sin embargo, al reemplazar  $s_n = a_n + j b_n$  en

$$\frac{N G_1}{(s^2 + w^2) D_1}$$

$N$  y  $D_1$  se hacen cero; se presenta por lo tanto una indeterminación de la forma  $0/0$ ; este problema se soluciona aplicando la propiedad de L'Hôpital indicada anteriormente:

$$\text{Así: } \frac{d}{ds} N = 2(s_n - a_n) \quad (3.245)$$

$$\frac{d}{ds} D_1 = \text{DERF}_1 \quad (3.246)$$

La variable  $\text{DERF}_1$  está descrita en la ecuación (3.218).

Aplicando (3.245) y (3.246) en (3.244) se obtiene:

$$R = \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{2(s_n - a_n) G_1}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left\{ K_1 \cdot b_n \cdot \cos (b_n t + \beta_1) \right. \\ \left. + (K_1 \cdot a_n + K_2 \cdot w) \text{sen} (b_n t + \beta_1) \right\} \quad (3.247)$$

$$\text{Si } \frac{2(s_n - a_n) G_1}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \Big|_{s_n = a_n + j b_n} = H(s_n) \quad (3.248)$$

$$\text{entonces } \beta_1 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im } H(s_n)}{\text{Re } H(s_n)} \right\} \quad (3.249)$$

Aplicando la ecuación general (3.247) para cada fase:

$$\text{RRI}_1 = \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{2(s_n - a_n) G_1}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left\{ \text{VAL1} \cdot b_n \cdot \cos (b_n t + \beta_1) \right. \\ \left. + (\text{VAL1} \cdot a_n + \text{VAL2} w) \text{sen} (b_n t + \beta_1) \right\} \quad (3.250.a)$$

$$\text{RRI}_2 = \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{2(s_n - a_n) G_1}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left\{ \text{VAL3} \cdot b_n \cdot \cos (b_n t + \beta_1) \right. \\ \left. + (\text{VAL3} \cdot a_n + \text{VAL4} w) \text{sen} (b_n t + \beta_1) \right\} \quad (3.250.b)$$

$$\text{RRI}_3 = \frac{e^{ant}}{b_n} \left| \frac{2(s_n - a_n) G_1}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \left\{ \text{VAL5} \cdot b_n \cdot \cos (b_n t + \beta_1) \right. \\ \left. + (\text{VAL5} \cdot a_n + \text{VAL6} w) \text{sen} (b_n t + \beta_1) \right\} \quad (3.250.c)$$

## 3.3.2.2. Respuesta en secuencia cero

Las expresiones en secuencia cero pueden obtenerse directamente por analogía a partir de las ecuaciones determinadas en secuencia positiva. Se debe recordar que la componente de secuencia cero es igual para las tres fases.

a) Respuesta a frecuencia fundamental ( $s = \pm j \omega$ )

$$RI_{10} = RI_{20} = RI_{30} = \left| \frac{G_0}{D_0} \right|_{s=j\omega} \left\{ \text{VAL7} \cos(\omega t + \beta_0) + \right. \\ \left. + \text{VAL8} \sin(\omega t + \beta_0) \right\} \quad (3.251)$$

$$\text{Donde: } \beta_0 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G_0/D_0)}{\text{Re}(G_0/D_0)} \right\} \quad (3.252)$$

Los factores  $G_0$  y  $D_0$  contienen elementos del tipo  $\sinh \lambda_0 x_0$  y  $\cosh \lambda_0 x_0$  en los cuales:

$$\lambda_0 = \sqrt{j \omega R_0 C_0 - \omega^2 L_0 C_0} \quad (3.253)$$

b) Respuesta a frecuencias de la forma  $s_{n_0} = a_{n_0} \pm j b_{n_0}$

$$RRI_{10} = RRI_{20} = RRI_{30} = \frac{e^{a_{n_0} t}}{b_{n_0}} \left| \frac{2(s_{n_0} - a_{n_0})G_0}{(s^2 + \omega^2) \text{DERF}_0} \right|_{s_{n_0} = a_{n_0} + j b_{n_0}} \times \\ \left\{ \text{VAL7} b_{n_0} \cos(b_{n_0} t + \beta_{10}) + (\text{VAL7} a_{n_0} + \text{VAL8} \omega) \sin(b_{n_0} t + \beta_{10}) \right\} \quad (3.254)$$

DERF<sub>0</sub> está descrito en la ecuación (3.228)

$$\text{Si: } \frac{2(s_{n_0} \cdot a_{n_0})G_0}{(s^2 + w^2)DERF_0} \Bigg|_{s_{n_0} = a_{n_0} + j b_{n_0}} = H(s_{n_0}) \quad (3.255)$$

$$\beta_{10} = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im } H(s_{n_0})}{\text{Re } H(s_{n_0})} \right\} \quad (3.256)$$

### 3.3.2.3. Respuesta total

La corriente en el terminal de envío expresada en dominio del tiempo se calcula mediante las siguientes expresiones:

$$I_{1T}(x_0, t) = RI_1 + RI_{10} + \sum_1^n (RRI_1 + RRI_{10}) \quad (3.257.a)$$

$$I_{2T}(x_0, t) = RI_2 + RI_{10} + \sum_1^n (RRI_2 + RRI_{10}) \quad (3.257.b)$$

$$I_{3T}(x_0, t) = RI_3 + RI_{10} + \sum_1^n (RRI_3 + RRI_{10}) \quad (3.257.c)$$

Respuesta  
forzada

Respuesta libre  
o transitoria

## CAPITULO IV

PROGRAMA DIGITAL

## 4.1. GENERALIZACION DEL MODELO MATEMATICO

El modelo matemático debe considerar todos los casos analizados en el Capítulo III; éstos son:

- Energización de una línea en vacío desde una barra infinita.
- Energización de una línea con carga desde una barra infinita.
- Energización de una línea en vacío desde un generador real.
- Energización de una línea con carga desde un generador real.

Al hablar de carga, ésta puede ser:

- Puramente resistiva.
- Del tipo R - L.

Igualmente, la impedancia del generador puede constar de:

- Una parte resistiva y una parte reactiva; ó

- Solamente de una reactancia inductiva.

Anteriormente se indicó que las ecuaciones halladas para la energización con carga desde un generador real, tanto de voltajes como de corrientes, pueden ser adaptadas a cualquiera de los casos indicados a través del manejo adecuado de los valores que toman las variables; sin embargo, la implementación de estas ecuaciones en el Computador Digital, dada la forma como están expresadas, pueden acarrear algunos inconvenientes que deben analizarse para realizar las modificaciones adecuadas.

Así por ejemplo, en el cálculo de los voltajes transitorios la ecuación que permite determinar el residuo debido a la frecuencia fundamental en secuencia positiva tiene la forma:

$$RE_1 = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \left\{ VAL1 \cos (\omega t + \alpha) + VAL2 \operatorname{sen} (\omega t + \alpha) \right\}$$

En esta ecuación:

- VAL1 y VAL2 son constantes que dependen del voltaje de la fuente en cada fase y del ángulo de energización de la fase A.
- $\omega$  es la frecuencia angular impuesta por la fuente y por lo tanto, es una constante.
- $\alpha$  es el ángulo de fase y viene dado por la expresión

$$\alpha = \operatorname{tg}^{-1} \left\{ \frac{\operatorname{Im}g (1/D_1)}{\operatorname{Rcal} (1/D_1)} \right\}$$

Donde se nota claramente que  $\alpha$  depende del factor  $D_1$ .

En consecuencia, la variable  $D_1$  es la que encierra dentro de sí las condiciones del sistema y esto se comprueba en la ecuación (3.150).

$$D_1 = (SL_g + R_g) \left( \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \frac{\sen h \lambda_1 x_0}{\Omega_1} \right) + \left( \frac{\Omega_1 \sen h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \cos h \lambda_1 x_0 \right)$$

Los parámetros de la línea  $R_1$ ,  $L_1$ ,  $C_1$  están considerados en las variables  $\lambda_1$  y  $\Omega_1$ , los parámetros de la carga son  $R_L$  y  $L_L$ , los parámetros del generador son  $R_g$  y  $L_g$ .

Es entonces, esta ecuación la que permite seleccionar el tipo de energización, dependiendo de los valores que tomen las variables.

Si se quiere analizar el caso de energización desde una barra infinita simplemente se reemplaza  $R_g$  y  $L_g$  por cero y la ecuación toma la forma:

$$D_1 = \Omega_1 \frac{\sen h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \cos h \lambda_1 x_0 \quad (4.1)$$

Para una carga puramente resistiva se reemplaza  $L_1 = 0$  y la ecuación es:

$$D_1 = \frac{\Omega_1}{R_L} \sen h \lambda_1 x_0 + \cos h \lambda_1 x_0 \quad (4.2)$$

Si en el computador digital se introducen como datos:

$$R_g = L_g = L_L = 0$$

no se presenta ningún problema y el computador trabaja en la ecuación (4.2); pero si se desea estudiar el caso de energización en vacío hay que reemplazar en la ecuación (3.150).

$$R_g = L_g = \infty$$

como  $\frac{1}{\infty} = 0$ , ésta toma la forma

$$D_1 = (SL_g + R_g) \operatorname{sen} h \lambda_1 x_0 / \Omega_1 + \cos h \lambda_1 x_0 \quad (4.3)$$

En el computador digital no se puede introducir como dato el infinito; la alternativa es entonces utilizar valores sumamente grandes, dentro de los límites permitidos (p. ej.  $10^{75}$  es Doble Precisión).

Para evaluar las molestias que trae consigo esta alternativa, se reemplaza:

$$\frac{1}{R_L + SL_L} = \text{FACT} \quad (4.4)$$

y para energización en vacío se introducen como datos:

$$R_L = L_L = 0$$

En la realidad una impedancia de carga igual a cero, quiere decir - que el terminal de recepción de la línea está en cortocircuito; pero en esta tesis, esta consideración representa solamente un mecanismo para facilitar la realización del Programa Digital.

El programa está estructurado de tal manera que si se lee como datos  $R_L = 0$  y  $L_L = 0$ , asigna a la variable FACT el valor

$$\text{FACT} = 0 + j 0$$

de lo contrario toma el valor indicado en (4.4) o bien, si  $R_L = 0$  y  $L_L \neq 0$ .

$$\text{FACT} = \frac{1}{SL_L}$$

ó si  $R_L \neq 0$  y  $L_L = 0$

$$\text{FACT} = \frac{1}{R_L}$$

Con esta variación la ecuación (3.150) toma la forma:

$$\begin{aligned} D_1 = & (SLg + Rg)(\cos h \lambda_1 x_0 \cdot \text{FACT} + \text{sen } h \lambda_1 x_0 / \Omega_1) \\ & + \Omega_1 \text{sen } h \lambda_1 x_0 \cdot \text{FACT} + \cos h \lambda_1 x_0 \end{aligned} \quad (4.5)$$

De igual manera, para secuencia cero:

$$D_0 = (SLg + Rg)(\cos h \lambda_0 x_0 \cdot \text{FACT} + \text{sen } h \lambda_0 x_0 / \Omega_0) + \\ + \Omega_0 \text{sen } h \lambda_0 x_0 \cdot \text{FACT} + \cos h \lambda_0 x_0 \quad (4.6)$$

En el cálculo de los residuos, debidos a las frecuencias naturales de oscilación, aparecen los términos:  $DERF_1$  y  $DERF_0$  para secuencia positiva y cero, respectivamente.

Como 
$$DERF_1 = \frac{d}{ds} D_1$$

y 
$$DERF_0 = \frac{d}{ds} D_0$$

La variación realizada es igualmente válida para este caso.

En el cálculo de corrientes transitorias, además de los términos  $D_1$ ,  $D_0$ ,  $DERF_1$  y  $DERF_0$  aparecen  $G_1$  y  $G_0$  que, de acuerdo con las ecuaciones (3.174) y (3.175) son:

$$G_1 = \frac{\cos h \lambda_1 x_0}{R_L + SL_L} + \text{sen } h \lambda_1 x_0 / \Omega_1$$

$$G_0 = \frac{\cos h \lambda_0 x_0}{R_L + SL_L} + \text{sen } h \lambda_0 x_0 / \Omega_0$$

En la generalización del modelo matemático toman la forma:

$$G_1 = \cos h \lambda_1 x_0 \cdot \text{FACT} + \text{sen } h \lambda_1 x_0 / \Omega_1 \quad (4.7)$$

$$G_0 = \cos h \lambda_0 x_0 \cdot \text{FACT} + \text{sen } h \lambda_0 x_0 / \Omega_0 \quad (4.8)$$

Las variables consideradas, implementadas en el computador con su nueva forma, permiten un fácil acceso al programa para analizar cualquiera de las alternativas que éste ofrece, simplificando al máximo el problema de introducción de datos.

#### 4.2. EFECTOS DEL TIPO DE CIERRE DEL DISYUNTOR

Para proporcionar una mayor flexibilidad al programa digital, se considera que el cierre del disyuntor puede realizarse de dos maneras:

- Cierre simultáneo
- Cierre no simultáneo

Para la simulación del cierre no simultáneo se utiliza una función de retardo de tiempo en los voltajes de fase de la generación.

En la teoría de la Transformada de Laplace, la función de retardo de tiempo es

$$e^{-T_0 s} f(s)$$

Si  $\mathcal{L}^{-1} \{ f(s) \} = F(t)$

entonces  $\mathcal{L}^{-1} \{ e^{-T_0 s} f(s) \} = F(t - T_0)$

Donde  $F(t) = 0$  cuando  $t < 0$

Esto significa que si en el momento de la energización ( $t = 0$ ) una de las fases no cierra, el voltaje en esta fase es igual a cero hasta cuanto  $T_0 = t$ .

En la realidad, durante el intervalo de tiempo  $0 - T_0$  aparece un pequeño voltaje en la fase que no ha cerrado debido al acoplamiento mutuo existente con las fases que si están energizadas.

#### 4.2.1. Cierre simultáneo

Las expresiones de voltaje y de corriente contienen una componente de secuencia positiva que es propia para cada fase y una componente de secuencia cero, común para las tres fases y que está afectada por las constantes VAL7 y VAL8, cuyas expresiones son:

$$VAL7 = (V_1 \text{ sen } \phi + V_2 \text{ sen } (\phi + 2\pi/3) + V_3 \text{ sen } (\phi - 2\pi/3) )/3$$

$$VAL8 = (V_1 \text{ cos } \phi + V_2 \text{ cos } (\phi + 2\pi/3) + V_3 \text{ cos } (\phi - 2\pi/3) )/3$$

Al producirse el cierre simultáneo, para cualquier instante de tiempo, se cumple:

$$V_1 = V_2 = V_3 \quad (4.9)$$

porque se supone que los voltajes en la barra infinita o en la salida del generador son equilibrados.

Con esta condición las constantes VAL7 y VAL8 son iguales a cero para cualquier instante de tiempo.

Por lo tanto, al producirse un cierre simultáneo, la componente de secuencia cero, tanto para voltajes como para corrientes, es nula y aparece únicamente la componente de secuencia positiva.

Este resultado es lógico si se considera que con un cierre simultáneo, el sistema permanece siempre balanceado y que en general las componentes (voltaje y corriente) de secuencia cero aparecen como consecuencia de un desbalance en el sistema.

Las ecuaciones de voltaje en dominio de tiempo, toman la forma:

$$E_{1T}(x_0, t) = RE_1 + \sum_1^n RRE_1 \quad (4.10.a)$$

$$E_{2T}(x_0, t) = RE_2 + \sum_1^n RRE_2 \quad (4.10.b)$$

$$E_{3T}(x_0, t) = RE_3 + \sum_1^n RRE_3 \quad (4.10.c)$$

y las ecuaciones de corriente:

$$I_{1T}(x_0, t) = RI_1 + \sum_1^n RRI_1 \quad (4.11.a)$$

$$I_{2T}(x_0, t) = RI_2 + \sum_1^n RRI_2 \quad (4.11.b)$$

$$I_{3T}(x_0, t) = RI_3 + \sum_1^n RRI_3 \quad (4.11.c)$$

#### 4.2.2. Cierre No Simultáneo

Si se considera, por ejemplo, que al producirse la energización, la fase A no cierra a  $t = 0$  sino con un retardo  $t = T_0$ ; matemáticamente este efecto puede modelarse utilizando una función paso de retardo - que afecta al voltaje de la fase A y las expresiones de VAL7 y VAL8 toman la forma

$$VAL7 = \{ V_1 \text{ sen } \phi U(t - T_0) + V_2 \text{ sen } (\phi + 2\pi/3) + V_3 \text{ sen } (\phi - 2\pi/3) \} / 3 \quad (4.12)$$

$$VAL8 = \{ V_1 \text{ cos } \phi U(t - T_0) + V_2 \text{ cos}(\phi + 2\pi/3) + V_3 \text{ cos}(\phi - 2\pi/3) \} / 3 \quad (4.13)$$

$U(t - T_0) \rightarrow$  función paso de retardo.

Como es lógico de suponer, las constantes VAL1 a VAL6 también se ve rán afectadas pero en esta parte del estudio interesa únicamente co nocer los efectos en VAL7 y VAL8.

Para tiempos menores a  $T_0$  se tiene:

$$V_1 = 0$$

$$V_2 = V_3$$

y por tanto  $VAL7 \neq VAL8 \neq 0$

En consecuencia, durante el período considerado entre  $t = 0$  y  $t = T_0$  aparece las componentes de secuencia cero y la respuesta de voltajes y corrientes viene dada por las ecuaciones (3.232) y (3.257) - respectivamente.

Esta influencia de la componente de secuencia cero desaparece en el instante en que cierra la fase A ( $t = T_0$ ), ya que el sistema a partir de este momento es equilibrado.

La utilización de la función paso de retardo permite realizar una serie de análisis, tales como:

- a) Efecto del cierre secuencial del disyuntor.
- b) Efecto del acoplamiento mutuo entre fases.
- c) Efecto de la falla del disyuntor en el cierre de una de las fases.

#### 4.3. DESCRIPCION DEL PROGRAMA PRINCIPAL Y SUBROUTINAS

##### 4.3.1. Programa Principal

El programa principal está constituido por tres bloques principales:

- 1) Lectura e impresión de datos.

2) Cálculo de voltajes transitorios e impresión de resultados.

3) Cálculo de corrientes transitorias e impresión de resultados.

Bloque 1:

En esta parte del programa se leen e imprimen todos los datos requeridos para el cálculo. (La descripción de las variables y sus respectivos formatos se detalla en el Apéndice C).

Bloque 2:

El procedimiento seguido para el cálculo de los voltajes transitorios es el siguiente:

a) Cálculo de las frecuencias de oscilación del sistema para secuencia positiva.

b) Cálculo de la amplitud y fase de la componente de frecuencia fundamental, en secuencia positiva.

c) Cálculo de la amplitud y fase de las componentes correspondientes a las frecuencias naturales de oscilación en secuencia positiva.

d) Si el cierre del disyuntor no es simultáneo, se repiten los pasos a), b) y c) para secuencia cero.

e) Si el cierre no es simultáneo, se calculan las constantes VAL1 a

VAL8 tomando en cuenta los tiempos de retardo, de lo contrario , para cierre simultáneo se reemplazan directamente los valores de  $V_1$ ,  $V_2$ ,  $V_3$  leídos como datos en las ecuaciones (3.40), (3.41), (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50), (3.51).

- f) Cálculo del voltaje a frecuencia fundamental en secuencia cero. Si el cierre es simultáneo se asigna el valor cero.
- g) Cálculo del voltaje a frecuencia fundamental en secuencia positi  
va.
- h) Cálculo del voltaje total a frecuencia fundamental (Voltaje en estado estable).
- i) Cálculo del voltaje debido a cada frecuencia natural de oscilación en secuencia cero. Si el cierre es simultáneo se asigna el valor cero.
- j) Cálculo del voltaje debido a cada frecuencia natural de oscila-  
ción en secuencia positiva.
- k) Cálculo del voltaje total debido a las frecuencias naturales.
- l) Cálculo de la suma de voltajes en estado estable y transitorio.
- m) Se imprimen los resultados, primero en forma de tabla en la que se indica el tiempo en milisegundos y el voltaje correspondiente

a cada una de las fases en p.u.; seguidamente se grafican los resultados de cada fase independientemente.

Bloque 3:

El procedimiento para el cálculo de las corrientes transitorias es exactamente igual al seguido para el cálculo de voltajes.

#### 4.3.2. Descripción de las subrutinas

SUBROUTINA FCT

Dados los parámetros de la línea en secuencia positiva ( $R_1, L_1, C_1$ ) o en secuencia cero ( $R_0, L_0, C_0$ ); los parámetros de la carga ( $R_L$  y  $L_L$ ), los parámetros del generador ( $R_g$  y  $L_g$ ) y la longitud de la línea ( $x_0$ ), calcula el valor de  $D_1$  y  $DERF_1$  en secuencia positiva ó  $D_0$  y  $DERF_0$  en secuencia cero, para un valor de  $s$  dado.

SUBROUTINA RTNI

Utilizando el proceso iterativo de Newton, esta subrutina calcula u na raíz de la ecuación no lineal.

$$D_1 = 0 \quad (\text{para secuencia positiva})$$

$$\text{ó} \quad D_0 = 0 \quad (\text{para secuencia cero})$$

de acuerdo a un valor inicial  $x_0$  dado.

El algoritmo seguido es el siguiente: <sup>3</sup>

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)} \quad (i=0,1,2,\dots)$$

En cada iteración se necesita evaluar  $f(x)$  y  $f'(x)$  y para ello se utiliza la subrutina FCT.

El proceso iterativo termina si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\delta \leq \epsilon$$

y

$$|f(x_{i+1})| \leq 100 \cdot \epsilon$$

donde:

$$\delta = \begin{cases} \left| \frac{x_{i+1} - x_i}{x_i + 1} \right| & \text{si } |x_{i+1}| > 1 \\ |x_{i+1} - x_i| & \text{si } |x_{i+1}| \leq 1 \end{cases}$$

El valor  $\epsilon$  es el criterio de convergencia y viene dado como dato del programa.

Si estas condiciones no se cumplen luego de un número máximo de iteraciones (dato del programa) aparece un mensaje de error.

Cuando la derivada  $f'(x)$ , evaluada en la subrutina FCT es igual a cero, el proceso se detiene y aparece un mensaje de error. Si para un

valor  $x_{i+1}$  se cumplen las condiciones indicadas entonces  $x_{i+1}$  es la raíz de la función considerada.

Nota importante: Esta subrutina calcula solamente una raíz de la función. Si existen más raíces el proceso debe repetirse completamente con un nuevo valor inicial  $x_0$ .

#### SUBROUTINA ORDEN

Si se tiene un vector formado por varios números complejos, esta subrutina los ordena en forma ascendente tomando en consideración únicamente la parte imaginaria y finalmente les asigna una variable suscrita  $s(i)$ .

#### SUBROUTINA CONPF

Esta subrutina calcula las frecuencias de oscilación del sistema y para ello parte de un valor inicial:

$$S = PR + j PIM$$

donde las variables PR y PIM son datos del programa.

Utilizando este dato como valor inicial  $x_0$ , llama a la subrutina RTNI que calcula la raíz de la función  $D_1(s)$  ó  $D_0(s)$ .

En la sección 3.3. se indicó que las frecuencias de oscilación tienen la forma general

$$s_n = a_n \pm j b_n$$

Para la aplicación del Teorema del Residuo (ver Apéndice B) se necesita determinar solo una de las frecuencias complejas conjugadas, es decir:

$$s_n = a_n + j b_n$$

Matemáticamente la función  $D_1(s)$  (ó  $D_0(s)$  es secuencia cero) puede tener raíces cuya parte real sea positiva, pero en la sección 3.3. se indicó que la parte real de la frecuencia compleja  $S$  corresponde a la atenuación y físicamente, una atenuación positiva no tiene sentido.

Por las razones indicadas, la raíz calculada en la subrutina RINI debe pasar por un proceso de diagnóstico: Si la parte real de la raíz calculada es positiva ó la parte imaginaria es negativa, la raíz determinada no es válida para el estudio y se rechaza.

Es necesario por lo tanto, partir de un nuevo valor inicial  $x'_0$  y empezar el proceso nuevamente.

A partir de una serie de pruebas desarrolladas en el computador con las frecuencias de oscilación, se determinó que, su parte real o atenuación, se mantiene constante o bien tiene un margen de variación muy pequeño, mientras que, la parte imaginaria o frecuencia angular sufre variaciones considerables.

Por lo tanto, para determinar el nuevo valor inicial  $x'_0$  basta con incrementar únicamente la parte imaginaria PIM, pero, un incremento muy pequeño de PIM puede conducir a la misma raíz que fue desechada y con un incremento muy grande se pueden pasar por alto una o algunas raíces.

Luego de experimentar en varios casos, con diferentes valores se concluyó que el valor adecuado para el intervalo es 1000.

Es necesario señalar que utilizando este valor no se elimina completamente la probabilidad de que, con el nuevo  $x'_0$ , se llegue a una raíz ya determinada anteriormente, pero disminuye notablemente.

El proceso se repite y las raíces que satisfacen las condiciones indicadas son almacenadas en un vector R.

El número de frecuencias naturales de oscilación que se requiere para tener una respuesta satisfactoria puede variar de 20 a  $40^3$ , pero en el computador se comprobó que la diferencia entre una respuesta con 20 componentes de frecuencia y una respuesta con 40 componentes es mínima y el tiempo que se requiere para obtener 40 raíces es mucho mayor que el necesario para calcular 20 raíces.

El programa por lo tanto se ha estructurado para trabajar con veinte componentes de frecuencia y este valor no puede ser modificado.

Una vez obtenidas todas las raíces o frecuencias necesarias, es importante ordenarlas en forma ascendente atendiendo la parte imagi-

naria solamente, y para ello se utiliza la subrutina ORDEN.

Una vez ordenadas las frecuencias son almacenadas en un vector S.

#### SUBROUTINA VEST

Con los valores de los parámetros de secuencia positiva de la línea, la carga, la generación y la longitud de la línea, se calcula la amplitud y fase de la componente de frecuencia fundamental para voltajes.

De la ecuación (3.207), se tiene que el módulo es:

$$VABS2 = \left| \frac{1}{D_1} \right|_{s=j\omega} \quad (4.14.a)$$

y el ángulo de fase es:

$$\alpha = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(1/D_1)}{\text{Re}(1/D_1)} \right\} \quad (4.14.b)$$

Si se introducen como datos los parámetros de la línea de secuencia cero, la salida de la subrutina es:

$$VABS1 = \left| \frac{1}{D_0} \right|_{s=j\omega} \quad (4.15.a)$$

$$\alpha_0 = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(1/D_0)}{\text{Re}(1/D_0)} \right\} \quad (4.15.b)$$

## SUBROUTINA VTRAN

Con los valores de los parámetros de la línea, de la carga, la generación, la longitud de la línea y las frecuencias naturales de oscilación, esta subrutina calcula la amplitud y fase correspondiente a cada componente de frecuencia para voltajes.

Si se introducen los parámetros de secuencia positiva, las variables de salida son:

$$VABS2Ln = \left| \frac{2(s_n - a_n)}{(s_n^2 + w^2) DERF_1} \right|_{s_n = a_n + j b_n} \quad (4.16.a)$$

$$\alpha_n = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im } H(s_n)}{\text{Re } H(s_n)} \right\} \quad (4.16.b)$$

Para secuencia cero la subrutina calcula:

$$VABS1Rn = \left| \frac{2(s_{n_0} - a_{n_0})}{(s_{n_0}^2 + w^2) DERF} \right|_{s_{n_0} = a_{n_0} + j b_{n_0}} \quad (4.17.a)$$

$$\alpha_{n_0} = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im } H(s_{n_0})}{\text{Re } H(s_{n_0})} \right\} \quad (4.17.b)$$

## SUBROUTINA IVEST

Con los parámetros de la línea, la carga, la generación y la longitud de la línea, calcula la amplitud y fase de la componente de corriente a frecuencia fundamental.

En secuencia positiva:

$$IABS2 = \left| \frac{G_1}{D_1} \right|_{s=jw} \quad (4.18.a)$$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G_1/D_1)}{\text{Re}(G_1/D_1)} \right\} \quad (4.18.b)$$

En secuencia cero:

$$IABS1 = \left| \frac{G_0}{D_0} \right|_{s=jw} \quad (4.19.a)$$

$$\beta = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im}(G_0/D_0)}{\text{Re}(G_0/D_0)} \right\} \quad (4.19.b)$$

#### SUBROUTINA IVTRAN

Con los parámetros de la línea, la carga, la generación, la longitud de la línea y las frecuencias naturales de oscilación calcula la amplitud y fase de la componente de corriente correspondiente a cada frecuencia de oscilación.

Para secuencia positiva:

$$IABS2Rn = \left| \frac{2(s_n - a_n) G_1}{(s^2 + w^2) \text{DERF}_1} \right|_{s_n=a_n+j b_n} \quad (4.20.a)$$

$$\beta_n = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im} H(s)}{\text{Re} H(s)} \right\} \quad (4.20.b)$$

Para secuencia cero:

$$IABS1R_n = \left| \frac{2(s_{n_0} - a_{n_0})G_0}{(s_{n_0}^2 + w^2)DERF_0} \right|_{s_{n_0}=a_{n_0} + j b_{n_0}} \quad (4.21.a)$$

$$\beta_{n_0} = \text{tg}^{-1} \left\{ \frac{\text{Im } H(s_{n_0})}{\text{Re } H(s_{n_0})} \right\} \quad (4.22.b)$$

#### SUBROUTINA VALOR

Conociendo el voltaje aplicado a cada una de las fases de la línea y el ángulo de energización de la fase A, calcula las constantes VAL1 a VAL8 de acuerdo a las ecuaciones (3.40), (3.41), (3.46), (3.47), (3.48), (3.49), (3.50) y (3.51).

#### SUBROUTINA VMAYOR

Determina el valor máximo ya sea de voltaje o de corriente en cada fase a partir del voltaje o corriente calculado para cada intervalo de tiempo.

#### SUBROUTINA PLOT

Grafica los resultados de voltaje y corriente obtenidos, utilizando una escala fija en el eje x y que corresponde o bien al voltaje expresado en p.u. o bien a la corriente expresada en KA y una escala variable en el eje de tiempo que depende de los datos de entrada correspondientes al tiempo total de observación del transitorio e intervalo de tiempo.

## CAPITULO V

EJEMPLOS Y APLICACIONES

Con el fin de poder establecer una comparación entre las señales de voltaje y corriente que se presentan en los diferentes tipos de energización, es conveniente referir todos los ejemplos que se realizan a una sola línea.

Para tal efecto se ha seleccionado la línea en base a la cual realizan el estudio de transitorios: Uram y Miller<sup>1-2</sup>, Mauricio Leser<sup>3</sup> y Francisco García<sup>4</sup>, lo que permite comprobar la validez del modelo matemático desarrollado en esta tesis.

Dicha línea tienen las siguientes características:

	SECUENCIA POSITIVA	SECUENCIA CERO
Resistencia	$0.43443 \times 10^{-1} \Omega/\text{Km}$	$0.24096 \times 10^0 \Omega/\text{km}$
Inductancia	$0.12482 \times 10^{-2} \text{H}/\text{Km}$	$0.32398 \times 10^{-2} \text{H}/\text{Km}$
Capacitancia	$0.92369 \times 10^{-8} \text{F}/\text{Km}$	$0.54070 \times 10^{-8} \text{F}/\text{Km}$
Imp. característica	$\Omega_1 = 367.6 \Omega$	$\Omega_0 = 774 \Omega$
Velocidad de propagac.	294506.4 Km/seg	238925.6 Km/seg
Longitud de la línea	251.43 Km	

Tabla 5.1.

Los datos complementarios son:

Voltaje nominal : 345 KV

Potencia base : 100 MVA

Impedancia base : 1190  $\Omega$

### 5.1. COMPROBACION DE LA VALIDEZ DEL MODELO MATEMATICO

En la figura 5.1. se muestran las señales obtenidas por Uram y Miller<sup>1</sup> correspondientes a los voltajes en el terminal de recepción - cuando la línea se energiza en vacío desde una barra infinita. El ángulo de energización de la fase A es 0°.

En la figura 5.2. se presentan las señales obtenidas por Francisco García<sup>4</sup> y en las figuras 5.3.a., 5.3.b. y 5.3.c. las señales obtenidas por Mauricio Leser<sup>3</sup> para las mismas condiciones de energización.

En la figura 5.4. se muestran las señales de voltaje obtenidas en las mismas condiciones y utilizando el modelo matemático generalizado desarrollado en esta tesis, se puede comprobar que coinciden exactamente con los resultados dados en las referencias.

Así mismo para energización con carga resistiva de 1190 (1 pu) desde una barra infinita las señales de Uram y Miller, figura 5.5. y Francisco García, figura 5.6. coinciden exactamente con los resulta-

dos obtenidos en esta Tesis, figura 5.7.

En la figura 5.8. se muestran las señales de voltaje en el terminal de recepción cuando la línea se energiza con carga resistiva de  $1190 \Omega$  desde una fuente resistiva de  $15 \Omega/\text{fase}$  que fueron obtenidas por Francisco García.

Se puede notar que estas coinciden en todos sus puntos con las señales obtenidas en esta Tesis y que se muestran en la figura 5.9.

Se puede concluir por lo tanto que el modelo matemático desarrollado es válido y puede ser utilizado para todos los tipos de energización considerados en esta tesis.

## 5.2. EFECTO DEL NUMERO DE COMPONENTES DE FRECUENCIA

En la sección 4.3.2. al describir el funcionamiento de la subrutina COMPF se indicó que el número de componentes de frecuencia que deben ser tomados en cuenta para el estudio puede variar entre 20 y 40 rango que es aconsejado por Mauricio Leser<sup>3</sup>, pero en el desarrollo de esta Tesis se comprobó que es más conveniente utilizar sólo veinte componentes de frecuencia, atendiendo principalmente al tiempo de ejecución del programa.

La razón radica principalmente en el hecho que, el modelo matemático planteado por Mauricio Leser permite calcular las frecuencias de oscilación del sistema evaluando una ecuación en la que se varía un

contador  $n$  que determina el armónico correspondiente; mientras que, el modelo matemático desarrollado en esta Tesis, no permite calcular matemáticamente dichas frecuencias sino únicamente a través de métodos iterativos.

En el modelo de Mauricio Leser, la diferencia del tiempo requerido por el computador para calcular veinte o cuarenta valores es mínimo, por lo tanto el número de componentes de frecuencia a considerarse no constituye un problema.

En esta Tesis, por el contrario el número de frecuencias que se consideran debe ser optimizado ya que, la obtención de cada una de ellas implica un proceso iterativo completo que requiere de un tiempo de ejecución bastante considerable.

Luego de realizar algunas pruebas en el computador se determinó que la diferencia entre respuestas con cuarenta componentes y respuestas con veinte componentes es despreciable; por lo tanto todo el estudio se hace en base a veinte frecuencias de oscilación.

Para comprobar esta afirmación se presentan en la figura 5.10., las señales de voltaje en el terminal de recepción cuando la línea se energiza en vacío desde una barra infinita utilizando cuarenta componentes de frecuencia y en la figura 5.11. las señales que se obtienen al considerar veinte componentes de frecuencia.

Además se adjuntan en las tablas 5.2. y 5.3. las frecuencias empleadas en el primero y segundo casos, respectivamente.

Se puede comprobar que las dos señales mostradas prácticamente no tienen ninguna diferencia.

### 5.3. APLICACIONES

El programa digital está estructurado de tal forma que permite calcular los voltajes en el terminal de recepción y las corrientes en el terminal de envío de la línea, para las diferentes condiciones de energización detalladas anteriormente.

La posibilidad de incluir tiempos de retardo en el cierre de cada uno de los polos del disyuntor y de variar el ángulo de energización, provee al programa de un campo de aplicación bastante amplio, con una serie de alternativas que se describen a continuación.

#### 5.3.1. Efecto del ángulo de energización

La magnitud de los sobrevoltajes por energización depende principalmente del ángulo de cierre del disyuntor, con referencia al ángulo de la fase A, ésto se puede comprobar analizando los resultados obtenidos al energizar la línea con ángulos de  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  en diferentes condiciones.

- a) Energización en vacío desde una barra infinita considerando cierre simultáneo.

Voltaje máximo (p.u) (valor absoluto)			
ANGULO (Figura)	FASE A	FASE B	FASE C
0° (Fig. 5.4)	1.189	1.986	1.954
30° (Fig. 5.12)	1.785	1.923	1.612
60° (Fig. 5.13)	1.987	1.954	1.189
90° (Fig. 5.14)	1.923	1.612	1.785

Corriente máxima ( KA ) (valor absoluto )			
ANGULO (Figura)	FASE A	FASE B	FASE C
0° (Fig. 5.4.b)	0.481	2.667	2.377
30° (Fig. 5.12.b)	1.707	2.912	1.205
60° (Fig. 5.13.b)	2.667	2.377	0.481
90° (Fig. 5.14.b)	2.912	1.205	1.707

b) Energización con carga resistiva de 1190 (1.0 p.u) considerando cierre simultáneo.

Voltaje máximo (p.u.) (valor absoluto)			
ANGULO (Figura)	FASE A	FASE B	FASE C
0° (Fig. 5.7)	1.143	1.575	1.150
30° (Fig. 5.15)	1.411	1.519	1.068
60° (Fig. 5.16)	1.575	1.150	1.043
90° (Fig. 5.17)	1.519	1.068	1.410

Corriente máxima (KA ) (valor absoluto)			
ANGULO (Figura)	FASE A	FASE B	FASE C
0° (Fig. 5.7.b)	0.580	2.866	2.591
30° (Fig. 5.15.b)	1.814	3.150	1.337
60° (Fig. 5.16.b)	2.866	2.591	0.580
90° (Fig. 5.17.b)	3.150	1.337	1.814

c) Energización con carga R - L, considerando cierre simultáneo:

ANGULO (Figura)	Voltaje máximo (p.u.) (valor absoluto)		
	FASE A	FASE B	FASE C
0° (Fig. 5.18)	1.056	1.872	1.980
30° (Fig. 5.19)	1.625	1.910	1.570
60° (Fig. 5.20)	1.872	1.980	1.056
90° (Fig. 5.21)	1.910	1.570	1.625

ANGULO (Figura)	Corriente máxima ( KA ) (valor absoluto)		
	FASE A	FASE B	FASE C
0° (Fig. 5.18.b)	0.448	2.812	2.603
30° (Fig. 5.19.b)	1.744	3.126	1.383
60° (Fig. 5.20.b)	2.812	2.603	0.448
90° (Fig. 5.21.b)	3.126	1.383	1.744

### Conclusiones:

- 1) En los tres tipos de energización, el menor sobrevoltaje en la fase A se tiene cuando ésta se cierra a  $0^\circ$ , en la fase B cuando la fase A cierra a  $90^\circ$  y en la fase C, cuando el ángulo de cierre de la fase A es  $60^\circ$ .

El comportamiento de las corrientes es exactamente el mismo.

- 2) El caso más crítico de las corrientes se presenta cuando la energización se produce a  $0^\circ$  ó  $60^\circ$  en lo que se refiere a sobrevoltaje, pero al hablar de corriente, el caso más crítico se presenta cuando la energización se realiza a  $30^\circ$  ó  $90^\circ$ .

#### 5.3.2. Efecto de cierre sincrónico o secuencial del disyuntor

Del análisis realizado en la sección 5.3.1. se concluye que un método para disminuir los sobrevoltajes es cerrar las fases cuando la señal de voltaje de la fuente correspondiente a cada fase para por cero, es decir cerrar el disyuntor en forma sincrónica o secuencial.

Así la fase A debe cerrar a  $0^\circ$ , la fase B a  $120^\circ$  y la fase C a  $240^\circ$ .

Esto se puede modelar haciendo uso de los tiempos de retardo:

- En la fase A                     $T_0 = 0$  mseg

- En la fase B                     $T_1 = 5.5$  mseg

- En la fase C  $T_2 = 11.0$  mseg

Los resultados obtenidos se muestran a continuación:

Tipo de energización (Figura)	Voltaje máximo (p.u.) (valor absoluto)		
	FASE A	FASE B	FASE C
En vacío (Fig. 5.22)	1.494	1.655	1.806
Carga R (Fig. 5.23)	1.042	1.095	1.046
Carga R - L (Fig. 5.24)	1.067	1.850	1.660

Tipo de energización (Figura)	Voltaje máximo (KA) (valor absoluto)		
	FASE A	FASE B	FASE C
En vacío (Fig. 5.22.b)	0.928	1.479	1.543
Carga R (Fig. 5.23.b)	0.490	0.439	0.433
Carga R - L (Fig. 5.24.b)	0.735	1.181	0.806

Efecto del cierre secuencial se puede visualizar más claramente en el siguiente cuadro comparativo.

Tipo de cierre Tipo de energización		Voltaje máximo (p.u) (valor absoluto)		
		C. simultáneo 0° y 60°	C. simultáneo 30° y 90°	C. secuencial
En vacío		1.986	1.923	1.806
Carga R		1.575	1.519	1.095
Carga R - L		1.980	1.910	1.85

Tipo de cierre Tipo de energización		Corriente máxima (KA) (valor absoluto)		
		C. simultáneo 0° y 60°	C. simultáneo 30° y 90°	C. secuencial
En vacío		2.667	2.912	1.543
Carga R		2.866	3.150	0.490
Carga R - L		2.812	3.126	1.181

En estos resultados se comprueba la validez del cierre secuencial - del disyuntor como método para disminuir los voltajes y corrientes transitorias por energización.

### 5.3.3. Efecto del acoplamiento mutuo entre fases

El modelo matemático empleado para representar a la línea de transmisión considera el acoplamiento mutuo entre fases.

En el programa digital, este efecto puede obtenerse haciendo uso de los tiempos de retardo en el cierre de las fases, de la siguiente manera:

- Tiempo de retardo en el cierre de la fase A  $T_0 = 0$  mseg.
- Tiempos de retardo en el cierre de las fases A y B  $T_1$  y  $T_2$  iguales al tiempo de observación del transitorio.

Esto quiere decir que únicamente cierra la fase A, mientras que B y C permanecen abiertos.

Introduciendo estos datos al computador se tienen los siguientes resultados:

T. de energización (Figura)	Voltaje máximo (p.u.) (valor absoluto)		
	FASE A	FASE B	FASE C
En vacío (Fig. 5.25)	1.226	0.187	0.159
Carga R (Fig. 5.26)	1.031	0.082	0.082
Carga R - L (Fig. 5.27)	1.067	0.123	0.123

T. de energización (Figura)	Corriente máxima ( KA ) (valor absoluto)		
	FASE A	FASE B	FASE C
En vacío (Fig. 5.25.b)	0.405	0.133	0.133
Carga R (Fig. 5.26.b)	0.492	0.089	0.089
Carga R - L (Fig. 5.27.b)	0.380	0.114	0.114

Teóricamente, el voltaje y la corriente en las fases que no han cerrado son iguales a cero, pero por el acoplamiento mutuo aparece en las fases B y C un pequeño voltaje inducido por la fase A y por efecto de éste, aparece también una corriente de valor reducido.

Por otro lado, el máximo voltaje en la fase A cuando esta se energiza en vacío y las fases B y C quedan abiertas, es de 1.226 p.u. mientras que al producirse el cierre simultáneo a  $0^\circ$ , caso analizado anteriormente, el máximo voltaje en la misma fase es de 1.189 p.u. Esta diferencia se produce también por efecto del acoplamiento mutuo entre fases.

#### 5.3.4. Efecto de la carga conectada en el terminal de recepción

El tipo de carga conectada a la línea influye en la magnitud de los voltajes y en la forma de las señales.

Al energizar la línea en vacío, desde una barra infinita, figura 5.4 se nota la presencia de picos pronunciados superpuestos en una sinusoide de frecuencia nominal, pero hasta los 100 mseg, no se amortiguan totalmente. Este hecho puede explicarse al observar la Tabla 5.4. en la que se muestran las frecuencias de oscilación, amplitud y fase de cada componente de frecuencia.

La atenuación que es común para todas las frecuencias, tiene un valor muy pequeño, 17.4 db y por lo tanto los componentes transitorios están presentes durante un tiempo mayor.

Al conectar una carga resistiva, la atenuación es mucho mayor --- 391.47 db, por lo tanto los voltajes transitorios se atenúan rápidamente. Esto se puede comprobar observando la tabla 5.5. y la figura 5.7. en la que se nota que a partir de los 10 mseg la señal es perfectamente sinusoidal, con carga R - L, figura 5.18, la inductancia de la carga determina la presencia de una serie de picos pero la señal tiende a ser sinusoidal.

Al incluir la impedancia del generador los efectos son similares a los anotados.

#### 5.3.5. Efecto de la carga y de la impedancia del generador en las frecuencias de oscilación

Si se observan las tablas 5.4., 5.5., 5.6. y además las tablas 5.7, 5.8. y 5.9. que corresponden a la energización en vacío, con carga R

y con carga R - L desde un generador real se puede comprobar que la parte imaginaria de las frecuencias de oscilación o frecuencia angular prácticamente es independiente de los parámetros de la generación y de la carga y depende únicamente de los parámetros de la línea.

### 5.3.6. Variación de las frecuencias de oscilación con la longitud de la línea

Para la energización de la línea en vacío desde una barra infinita, con cierre simultáneo y ángulo de energización igual a  $0^\circ$ , variando la longitud de la línea desde 50 Km hasta 500 Kms y manteniendo constantes los parámetros de la línea se obtienen los resultados mostrados en las tablas 5.10. a 5.19.

En base a estos resultados se concluye que la parte real de las frecuencias complejas si o atenuación es completamente independiente de la longitud de la línea, mientras que la frecuencia angular de las mismas frecuencias complejas depende directamente de ella.

Las figuras 5.28. a 5.37. muestran la variación de los diez primeros armónicos con la longitud de la línea.

### 5.3.7. Espectro de frecuencias

El espectro de frecuencias, Fig. 5.37b es la representación de la amplitud de cada componente transitoria de Voltaje o corriente en fun

ción de la frecuencia angular correspondiente.

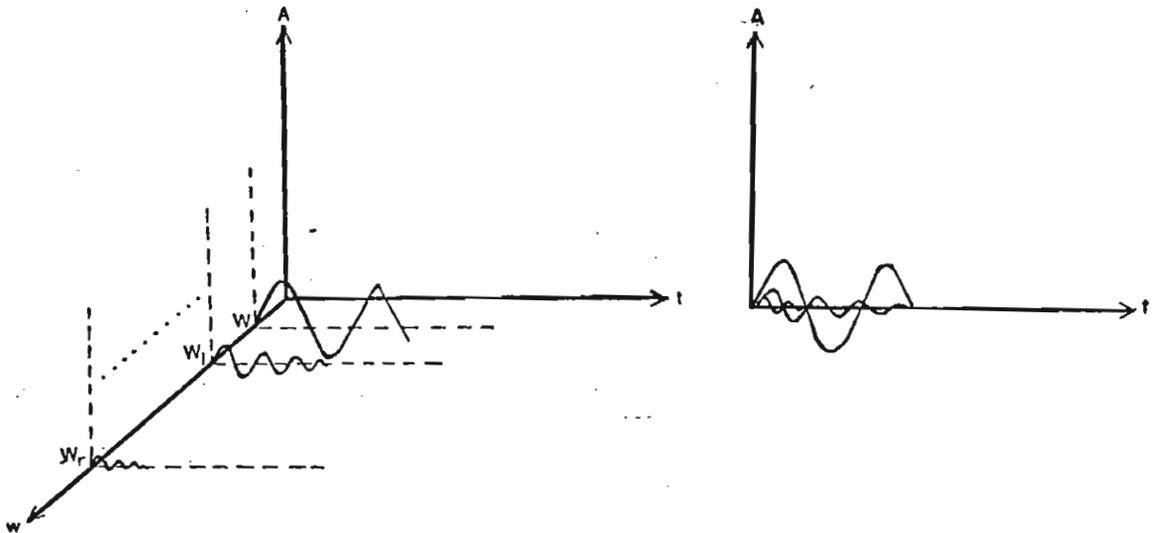


FIG. 5.37b

La obtención del espectro de frecuencias es muy importante porque proporciona información acerca de cuál armónica es la que más incide en el voltaje o corriente transitorias.

La principal utilidad de esta tesis radica en la posibilidad de conocer exactamente las frecuencias de oscilación, la respuesta debida a cada frecuencia y sobre todo la influencia de cada componente de frecuencia en la respuesta total a través de los espectros de frecuencia.

Este conocimiento del armónico más influyente permite disminuir notablemente el voltaje o corriente transitorios eliminado o suprimiendo dicho armónico mediante el filtro adecuado.

En las figuras 5.38. a 5.49. se presentan los espectros de frecuen-

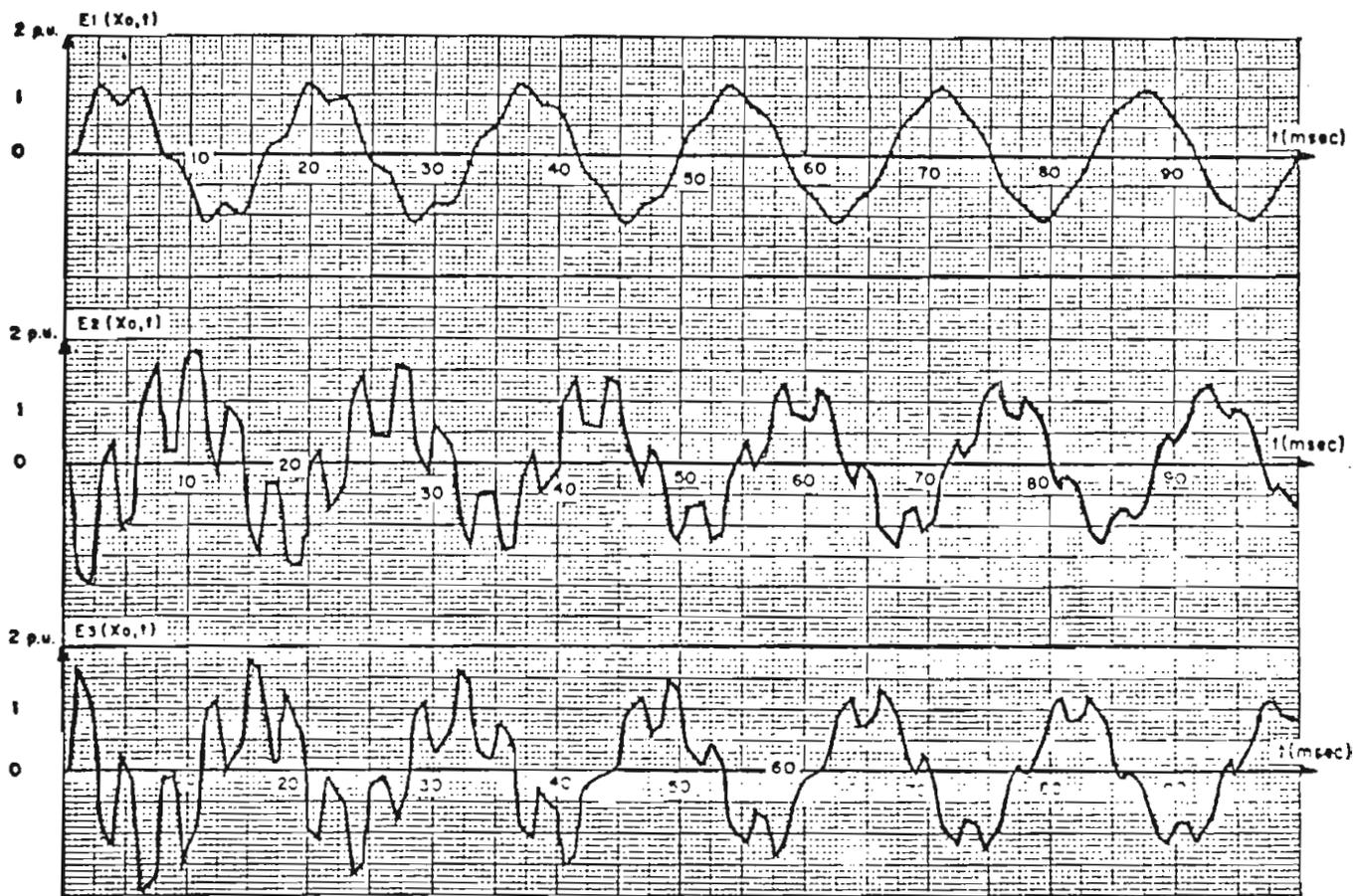
cia para  $t = 0$ , correspondientes a los ejemplos que se han analizado.

En el eje correspondiente a la frecuencia,  $W1$  corresponde a la componente fundamental y  $W2$  a  $W21$  corresponden a los veinte primeros armónicos.

#### 5.3.8. Variación del máximo sobrevoltaje con la longitud de la línea

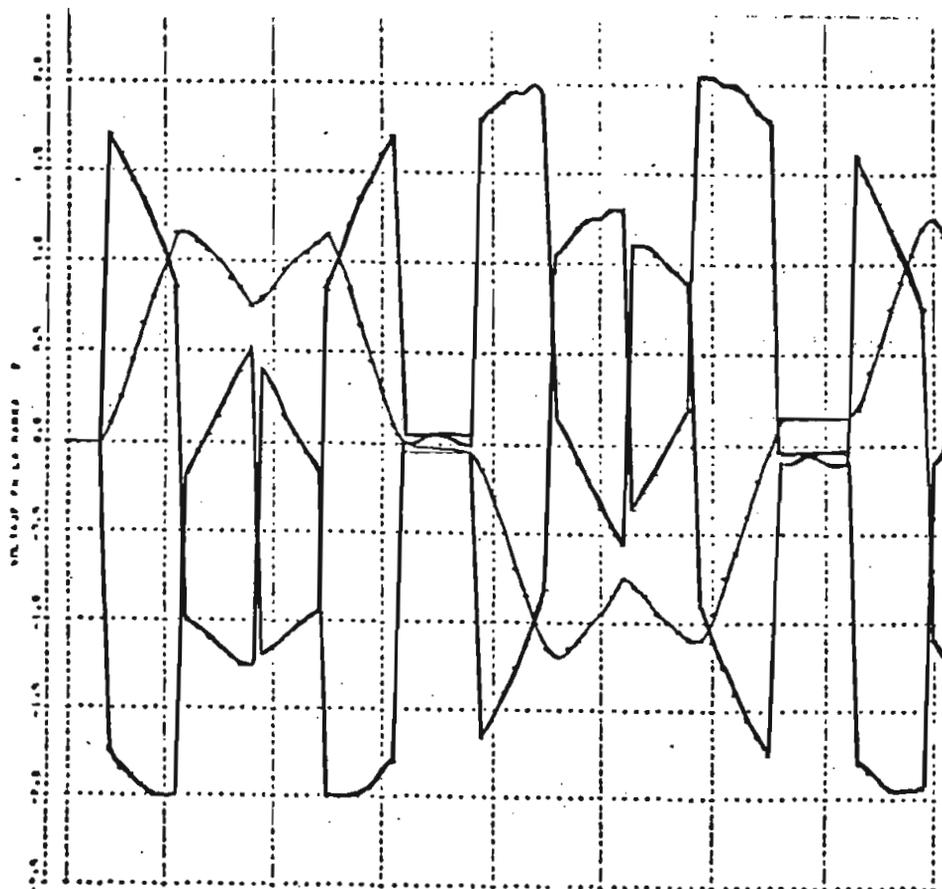
Para la energización de la línea en vacío desde una barra infinita considerando cierre simultáneo y ángulo de energización  $0^\circ$ , al variar la longitud de la línea desde 50 hasta 500 Km al máximo sobrevoltaje, en valor absoluto, de cada una de las fases varía tal como lo muestra la figura 5.50.

En las curvas mostradas se distinguen dos zonas, la primera corresponde a un comportamiento algo indefinido, con aumento y disminución del mayor sobrevoltaje; pero a partir de cierta longitud, diferente para cada fase, las curvas tienden definitivamente a crecer conforme aumenta la longitud de la línea.



Voltages at receiving end of unloaded line

**FIG. 5.1**



**FIG. 5.2**

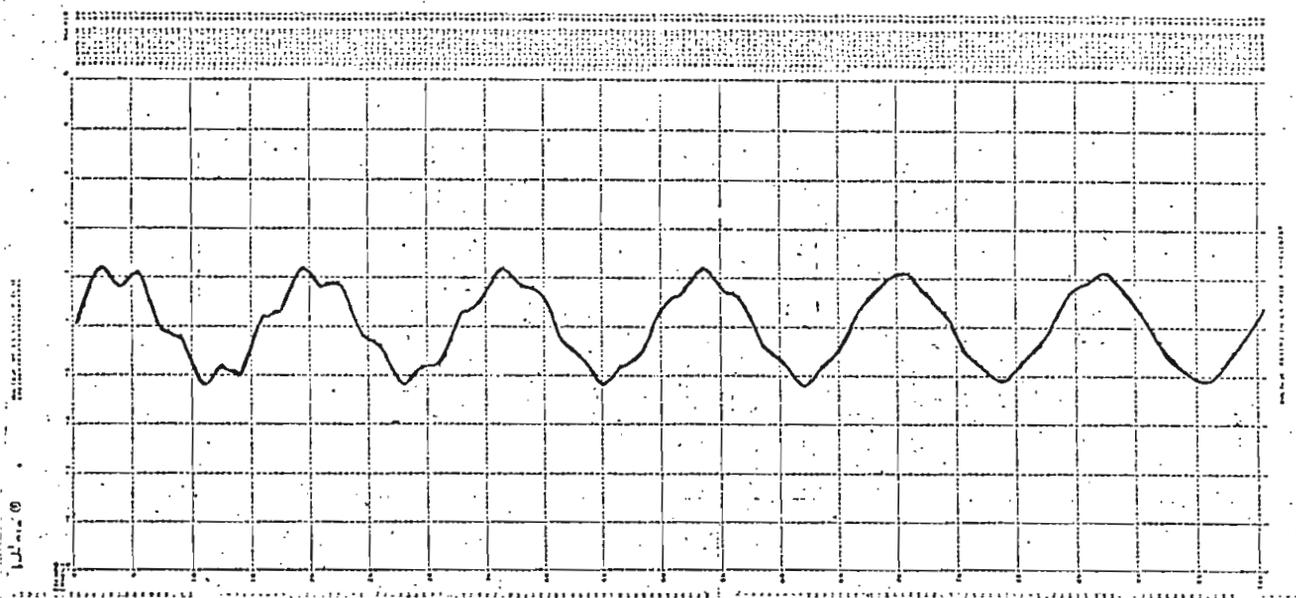


FIG. 5.3 a

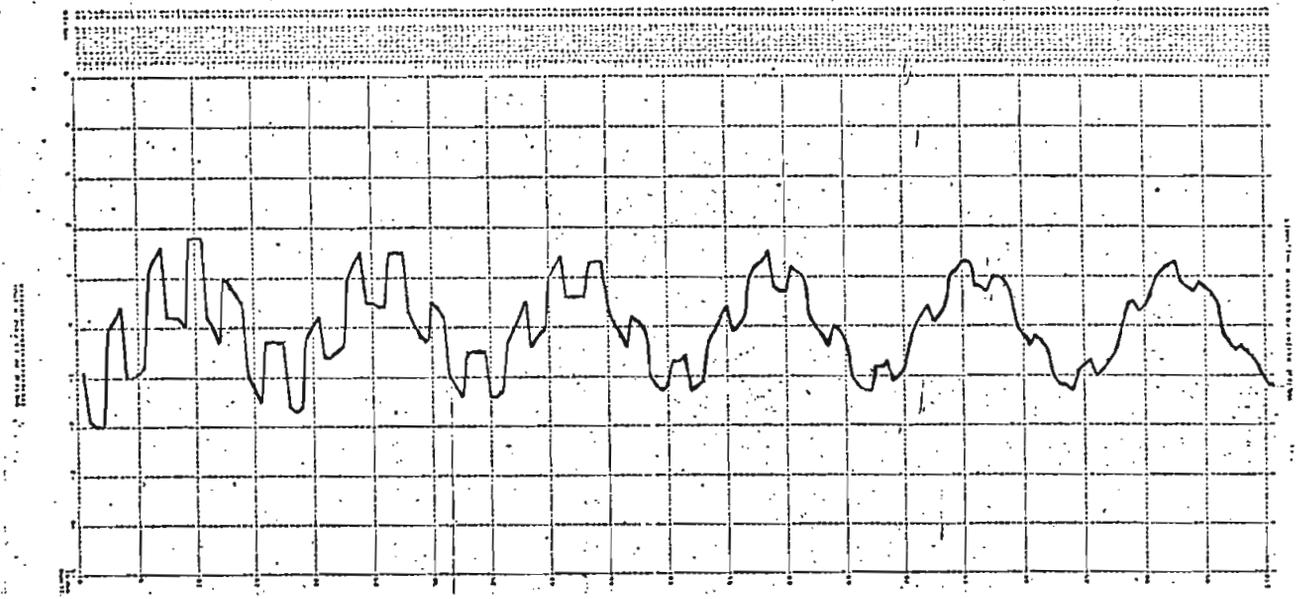
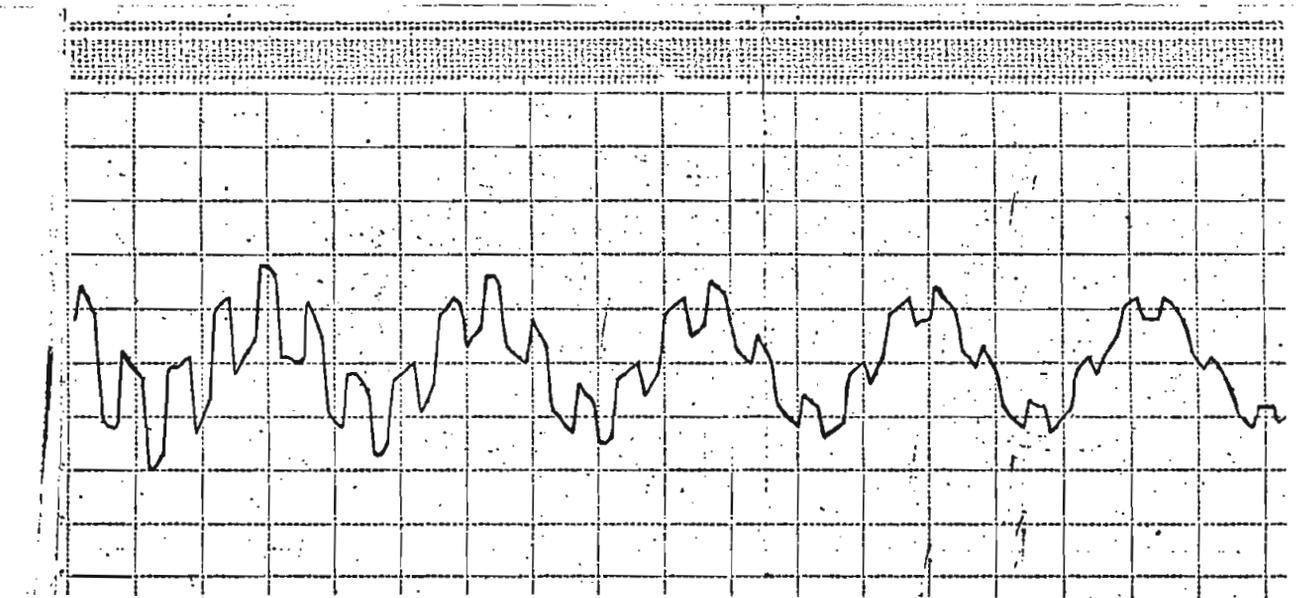


FIG. 5.3 b



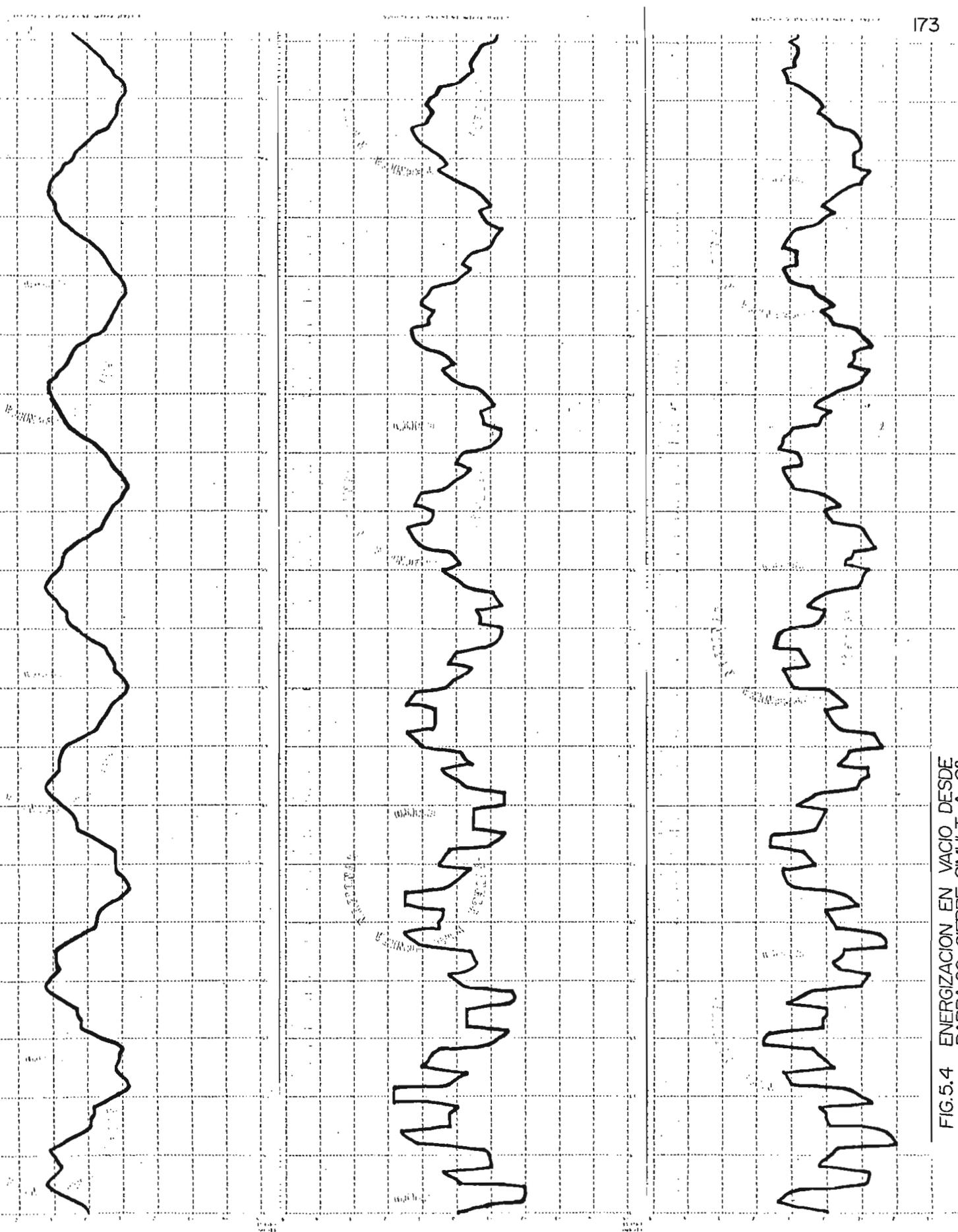


FIG.5.4 ENERGIACION EN VACIO DESDE

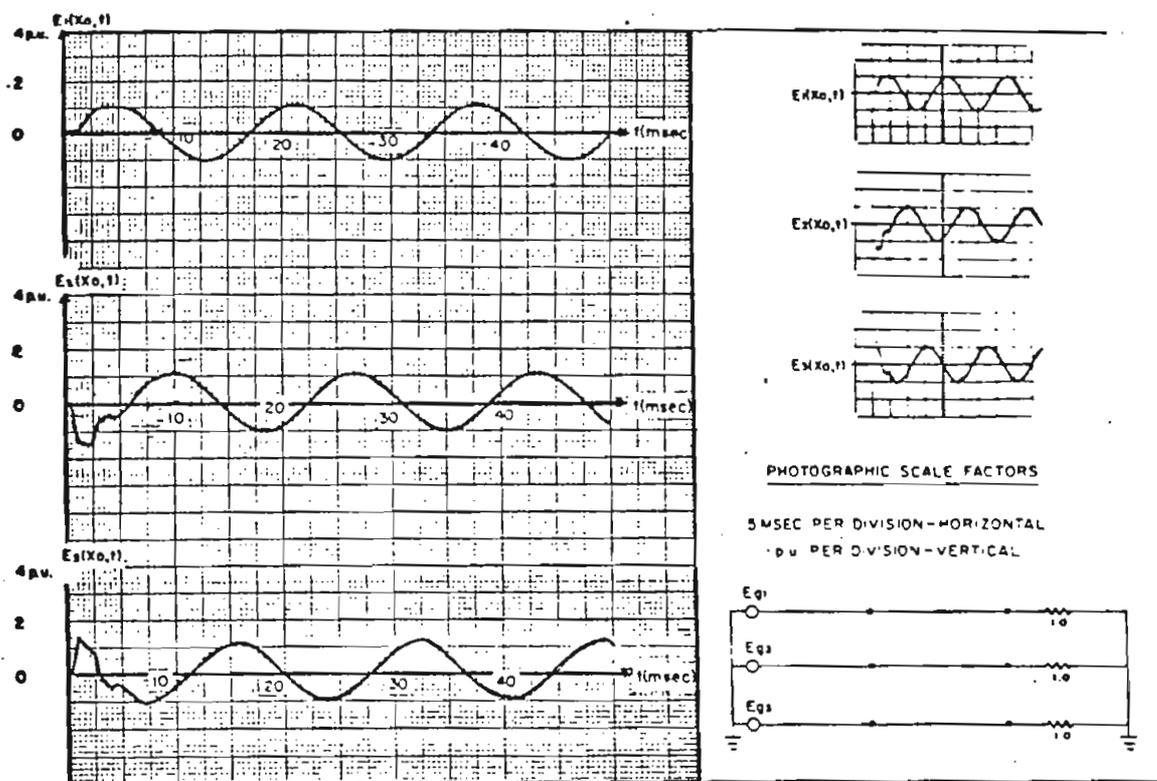


FIG. 5.5

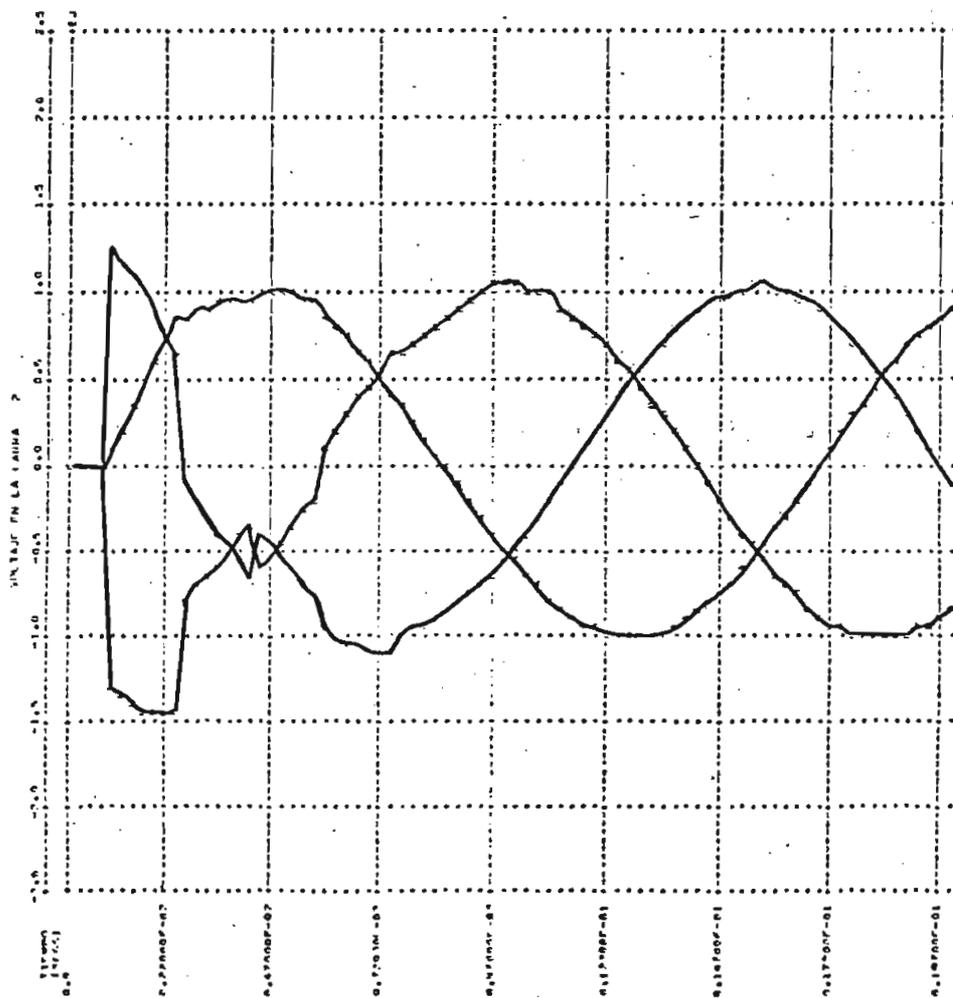
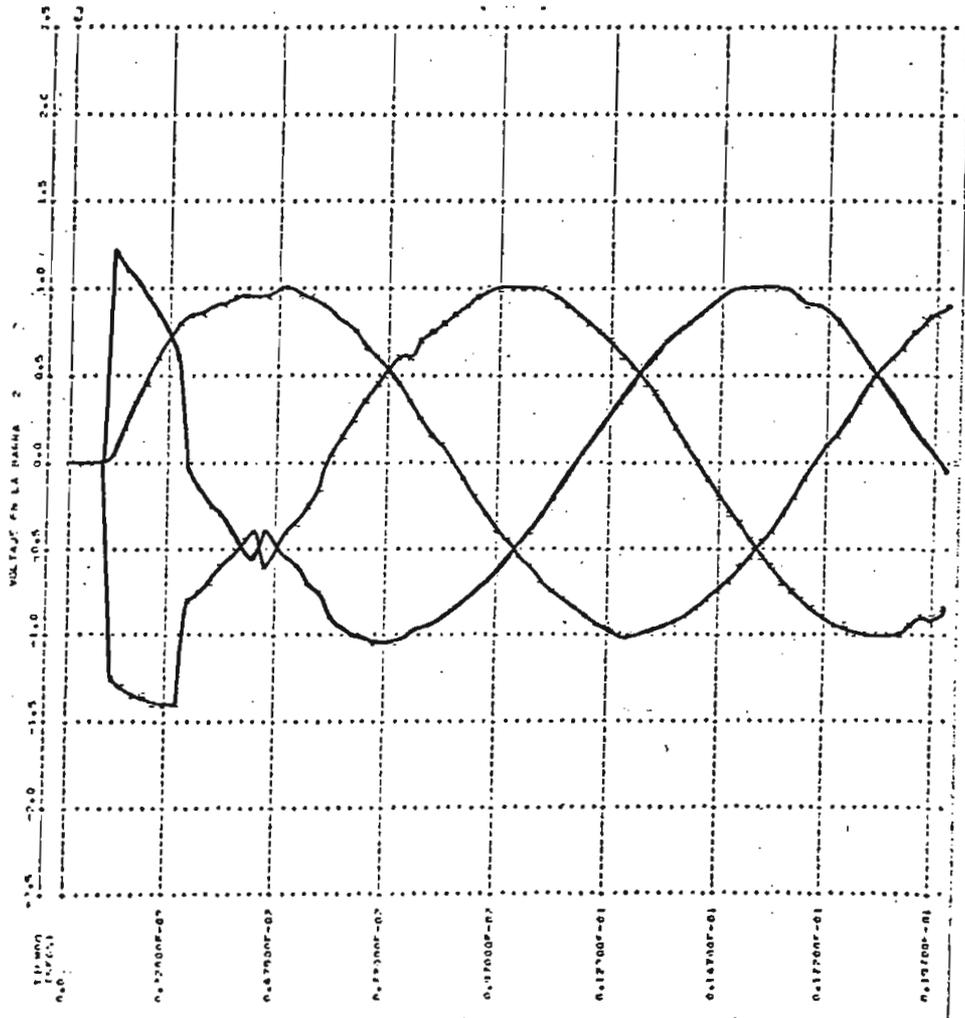


FIG. 5.6





**FIG. 5.8**

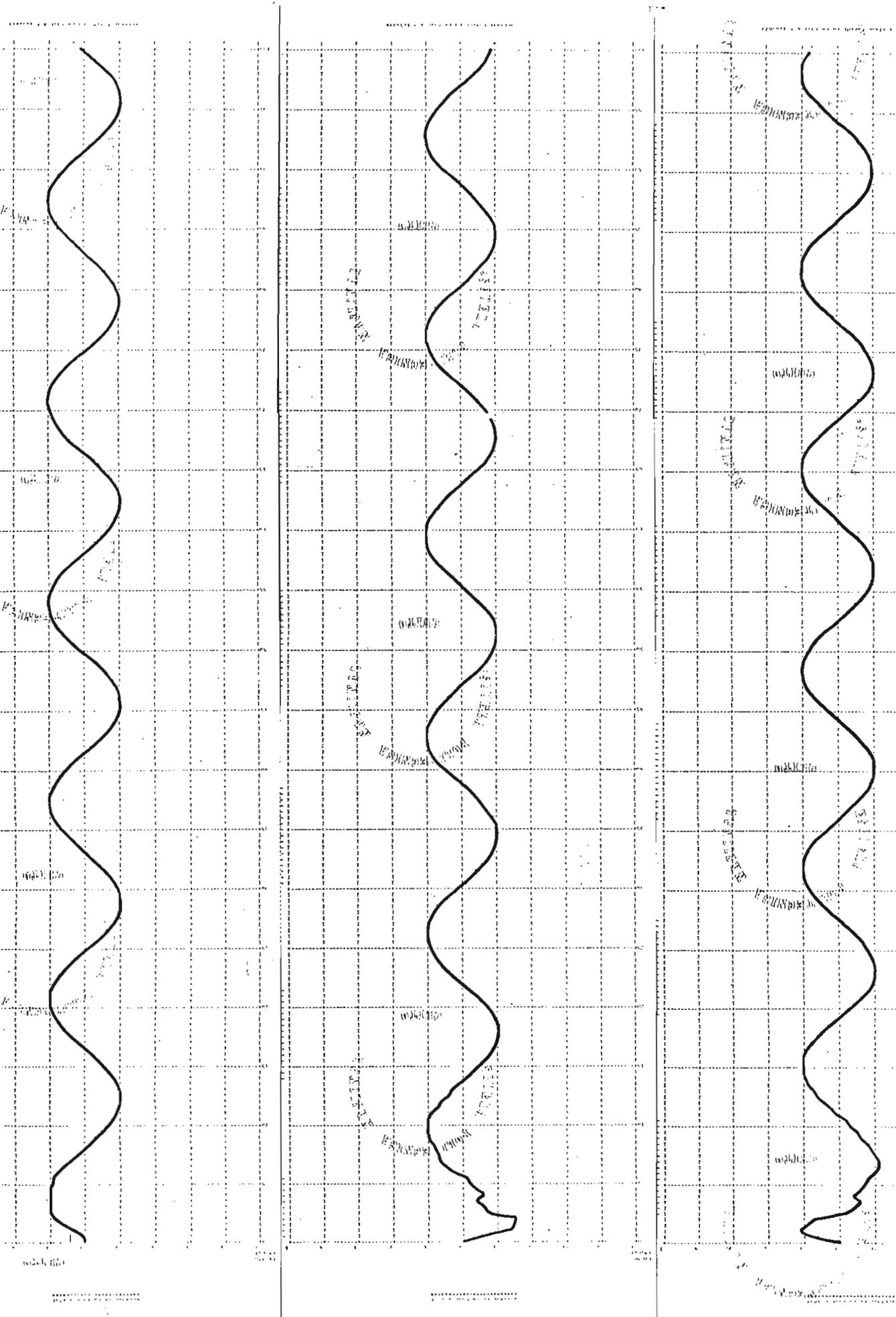


FIG.5.9 ENERGIZ. CON CARGA R DESDE UNA FUENTE RESISTIVA. C.SIMULT. A 0°

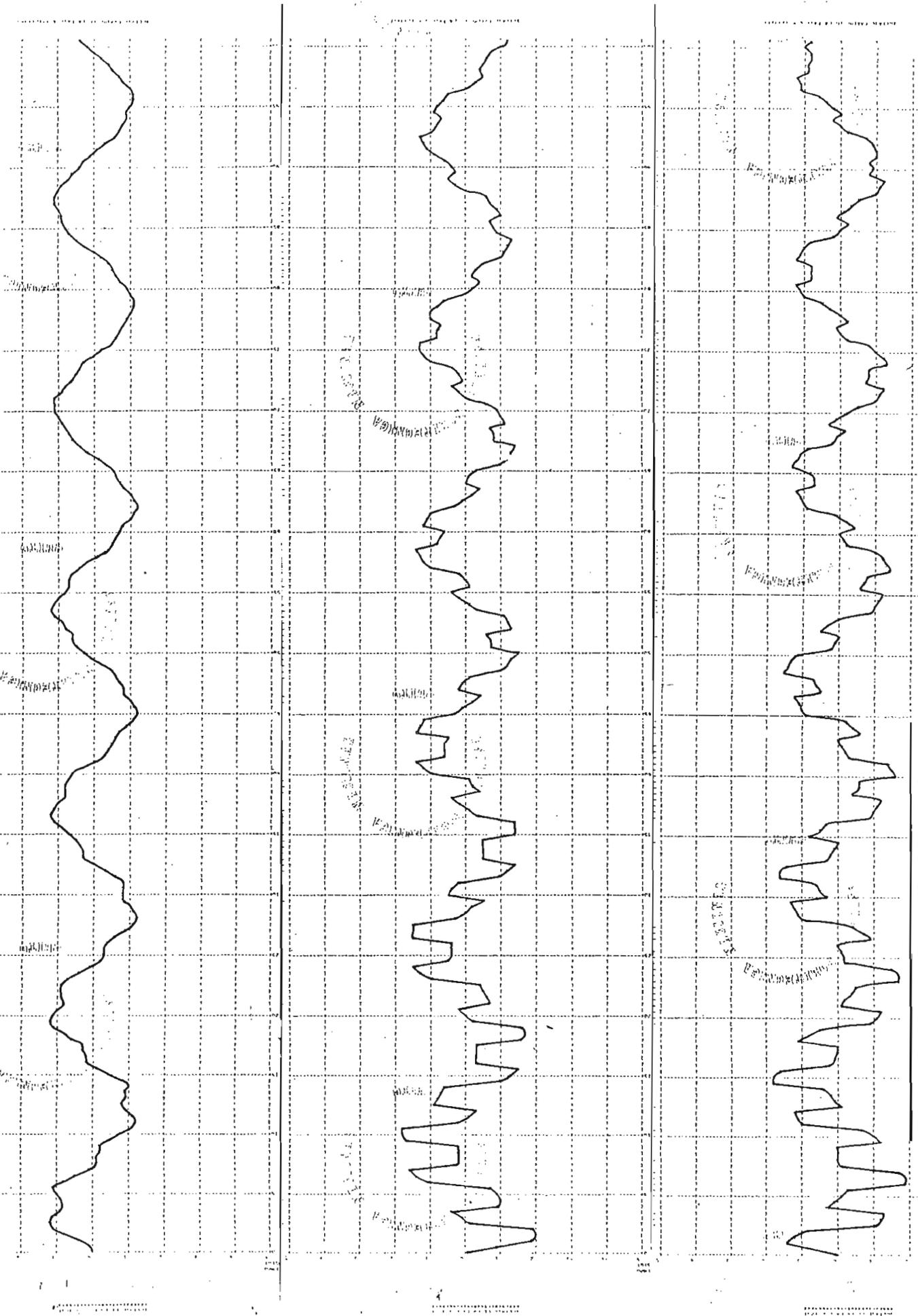


FIG.5.10 BARRA CO - EN VACIO - C.SIMUL. 0°  
SEÑAL DE VOLTAJE CON 40 COMP.

S( 1) =	-17.40	+J	1839.85
S( 2) =	-17.40	+J	5519.77
S( 3) =	-17.40	+J	9199.64
S( 4) =	-17.40	+J	12879.50
S( 5) =	-17.40	+J	16559.37
S( 6) =	-17.40	+J	20239.23
S( 7) =	-17.40	+J	23919.11
S( 8) =	-17.40	+J	27598.96
S( 9) =	-17.40	+J	31278.82
S(10) =	-17.40	+J	34958.69
S(11) =	-17.40	+J	38638.55
S(12) =	-17.40	+J	42318.41
S(13) =	-17.40	+J	45998.27
S(14) =	-17.40	+J	49678.13
S(15) =	-17.40	+J	53357.98
S(16) =	-17.40	+J	57037.84
S(17) =	-17.40	+J	60717.71
S(18) =	-17.40	+J	64397.57
S(19) =	-17.40	+J	68077.37
S(20) =	-17.40	+J	71757.25
S(21) =	-17.40	+J	75437.12
S(22) =	-17.40	+J	79117.00
S(23) =	-17.40	+J	82796.87
S(24) =	-17.40	+J	86476.75
S(25) =	-17.40	+J	90156.62
S(26) =	-17.40	+J	93836.44
S(27) =	-17.40	+J	97516.31
S(28) =	-17.40	+J	101196.25
S(29) =	-17.40	+J	104876.06
S(30) =	-17.40	+J	108555.94
S(31) =	-17.40	+J	112235.81
S(32) =	-17.40	+J	115915.62
S(33) =	-17.40	+J	119595.50
S(34) =	-17.40	+J	123275.37
S(35) =	-17.40	+J	126955.25
S(36) =	-17.40	+J	130635.06
S(37) =	-17.40	+J	134314.94
S(38) =	-17.40	+J	137994.81
S(39) =	-17.40	+J	141674.69
S(40) =	-17.40	+J	145354.56

R R C

**TABLA 5.2**

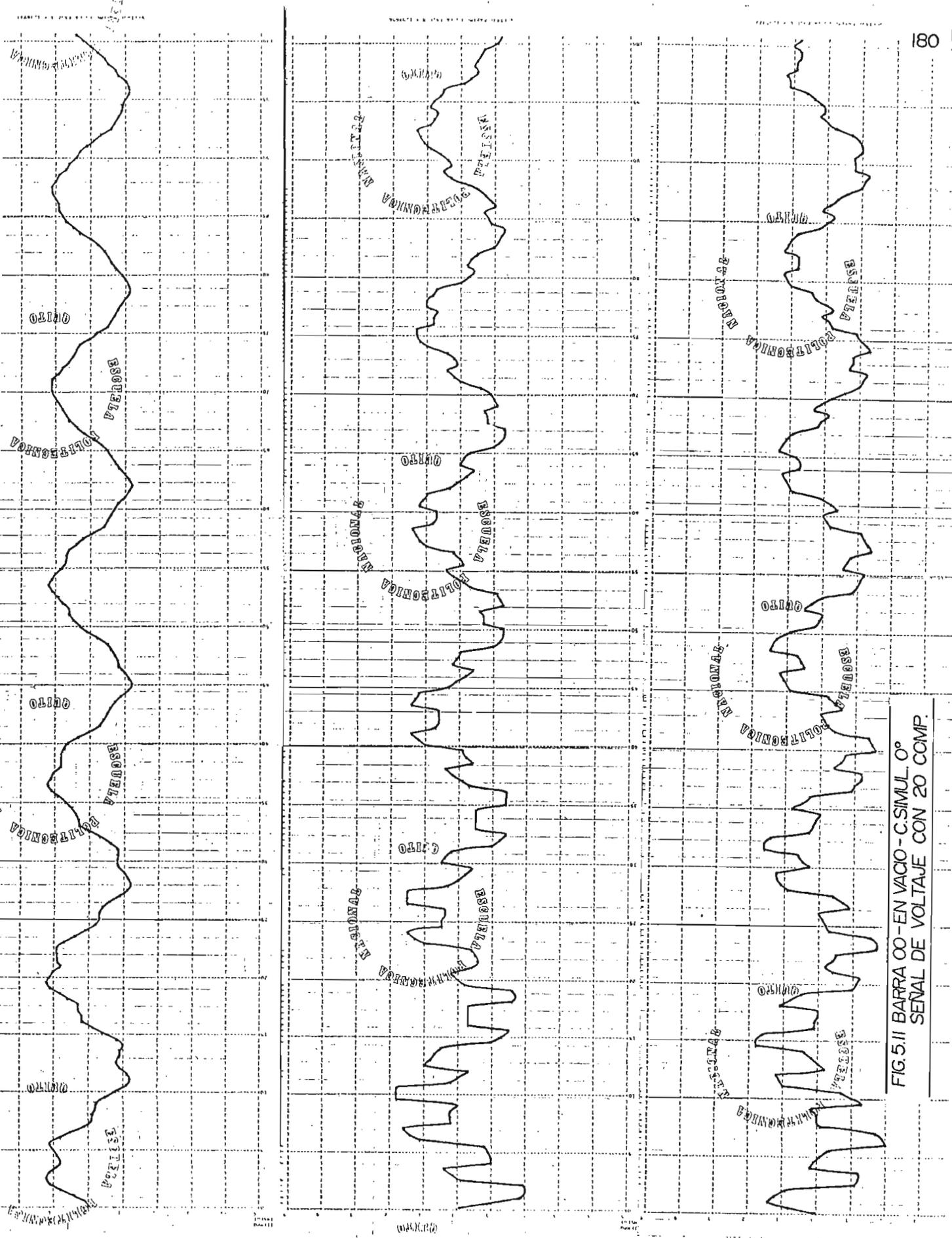


FIG.5.II BARRA 00 - EN VAGO - C.SIMUL. 0°  
SEÑAL DE VOLTAJE CON 20 COMP.

S( 1) =	-17.40	+J	1839.85
S( 2) =	-17.40	+J	5519.77
S( 3) =	-17.40	+J	9199.64
S( 4) =	-17.40	+J	12879.50
S( 5) =	-17.40	+J	16559.37
S( 6) =	-17.40	+J	20239.23
S( 7) =	-17.40	+J	23919.11
S( 8) =	-17.40	+J	27598.96
S( 9) =	-17.40	+J	31278.82
S(10) =	-17.40	+J	34958.69
S(11) =	-17.40	+J	38638.55
S(12) =	-17.40	+J	42318.41
S(13) =	-17.40	+J	45998.27
S(14) =	-17.40	+J	49678.13
S(15) =	-17.40	+J	53357.98
S(16) =	-17.40	+J	57037.84
S(17) =	-17.40	+J	60717.71
S(18) =	-17.40	+J	64397.57
S(19) =	-17.40	+J	68077.37
S(20) =	-17.40	+J	71757.25

**TABLA 5.3**

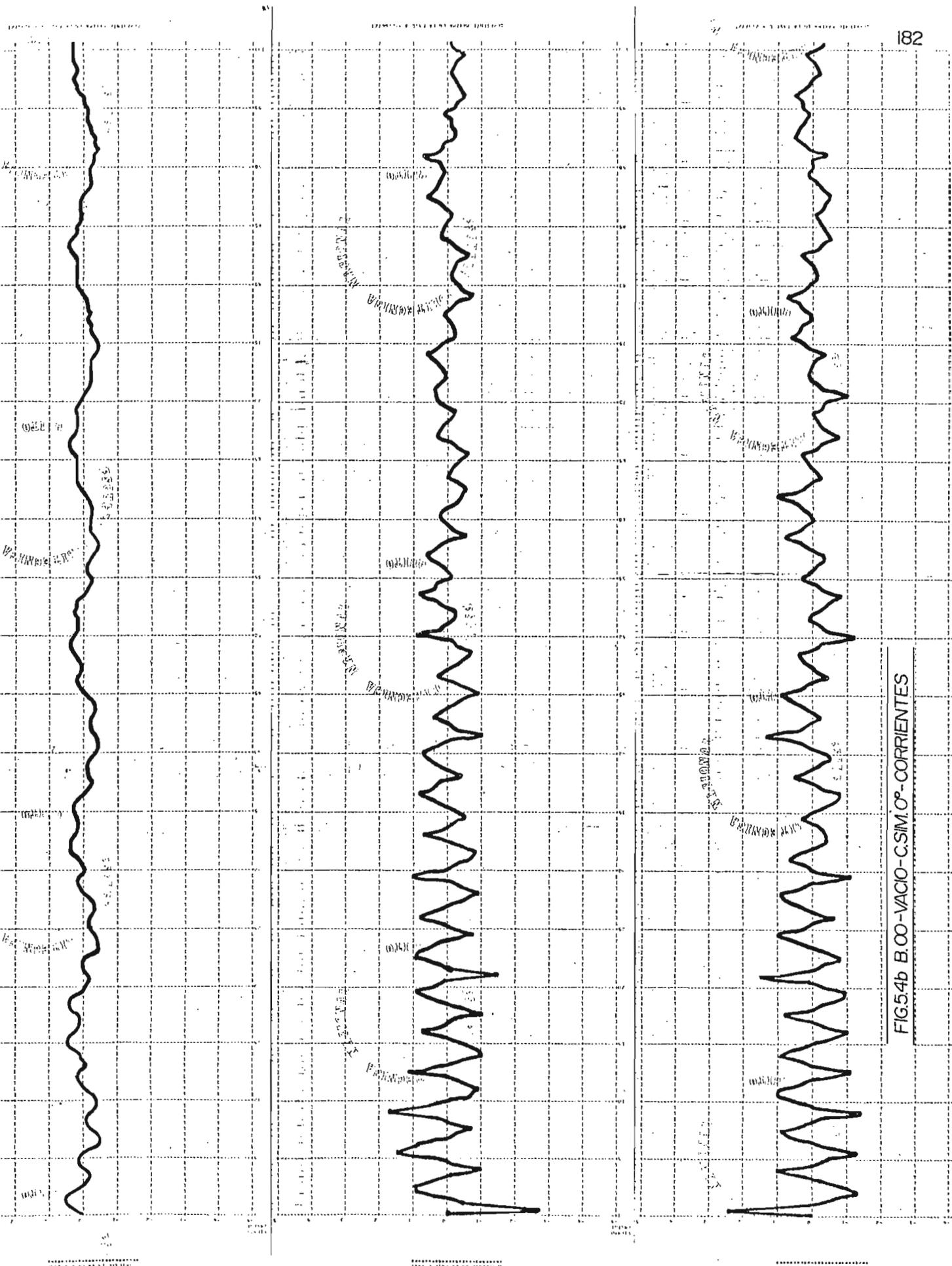


FIG.5.4b B.OO-VACIO-C.SIM.Oº-CORRIENTES

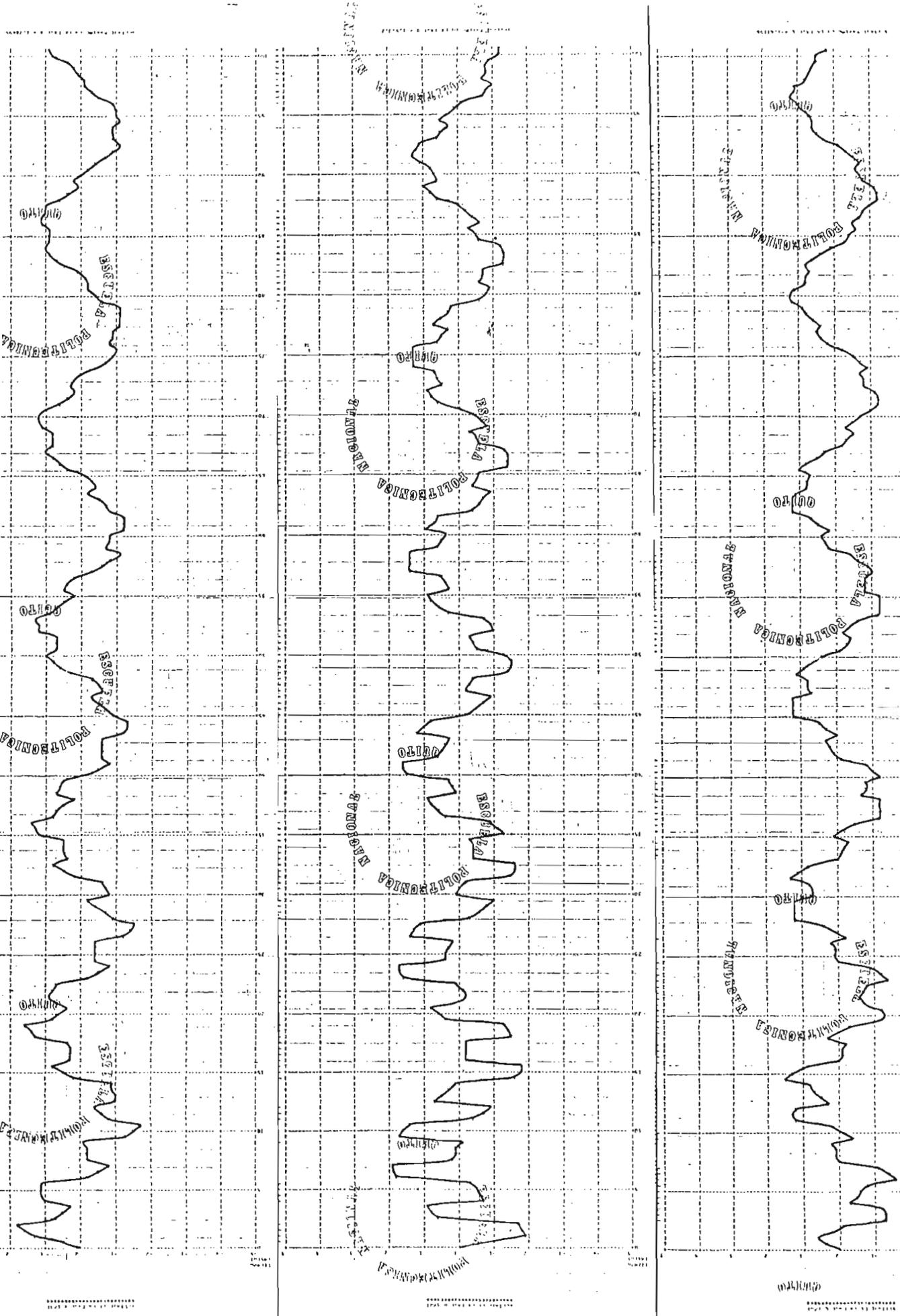


FIG.12 B.00-VACIO-C.SIMUL\_30°-VOLTAJES

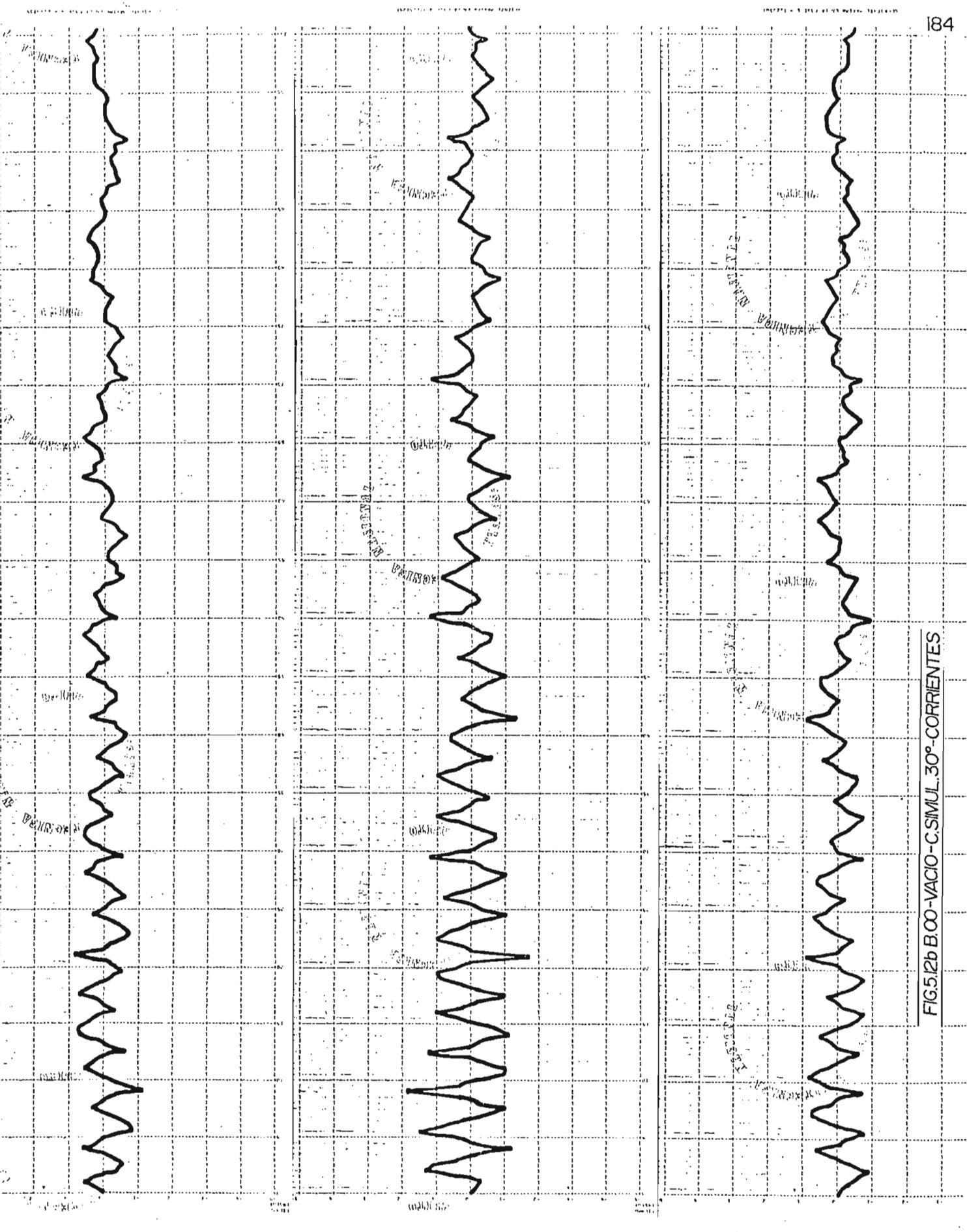


FIG.5.2b B.CO-VACIO-C.SIMUL.30°-CORRIENTES

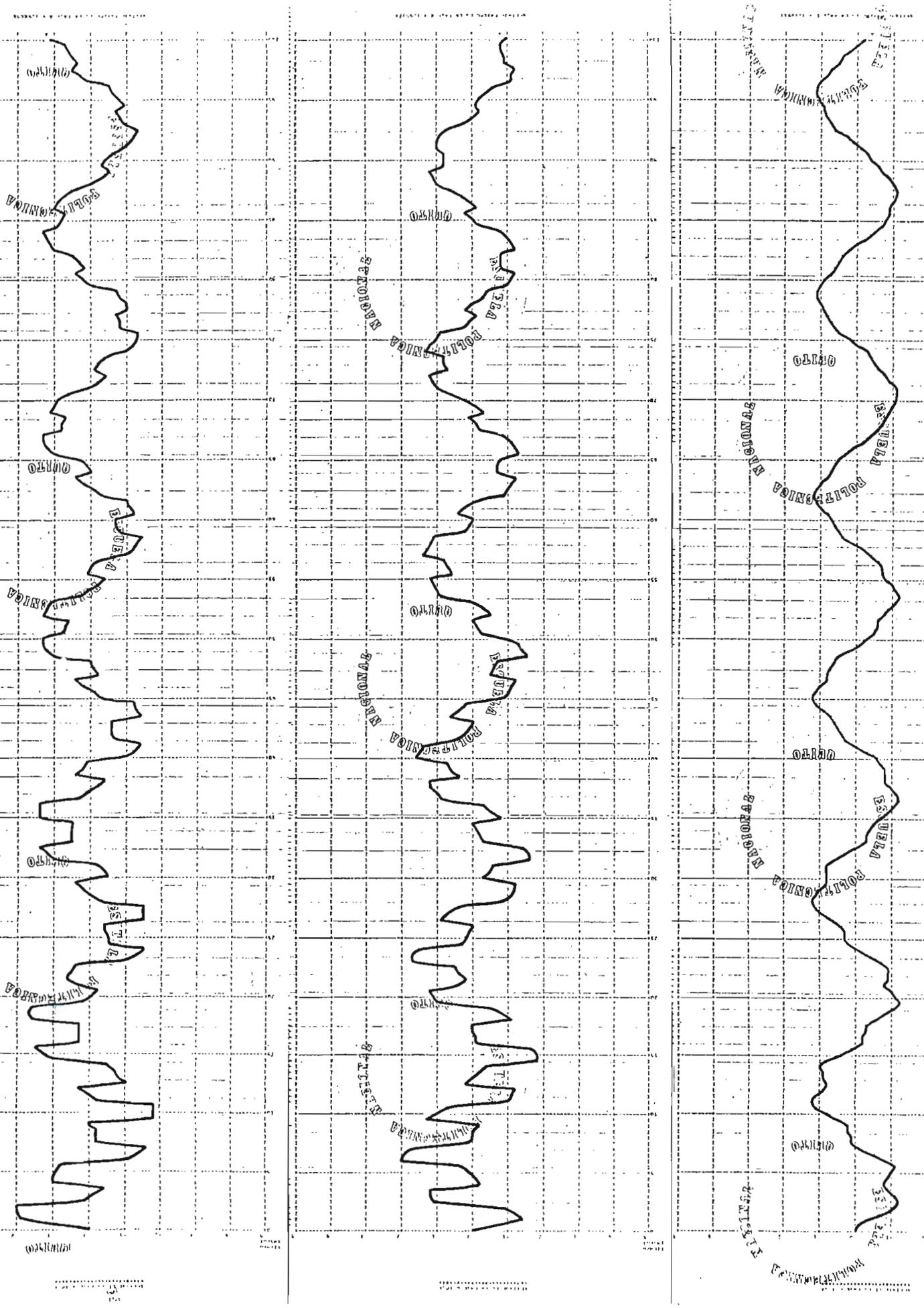


FIG.5.13 B.00-VACIO-C.SIMUL.60°-VOLTAJES

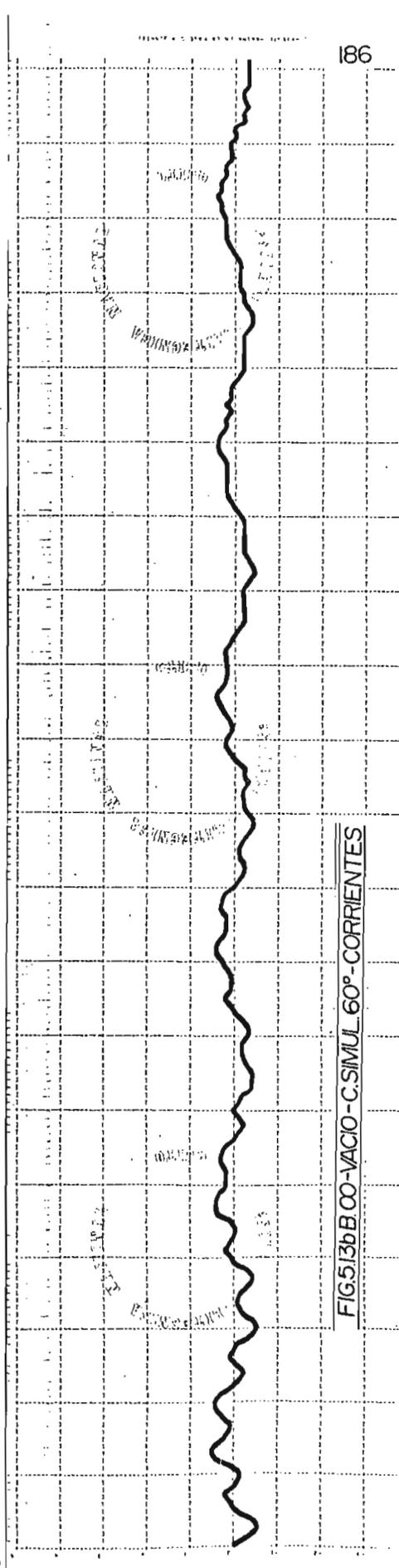
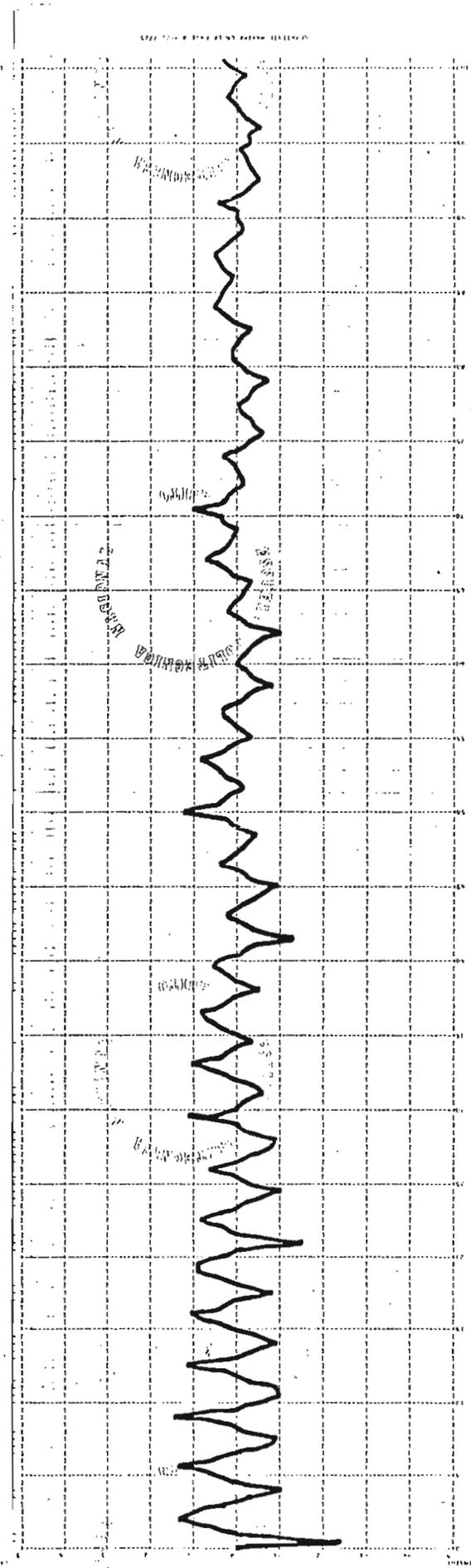
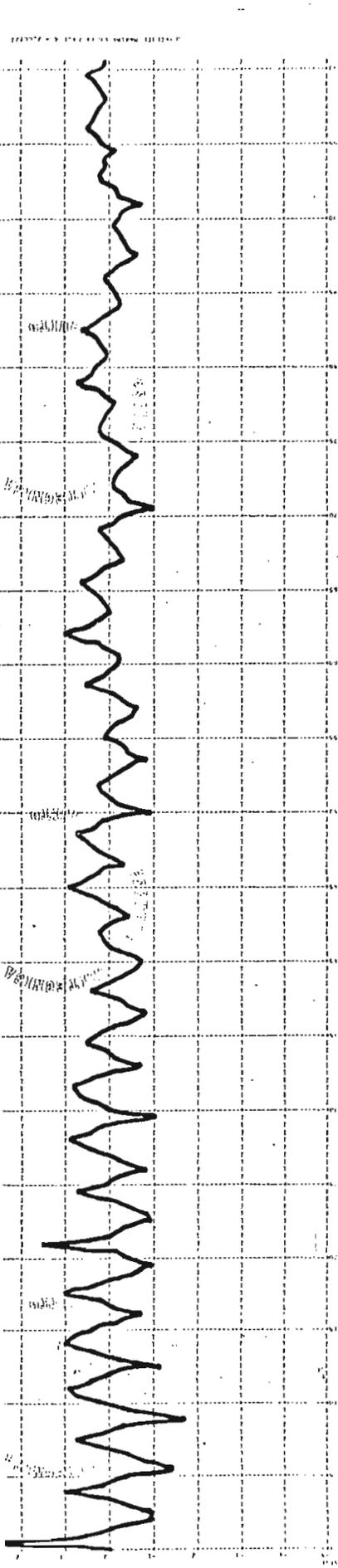


FIG. 5.13b B.00-VACIO - C.SIMUL 60° - CORRIENTES

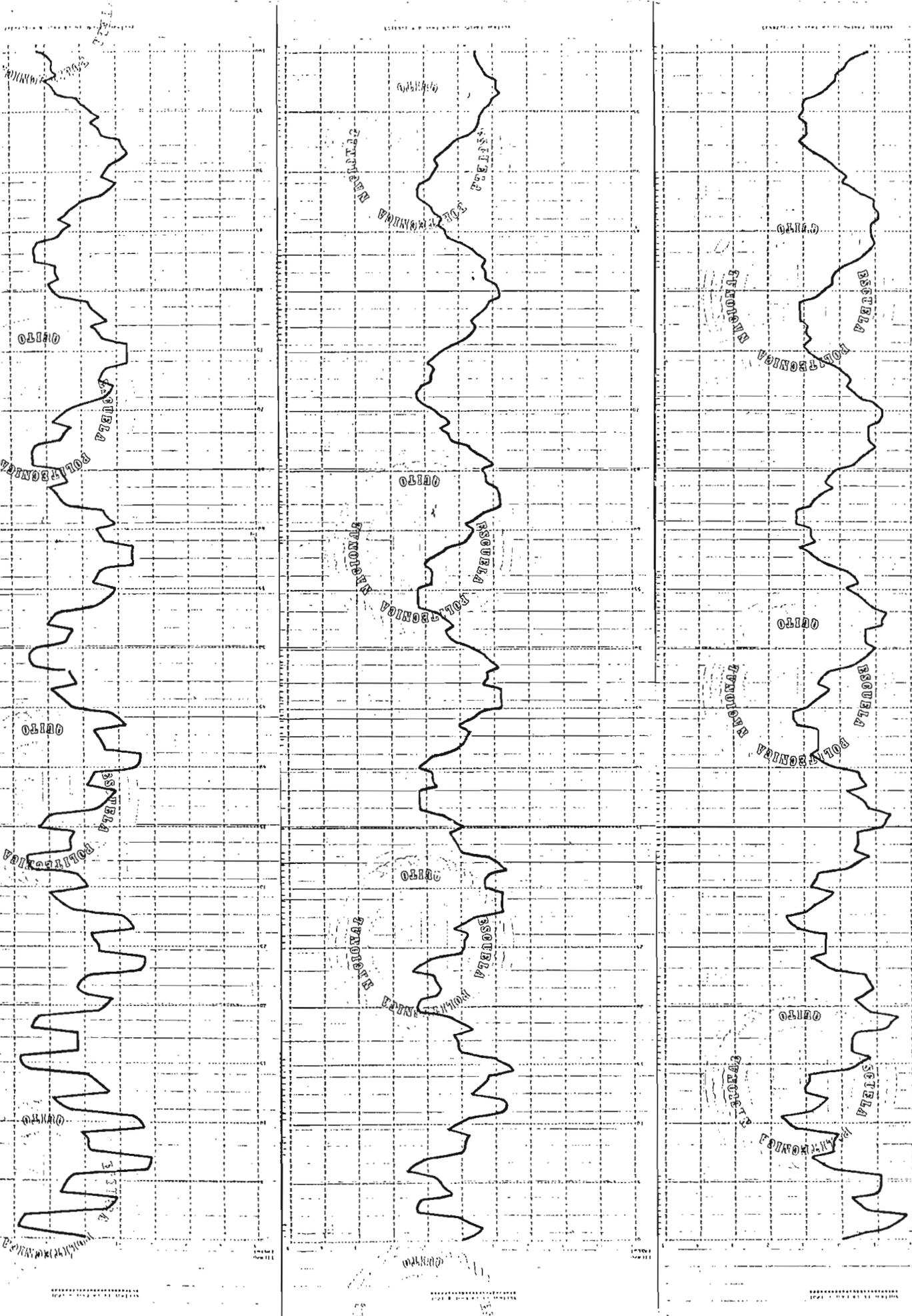


FIG.514 B00-VACIO-C.SIMUL 90°-VOLTAJES

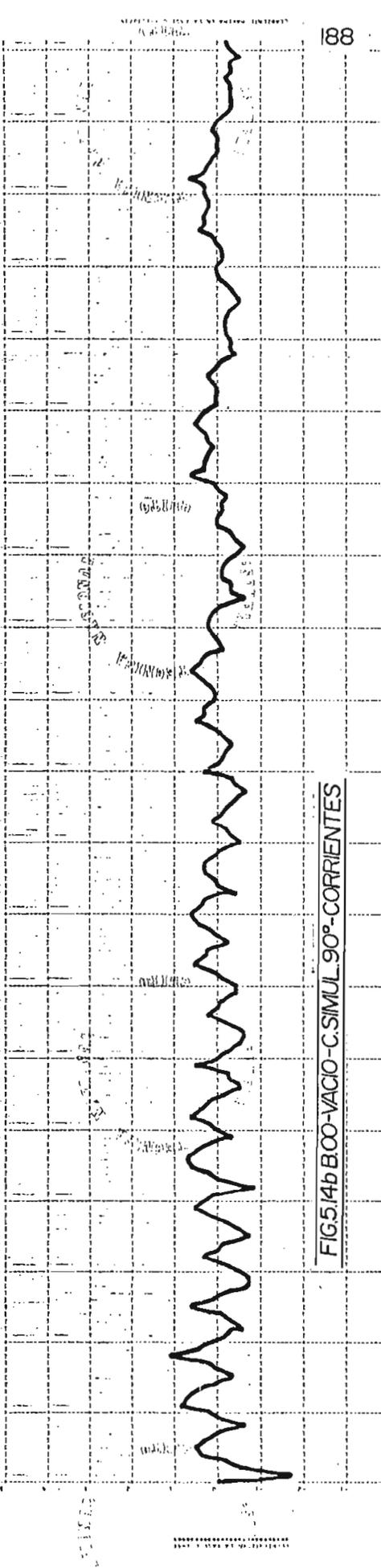
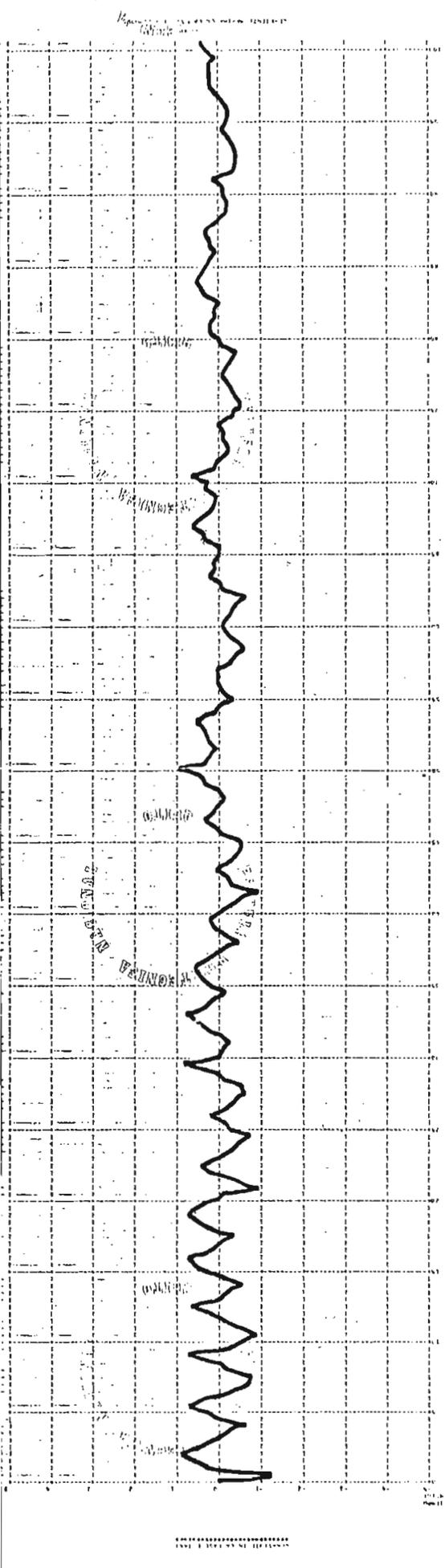
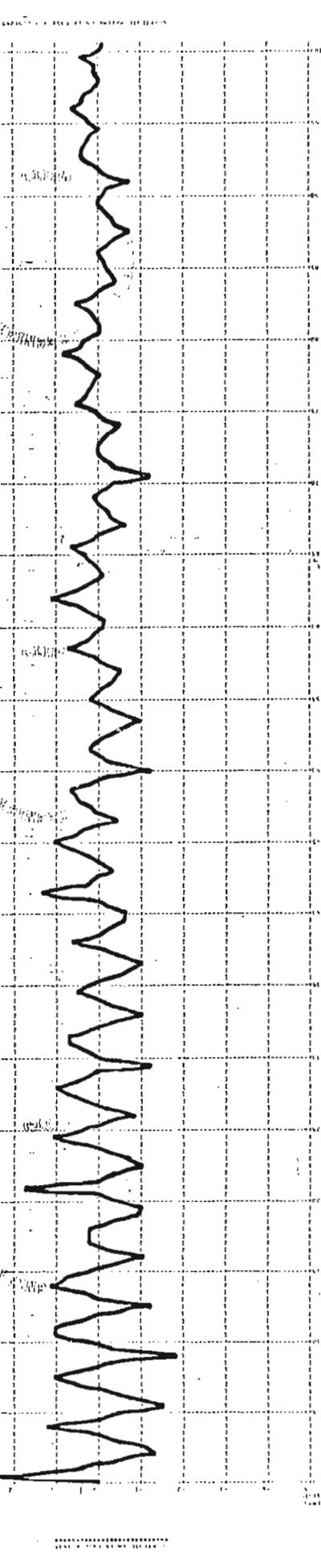


FIG. 5.14b BCO-VACO-C.SIMUL. 90°-CORRIENTES

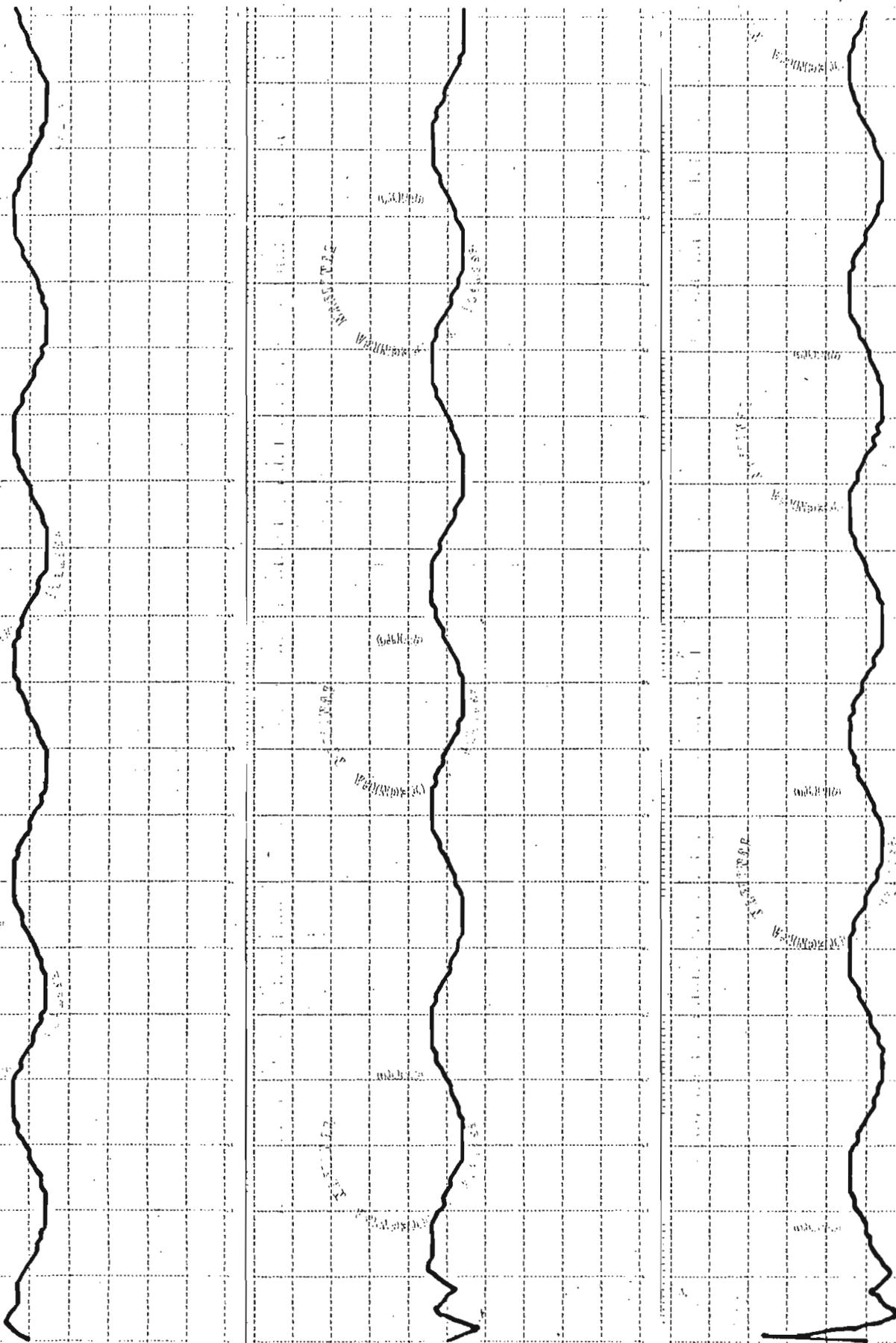


FIG.57b B00- CARGA R- C SIM. 0°- CORRIENTES

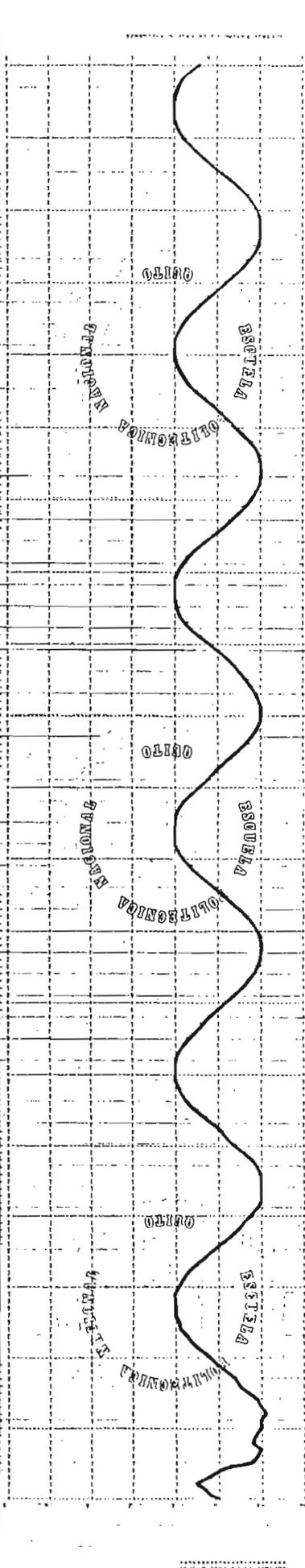
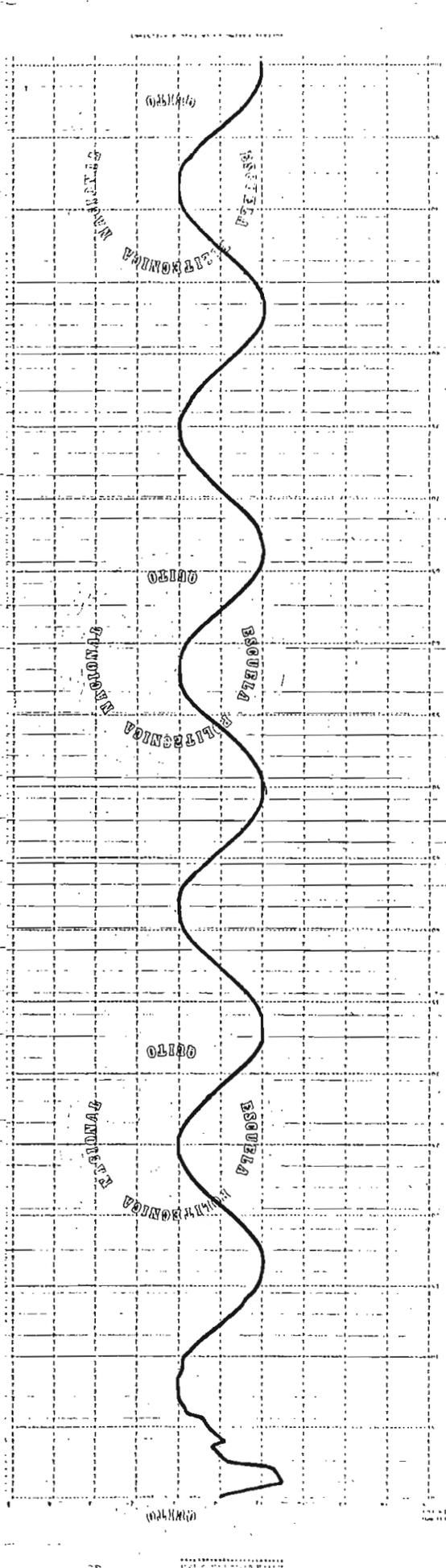


FIG. 15 B00-CARGA R-C-SIMUL. 30°-VOLTAJES

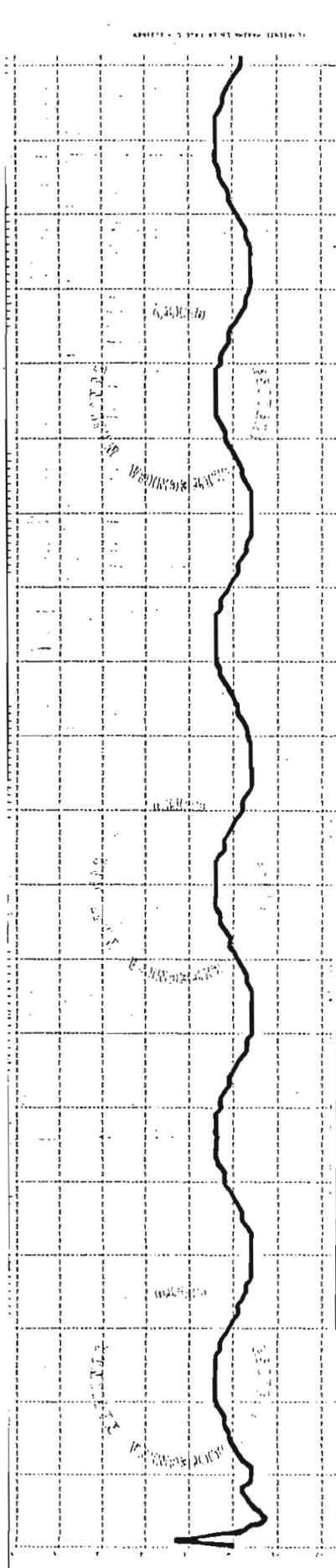
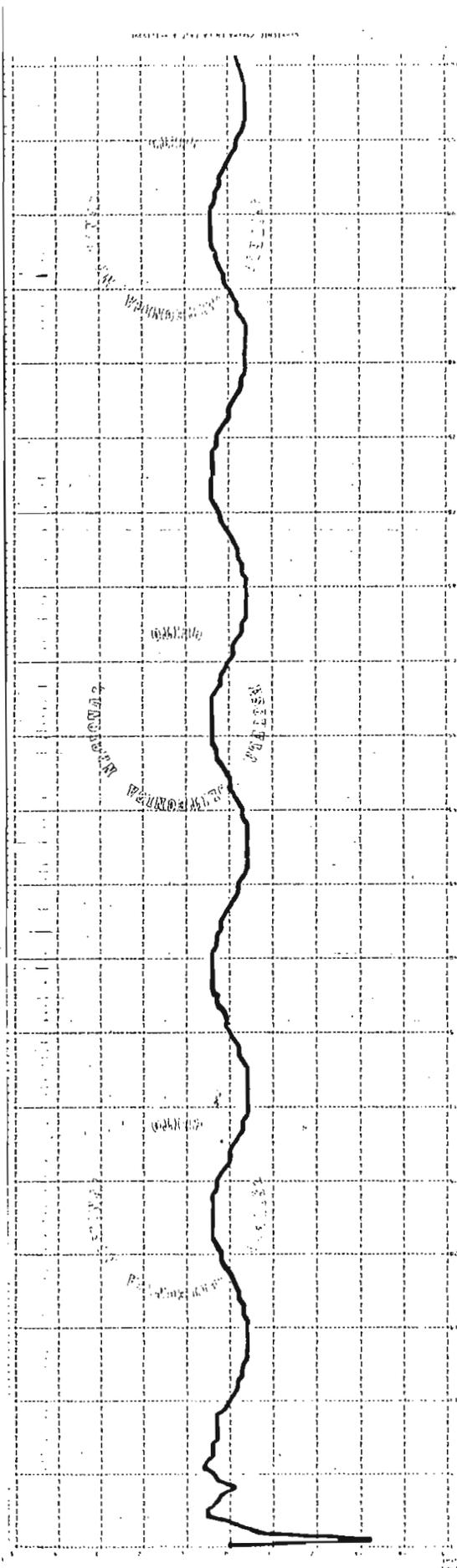
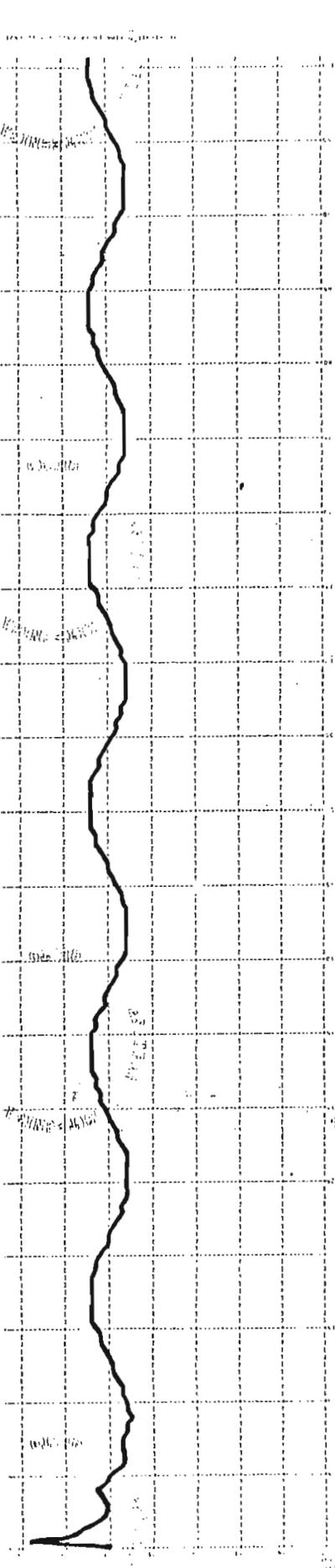


FIG.5.5b B.00-CARGA R-C.SIM.30°-CORRIENTES

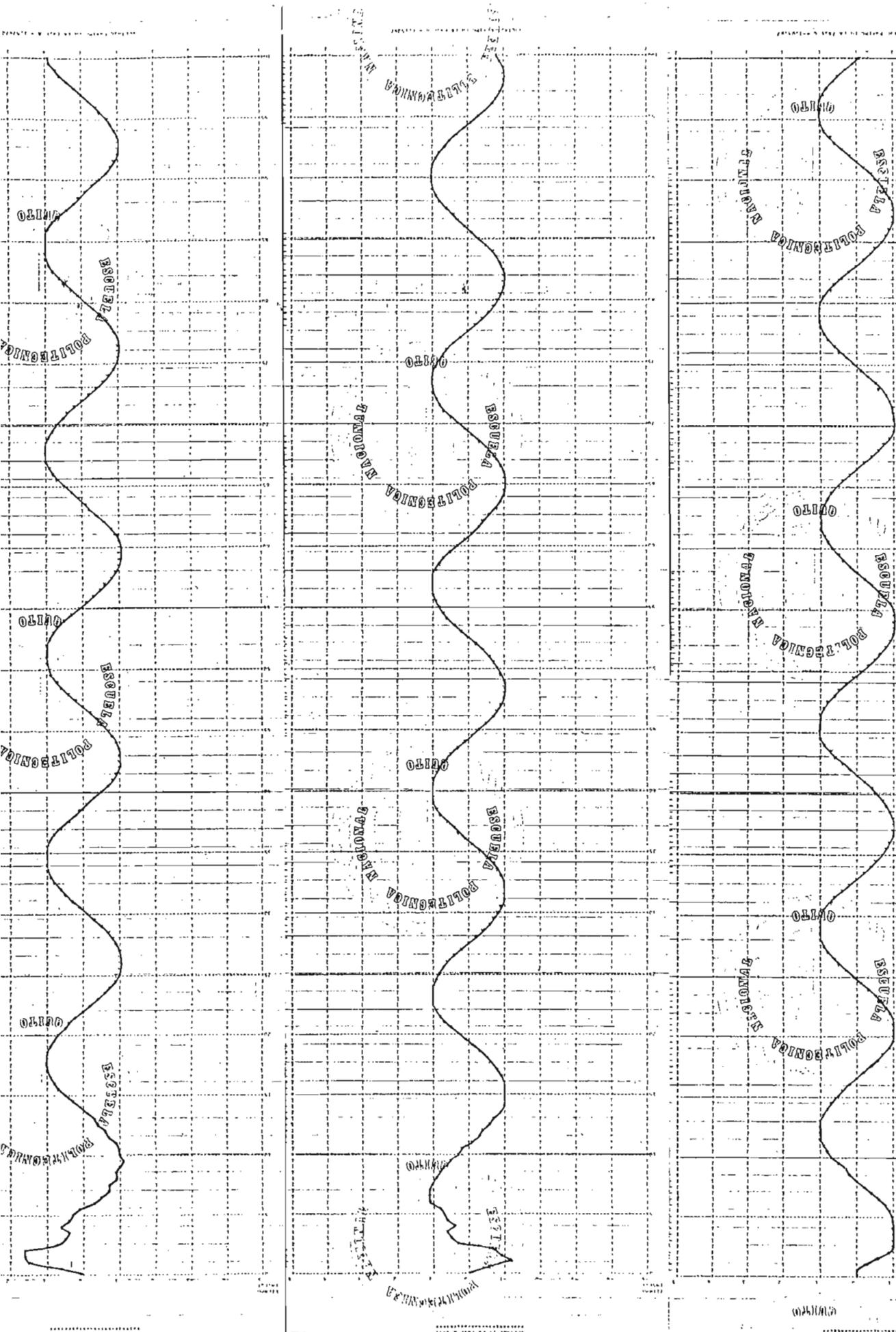


FIG.5.6 B.00-CARGA R-C.5M.60°-VOLTAJES

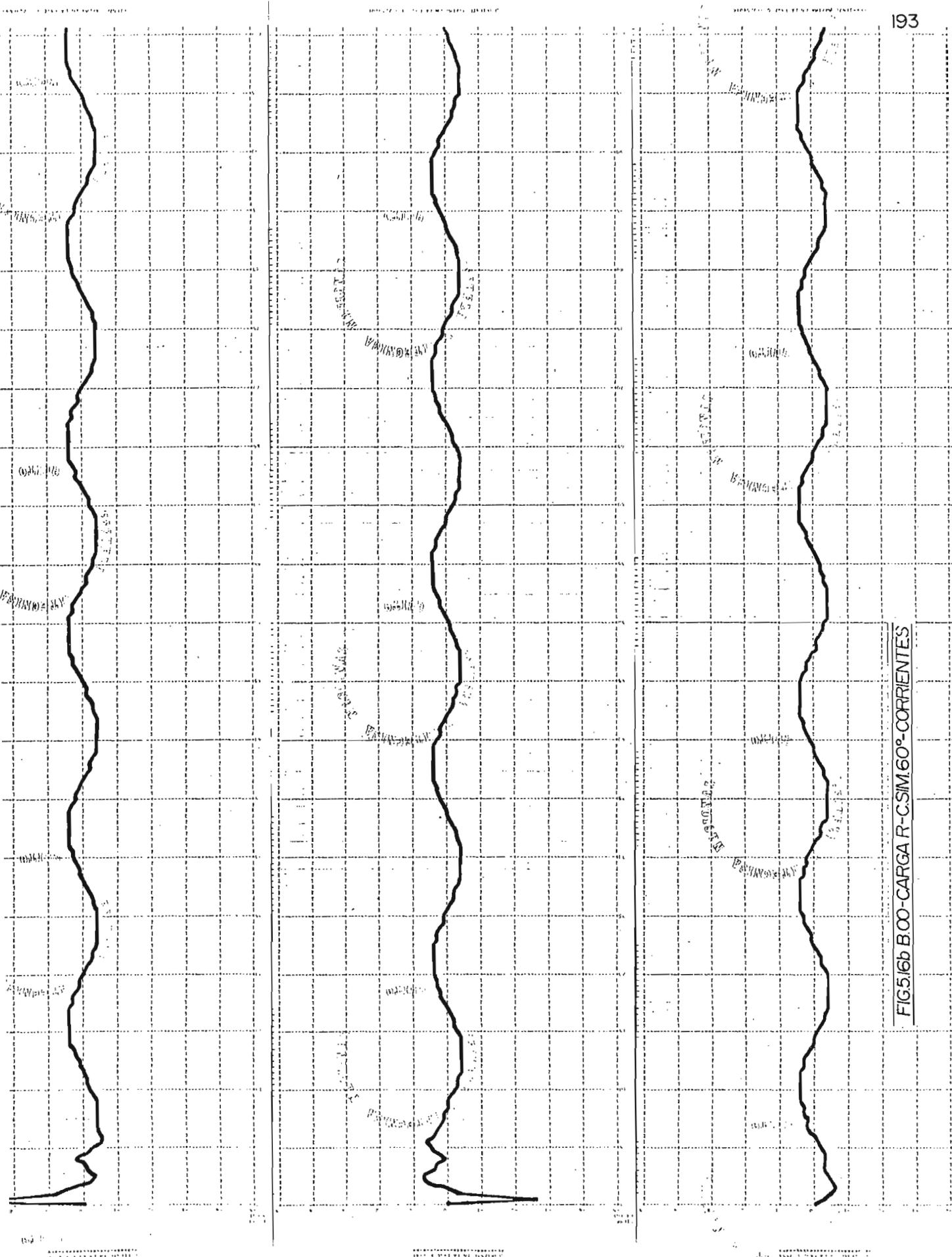


FIG. 5.16b B.00-CARGA R-C.S.M. 60°-CORRIENTES

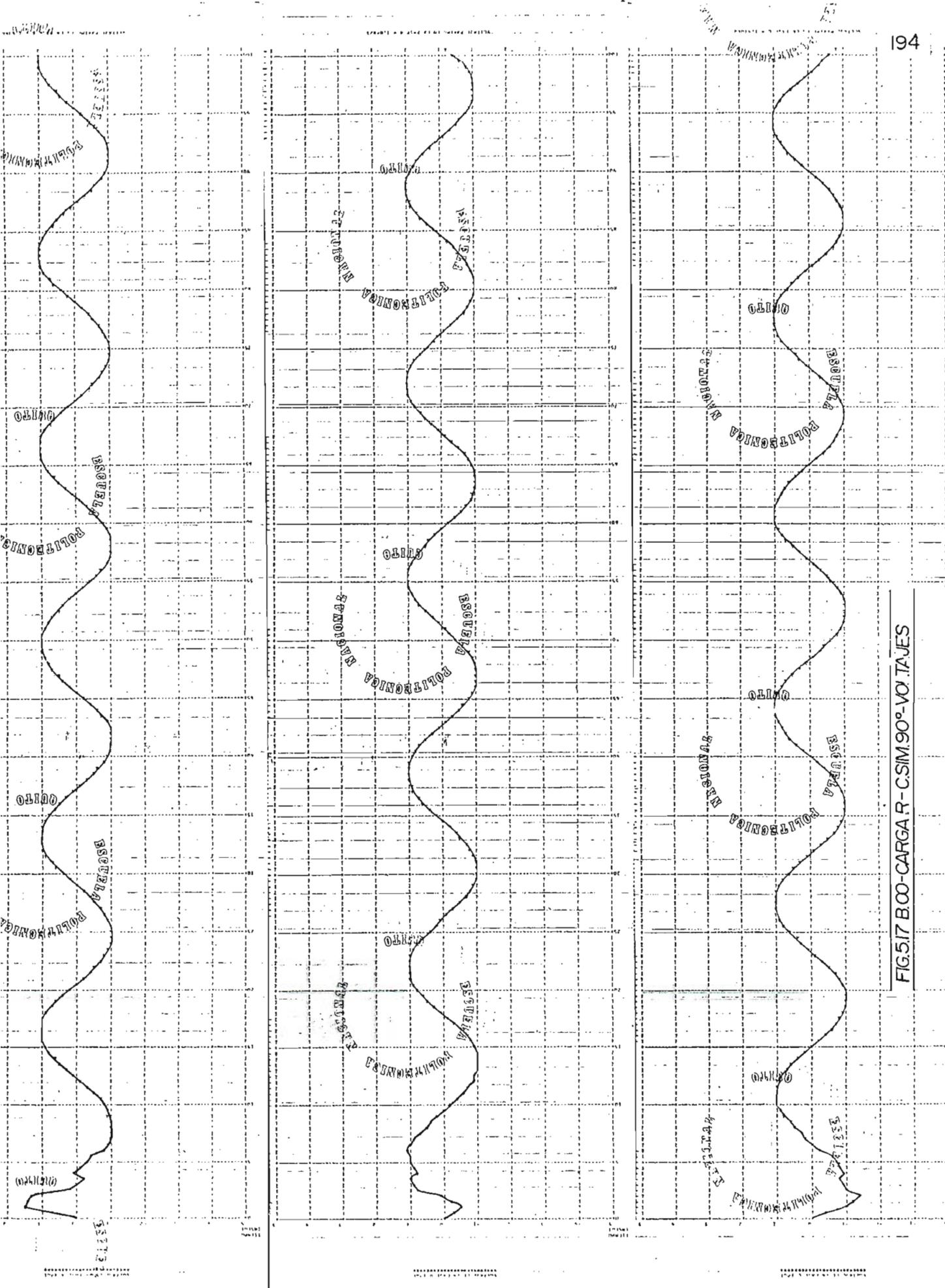


FIG.5.17 B.00-CARGA R - C.SIM.90°-VO TAJES

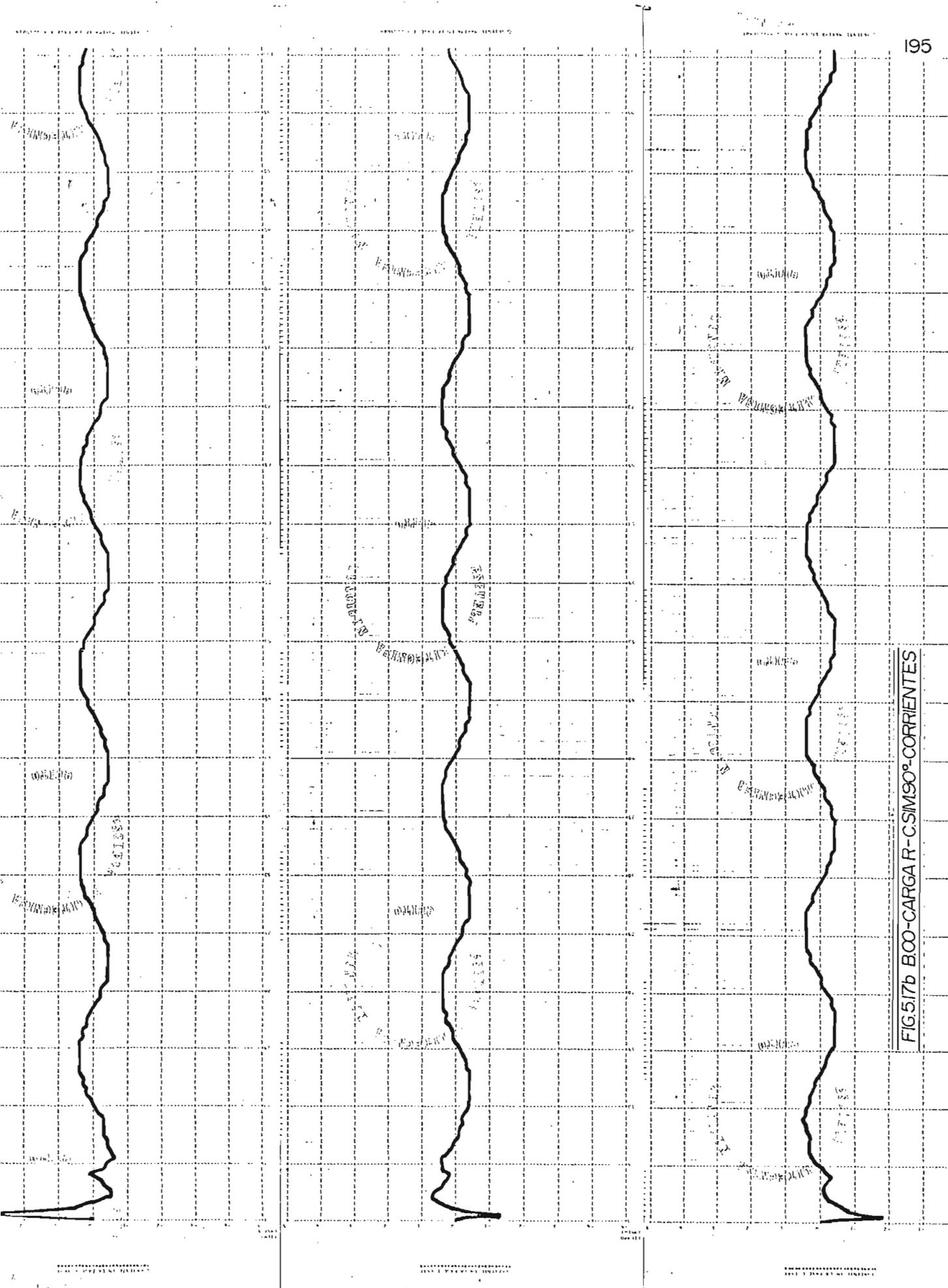


FIG.517b B00-CARGA R-C SIM90°-CORRIENTES

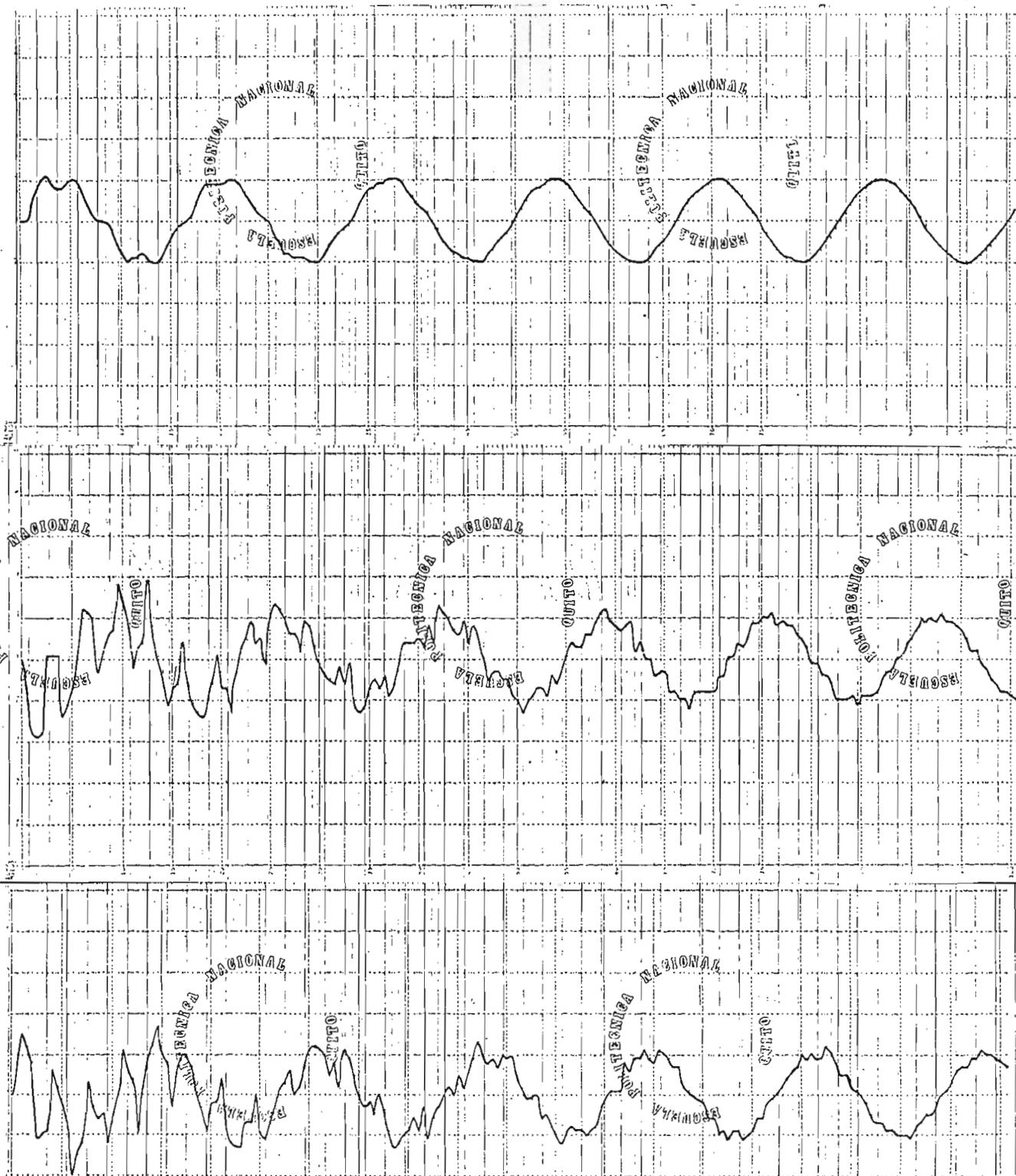


FIG.5.18 B.CO-CARGA R-L-C.SIMUL.0°-VOLTAJES

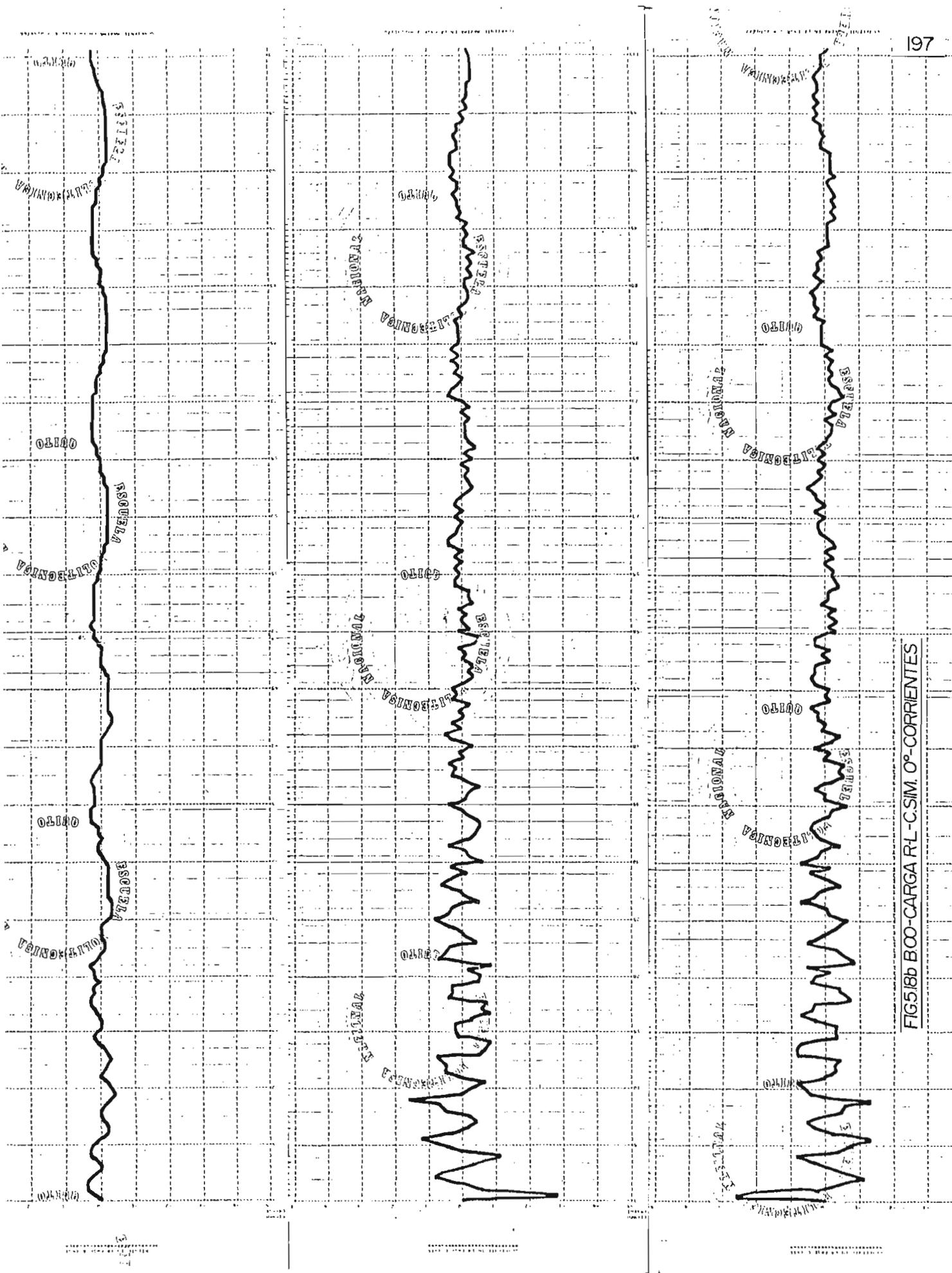


FIG518b BCO-CARGA RL-C.SIM. 0°-CORRIENTES

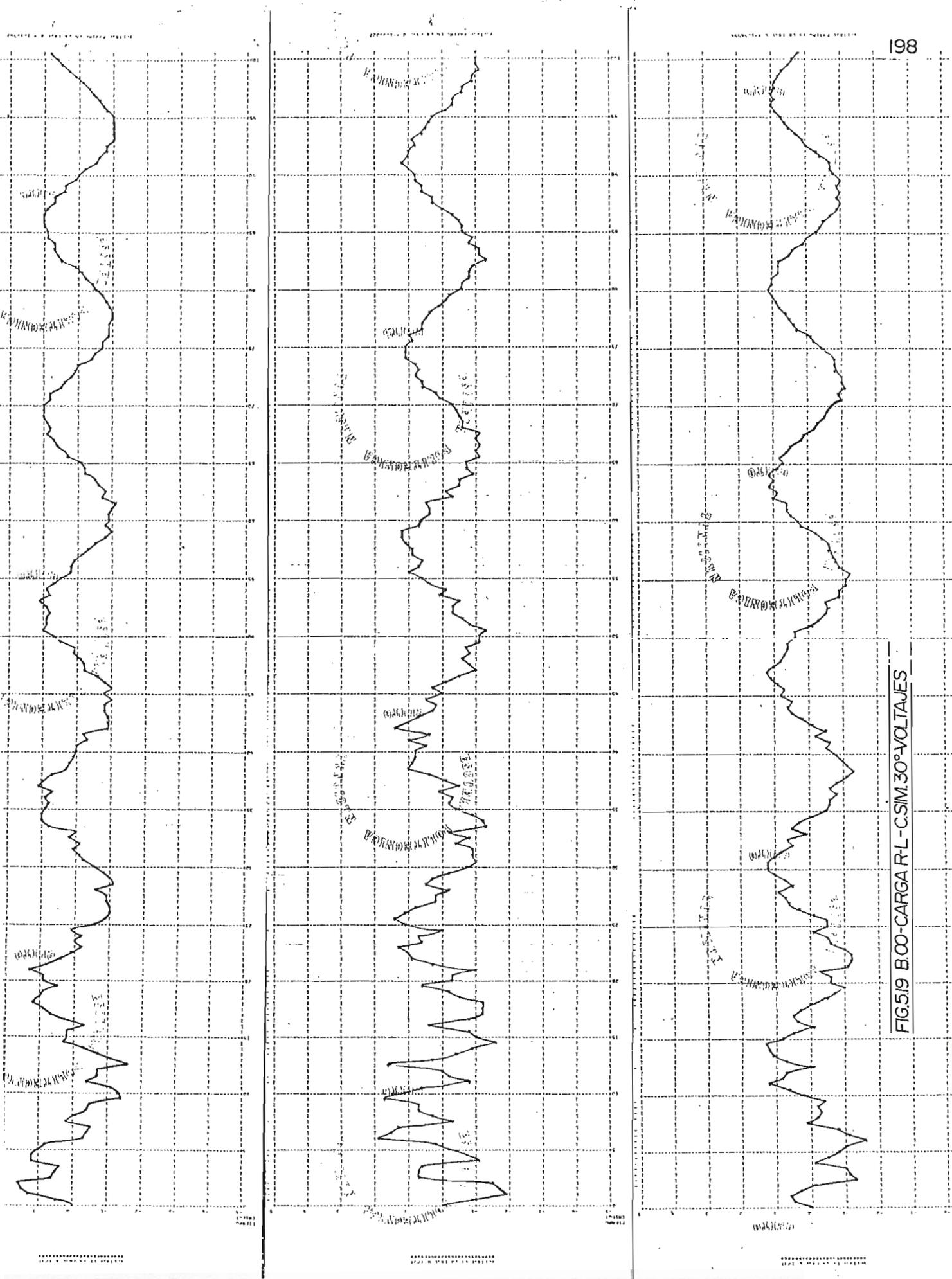


FIG.5.19 B.00-CARGA R-L-C.S.M.30°-VOLTAJES

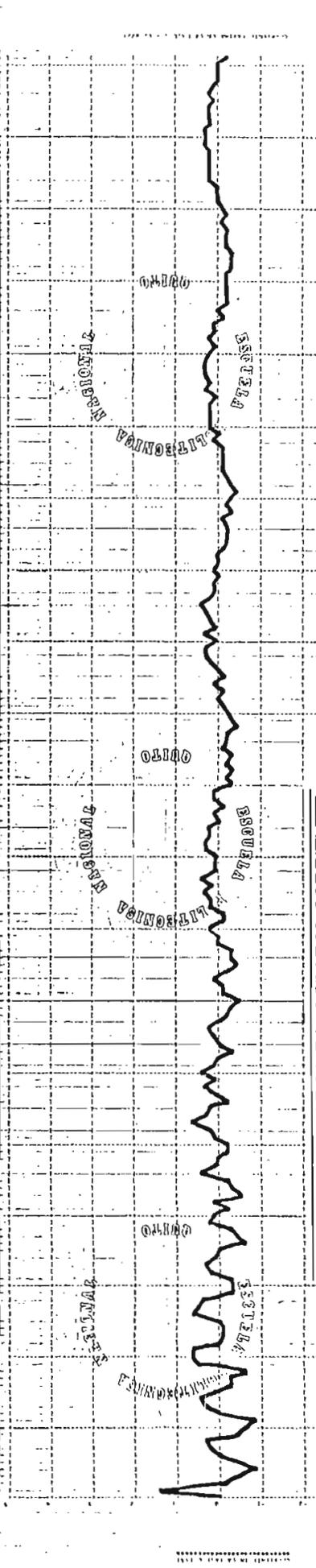
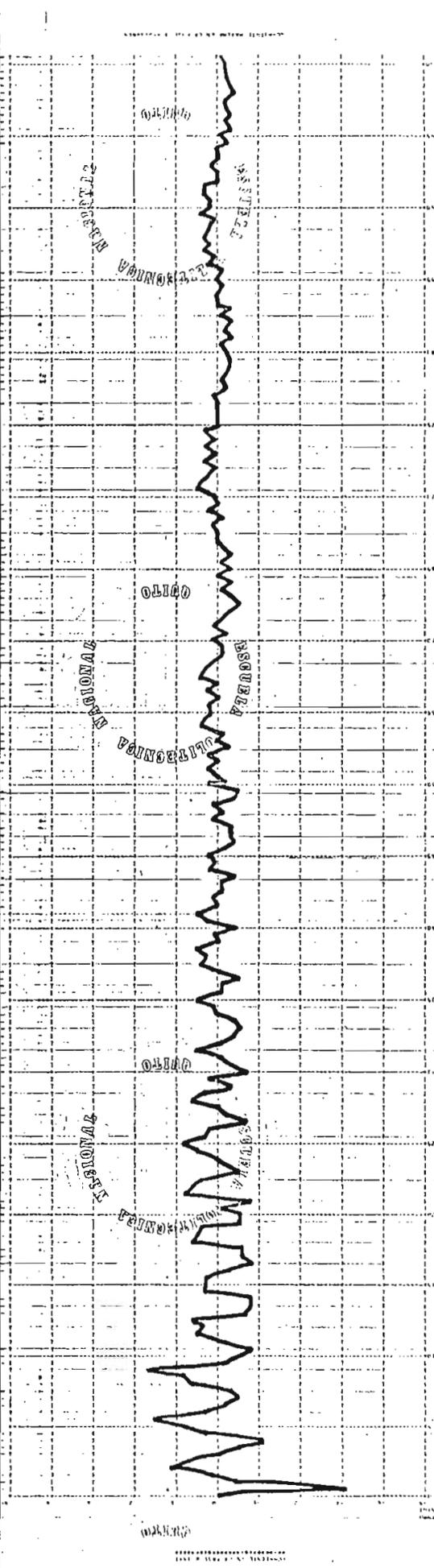
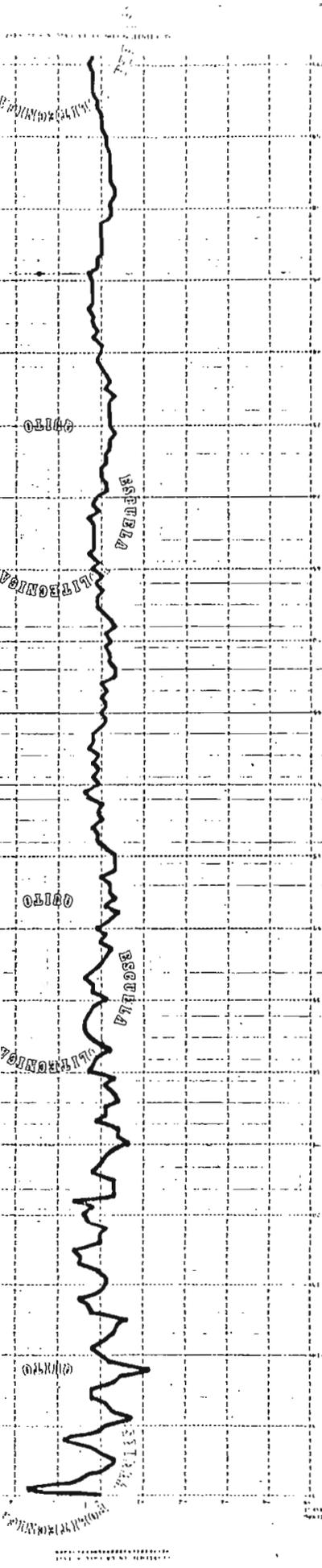


FIG.5.19b B.O-CARGA R-L-C.SIM.30°-CORRIENTE

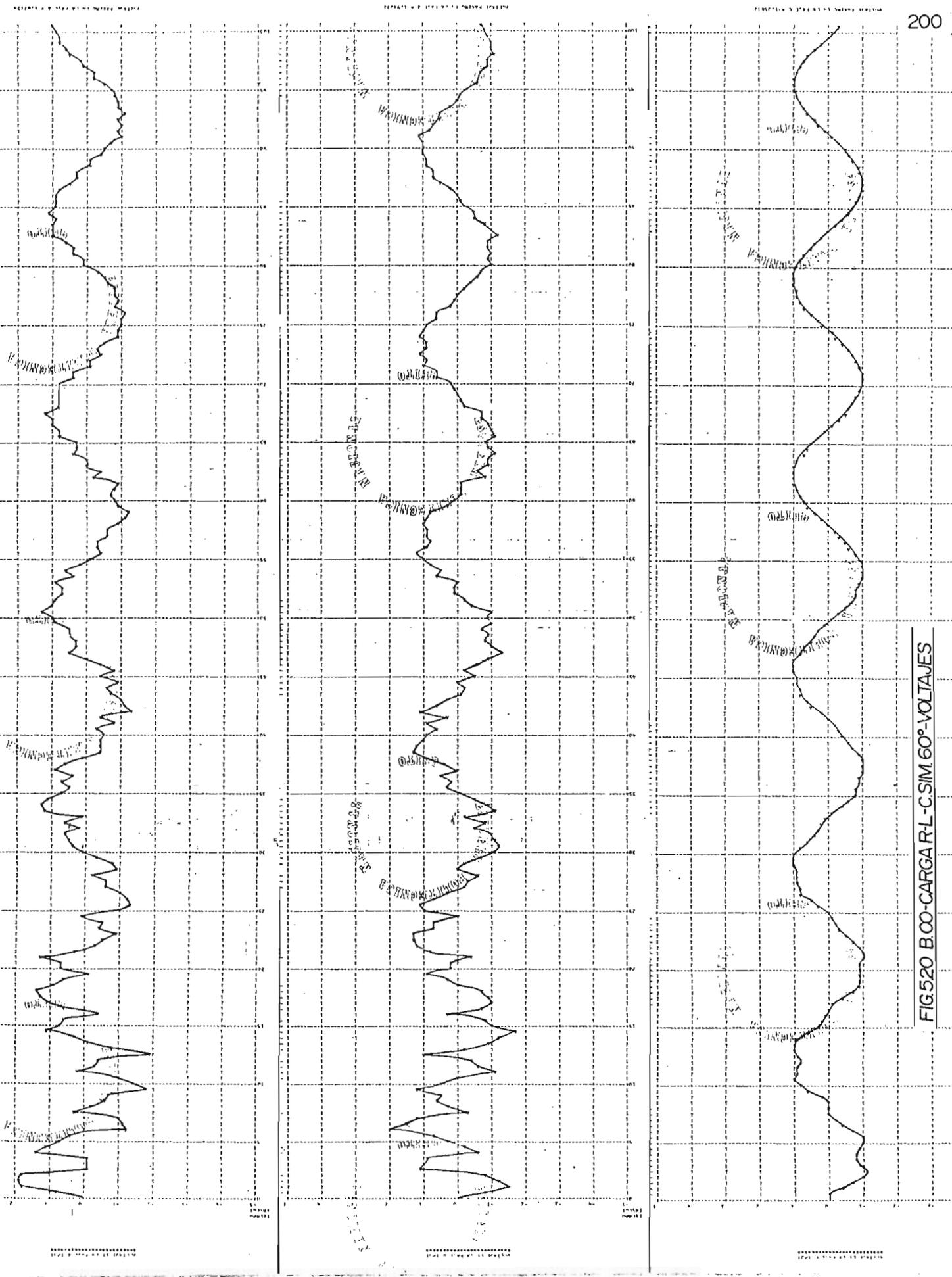


FIG.520 B.00-CARGA R-L-C-SIM 60°-VOLTAJES



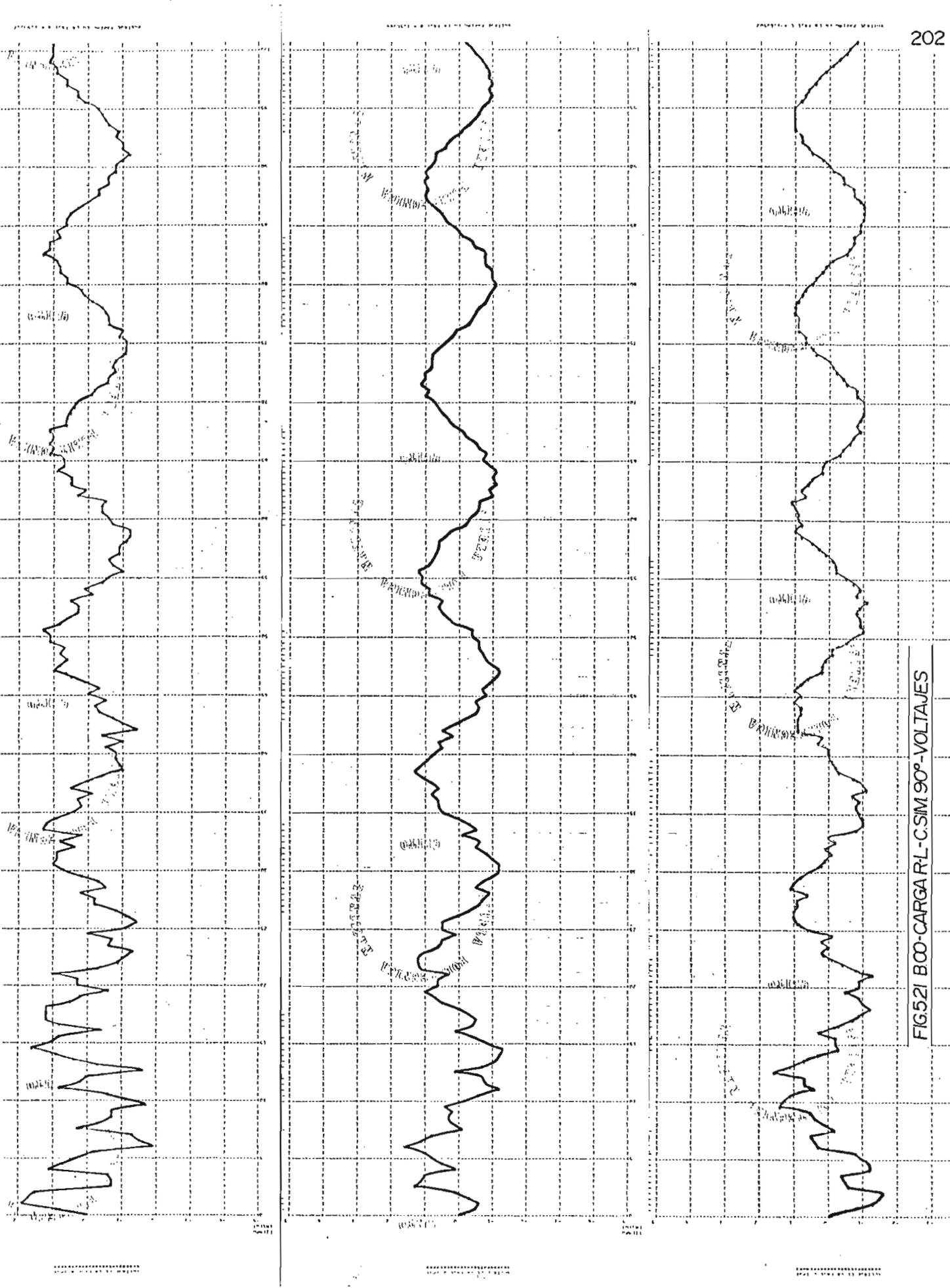


FIG.52/ B00-CARGA R-L-C-SIM 90°-VOLTAJES

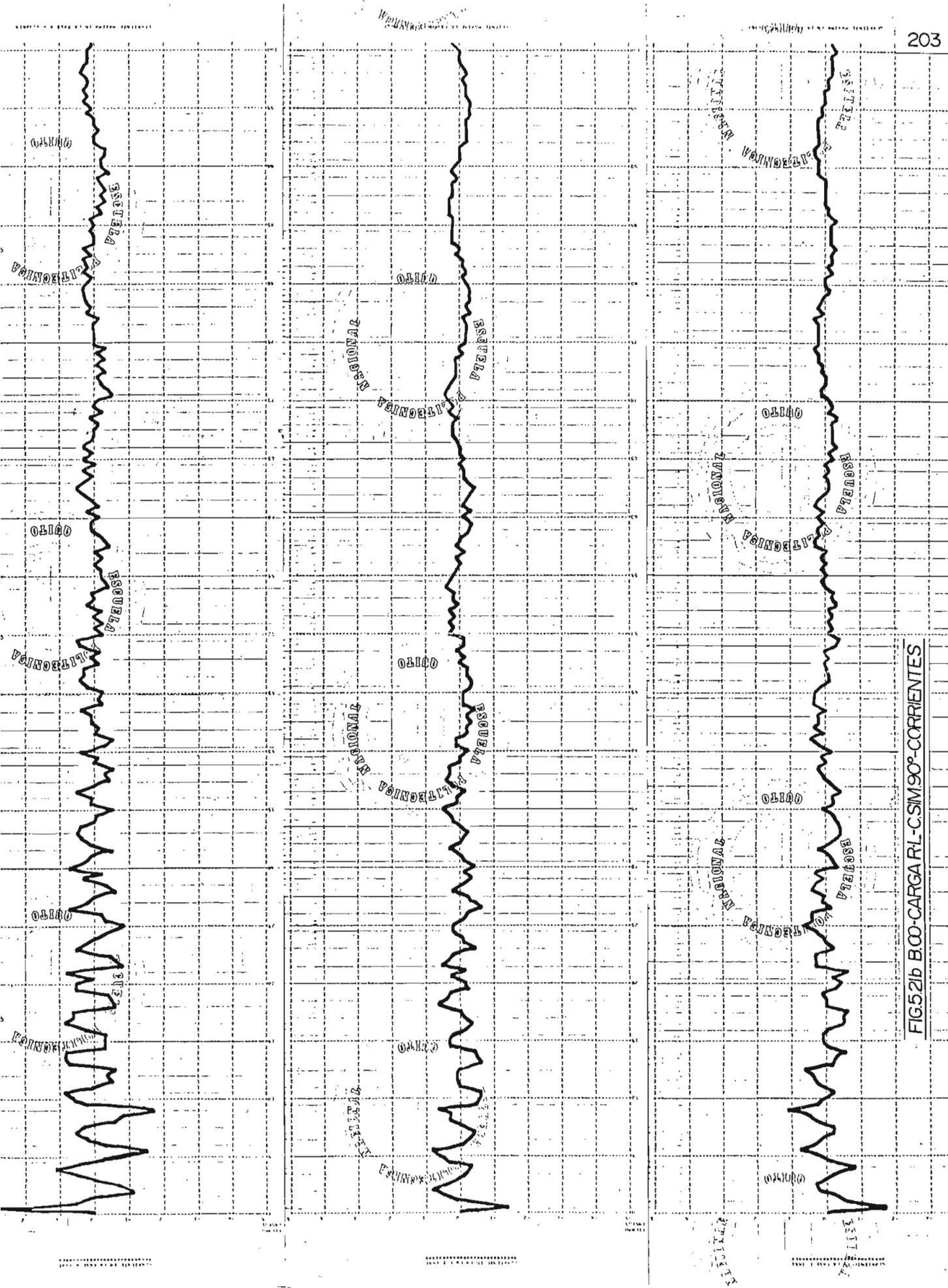


FIG.521b B.O-CARGA RL-C-SIM 90°-CORRIENTES



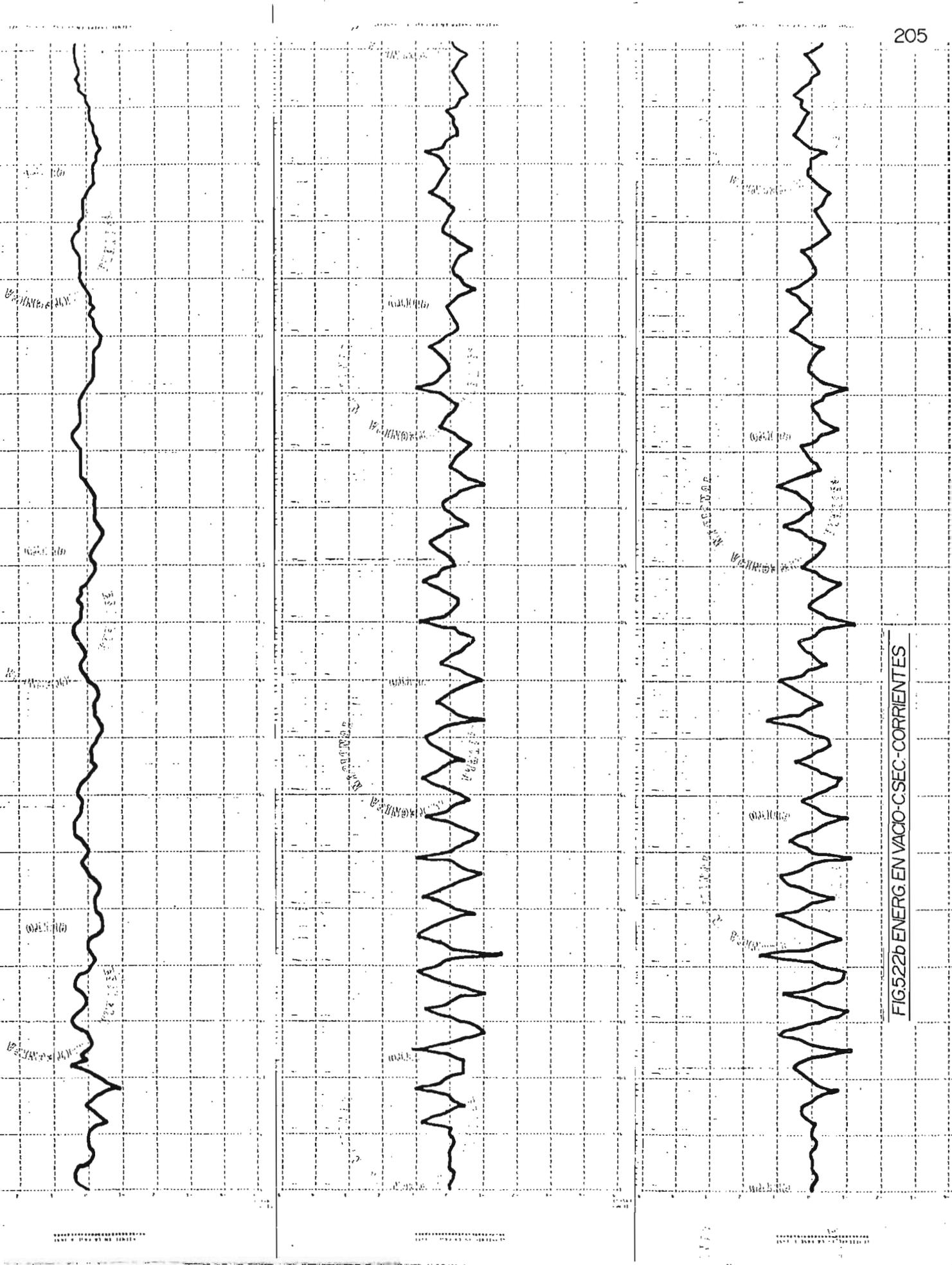


FIG.522b ENERG. EN VACO - C.SEC. - CORRIENTES

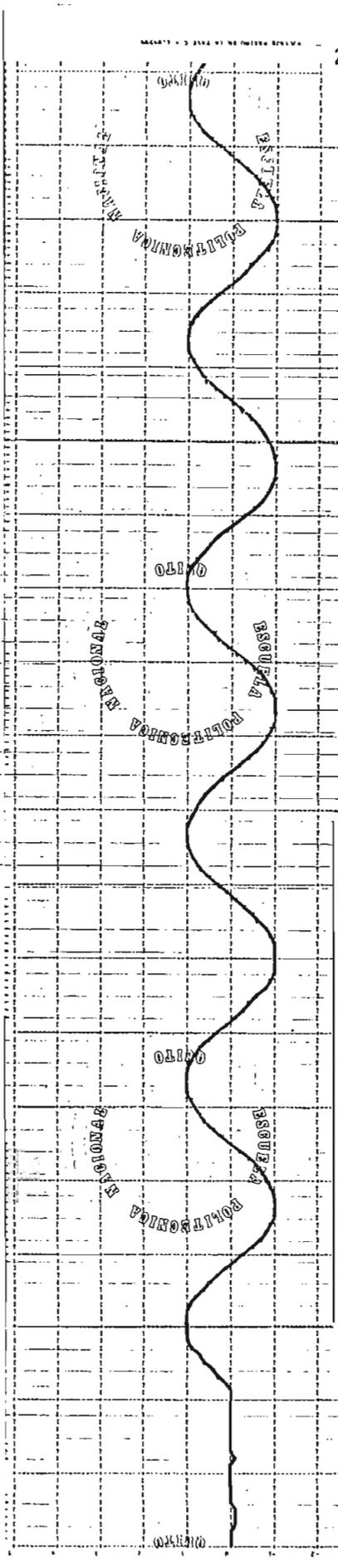
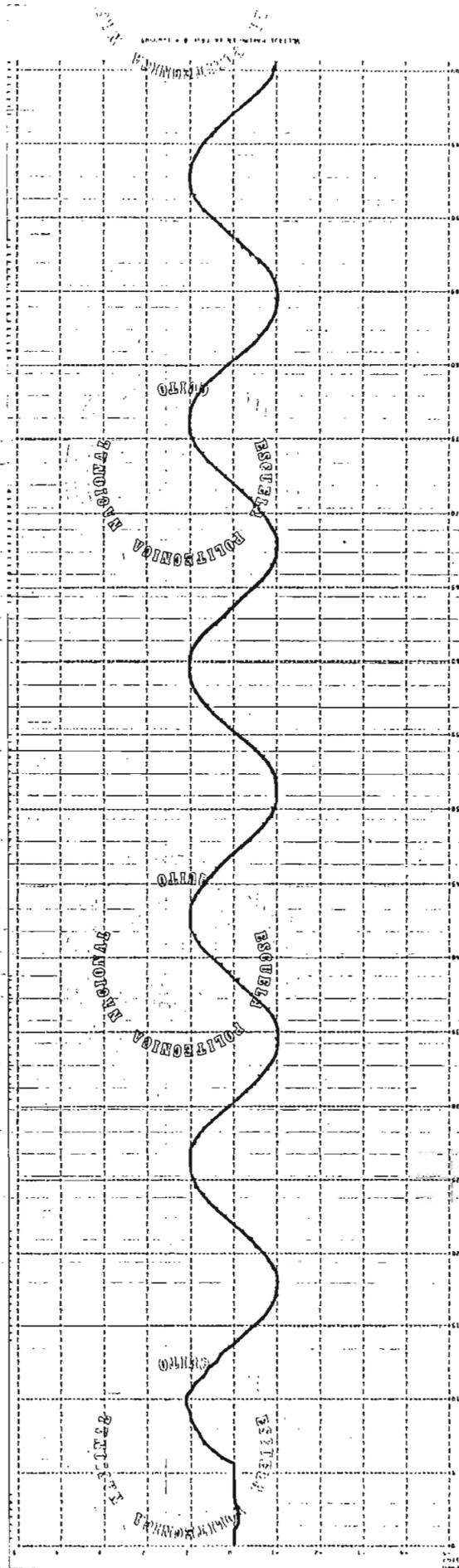
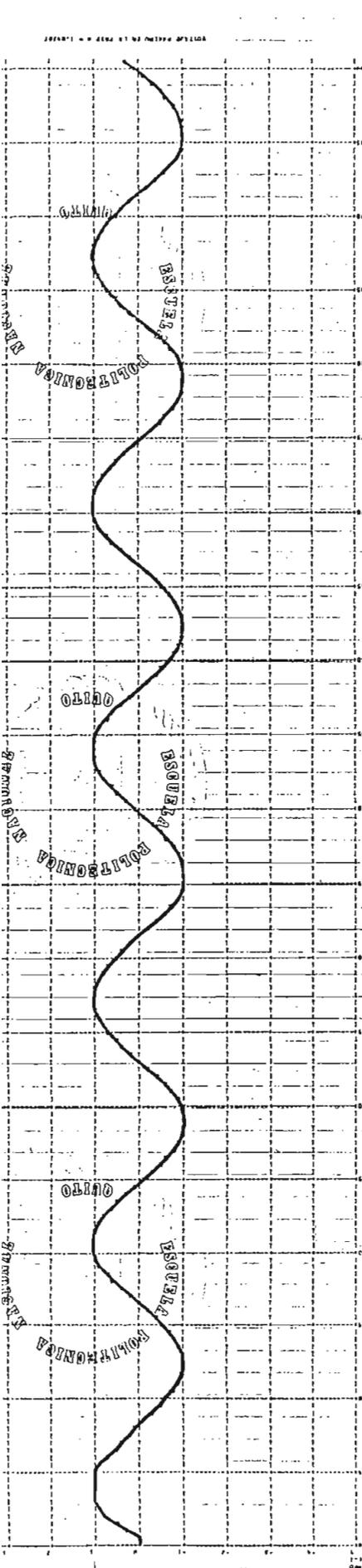


FIG.523 ENERG-CARGA R-CSEC-VOLTAJES

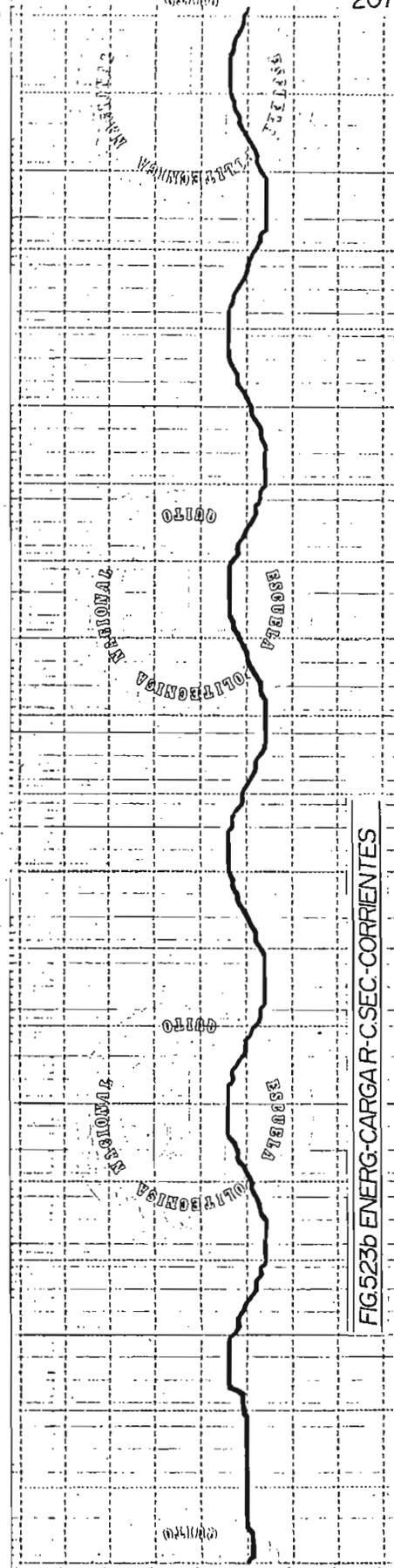
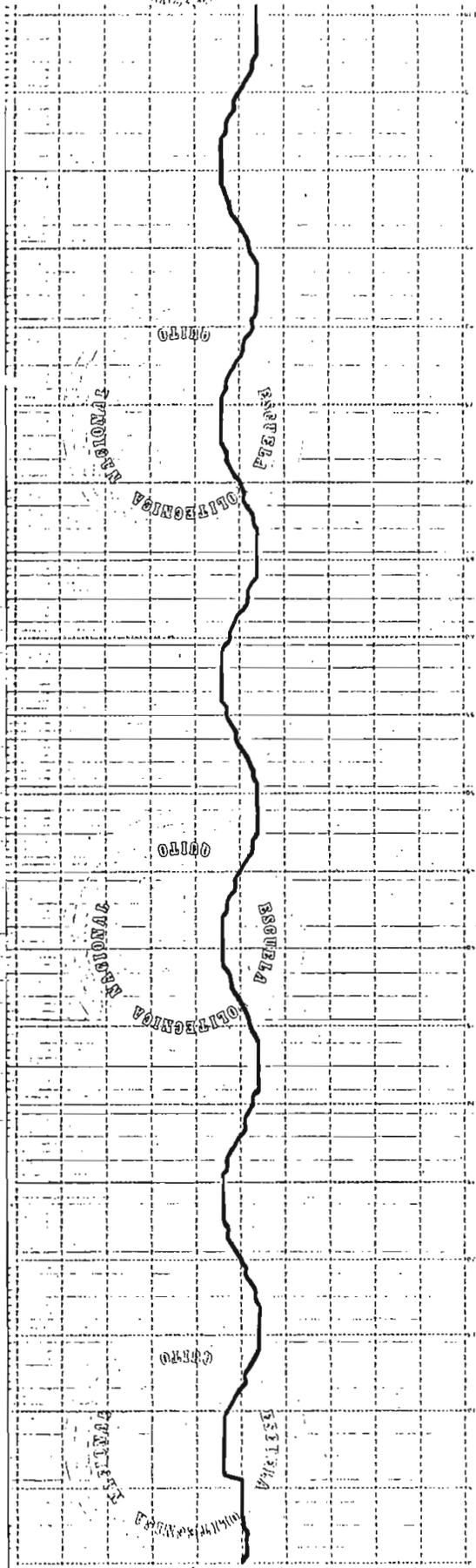
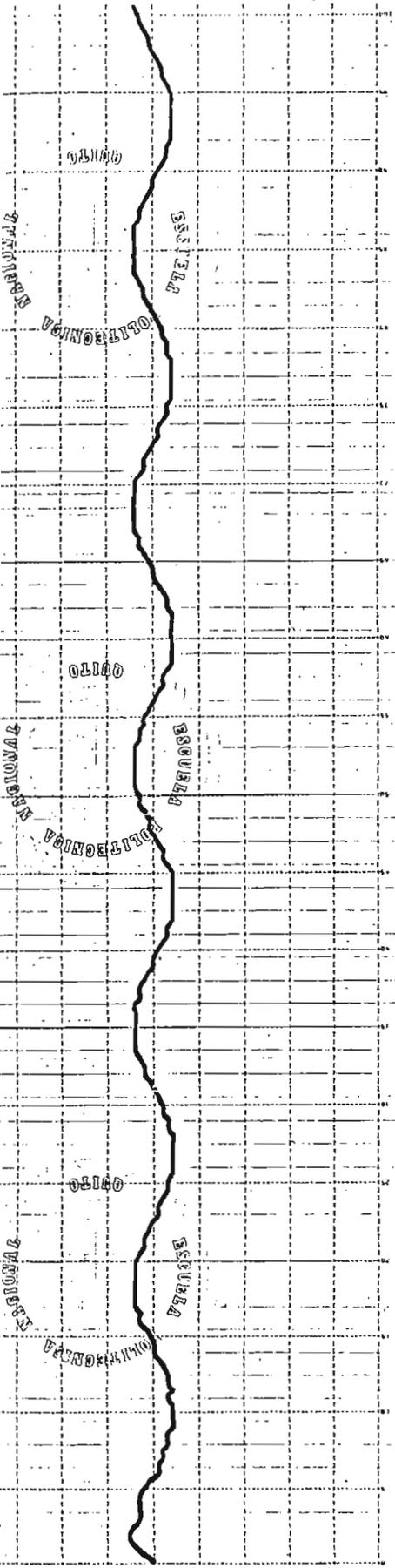


FIG.523b ENERGI-CARGA R-C SEC-CORRIENTES

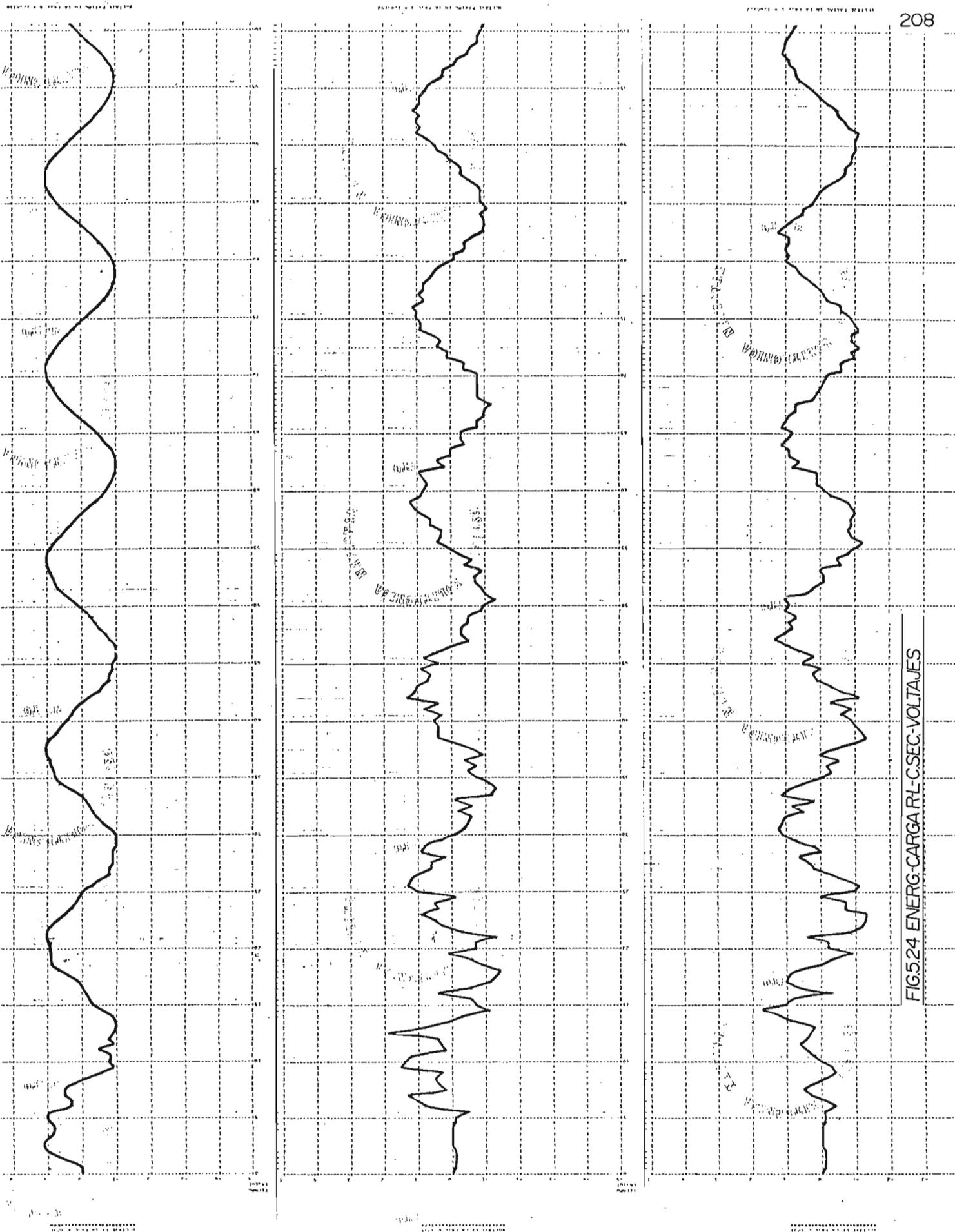


FIG.5.24 ENERG-CARGA RL-C-SEC-VOLTAJES

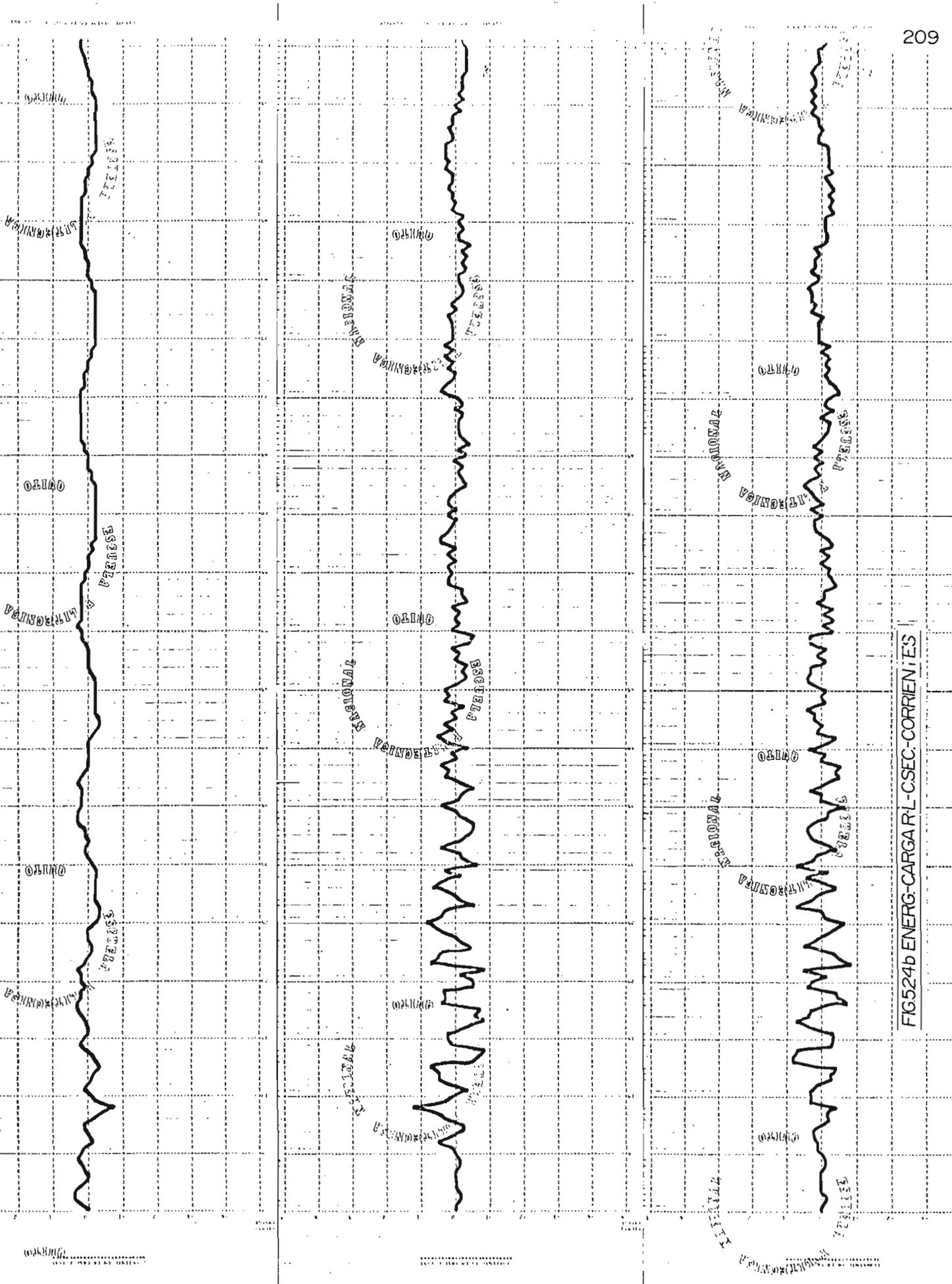


FIG524b ENERG-CARGA R-L-C-SEC-CORRIEN I ES

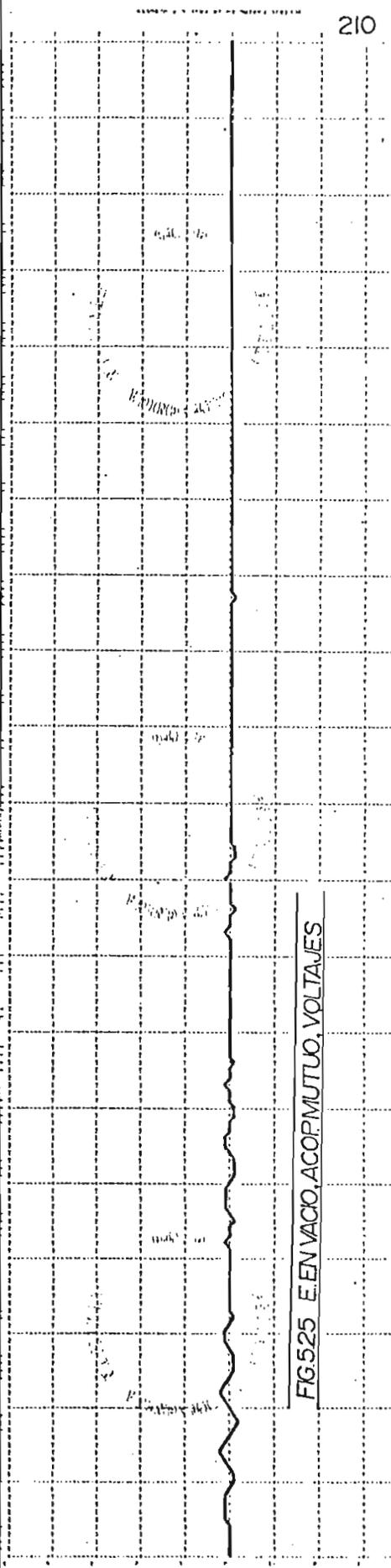
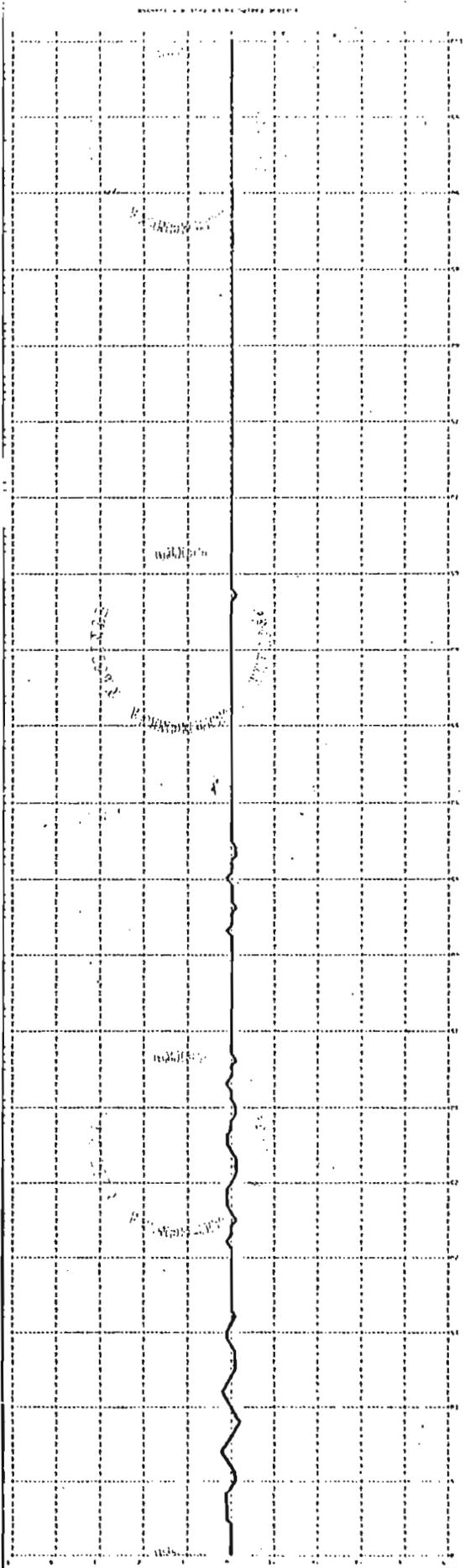
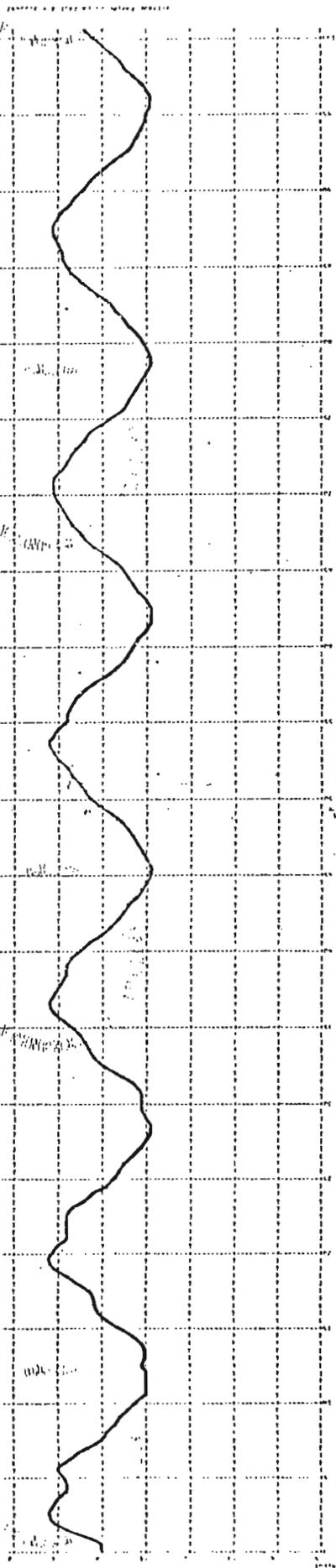


FIG.525 E EN VACIO, ACOPI MUTUO, VOLTAJES

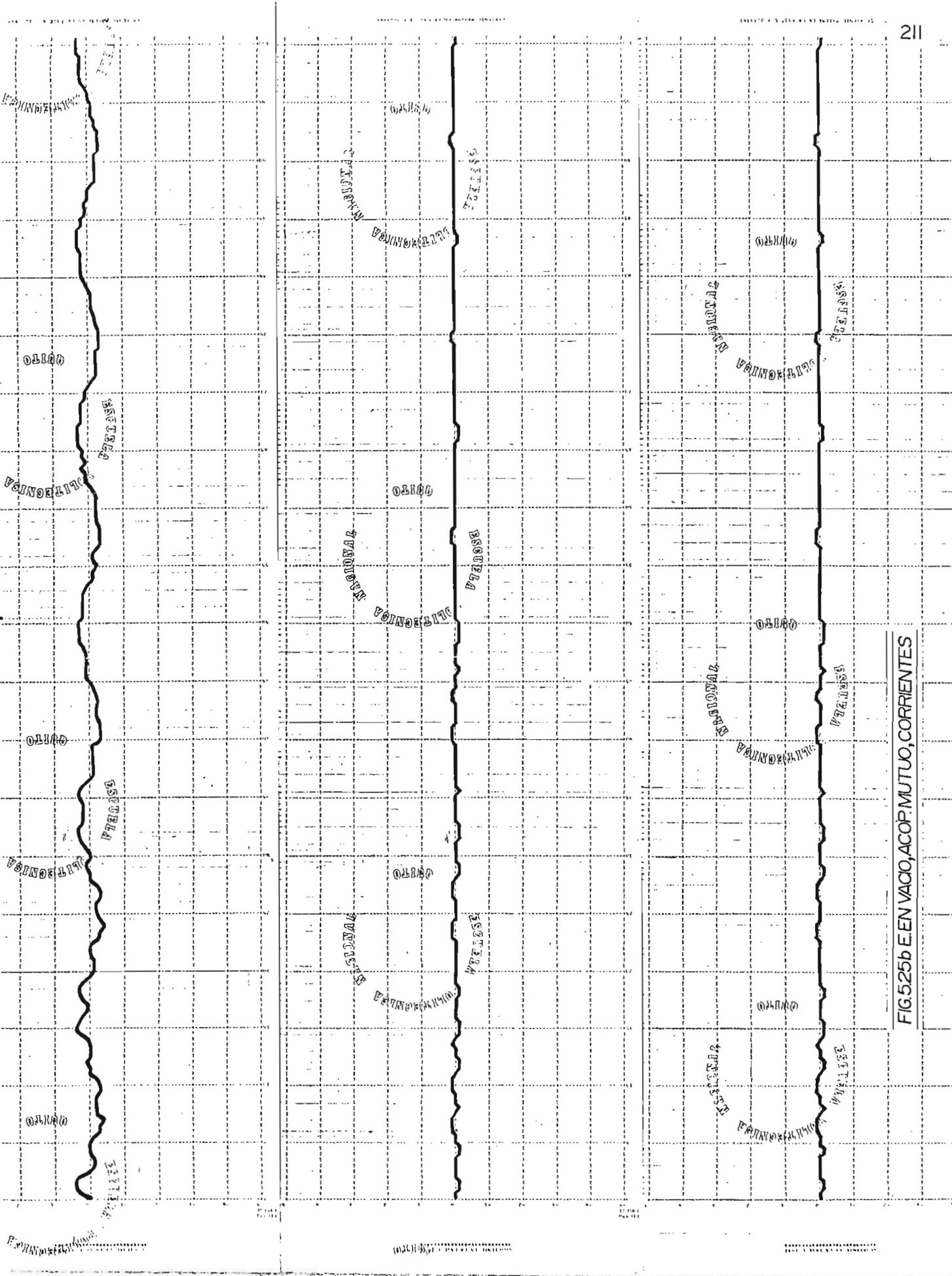


FIG.525b E. EN VACO, ACOP. MUTUO, CORRIENTES

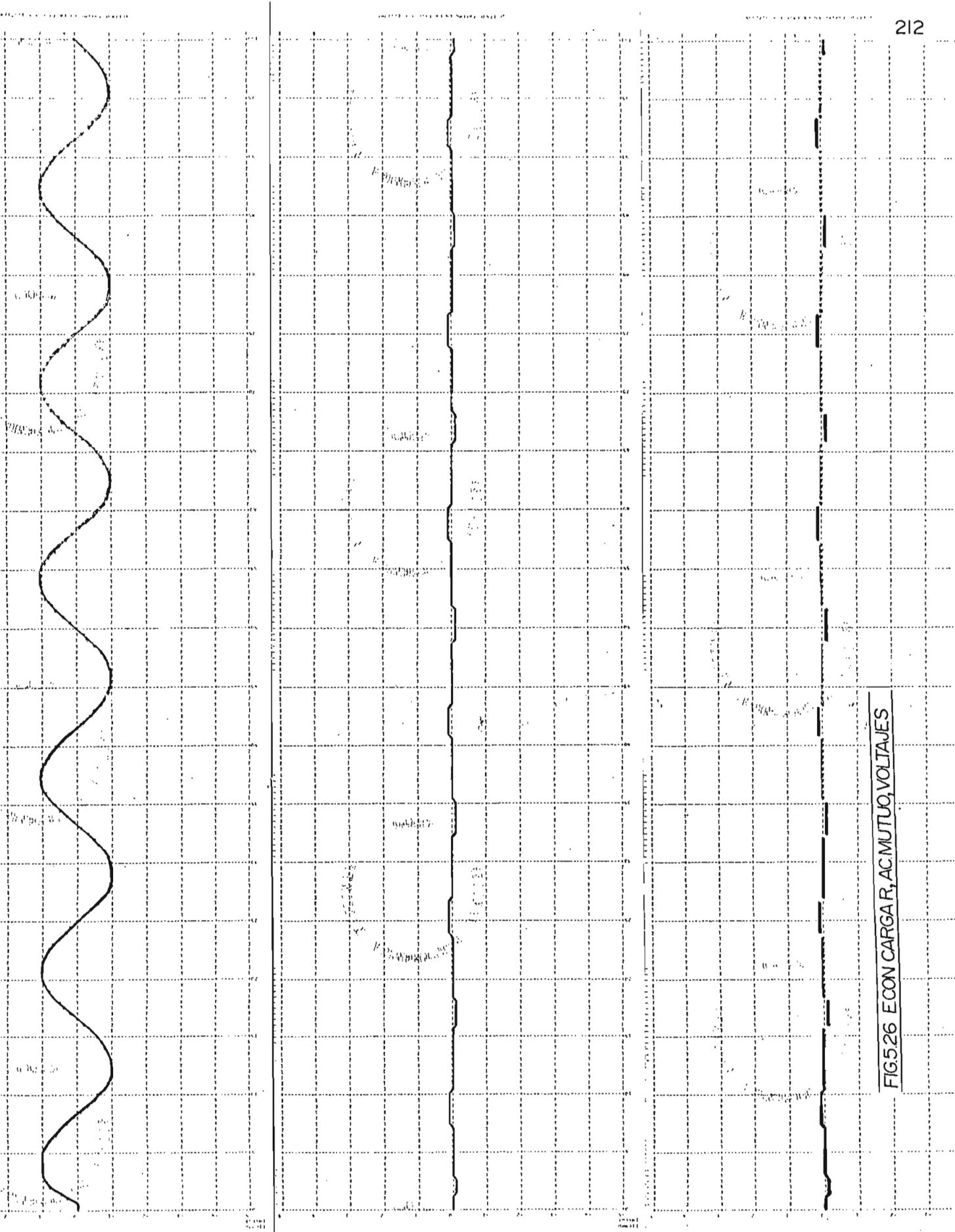


FIG.5.26 EON CARGA R, AC MUTUO, VOLTAJES

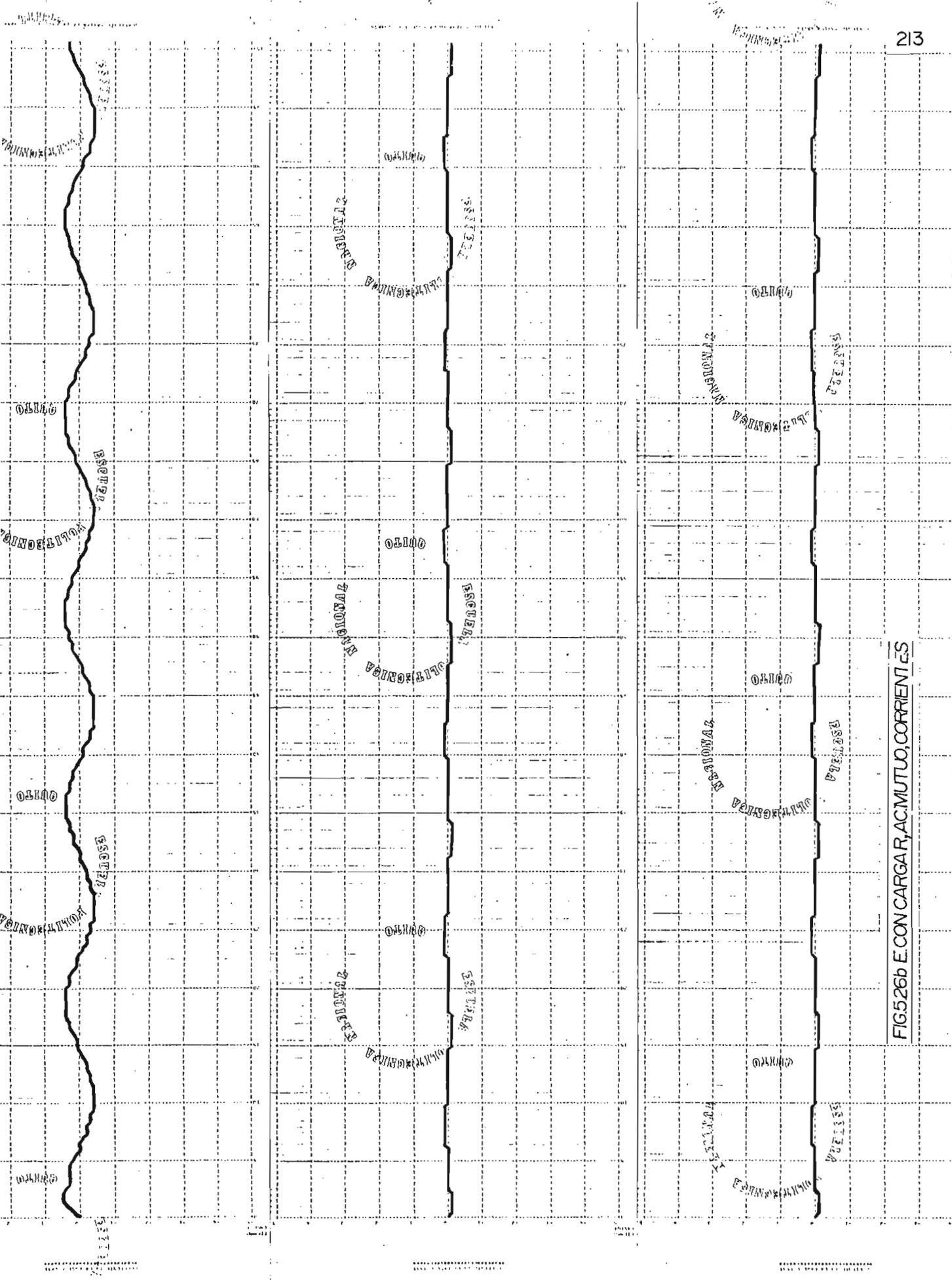


FIG.526b E. CON CARGA R, AC. MUTO, CORRIEN LES

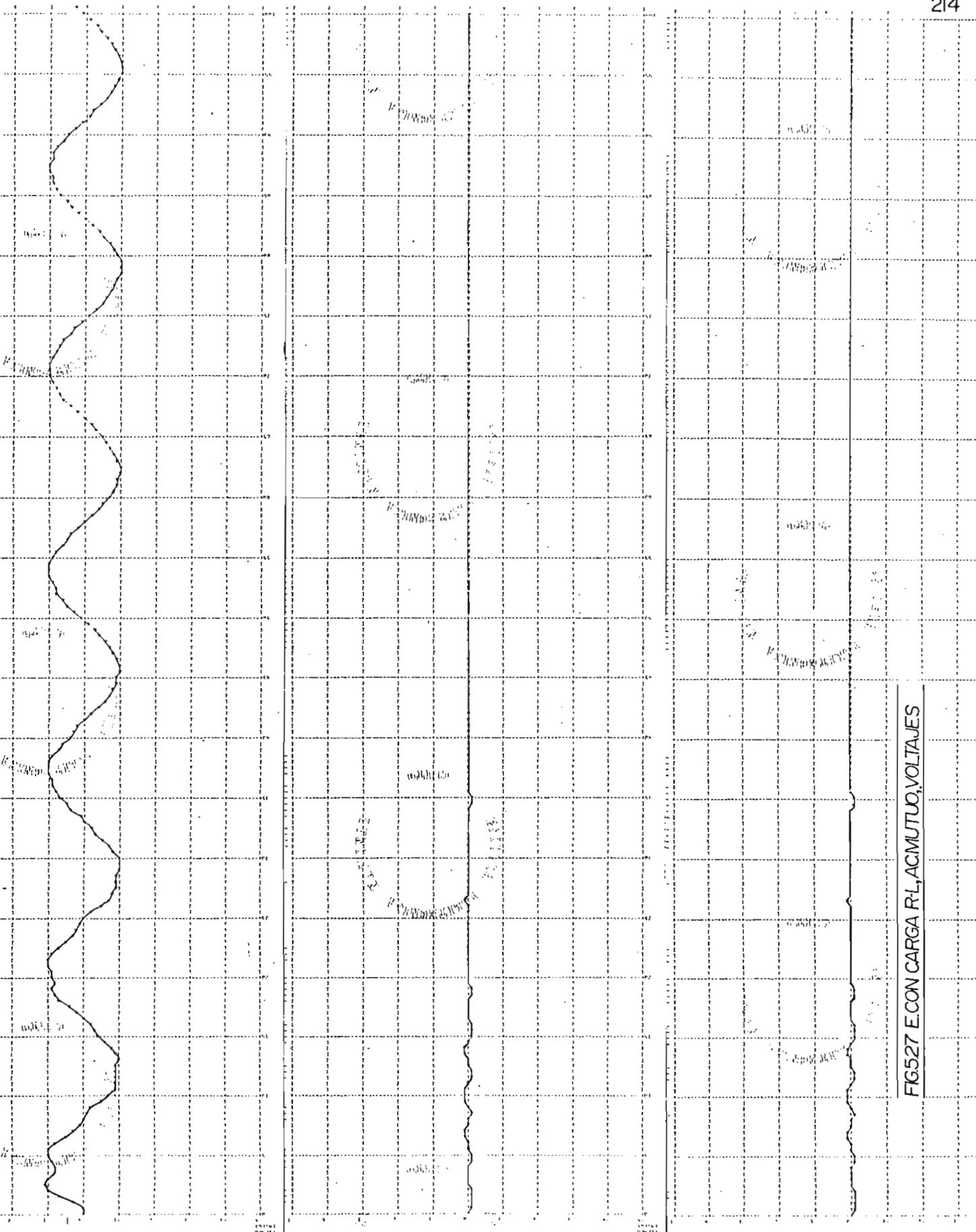


FIG527 E CON CARGA R-L, AC MUTUO, VOLTAJES

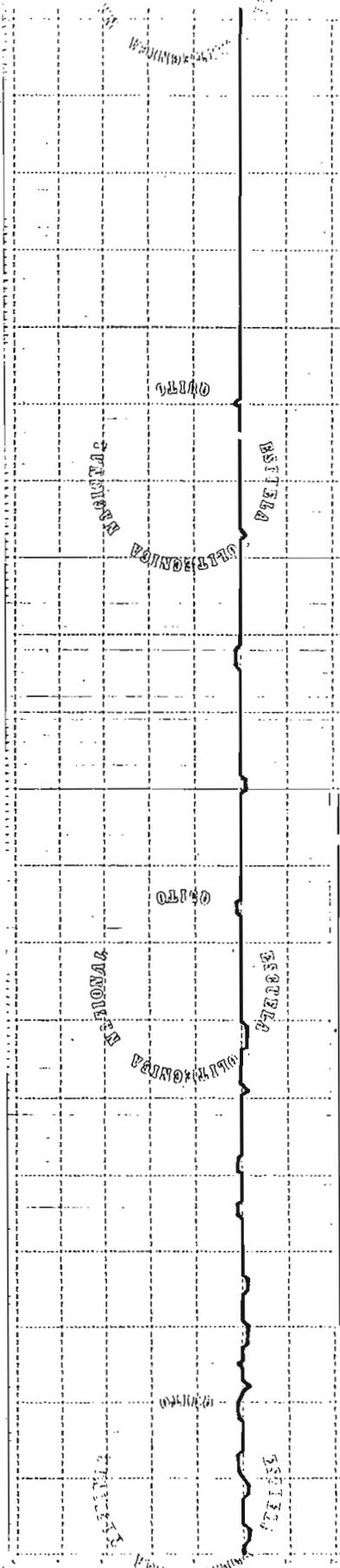
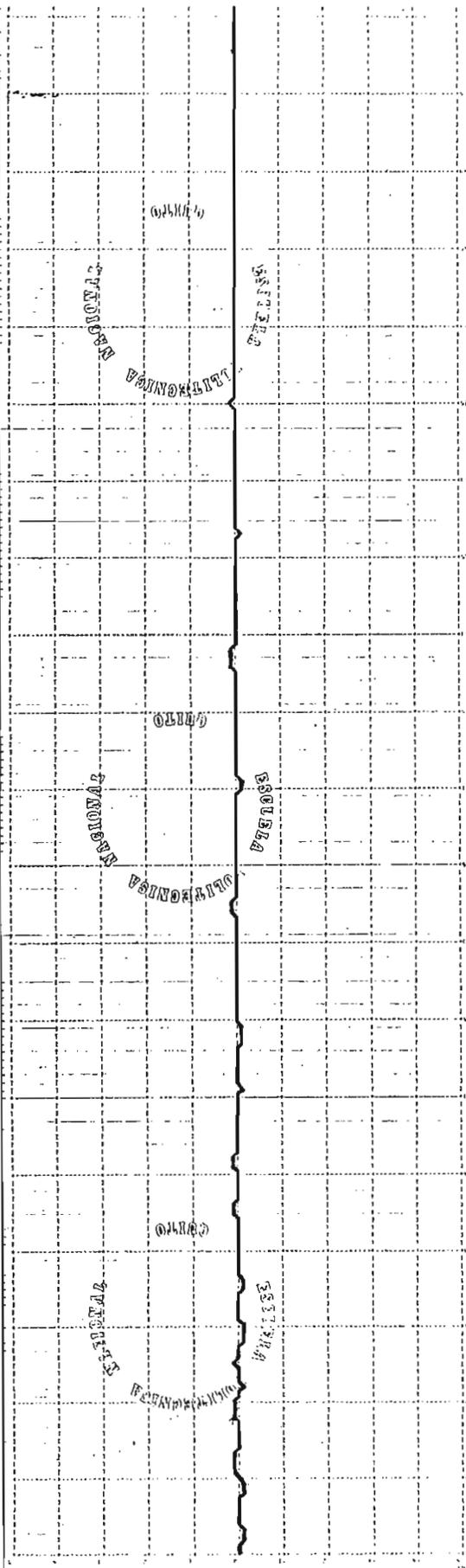
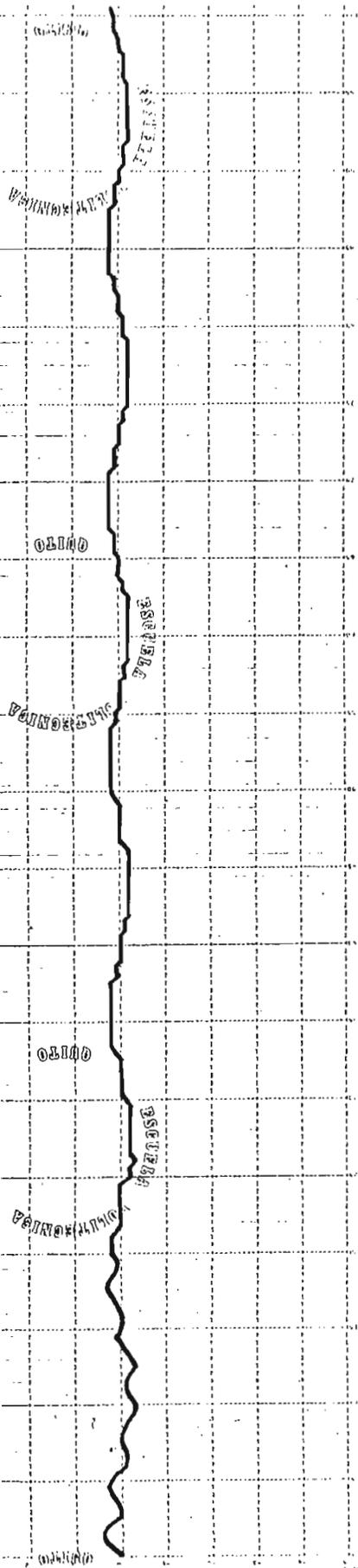


FIG 527b E. CON CARGA R.L. AC. MUTUO, CORRIENTE

ATENUACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLITUD	FASE (RAD)
0	376.99	1.054	0.38775
1	1639.85	1.329	-1.59054
2	5519.77	0.426	-1.57713
3	9199.64	0.255	-1.57458
4	12879.50	0.182	-1.57350
5	16559.37	0.142	-1.57290
6	20239.25	0.116	-1.57252
7	23919.11	0.098	-1.57225
8	27598.97	0.085	-1.57206
9	31278.82	0.075	-1.57191
10	34958.69	0.067	-1.57179
11	38638.55	0.061	-1.57170
12	42318.41	0.055	-1.57162
13	45998.27	0.051	-1.57155
14	49678.13	0.047	-1.57150
15	53357.98	0.044	-1.57145
16	57037.86	0.041	-1.57141
17	60717.71	0.039	-1.57137
18	64397.57	0.036	-1.57134
19	68077.57	0.034	-1.57131
20	71757.25	0.033	-1.57128

NACIONAL

FESCAL

QUITO

TABLA 5.4

	ATENUACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLITUD	FASE (RAD)
0		376.99	1.043	0.28553
1	-391.47	1839.65	1.098	-2.00708
2	-391.46	5519.77	0.368	-1.71306
3	-391.46	9199.64	0.221	-1.65599
4	-391.46	12879.50	0.158	-1.63162
5	-391.46	16559.37	0.123	-1.61809
6	-391.46	20239.25	0.100	-1.60949
7	-391.46	23919.11	0.085	-1.60353
8	-391.46	27598.98	0.074	-1.59916
9	-391.46	31278.83	0.065	-1.59583
10	-391.46	34958.70	0.058	-1.59319
11	-391.46	38638.54	0.053	-1.59107
12	-391.46	42318.42	0.048	-1.58930
13	-391.46	45998.26	0.044	-1.58782
14	-391.46	49678.13	0.041	-1.58656
15	-391.46	53357.99	0.038	-1.58546
16	-391.46	57037.84	0.036	-1.58452
17	-391.46	60717.71	0.033	-1.58369
18	-391.46	64397.57	0.032	-1.58295
19	-391.46	68077.37	0.030	-1.58234
20	-391.46	71757.25	0.028	-1.58174

TABLA 5.5

COMUNICACIONES NACIONALES

AMPLITUD

FRECUENCIA (RAD/SEG)

ATENUACION

FASE (RAD)

RESEÑA

QUITO

	ATENUACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLITUD	FASE (RAD)
0		376.99	0.999	0.33049
1	-36.36	1924.04	1.328	-1.58676
2	-19.88	5550.28	0.427	-1.57693
3	-18.31	9218.09	0.255	-1.57454
4	-17.87	12892.71	0.182	-1.57348
5	-17.12	16545.07	0.142	-1.57289
6	-17.59	20247.66	0.116	-1.57251
7	-17.54	23926.23	0.058	-1.57225
8	-17.30	27592.80	0.085	-1.57206
9	-17.48	31284.27	0.075	-1.57191
10	-17.47	34963.56	0.067	-1.57179
11	-17.35	38634.12	0.061	-1.57170
12	-17.45	42322.44	0.055	-1.57162
13	-17.44	46001.98	0.051	-1.57155
14	-17.37	49674.70	0.047	-1.57150
15	-17.43	53361.18	0.044	-1.57145
16	-17.43	57040.83	0.041	-1.57141
17	-17.42	60720.52	0.039	-1.57137
18	-17.42	64400.23	0.036	-1.57134
19	-17.42	68079.94	0.034	-1.57131
20	-17.42	71759.62	0.033	-1.57128

TABLA 5.6

QUITO

	ATENJACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLITUD	FASE (RAD)
0		376.99	1.053	0.37414
1	-65.23	1639.85	1.324	-1.64477
2	-65.23	5519.77	0.425	-1.59454
3	-65.23	9199.64	0.254	-1.58500
4	-65.23	12879.50	0.182	-1.58093
5	-65.23	16559.36	0.141	-1.57868
6	-65.22	20239.25	0.115	-1.57724
7	-65.23	23919.11	0.098	-1.57625
8	-65.23	27598.97	0.085	-1.57552
9	-65.22	31278.82	0.075	-1.57497
10	-65.22	34958.70	0.067	-1.57453
11	-65.22	38638.55	0.060	-1.57417
12	-65.22	42318.42	0.055	-1.57388
13	-65.23	45998.26	0.051	-1.57363
14	-65.23	49678.14	0.047	-1.57342
15	-65.23	53357.98	0.044	-1.57324
16	-65.22	57037.85	0.041	-1.57308
17	-65.23	60717.71	0.038	-1.57294
18	-65.23	64397.57	0.036	-1.57282
19	-65.23	68077.37	0.034	-1.57272
20	-65.22	71757.25	0.033	-1.57262

TABLA 5.7

	ATENUACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLIUD	FASE (RAD)
0		376.99	1.028	0.27364
1	-439.30	1839.85	1.034	-2.05818
2	-439.28	5519.77	0.351	-1.73036
3	-439.28	9199.64	0.211	-1.66638
4	-439.28	12879.50	0.151	-1.63904
5	-439.28	16559.36	0.117	-1.62387
6	-439.28	20239.26	0.056	-1.61421
7	-439.28	23919.12	0.081	-1.60752
8	-439.28	27598.97	0.070	-1.60264
9	-439.28	31278.84	0.062	-1.59889
10	-439.28	34958.70	0.055	-1.59593
11	-439.28	38638.55	0.050	-1.59353
12	-439.28	42318.41	0.046	-1.59156
13	-439.28	45998.27	0.042	-1.58989
14	-439.28	49678.13	0.039	-1.58848
15	-439.28	53357.99	0.036	-1.58726
16	-439.28	57037.85	0.034	-1.58620
17	-439.28	60717.70	0.032	-1.58527
18	-439.28	64397.56	0.030	-1.58445
19	-439.28	68077.37	0.028	-1.58376
20	-439.28	71757.25	0.027	-1.58307

TABLA 5.8

ATENUACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLITUD	FASE (RAD)
0	376.99	0.991	0.32393
1	-82.34	1.320	-1.62632
2	-67.45	0.426	-1.59000
3	-60.04	0.254	-1.58237
4	-65.64	0.182	-1.57907
5	-65.48	0.141	-1.57724
6	-65.39	0.116	-1.57607
7	-65.35	0.098	-1.57526
8	-65.32	0.085	-1.57466
9	-65.30	0.075	-1.57421
10	-65.28	0.067	-1.57385
11	-65.27	0.060	-1.57356
12	-65.26	0.055	-1.57332
13	-65.26	0.051	-1.57311
14	-65.25	0.047	-1.57294
15	-65.25	0.044	-1.57279
16	-65.25	0.041	-1.57267
17	-65.24	0.038	-1.57255
18	-65.24	0.036	-1.57245
19	-65.24	0.034	-1.57236
20	-65.24	0.033	-1.57229

POLITECNICA

TABLA 5.9

S( 1) =	-17.40	+J	9252.18
S( 2) =	-17.40	+J	27756.58
S( 3) =	-17.40	+J	46260.97
S( 4) =	-17.40	+J	64765.36
S( 5) =	-17.40	+J	83269.75
S( 6) =	-17.40	+J	101774.19
S( 7) =	-17.40	+J	120278.62
S( 8) =	-17.40	+J	138782.94
S( 9) =	-17.40	+J	157287.37
S(10) =	-17.40	+J	175791.75
S(11) =	-17.40	+J	194296.12
S(12) =	-17.40	+J	212800.50
S(13) =	-17.40	+J	231304.87
S(14) =	-17.40	+J	249809.25
S(15) =	-17.40	+J	268313.62
S(16) =	-17.40	+J	286818.00
S(17) =	-17.40	+J	305322.62
S(18) =	-17.40	+J	323826.87
S(19) =	-17.40	+J	342331.19
S(20) =	-17.40	+J	360835.69

TABLA 5.10

S( 1) =	-17.40	+J	4626.06
S( 2) =	-17.40	+J	13878.28
S( 3) =	-17.40	+J	23130.49
S( 4) =	-17.40	+J	32382.67
S( 5) =	-17.40	+J	41634.87
S( 6) =	-17.40	+J	50887.10
S( 7) =	-17.40	+J	60139.29
S( 8) =	-17.40	+J	69391.44
S( 9) =	-17.40	+J	78643.69
S(10) =	-17.40	+J	87895.87
S(11) =	-17.40	+J	97148.06
S(12) =	-17.40	+J	106400.25
S(13) =	-17.40	+J	115652.44
S(14) =	-17.40	+J	124904.62
S(15) =	-17.40	+J	134156.87
S(16) =	-17.40	+J	143409.00
S(17) =	-17.40	+J	152661.25
S(18) =	-17.40	+J	161913.44
S(19) =	-17.40	+J	171165.56
S(20) =	-17.40	+J	180417.75

TABLA 5.11

S( 1) =	-17.40	+J	3084.02
S( 2) =	-17.40	+J	9252.18
S( 3) =	-17.40	+J	15420.31
S( 4) =	-17.40	+J	21588.46
S( 5) =	-17.40	+J	27756.59
S( 6) =	-17.40	+J	33924.71
S( 7) =	-17.40	+J	40092.85
S( 8) =	-17.40	+J	46260.99
S( 9) =	-17.40	+J	52429.11
S(10) =	-17.40	+J	58597.23
S(11) =	-17.40	+J	64765.36
S(12) =	-17.40	+J	70933.44
S(13) =	-17.40	+J	77101.62
S(14) =	-17.40	+J	83269.81
S(15) =	-17.40	+J	89437.87
S(16) =	-17.40	+J	95606.00
S(17) =	-17.40	+J	101774.12
S(18) =	-17.40	+J	107942.25
S(19) =	-17.40	+J	114110.44
S(20) =	-17.40	+J	120278.56

TABLA 5.12

S( 1) =	-17.40	+J	2312.98
S( 2) =	-17.40	+J	6939.12
S( 3) =	-17.40	+J	11565.23
S( 4) =	-17.40	+J	16191.33
S( 5) =	-17.40	+J	20817.45
S( 6) =	-17.40	+J	25443.54
S( 7) =	-17.40	+J	30069.65
S( 8) =	-17.40	+J	34695.73
S( 9) =	-17.40	+J	39321.83
S(10) =	-17.40	+J	43947.93
S(11) =	-17.40	+J	48574.04
S(12) =	-17.40	+J	53200.13
S(13) =	-17.40	+J	57826.22
S(14) =	-17.40	+J	62452.32
S(15) =	-17.40	+J	67078.37
S(16) =	-17.40	+J	71704.50
S(17) =	-17.40	+J	76330.62
S(18) =	-17.40	+J	80956.69
S(19) =	-17.40	+J	85582.81
S(20) =	-17.40	+J	90208.87

TABLA 5.13

S( 1) =	-17.40	+J	1850.36
S( 2) =	-17.40	+J	5551.29
S( 3) =	-17.40	+J	9252.18
S( 4) =	-17.40	+J	12953.06
S( 5) =	-17.40	+J	16653.94
S( 6) =	-17.40	+J	20354.64
S( 7) =	-17.40	+J	24055.71
S( 8) =	-17.40	+J	27756.57
S( 9) =	-17.40	+J	31457.48
S(10) =	-17.40	+J	35158.36
S(11) =	-17.40	+J	38859.23
S(12) =	-17.40	+J	42560.11
S(13) =	-17.40	+J	46260.98
S(14) =	-17.40	+J	49961.86
S(15) =	-17.40	+J	53662.73
S(16) =	-17.40	+J	57363.62
S(17) =	-17.40	+J	61064.48
S(18) =	-17.40	+J	64765.36
S(19) =	-17.40	+J	68466.19
S(20) =	-17.40	+J	72167.06

TABLA 5.14

S( 1) =	-17.40	+J	1541.94
S( 2) =	-17.40	+J	4626.07
S( 3) =	-17.40	+J	7710.14
S( 4) =	-17.40	+J	10794.21
S( 5) =	-17.40	+J	13878.28
S( 6) =	-17.40	+J	16962.36
S( 7) =	-17.40	+J	20046.43
S( 8) =	-17.40	+J	23130.48
S( 9) =	-17.40	+J	26214.56
S(10) =	-17.40	+J	29298.61
S(11) =	-17.40	+J	32382.70
S(12) =	-17.40	+J	35466.77
S(13) =	-17.40	+J	38550.81
S(14) =	-17.40	+J	41634.87
S(15) =	-17.40	+J	44718.95
S(16) =	-17.40	+J	47803.00
S(17) =	-17.40	+J	50887.07
S(18) =	-17.40	+J	53971.12
S(19) =	-17.40	+J	57055.20
S(20) =	-17.40	+J	60139.26

TABLA 5.15

S( 1) =	-17.40	+J	1321.63
S( 2) =	-17.40	+J	3965.19
S( 3) =	-17.40	+J	6608.69
S( 4) =	-17.40	+J	9252.18
S( 5) =	-17.40	+J	11895.66
S( 6) =	-17.40	+J	14539.15
S( 7) =	-17.40	+J	17182.64
S( 8) =	-17.40	+J	19826.14
S( 9) =	-17.40	+J	22469.61
S(10) =	-17.40	+J	25113.11
S(11) =	-17.40	+J	27756.58
S(12) =	-17.40	+J	30400.07
S(13) =	-17.40	+J	33043.55
S(14) =	-17.40	+J	35687.03
S(15) =	-17.40	+J	38330.53
S(16) =	-17.40	+J	40974.02
S(17) =	-17.40	+J	43617.48
S(18) =	-17.40	+J	46260.98
S(19) =	-17.40	+J	48904.45
S(20) =	-17.40	+J	51547.93

TABLA 5.16

S( 1) =	-17.40	+J	1156.39
S( 2) =	-17.40	+J	3469.53
S( 3) =	-17.40	+J	5782.60
S( 4) =	-17.40	+J	8095.65
S( 5) =	-17.40	+J	10408.70
S( 6) =	-17.40	+J	12721.76
S( 7) =	-17.40	+J	15034.80
S( 8) =	-17.40	+J	17347.86
S( 9) =	-17.40	+J	19660.92
S(10) =	-17.40	+J	21973.96
S(11) =	-17.40	+J	24287.02
S(12) =	-17.40	+J	26600.05
S(13) =	-17.40	+J	28913.11
S(14) =	-17.40	+J	31226.16
S(15) =	-17.40	+J	33539.21
S(16) =	-17.40	+J	35852.25
S(17) =	-17.40	+J	38165.31
S(18) =	-17.40	+J	40478.36
S(19) =	-17.40	+J	42791.41
S(20) =	-17.40	+J	45104.46

TABLA 5.17

S( 1) =	-17.40	+J	1027.87
S( 2) =	-17.40	+J	3084.02
S( 3) =	-17.40	+J	5140.08
S( 4) =	-17.40	+J	7196.13
S( 5) =	-17.40	+J	9252.18
S( 6) =	-17.40	+J	11308.23
S( 7) =	-17.40	+J	13364.28
S( 8) =	-17.40	+J	15420.32
S( 9) =	-17.40	+J	17476.36
S(10) =	-17.40	+J	19532.41
S(11) =	-17.40	+J	21588.46
S(12) =	-17.40	+J	23644.50
S(13) =	-17.40	+J	25700.53
S(14) =	-17.40	+J	27756.58
S(15) =	-17.40	+J	29812.63
S(16) =	-17.40	+J	31868.67
S(17) =	-17.40	+J	33924.71
S(18) =	-17.40	+J	35980.77
S(19) =	-17.40	+J	38036.80
S(20) =	-17.40	+J	40092.84

TABLA 5.18

S( 1) =	-17.40	+J	925.06
S( 2) =	-17.40	+J	2775.60
S( 3) =	-17.40	+J	4626.07
S( 4) =	-17.40	+J	6476.52
S( 5) =	-17.40	+J	8326.96
S( 6) =	-17.40	+J	10177.40
S( 7) =	-17.40	+J	12027.84
S( 8) =	-17.40	+J	13878.28
S( 9) =	-17.40	+J	15728.72
S(10) =	-17.40	+J	17579.17
S(11) =	-17.40	+J	19429.61
S(12) =	-17.40	+J	21280.04
S(13) =	-17.40	+J	23130.49
S(14) =	-17.40	+J	24980.93
S(15) =	-17.40	+J	26831.38
S(16) =	-17.40	+J	28681.80
S(17) =	-17.40	+J	30532.25
S(18) =	-17.40	+J	32382.69
S(19) =	-17.40	+J	34233.13
S(20) =	-17.40	+J	36083.56

TABLA 5.19

## VARIACION DEL PRIMER ARMONICO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

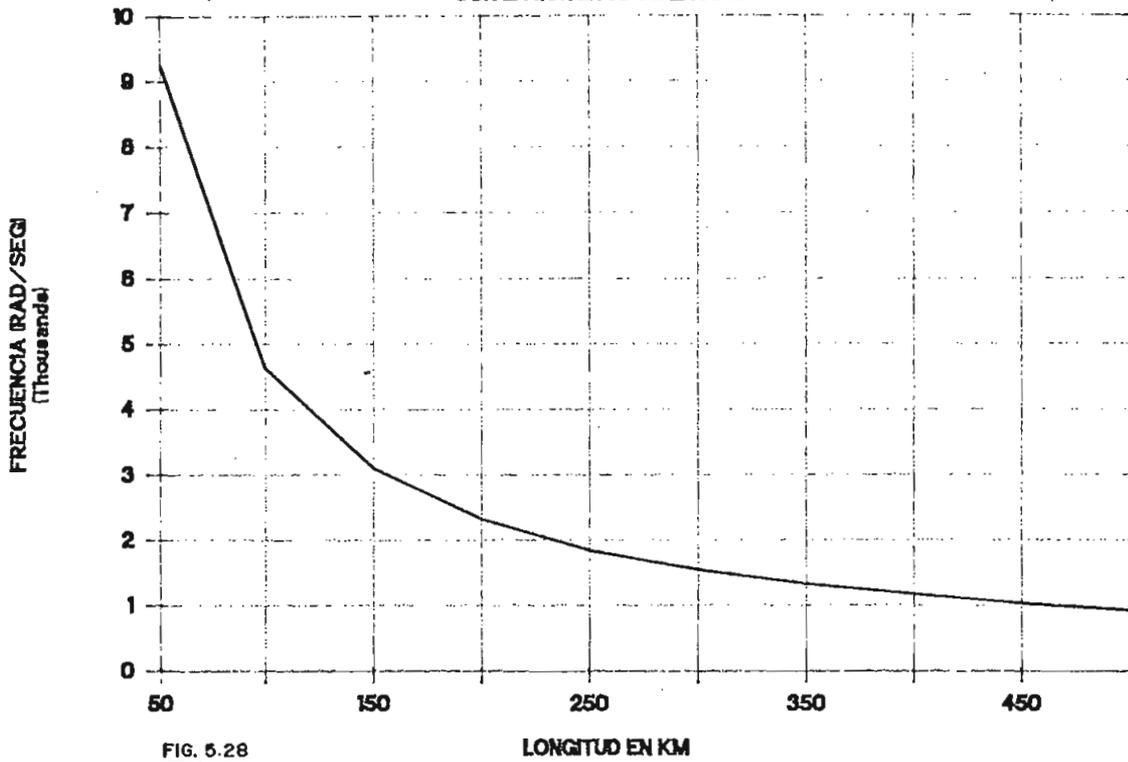


FIG. 5.28

## VARIACION DEL SEGUNDO ARMONICO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

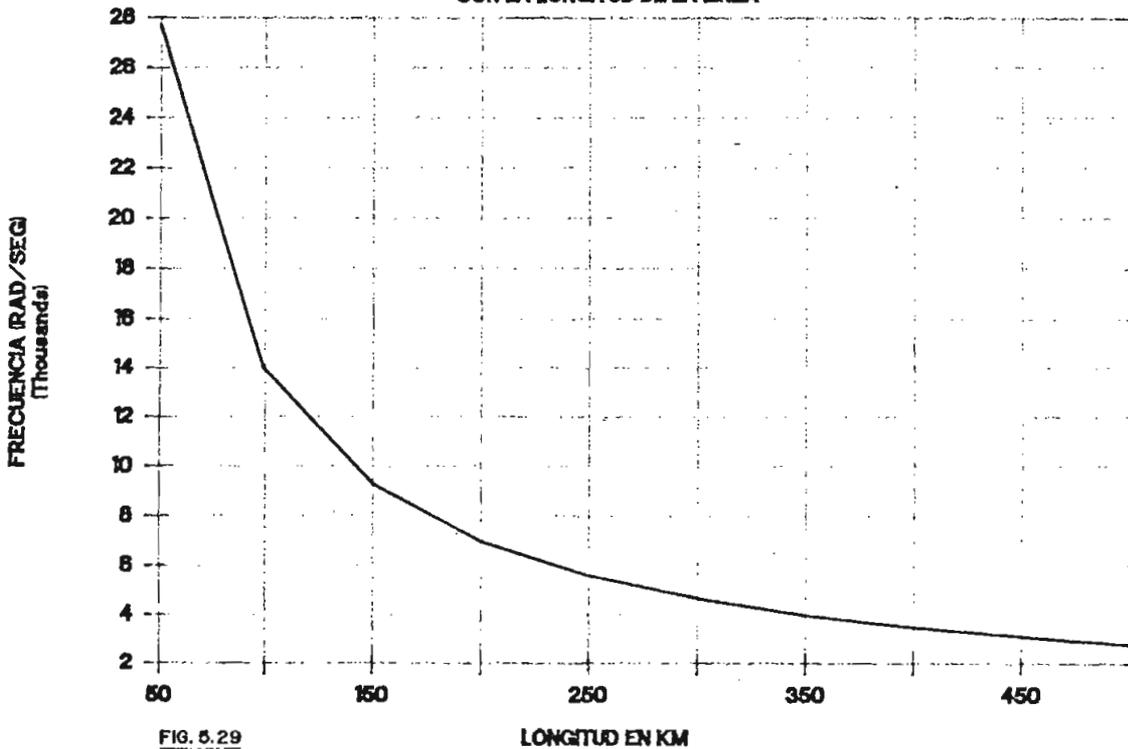


FIG. 5.29

## VARIACION DEL TERCER ARMONICO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

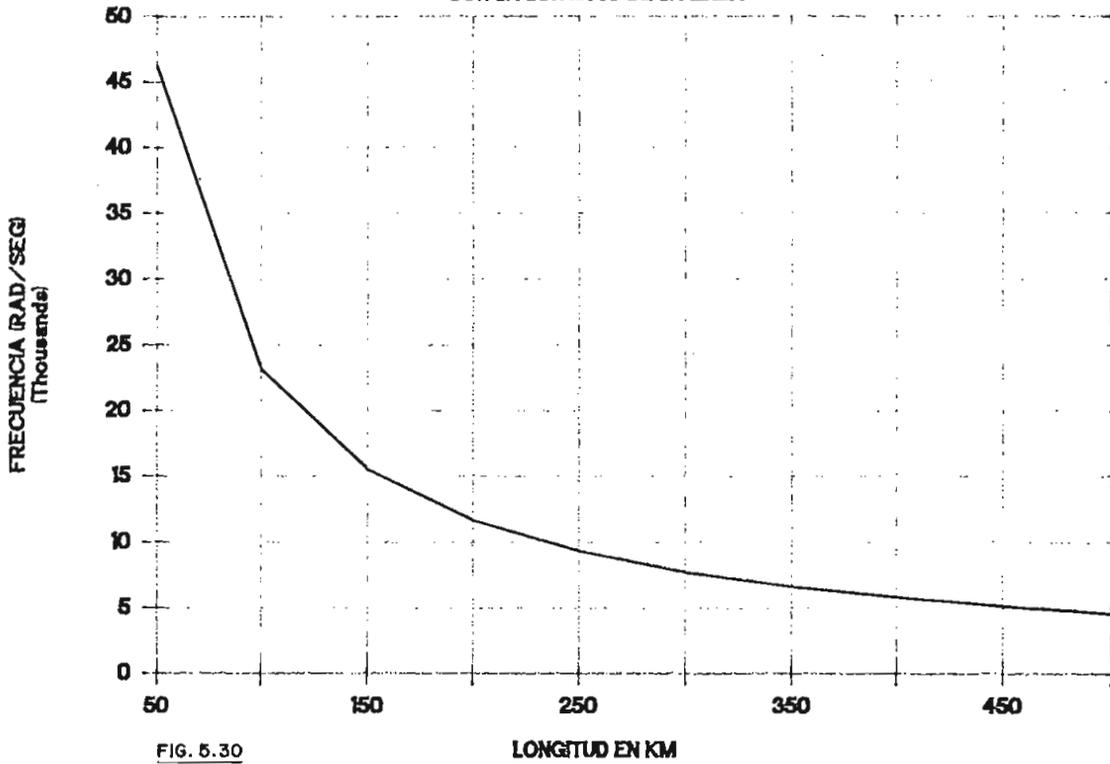


FIG. 5.30

## VARIACION DEL CUARTO ARMONICO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

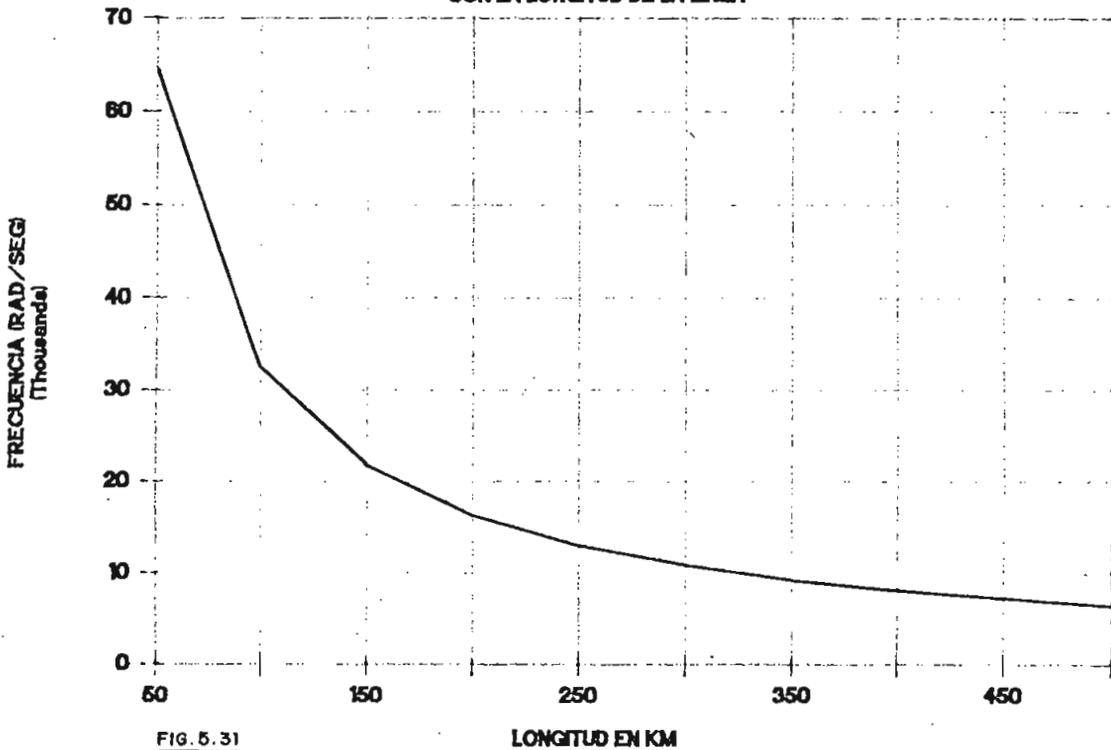


FIG. 5.31

## VARIACION DEL QUINTO ARMONICO

CON LA LONGITUD DE LA LINEA

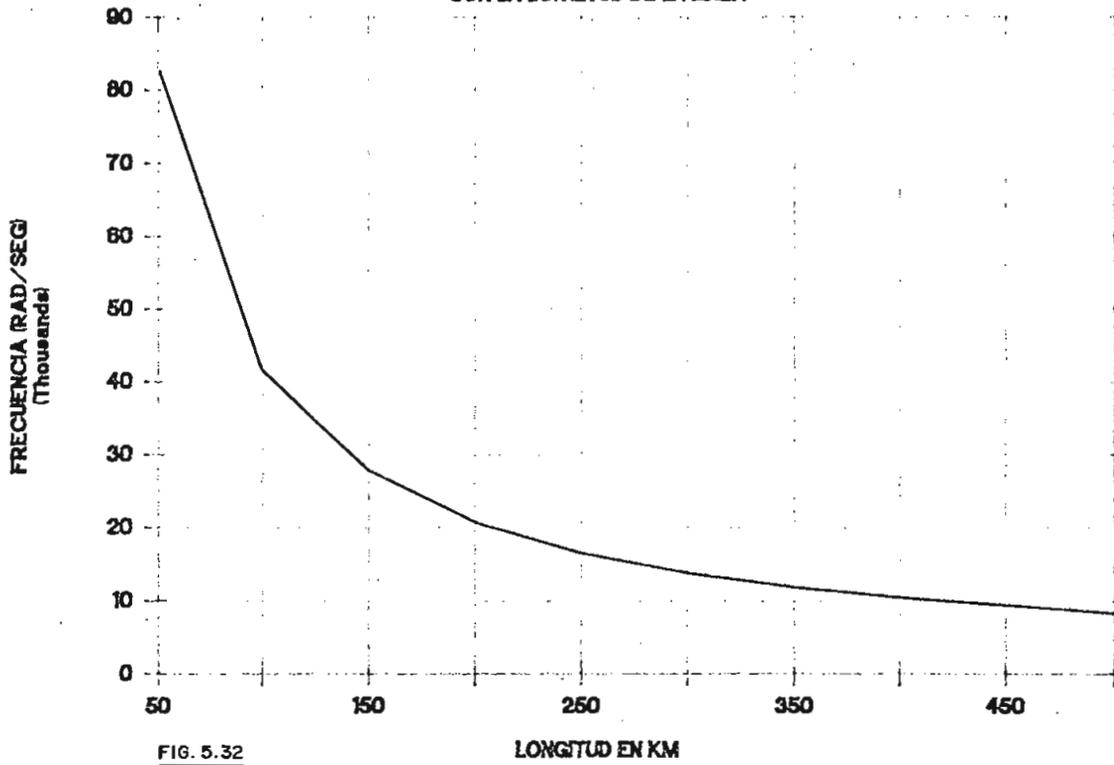


FIG. 5.32

## VARIACION DEL SEXTO ARMONICO

CON LA LONGITUD DE LA LINEA

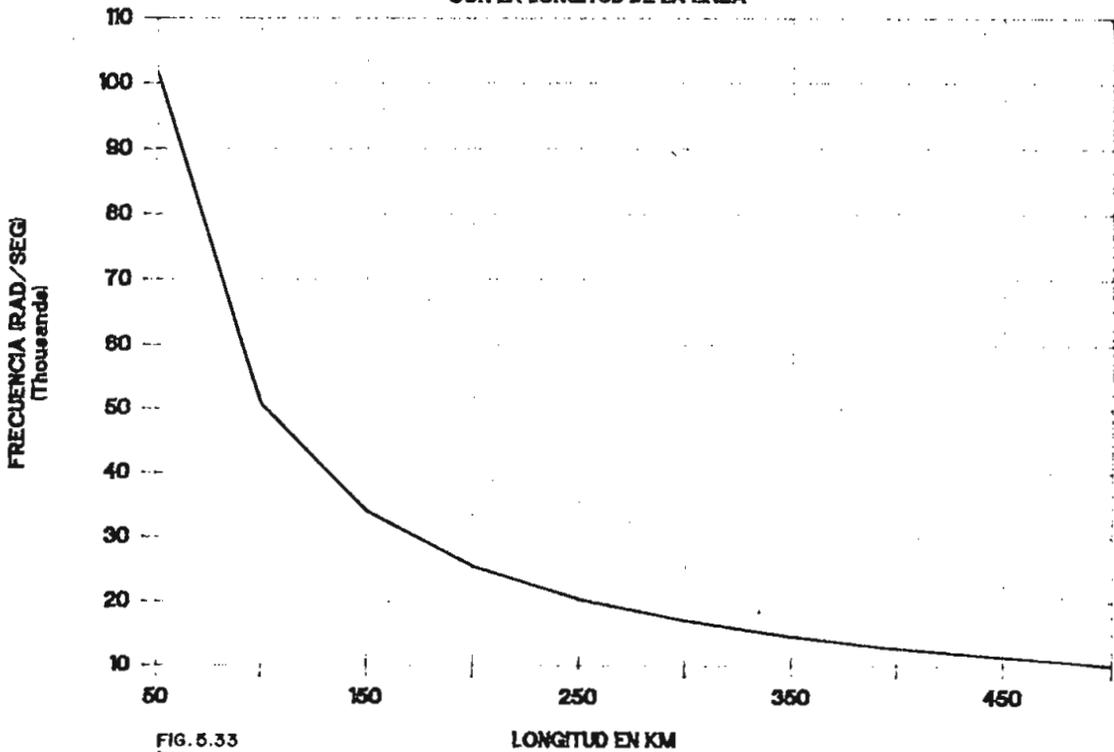


FIG. 5.33

## VARIACION DEL SEPTIMO ARMONICO

CON LA LONGITUD DE LA LINEA

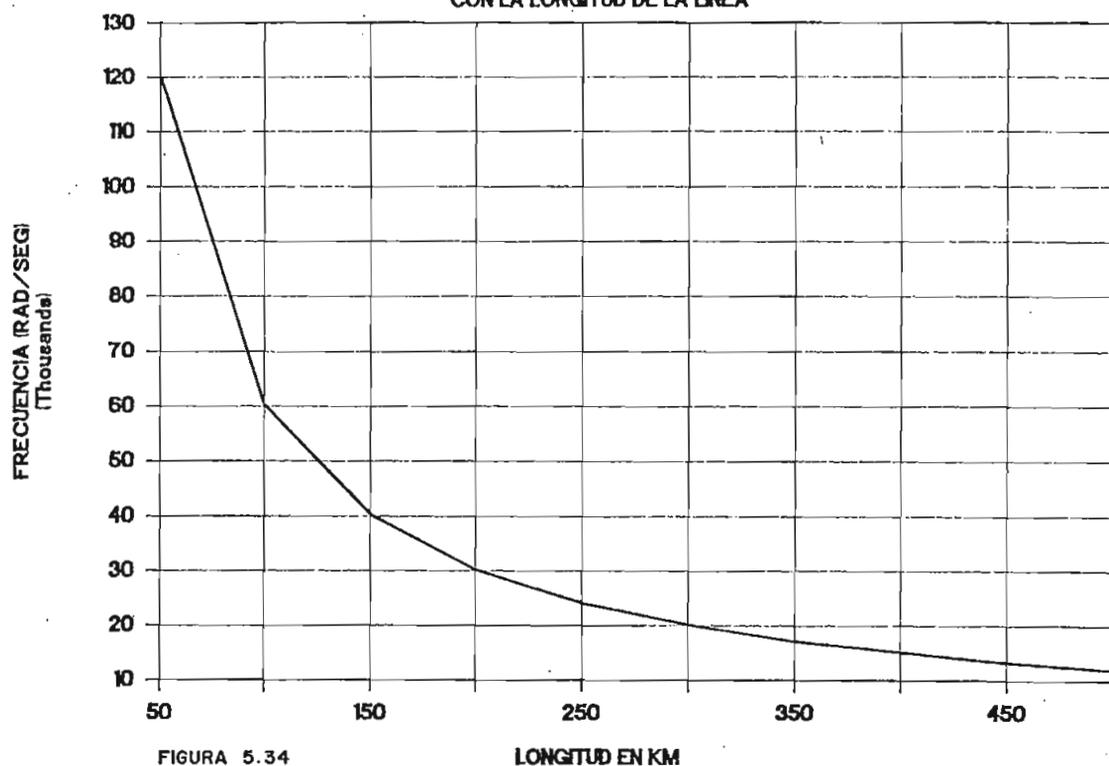


FIGURA 5.34

## VARIACION DEL OCTAVO ARMONICO

CON LA LONGITUD DE LA LINEA

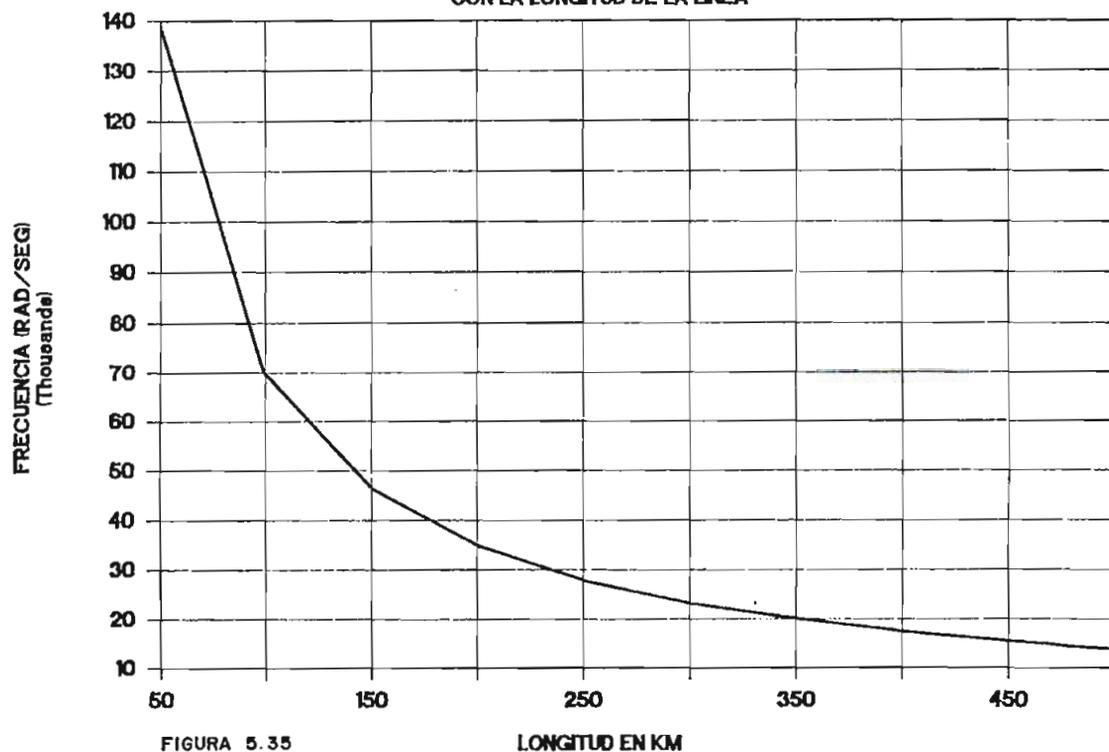


FIGURA 5.35

## VARIACION DEL NOVENO ARMONICO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

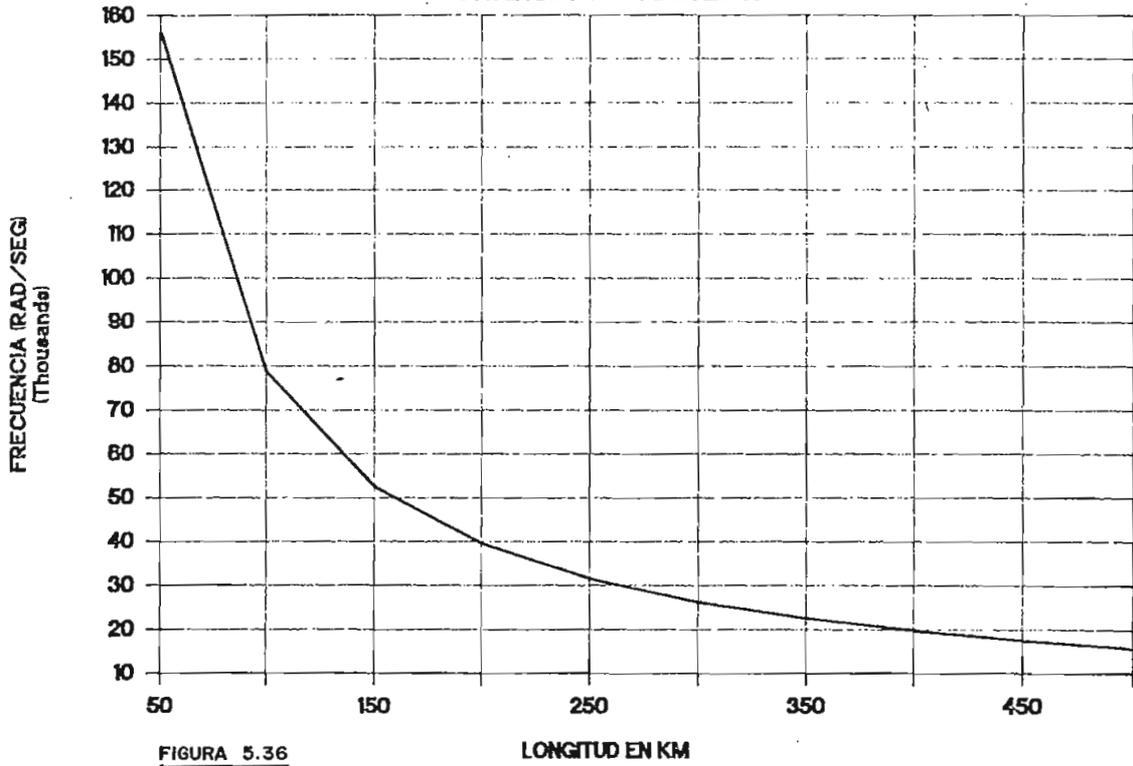


FIGURA 5.36

LONGITUD EN KM

## VARIACION DEL DECIMO ARMONICO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

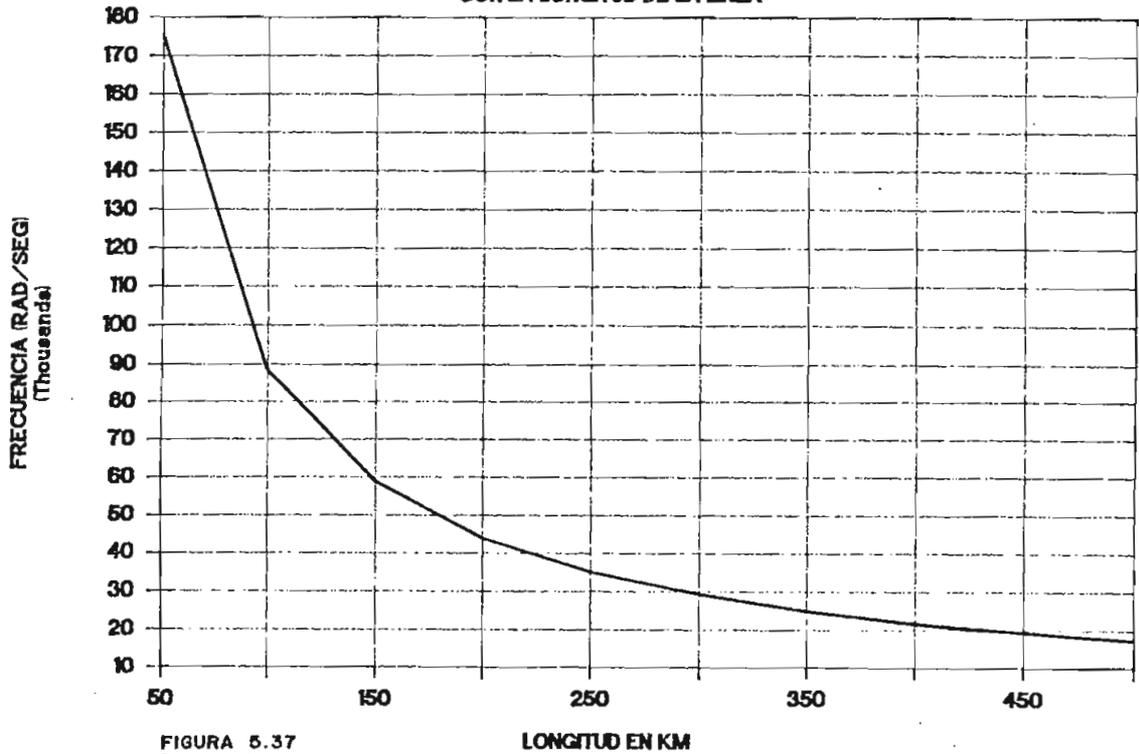


FIGURA 5.37

LONGITUD EN KM

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/VACIO/C. SIMULT.

SEC(+)

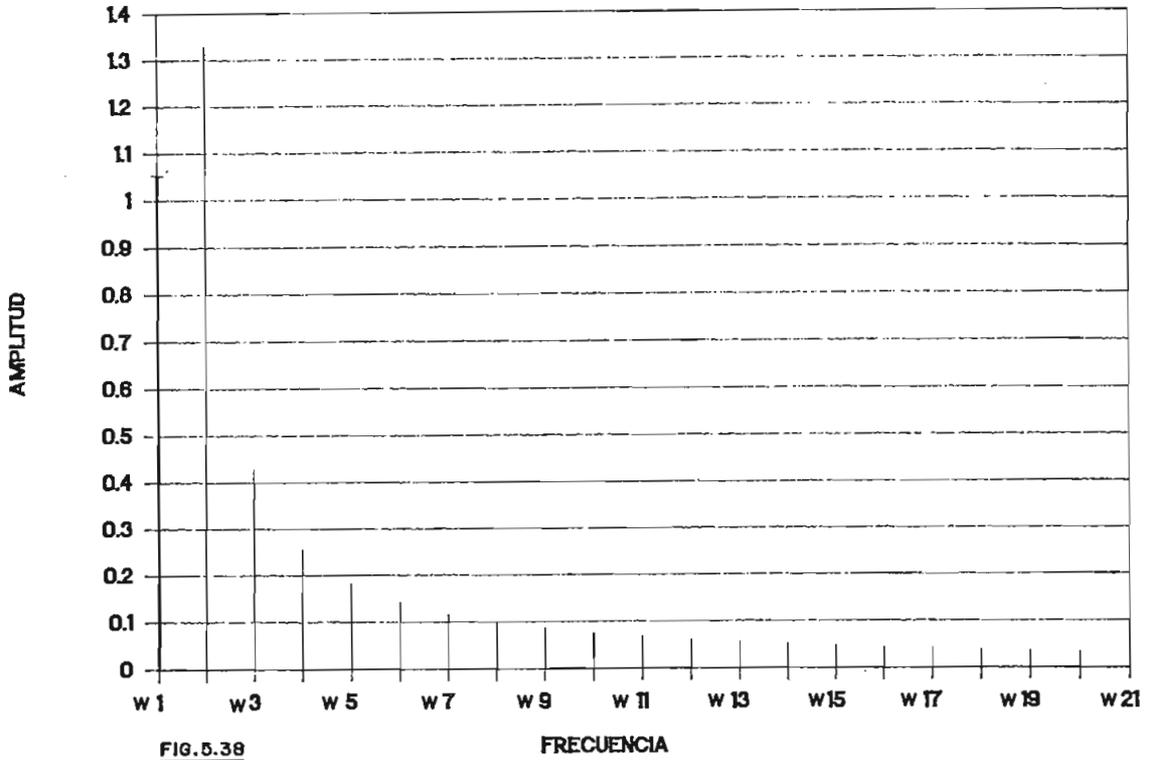


FIG. 5.38

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/VACIO/C. SECUEN.

SEC(+)

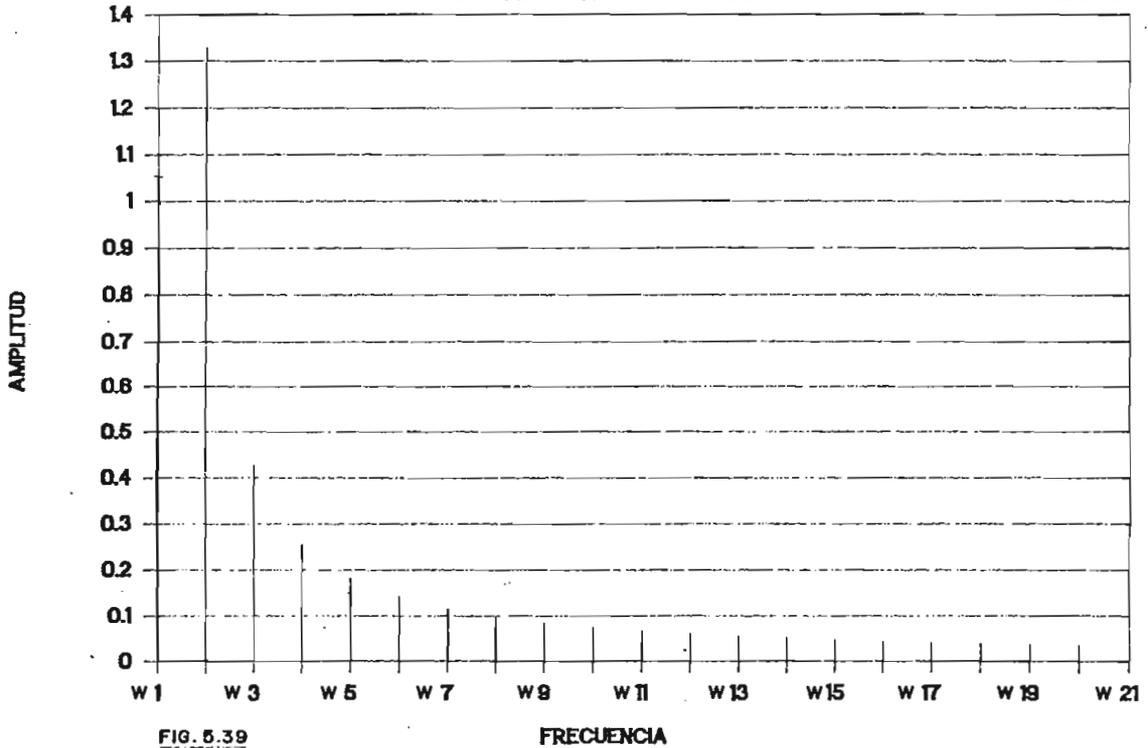


FIG. 5.39

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINTA/VACIO/C. SECUEN.

SEC(0)

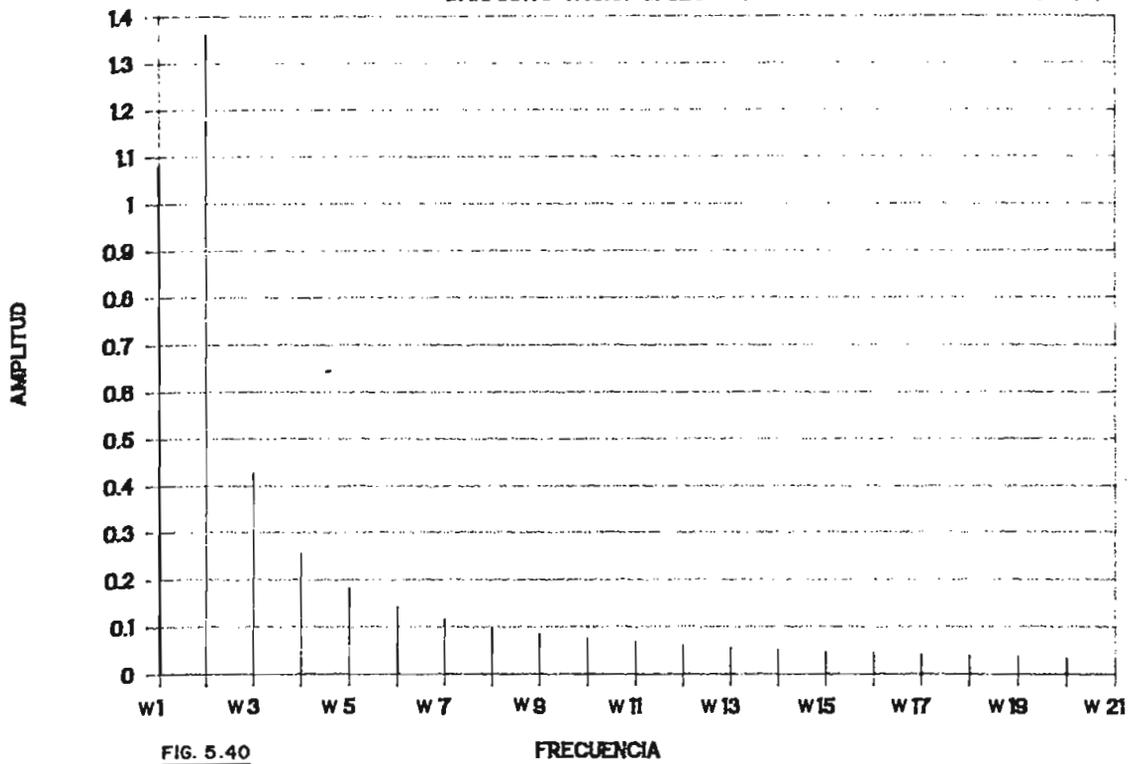


FIG. 5.40

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINTA/CARGA RESISTIVA/C. SIMULT.

SEC(+)

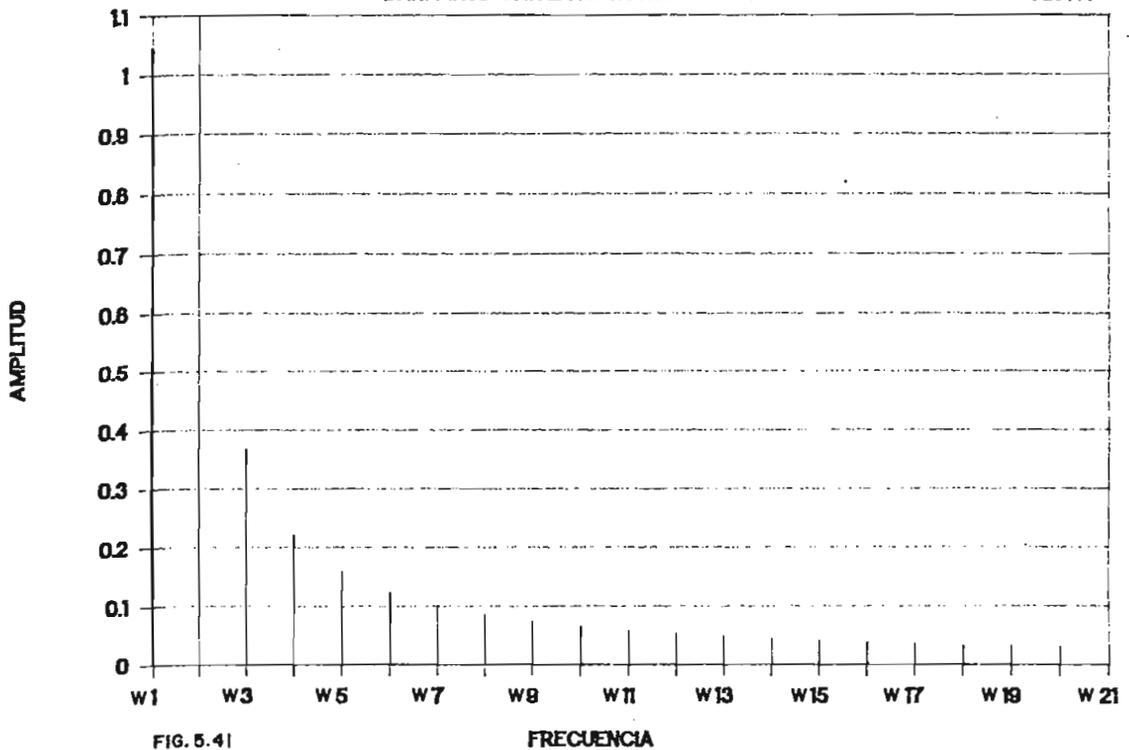


FIG. 5.41

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/CARGA RESISTIVA/C. SECUENC.

SEC(+)

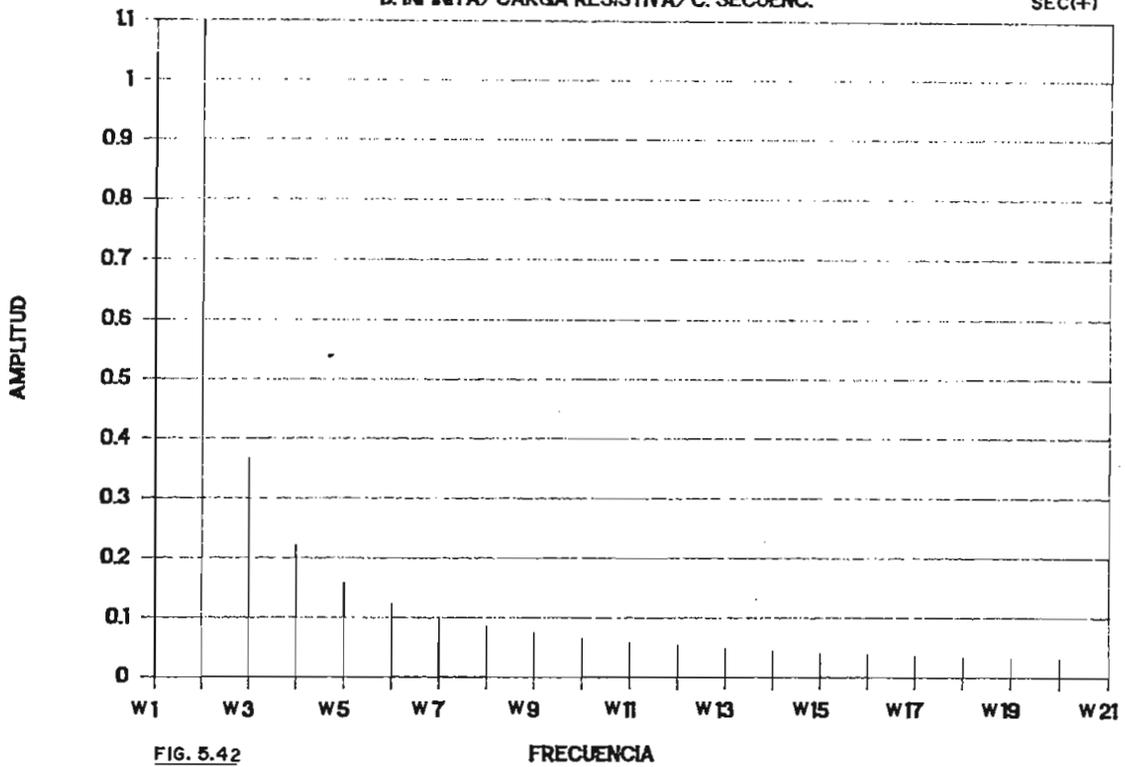


FIG. 5.42

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/CARGA RESISTIVA/C. SECUENC.

SEC(0)

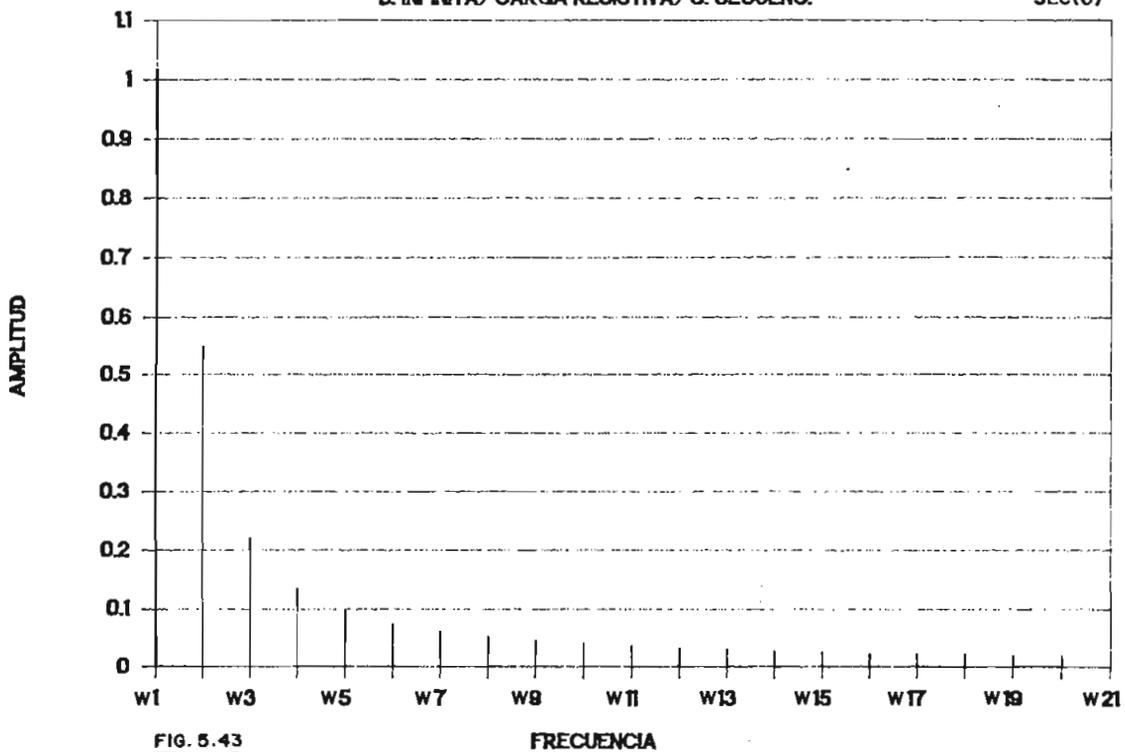


FIG. 5.43

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/CARGA R-L/C. SMULT.

SEC(+)

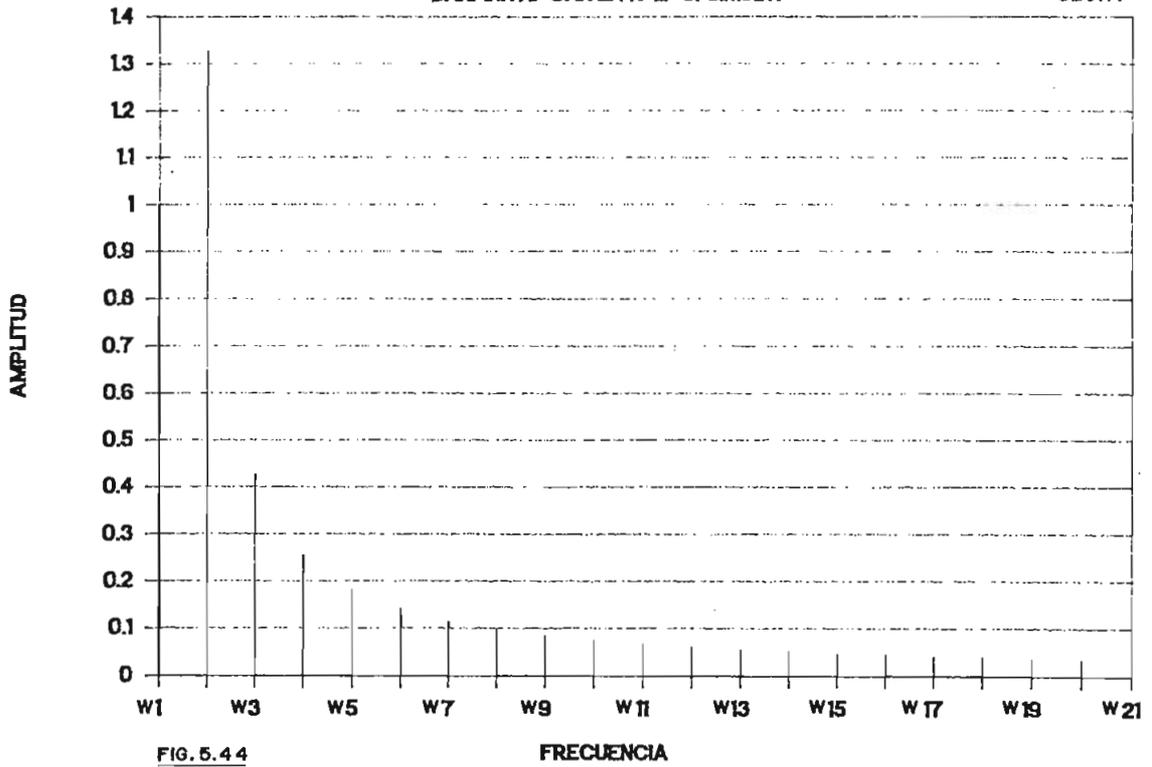


FIG. 5.44

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/CARGA R-L/C. SECUENCIAL

SEC(+)

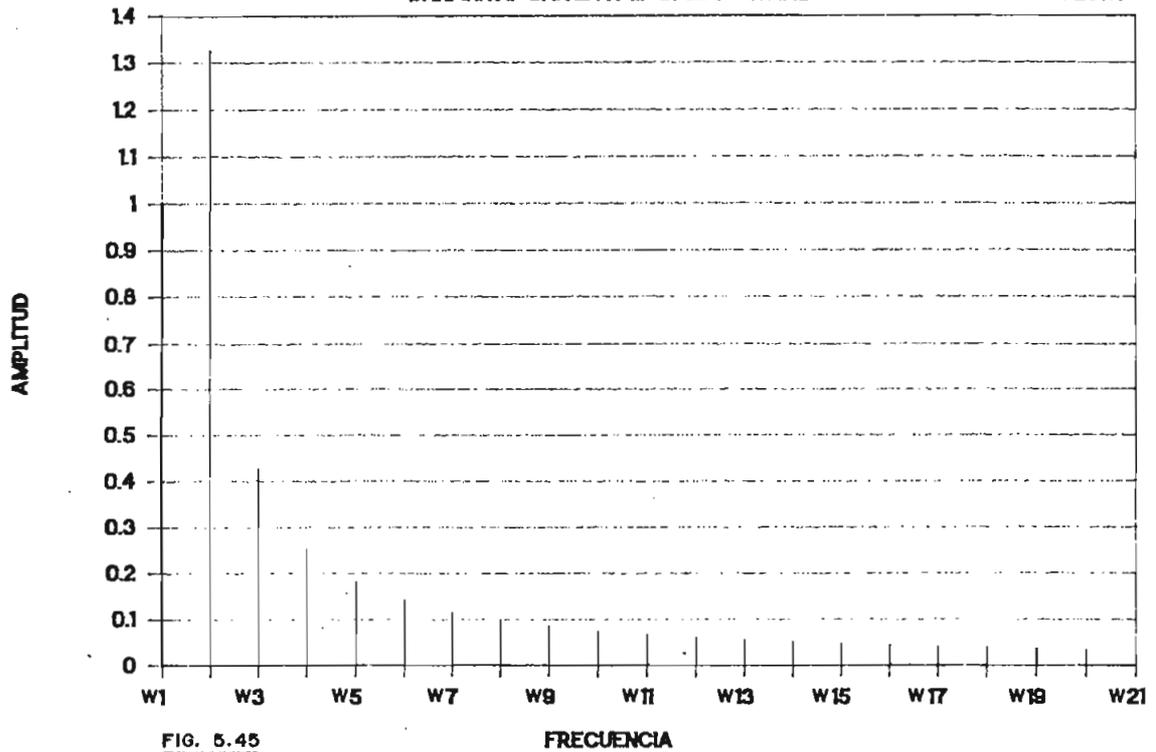
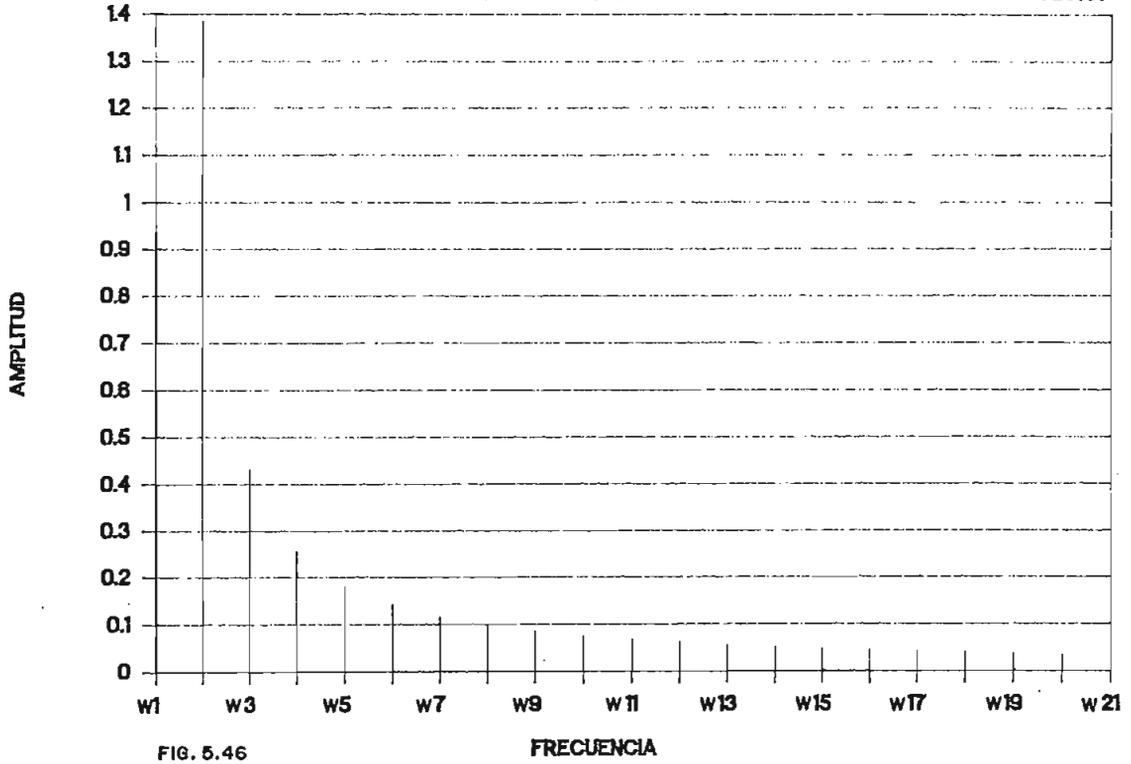


FIG. 5.45

# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

B. INFINITA/CARGA R-L/C. SECUENCIAL

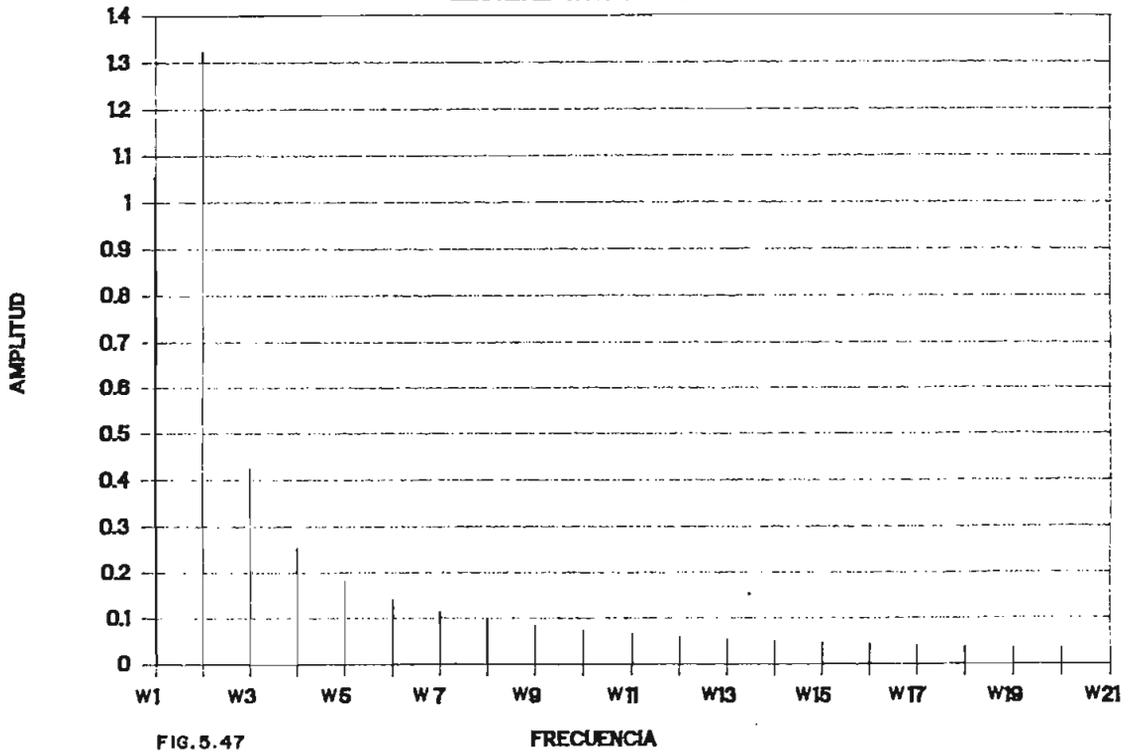
SEC(0)



# ESPECTRO DE FRECUENCIAS

GEN. REAL/VACIO/C. SIMULT.

SEC(+)



## ESPECTRO DE FRECUENCIAS

GEN. REAL/CARGA RESISTIVA/C. SIMULT.

SEC(+)

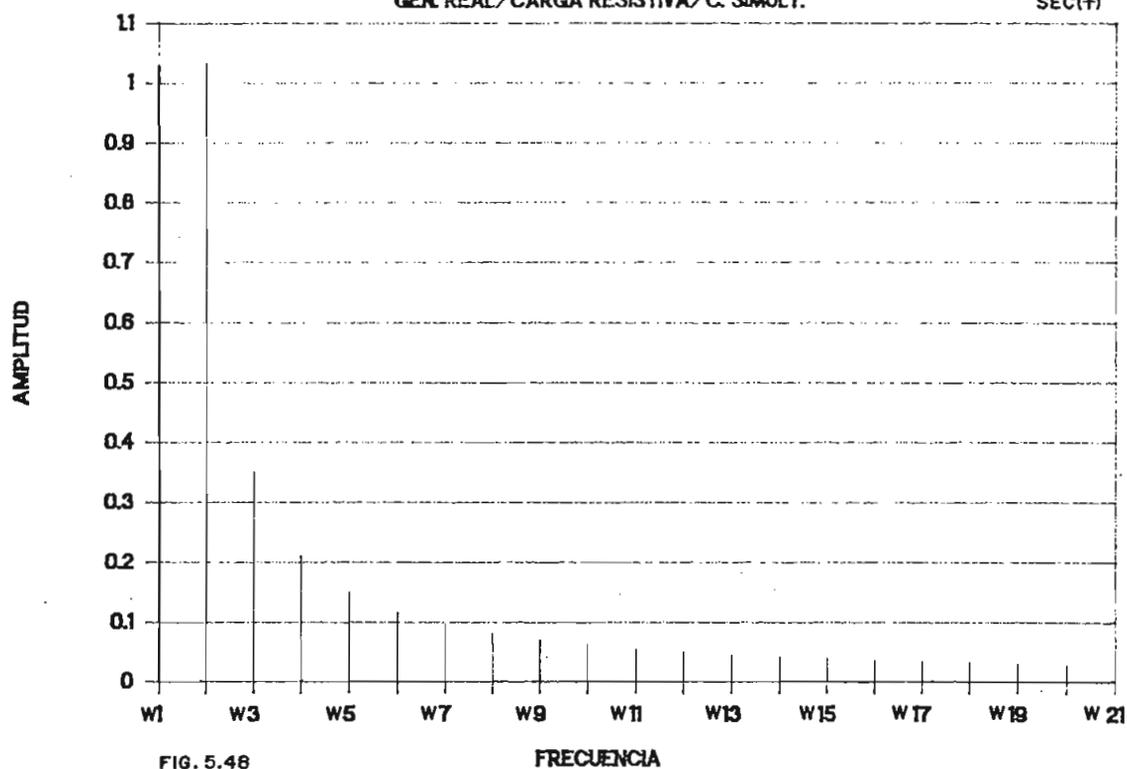


FIG. 5.48

## ESPECTRO DE FRECUENCIAS

GEN. REAL/CARGA R-L/C. SIMULT.

SEC(+)

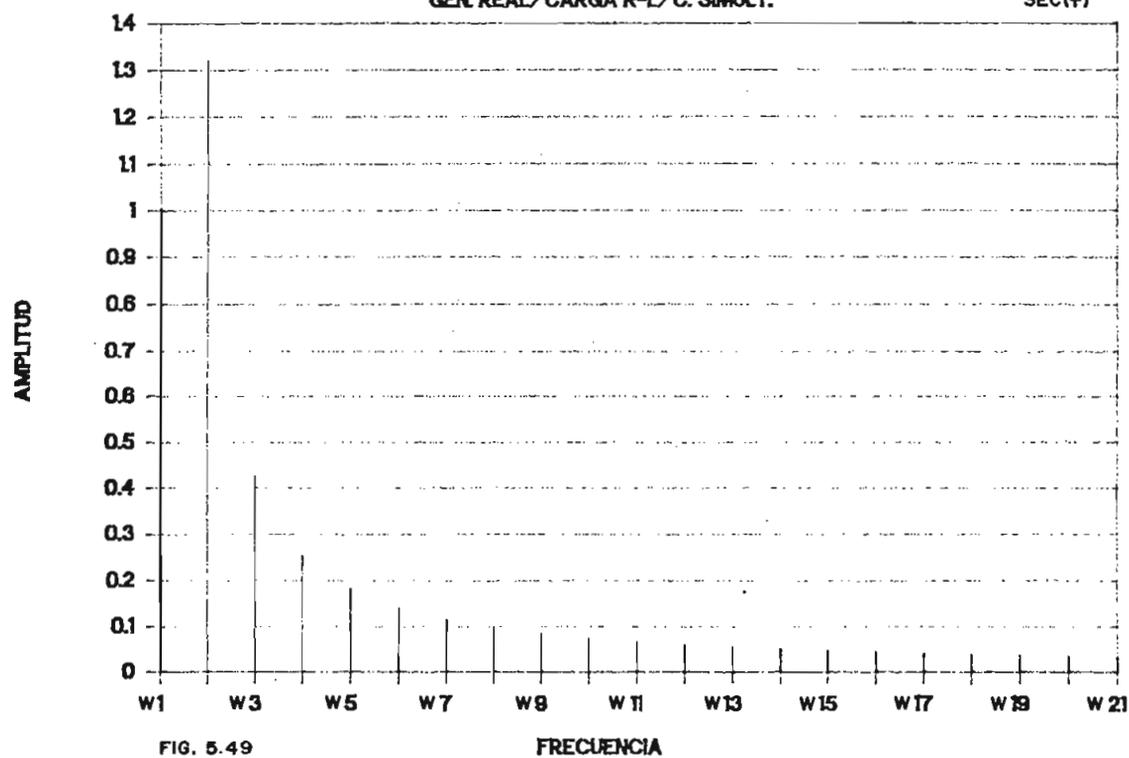


FIG. 5.49

# VARIACION DEL VOLTAJE MAXIMO CON LA LONGITUD DE LA LINEA

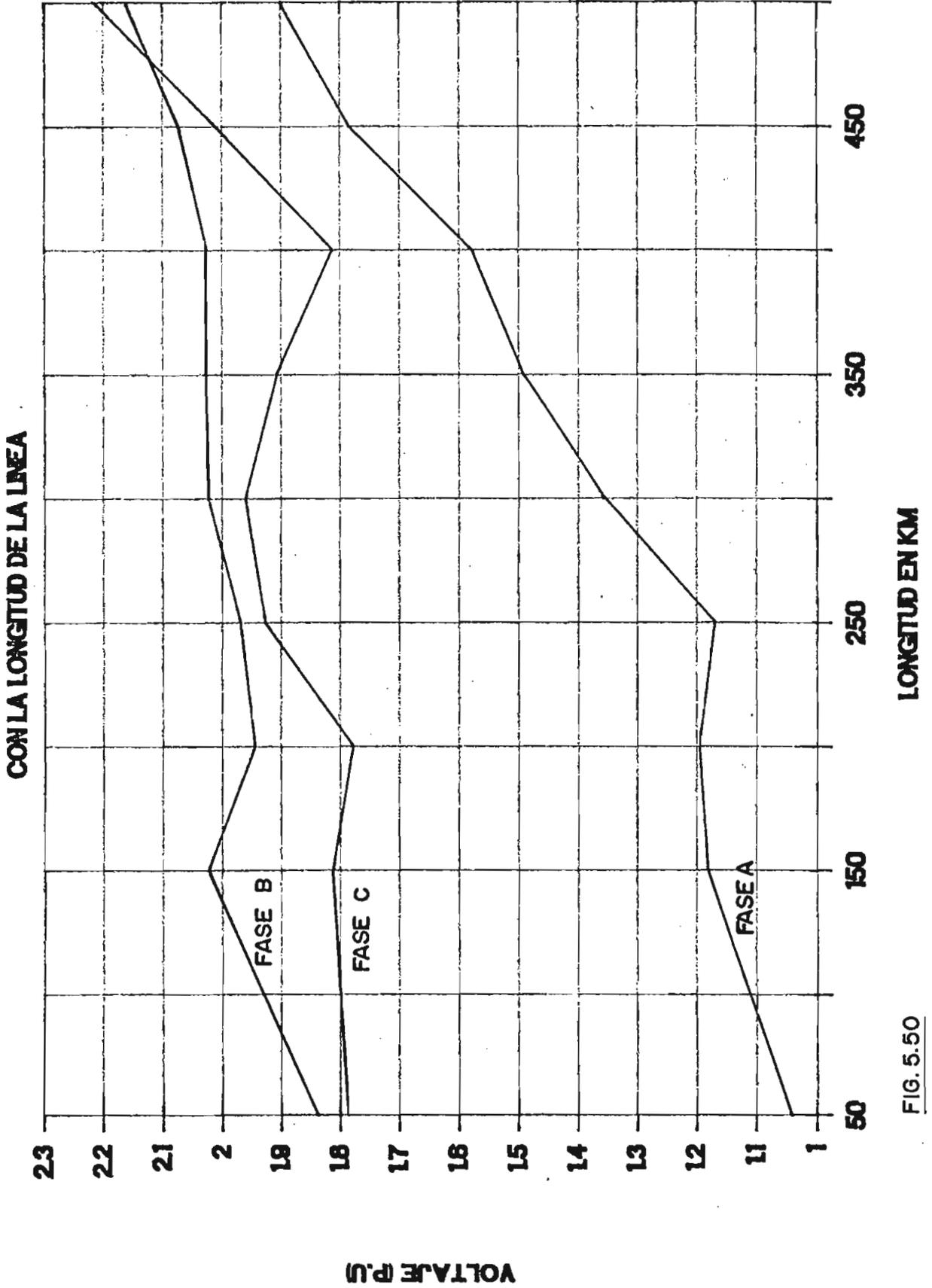


FIG. 5.50

## CAPITULO VI

### CONCLUSIONES

- El modelo matemático desarrollado en esta Tesis permite determinar voltajes y corrientes transitorias al energizar una línea de transmisión en diferentes condiciones de carga y generación.
- Las señales resultantes de voltaje y corriente son el resultado de la suma de una señal sinusoidal, la componente forzada o fundamental y de una serie infinita de sinusoides amortiguadas o componentes naturales, cada una de ellas con su propia frecuencia, atenuación y ángulo de fase.
- La frecuencia fundamental es independiente de los parámetros de la línea de transmisión y es igual a la frecuencia que impone la fuente.
- Las frecuencias naturales, por el contrario dependen exclusivamente de los parámetros y longitud de la línea.
- La magnitud de cada armónica o frecuencia natural de oscilación tiene una relación de proporcionalidad inversa con la longitud de la línea.
- La atenuación de cada componente transitoria de voltaje o corriente dependen de los parámetros de la línea y de las características

de la carga y la generación, pero es completamente independiente de la longitud de la línea.

- El espectro de frecuencias permite conocer exactamente los armónicos que más influyen en las señales resultantes de voltaje y corriente, dando la posibilidad de diseñar filtros que anulen o amortiguen sus efectos, reduciendo así los transitorios.
- Se ha comprobado que las componentes de secuencia cero aparecen únicamente cuando se produce un desbalance en el sistema.
- El ángulo de energización influye directamente en la magnitud de los sobrevoltajes. Si la energización o cierre del disyuntor se realiza cuando la señal de voltaje de la fuente pasa por cero, los voltajes y corrientes transitorias se ven notablemente disminuidos; de ahí la utilidad del cierre secuencial de los polos del disyuntor como mecanismo para reducir los sobrevoltajes.
- Los resultados de voltaje proporcionados por el programa digital encuentran su aplicación en la selección del nivel de aislamiento adecuado, mientras que los resultados de corriente influyen directamente en la coordinación de protecciones, pues deben ser considerados para evitar que condiciones de energización sean interpretadas por el equipo de protección, como condiciones de falla.
- El espectro de frecuencias también debe ser tomado en cuenta pa

ra la selección del equipo de protección, pues la presencia de componentes de alta frecuencia influyen directamente en el tiempo de respuesta de los relés, sobre todo si éstos son de estado sólido o de tipo digital.

- El estudio realizado en esta Tesis constituye un avance más dentro del análisis de los transitorios producidos por energización, pero debe ser complementado para lograr un modelo matemático que considere aspectos tales como: carga atrapada en la línea, desbalance de la carga y variación de los parámetros con la frecuencia; que son restricciones del presente programa.

## **APENDICE A**

### **DIAGONALIZACION DE MATRICES**

## APENDICE A

DIAGONALIZACION DE MATRICES

## A.1. ECUACION CARACTERISTICA DE UNA MATRIZ

Sea:

$$Y = AX$$

donde  $Y$  y  $X$  son vectores columna y  $A$  es una matriz cuadrada de orden  $n \times n$ . Esta ecuación es una transformación del vector  $X$  en el vector  $Y$ .

Si existe un vector  $X$  que al ser afectado por una transformación lineal  $A$  origina un vector  $Y$  que tiene que la misma dirección que  $X$  en el espacio vectorial, puede afirmarse que  $Y$  es proporcional a  $X$  y se plantea la ecuación:

$$Y = AX = \lambda X \tag{A.1}$$

donde  $\lambda$  es un escalar de proporcionalidad.

La ecuación (A.1) expresada en otra forma es:

$$\lambda X - AX = 0$$

$$(\lambda I - A)X = 0$$

Desarrollando:

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.2})$$

La condición suficiente y necesaria para que el sistema de ecuaciones (A.2) tenga solución distinta de la trivial es:

$$[\lambda I - A] = 0$$

Que en forma desarrollada es:

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & & -a_{2n} \\ & & \ddots & \\ -a_{n1} & -a_{n2} & & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} = 0 \quad (\text{A.3})$$

El desarrollo del determinante de la matriz (A.3) da como resultado una ecuación llamada "Ecuación Característica de la matriz A"; las soluciones o raíces de esta ecuación se denominan "Raíces Características o valores propios de la matriz A".

Los valores propios determinan la formación de "Vectores propios".

## A.2. MATRICES SEMEJANTES A UNA MATRIZ DIAGONAL

### Teoremas

"Si A es una matriz cuadrada simétrica y real de orden n, cuyos valores propios son  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ; existe una matriz ortogonal T tal que  $T^{-1}AT = \Delta$ , donde  $\Delta$  es la matriz diagonal de valores característicos  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ ".

"Toda matriz simétrica real A es semejante ortogonalmente a una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios de A".

En esta tesis, se debe diagonalizar la matriz [  $\alpha$  ] dada en la ecuación (2.51).

Si en esta ecuación se reemplaza:

$$A = Z_0 Y_0 + 2 Z_1 Y_1 \quad (A.4)$$

$$B = Z_0 Y_0 - Z_1 Y_1 \quad (A.5)$$

Toma la forma:

$$[\alpha] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} A & B & B \\ B & A & B \\ B & B & A \end{bmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Es una matriz cuadrada y simétrica de orden  $n$ , por lo tanto se puede aplicar en ella todo lo indicado anteriormente.

Aplicando (A.3) para la matriz  $[\alpha]$  se tiene:

$$[\lambda I - \alpha] = 0$$

que en forma desarrollada es:

$$\begin{bmatrix} \lambda - A & -B & -B \\ -B & \lambda - A & -B \\ -B & -B & \lambda - A \end{bmatrix} = 0$$

La ecuación característica es por tanto:

$$\lambda^3 - 3A^2\lambda + 3\lambda(A^2 - B^2) - A^3 + 3B^2A - 2B^3 = 0 \quad (\text{A.7})$$

Para simplificar se hace el siguiente reemplazo:

$$\lambda = X + A \quad (\text{A.8})$$

Con lo que, la ecuación (A.7) toma la forma:

$$X^3 - 3 B^2 X - 3 B^3 = 0 \quad (\text{A.9})$$

donde la incógnita es X.

La ecuación (A.9) se resuelve utilizando el método de Cardano.

### Método de Cardano

"La forma general de una ecuación de tercer grado es:

$$x^3 + Px^2 + Qx + R = 0$$

pero la forma típica de la ecuación de tercer grado es:

$$x^3 + qx + r = 0$$

Si se hace el arreglo:

$$x = y + z$$

entonces:

$$x^3 = y^3 + z^3 + 3yz (y + z) = y^3 + z^3 + 3y^2z + 3yz^2$$

La ecuación dada se convierte en:

$$y^3 + z^3 + (3yz + q)x + r = 0$$

Esta ecuación queda satisfecha para los valores que cumplen las condiciones:

$$y^3 + z^3 = -r$$

$$3yz = -q$$

es decir:  $y^3 + z^3 = -1$

$$y^3 z^3 = -\frac{q^3}{27}$$

luego  $y^3, z^3$  son raíces de la ecuación cuadrática:

$$t^3 + rt - \frac{q^3}{27} = 0$$

Resultan así los valores:

$$y^3 = -\frac{r}{2} + \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \quad (1)$$

$$z^3 = -\frac{r}{2} - \sqrt{\frac{r^2}{4} + \frac{q^3}{27}} \quad (2)$$

Cada una de las cantidades del segundo miembro de las ecuaciones (1) y (2) tienen 3 raíces cúbicas, por lo que parecería que  $x$  tiene nueve valores, pero éste no es el caso, porque:

$$yz = -\frac{q}{3}$$

las raíces cúbicas deben ser tomadas por pares de modo que el producto de cada par sea racional.

Por lo tanto si  $y, z$  son los valores de cualquier par de raíces cúbicas que satisfacen esta condición, los demás únicos pares admisibles serán:  $wy, w^2z$  y  $w^2y, wz$ , en donde:  $w$  y  $w^2$  son las raíces cúbicas imaginarias de la unidad.

En resumen, las raíces cúbicas de la ecuación son:

$$y + z ; wy + w^2y ; w^2y + wz$$

donde:

$$w = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$$

$$w^2 = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$$

Utilizando el método de Cardano en la ecuación (A.9) se tiene:

Si 
$$X^3 - 3B^2X - 3B^3 = 0$$

Reemplazando: 
$$X = Y + Z$$

se tiene:

$$Y^3 + Z^3 + 3(Y + Z)(YZ - B^2) - 2B^3 = 0 \quad (\text{A.10})$$

si 
$$Y^3 + Z^3 = 2B^3$$

entonces: 
$$YZ = B^2$$

$$Y^3 Z^3 = B^6$$

$Y^3, Z^3$  son las raíces de la ecuación cuadrática:

$$t^2 + rt - \frac{q^3}{27} \quad \begin{cases} r = - 2B^3 \\ q = - 3B^2 \end{cases}$$

Reemplazando:

$$t^2 - 2B^3t + B^6 = 0$$

las raíces son:

$$t_1 = B^3 = Y^3$$

$$t_2 = B^3 = Z^3$$

por tanto: 
$$Y = B$$

$$Z = B$$

La primera raíz es:

$$Y + Z = 2B$$

$$x_1 = 2B \quad (A.11)$$

La segunda raíz es:

$$x_2 = wY + w^2Z$$

desarrollando se obtiene:

$$x_2 = -B \quad (A.12)$$

La tercera raíz es:

$$x_3 = w^2Y + wZ$$

desarrollando se tiene:

$$x_3 = -B \quad (A.13)$$

Reemplazando (A.4), (A.5), (A.8) en (A.11), (A.12) y (A.13) el resultado es:

$$\lambda_1 = 3 Z_0 Y_0 \quad (A.14)$$

$$\lambda_2 = 3 Z_1 Y_1 \quad (A.15)$$

$$\lambda_3 = 3 Z_1 Y_1 \quad (A.16)$$

$\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  son los valores propios de la matriz  $[ \alpha ]$

Para obtener los vectores propios, se reemplaza  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$  en la ecuación general (A.3), a cada valor propio  $\lambda_i$  le corresponderá un vector propio  $X_i = [ x_1, x_2, \dots, x_n ]$  que satisfaga la igualdad (A.3).

Así:

- Para  $\lambda_1 = 3 Z_0 Y_0$ :

$$\begin{bmatrix} 2 Z_0 Y_0 - 2 Z_1 Y_1 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 \\ - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & 2 Z_0 Y_0 - 2 Z_1 Y_1 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 \\ - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & 2 Z_0 Y_0 - 2 Z_1 Y_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

Esta ecuación se cumple para:

$$[ x ] = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ es el primer vector propio} \quad (\text{A.17})$$

- Para  $\lambda_2 = \lambda_3 = 3 Z_1 Y_1$ :

$$\begin{bmatrix} Z_1 Y_1 - Z_0 Y_0 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 \\ - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & Z_1 Y_1 - Z_0 Y_0 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 \\ - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & - Z_0 Y_0 + Z_1 Y_1 & Z_1 Y_1 - Z_0 Y_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

tiene que cumplirse la igualdad:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0 \quad (\text{A.18})$$

Los vectores propios que cumplen esta igualdad son:

$$[x] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad [x] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.19})$$

que corresponden al segundo y tercero vectores propios.

La matriz  $T$  está formada por la combinación de los tres vectores propios, así:

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.20})$$

La matriz  $[\alpha]$  se convierte en la matriz  $[\gamma]$  diagonal, que se obtiene aplicando la relación:

$$[\gamma] = T^{-1} [\alpha] T$$

ó simplemente, por el teorema mencionado en la sección A.2.  $[\gamma]$  es

una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal son los valores propios de  $[\alpha]$ , así:

$$[\gamma^i] = \begin{bmatrix} 3Z_0Y_0 & 0 & 0 \\ 0 & 3Z_1Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 3Z_1Y_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.21})$$

como  $[\alpha]$  estaba afectada por el factor  $1/3$ , entonces:

$$[\gamma] = \begin{bmatrix} Z_0Y_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_1Y_1 & 0 \\ 0 & 0 & Z_1Y_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A.22})$$

## **APENDICE B**

### **TEOREMA DEL RESIDUO**

## APENDICE B

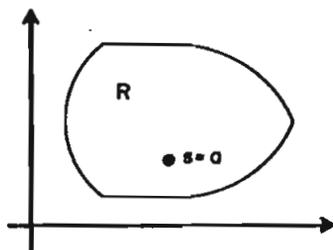
### TEOREMA DEL RESIDUO

#### B.1. TEORIA DE LA VARIABLE COMPLEJA

##### B.1.1. Puntos singulares

Punto singular de una función  $f(s)$  es un valor de  $s$  en el cual  $f(s)$  deja de ser analítica, es decir, deja de ser continua y derivable en todos sus puntos. Si  $f(s)$  es analítica en todas las partes de alguna región  $R$ , excepto en un punto interior  $s = a$ , entonces  $a$  es una singularidad aislada de  $f(s)$ <sup>10</sup>

##### Polos



**FIG. B1**

Si

$$f(s) = \frac{\phi(s)}{(s - a)^n} \quad (\text{B.1})$$

siendo  $\phi(a) \neq 0$ , donde  $\phi(s)$  es analítica es una región que contiene a  $s = a$  y si  $n$  es un entero positivo, entonces  $f(s)$  tiene una singularidad aislada en  $s = a$ , el cual se llama polo de orden  $n$ . Si  $n = 1$ , el polo se llama polo simple; si  $n = 2$ , polo doble, etc.

Si  $f(s)$  tiene un polo de orden  $n$  en  $s = a$  y es analítica en cualquier otro punto de algún círculo  $C$  de centro en  $a$  entonces  $(s-a)^n f(s)$  es analítica en todos los puntos de  $C$  y tiene una serie de Taylor alrededor de  $s = a$  de manera que:

$$f(s) = \frac{a_{-n}}{(s-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(s-a)^{n-1}} + \dots + \frac{a_{-1}}{s-a} + a_0 + a_1(s-a) + a_2(s-a)^2 + \dots \quad (\text{B.2})$$

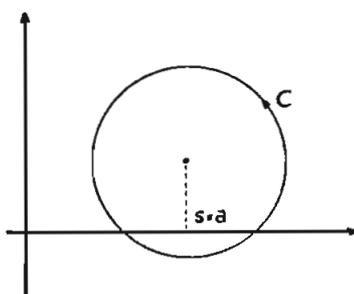


Fig. B.2.

Lo que se llama serie de Laurent para  $f(s)$ .

### B.1.2. Residuos

Los coeficientes de la ecuación (B.2) se obtienen de la manera acostumbrada escribiendo los coeficientes para la serie de Taylor correspondientes a  $(s-a)^n f(s)$ .

En este desarrollo, el coeficiente  $a_{-1}$ , llamado residuo de  $f(s)$  en el polo  $s = a$ , es de mucha importancia y puede hallarse en la fórmula:

$$a_{-1} = \lim_{s \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left\{ (s-a)^n f(s) \right\} \quad (\text{B.3})$$

Donde  $n$  es el orden del polo. Para polos simples, el cálculo del residuo es particularmente simple, puesto que se reduce a:

$$a_{-1} = \lim_{s \rightarrow a} (s - a) f(s) \quad (\text{B.4})$$

### B.1.3. Teorema del Residuo

Si  $f(s)$  es analítica en una región  $R$  excepto en un polo de orden  $n$  en  $s = a$  y  $C$  es cualquier curva cerrada simple en  $R$  y contiene a  $s = a$ , entonces  $f(s)$  tiene la forma de la ecuación (B.2) y dado que:

$$\oint_C \frac{ds}{(s - a)^n} = \begin{cases} 0 & \text{si } n \neq 1 \\ 2\pi j & \text{si } n = 1 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

se deduce que:

$$\oint_C f(s) ds = 2\pi j a_{-1}$$

es decir, la integral de  $f(s)$  alrededor de un camino cerrado que encierra un solo polo de  $s$  es igual a  $2\pi j$  por el residuo del polo.

En forma general:

"Si  $f(s)$  es analítica dentro y en la frontera de  $C$  de una región  $R$ , excepto en un número finito de polos  $a, b, c, \dots$  dentro de  $R$  cuyos residuos son respectivamente  $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \dots$ , entonces:

$$\oint_C f(s) ds = 2\pi j (a_{-1} + b_{-1} + c_{-1} + \dots)" \quad (B.6)$$

es decir, la integral de  $f(s)$  es  $2\pi j$  por la suma de los residuos de  $f(s)$  en los polos encerrados por  $c$ .

## B.2. FORMULA DE INVERSION COMPLEJA

Si  $f(s) = \mathcal{L}[ F(t) ]$ , entonces  $\mathcal{L}^{-1}[ f(s) ]$  está dada por:

$$F(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{Y-j\infty}^{Y+j\infty} e^{st} f(s) ds, \quad t > 0 \quad (B.7)$$

Esta ecuación ofrece un método directo para obtener la transformada de Laplace de una función dada  $f(s)$ .

En la práctica, la integral (B.7) se calcula mediante la integral curvilínea:

$$\frac{1}{2\pi j} \int_C e^{st} f(s) ds \quad (B.8)$$

Donde  $C$  es el contorno de la figura B.3. Este contorno se compone del segmento  $AB$  y el arco  $BJKLA$  de una circunferencia de radio  $R$  con centro en el origen  $0$ .

Si se representa el arco  $BJKLA$  por  $\Gamma$ , puesto que  $T = \sqrt{R^2 - Y^2}$ ,

por la ecuación (B.7) se deduce que:

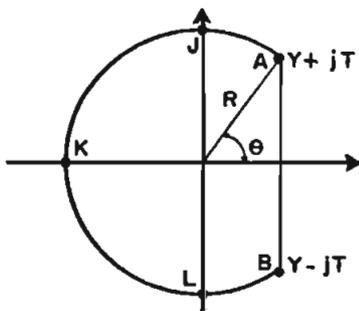
$$F(t) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi j} \int_{Y-jT}^{Y+jT} e^{st} f(s) ds$$

$$= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{2\pi j} \oint_C e^{st} f(s) ds - \frac{1}{2\pi j} \int_{\Gamma} e^{st} f(s) ds \right] \quad (\text{B.9})$$

### B.2.1. Utilización del teorema del residuo para hallar la transformada inversa de Laplace

Si se supone que las únicas singularidades de  $f(s)$  son polos, todos ellos a la izquierda de la recta  $s = Y$ , para alguna constante real  $Y$  y si se supone además que la integral (B.9) a lo largo de  $\Gamma$  tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ , entonces por el teorema del residuo, la ecuación (B.9) toma la forma:

$$F(t) = \sum \text{residuos de } e^{st} f(s) \text{ en los polos de } f(s) \quad (\text{B.10})$$



**FIG. B.3**

Condición suficiente para que la integral alrededor de  $\Gamma$  tienda a cero

Si es posible hallar constantes  $M > 0$  y  $K > 0$  tales que:

$$| f(s) | < \frac{M}{R^K} \quad (\text{B.11})$$

en todo conjunto donde  $s = R e^{j\theta}$ , la integral alrededor de  $\Gamma$  de  $e^{st} f(s)$  tiende a cero cuando  $R \rightarrow \infty$ .

La condición (B.11) se satisface siempre que  $f(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$  donde  $A(s)$  y  $B(s)$  son polinomios en los cuales el grado de  $A(s)$  es menor que de  $B(s)$ .

### A.3. RESPUESTA DEBIDA A RAICES COMPLEJAS CONJUGADAS

Si una función  $f(s)$  está definida por:

$$f(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$$

cuando  $B(s)$  tiene un par de raíces complejas conjugadas:  $(a + jb)$  y  $(a - jb)$ , la respuesta debida a estas raíces combinadas tiene la forma de un término sinusoidal.

El residuo en el polo  $a + jb$  es:

$$R_{a+jb} = \lim_{s \rightarrow a+jb} (s - a - jb) \left[ \frac{A(s)}{B(s)} e^{st} \right] \quad (\text{B.12})$$

pero  $B(s)$  tiene un factor cuadrático que es:

$$(s - a - jb)(s - a + jb) = s^2 - 2as + a^2 + b^2$$

ya que las raíces conjugadas son:

$$s_1 = a + jb$$

$$s_2 = a - jb$$

Entonces el residuo  $R_{a+jb}$  puede expresarse como:

$$K e^{at}$$

donde: 
$$K = (s - a) f(s) \Big|_{s=a}$$

En este caso:

$$K = \frac{(s - a - jb)}{(s - a - jb)(s - a + jb)} \frac{A(s) e^{st}}{B(s)/(s^2 - 2as + a^2 + b^2)} \Big|_{s=a+jb}$$

en donde se ha modificado y dividido en el denominador, el término

$$(s^2 - 2as + a^2 + b^2)$$

La evaluación en  $s = a + jb$  de como resultado:

$$R_{a+jb} = \frac{1}{2jb} \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} e^{(a+jb)t} \quad (\text{B.13})$$

$$\text{donde: } \frac{A(a+jb)}{B(a+jb)} = \frac{A(s)}{B(s)/(s^2 - 2as + a^2 + b^2)} \Bigg|_{s=a+jb}$$

El residuo en el polo  $s = a - jb$  es:

$$R_{a-jb} = \frac{(s - a + jb)}{(s - a - jb)(s - a + jb)} \frac{A(s) e^{st}}{B(s)/(s^2 - 2as + a^2 + b^2)} \Bigg|_{s=a-jb}$$

$$R_{a-jb} = \frac{1}{-2jb} \frac{A(a - jb)}{B(a - jb)} e^{(a - jb)t} \quad (\text{B.14})$$

Pero ya que:  $\frac{A(a - jb)}{B(a - jb)}$  es el conjugado de  $\frac{A(a + jb)}{B(a + jb)}$  entonces

Los dos términos tienen la misma magnitud pero ángulos opuestos:

Si  $\alpha$  es el ángulo formado por  $A(a + jb)/B(a + jb)$ , entonces:

$$\frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} = \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| e^{j\alpha} \quad (\text{B.15})$$

$$\frac{A(a - jb)}{B(a - jb)} = \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| e^{-j\alpha} \quad (\text{B.16})$$

el residuo debido a cada raíz compleja conjugada puede expresarse como:

$$R_{a+jb} = \frac{1}{2jb} \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| e^{j\alpha} e^{(a + jb)t} \quad (\text{B.17})$$

$$R_{a-jb} = -\frac{1}{2jb} \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| e^{-j\alpha} e^{(a - jb)t} \quad (\text{B.18})$$

Que expresadas de otra manera son:

$$R_{a+jb} = \frac{e^{at}}{b} \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| \frac{e^{jbt} e^{j\alpha}}{2j} \quad (\text{B.19})$$

$$R_{a-jb} = -\frac{e^{at}}{b} \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| \frac{e^{-jbt} e^{-j\alpha}}{2j} \quad (\text{B.20})$$

sumando (b.19) y (B.20) se tiene:

$$R = \frac{e^{at}}{b} \left| \frac{A(a + jb)}{B(a + jb)} \right| \text{sen}(bt + \alpha) \quad (\text{B.21})$$

## **APENDICE C**

### **MANUAL DE USO DEL PROGRAMA DIGITAL**

## APENDICE C

MANUAL DE USO DEL PROGRAMA

## TITULO.- CALCULO DE VOLTAJES Y CORRIENTES TRANSITORIOS POR ENERGIZACION DE UNA LINEA DE TRANSMISION

## C.1. GENERALIDADES

En esta sección se explica la manera de usar el programa digital para las diferentes aplicaciones analizadas en el Capítulo V.

Se indica el significado de cada variable de entrada con su respectivo formato y la forma de introducir los datos de acuerdo al caso que se quiera analizar.

C.1.1. Selección del tipo de energización

La selección del tipo de energización se la realiza por medio de cuatro variables de entrada, éstas son:

RG : resistencia del generador en OHMIOS.

LG : resistencia del generador en HENRIOS.

RL : resistencia de la carga en OHMIOS.

LL : inductancia de la carga en HENRIOS .

a) Energización en vacío desde una barra infinita:

Se introduce como datos:

$$RG = 0$$

$$LG = 0$$

$$RL = 0$$

$$LL = 0$$

Como ya se indicó en el Capítulo IV, el programa está diseñado de tal forma que cuando RL y LL son cero, considera que el terminal de recepción de la línea está abierto.

b) Energización en vacío desde un generador real:

En este caso:

$$RL = 0$$

$$LL = 0$$

Las variables RG y LG toman los valores correspondientes a la resistencia e inductancia del generador en las unidades ya indicadas.

Si la fuente es puramente inductiva :  $RG = 0$

Si la fuente se considera como resistiva :  $LG = 0$

c) Energización con carga desde una barra infinita.

En este caso:

$$RG = 0$$

$$LG = 0$$

Las variables RL y LL toman los valores correspondientes en las unidades ya indicadas.

- Si la carga es puramente resistiva :  $LL = 0$

- Si la carga es puramente inductiva :  $RL = 0$

d) Energización con carga desde un generador real.

Las variables RG, LG, RL y LL toman valores de acuerdo al caso que se quiere analizar en las unidades indicadas.

Las variables RG, LG, RL y LL deben tener valores reales y positivos.

### C.1.2. Efecto del Angulo de Energización

El ángulo de energización de la fase A que se toma como referencia está identificado por la variable PHI. Puede tomar valores positivos o negativos, pero siempre debe estar expresado en radianes.

### C.1.3. Cierre no simultáneo del disyuntor

Para simular un retardo en el cierre del disyuntor en cualquiera de las tres fases se utilizan las variables  $T_0$ ,  $T_1$  y  $T_2$  que son los tiempos (expresados en milisegundos) de retardo de las fases A, B y C respectivamente.

Los tiempos correspondientes a las fases que cierran a  $t = 0$  deben ser iguales a cero.

Si el cierre es simultáneo las tres variables de retardo de tiempo deben ser iguales a cero.

Los variables  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  pueden tomar cualquier valor real positivo.

### C.1.4. Cierre secuencial del disyuntor

Si se desea cerrar el disyuntor secuencialmente con la finalidad de reducir los sobrevoltajes, los valores de  $T_0$ ,  $T_1$ ,  $T_2$  deben ser tales que el disyuntor cierre en cada fase cuando la señal de voltaje correspondiente a esa fase pase por cero. Lógicamente éstos valores dependen del ángulo de energización de la fase A ( $\text{PHI}$ ).

Por ejemplo si la fase A cierra a  $0^\circ$  (0 radianes), entonces:

$$T_0 = 0 \text{ mseg}$$

$$T_1 = 5.5 \text{ mseg}$$

$$T_2 = 11 \text{ mseg}$$

### C.1.5. Efecto del acoplamiento mutuo entre fases

Para poder analizar el efecto del acoplamiento mutuo también se recurre a los tiempos de retardo.

Se puede simular que sólo una de las fases cierra, mientras que, las dos restantes permanecen abiertas durante todo el tiempo de observación del transitorio.

En la representación gráfica de los resultados se puede observar el voltaje que la fase energizada induce sobre las fases que están abiertas.

Por ejemplo, si el tiempo de observación del transitorio es de 100 mseg y cierra sólo la fase A:

$$T_0 = 0 \quad \text{mseg}$$

$$T_1 = 100 \quad \text{mseg}$$

$$T_2 = 100 \quad \text{mseg}$$

Se puede analizar también el caso en que dos fases cierran y sólo una permanece abierta. En la representación gráfica de los resultados se verá el voltaje que las dos fases energizadas inducen en la tercera.

Por ejemplo, si para el mismo tiempo de observación del transitorio, la fase A no cierra mientras que B y C cierran simultáneamente:

$$T_0 = 100 \text{ mseg}$$

$$T_1 = 0 \text{ mseg}$$

$$T_2 = 0 \text{ mseg}$$

## C.2. DESCRIPCION DE LAS VARIABLES

### C.2.1. VARIABLES DE ENTRADA

SIMBOLO	FORMATO	DESCRIPCION
$R_1$	E14.5	Resistencia de la línea en secuencia positiva ( $\Omega/\text{Km}$ ).
$L_1$	E14.5	Inductancia de la línea en secuencia positiva ( $\text{H}/\text{Km}$ ).
$C_1$	E14.5	Capacitancia de la línea en secuencia positiva ( $\text{F}/\text{Km}$ ).
$R_0$	E14.5	Resistencia de la línea en secuencia cero ( $\Omega/\text{Km}$ ).
$L_0$	E14.5	Inductancia de la línea en secuencia cero ( $\text{H}/\text{Km}$ ).
$C_0$	E14.5	Capacitancia de la línea en secuencia cero ( $\text{F}/\text{Km}$ ).

SIMBOLO	FORMATO	DESCRIPCION
RL	F10.5	Resistencia de la carga ( $\Omega$ ).
LL	F10.5	Inductancia de la carga (H).
RG	F10.5	Resistencia del generador ( $\Omega$ ).
LG	F10.5	Inductancia del generador (H).
$X_0$	F10.5	Longitud de la línea (Km).
PHI	F10.5	Angulo de energización de la fase A (rad).
VBASE	F7.2	Voltaje nominal de la línea (KV).
MM	I4	Tiempo total de observación del transitorio (mseg).
RR	F5.2	Valor de $\Delta t$ del incremento de tiempo (mseg).
EPS	E8.1	Criterio de convergencia para el método iterativo de Newton.
IEND	I4	Número máximo de iteraciones en el método iterativo de Newton.

SIMBOLO	FORMATO	DESCRIPCION
PR	F10.2	Parte real del valor inicial para el proceso iterativo de Newton.
PIM	F10.2	Parte imaginaria del valor inicial para el proceso iterativo de Newton.
V <sub>1</sub>	F4.2	Voltajes de generación en las fases A, B y C respectivamente. Cuando se utiliza el modelo de generador real corresponden al voltaje generado (antes de la impedancia - (Z <sub>g</sub> ).
V <sub>2</sub>		
V <sub>3</sub>		
T <sub>0</sub>	F7.2	Tiempos de retardo en el cierre de las fases A, B, C respectivamente (mseg).
T <sub>1</sub>		
T <sub>2</sub>		

### C.2.2. Variables de salida

VALORES DE SECUENCIA POSI TIVA Y CERO DE VOLTAJE	Son los valores de las componentes de frecuencia con sus amplitudes y ángulos de fase.
VOLTAJES EN LAS FASES A, B y C	Los valores de voltaje de cada fase en p.u. en forma de tabla y gráficamente.
VALORES DE SECUENCIA POSI TIVA Y CERO DE CORRIENTE	Valores de las componentes de frecuencia con su amplitud y ángulo de fase.
CORRIENTES EN LAS FASES A, B y C	Los valores de corriente de cada fase en kiloamperios en forma tabular y gráfica.

### C.2.3. Forma de proporcionar datos al programa

Para que el programa funcione satisfactoriamente se deben introducir todas las variables descritas en C.2.1. con sus respectivos formatos. En caso de no introducir una de las variables, el computador asume un valor arbitrariamente y desarrolla todo el proceso, pero los resultados no obedecen al caso que se quiere analizar.

Más adelante se indica, en hojas de codificación, la forma de introducir los datos al computador.

### C.3. INDICACIONES COMPLEMENTARIAS

Como se indicó anteriormente, para determinar las frecuencias de oscilación del sistema se utiliza el método de Newton.

Como es un método iterativo, puede presentarse el caso de no convergencia que viene acompañado del mensaje: " NO HAY CONVERGENCIA - DESPUES DEL NUMERO MAXIMO DE ITERACIONES".

Las causas de la no convergencia pueden ser:

1. El número máximo de iteraciones es muy pequeño.
2. El valor inicial  $x_0$  está muy alejado de la raíz.
3. La tolerancia EPS es muy pequeña.

Además el proceso se detiene cuando la derivada  $f'(x)$  llega a ser cero y aparece el mensaje: "DERIVADA IGUAL A CERO, IMPOSIBLE PROCESO ITERATIVO".

La medida a tomarse es cambiar el valor inicial  $x_0$ .

#### C.4. ALCANCE Y RESTRICCIONES

El programa ha sido desarrollado en el computador IBM 370/138 de la Escuela Politécnica Nacional, en simple precisión, utilizando como lenguaje de programación FORTRAN IV y opera para cualquier circuito trifásico compuesto de un generador una línea y una carga.

El programa tiene las siguientes restricciones:

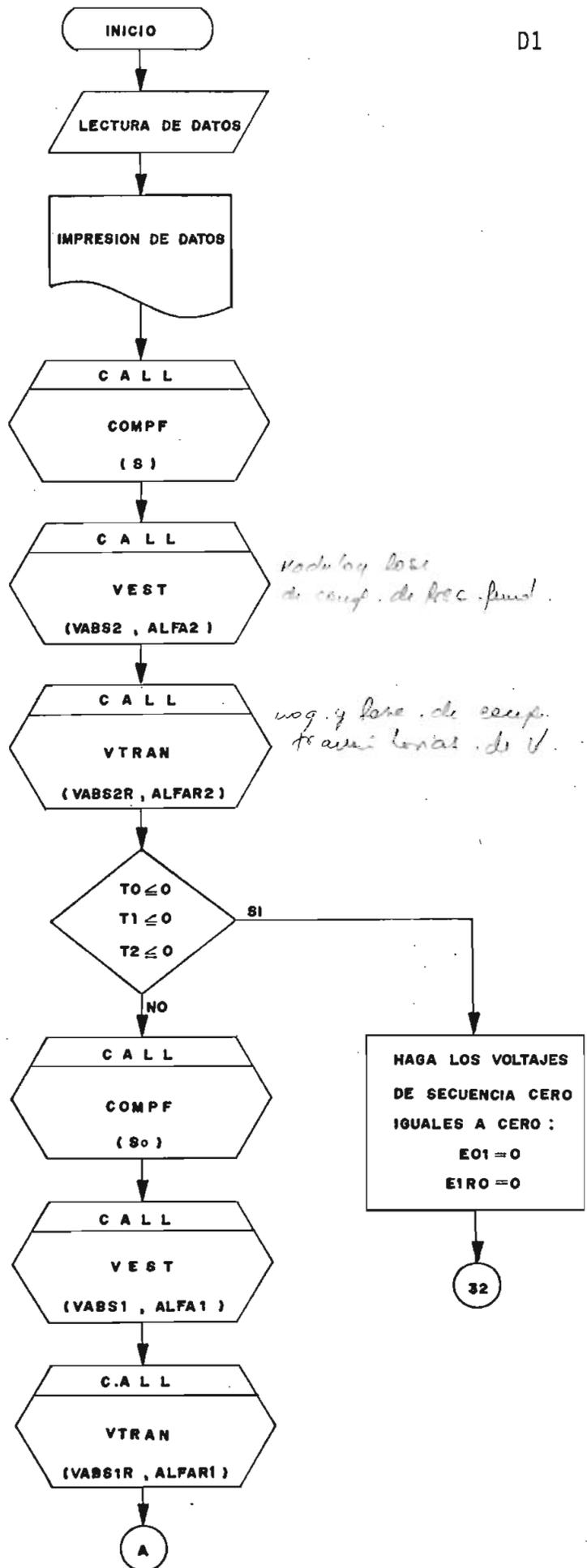
- No opera para líneas de transmisión trifásicas no transpuestas.
- No opera para circuitos monofásicos.
- Opera únicamente con carga balanceada.
- No considera carga atrapada en la línea.

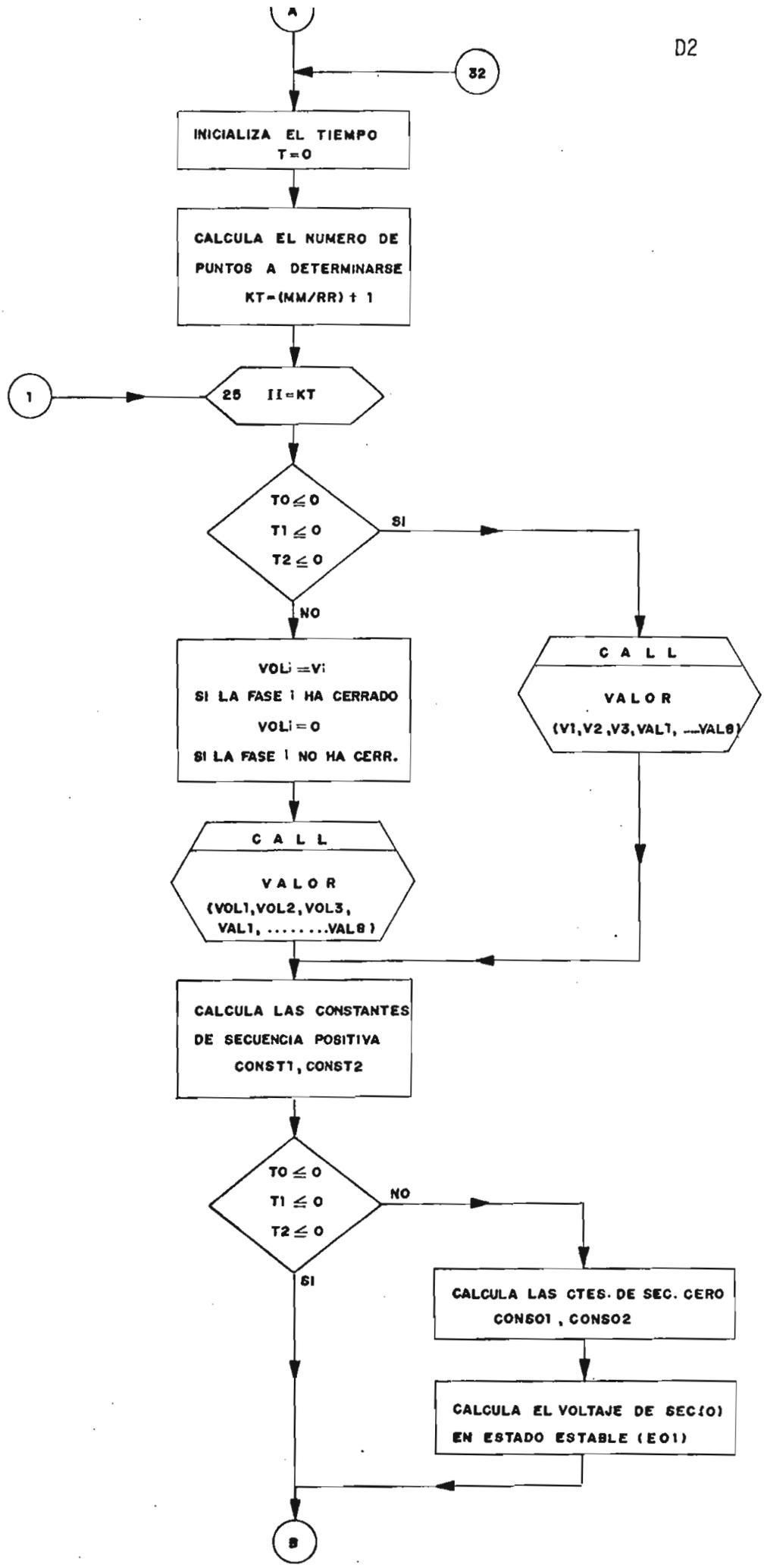


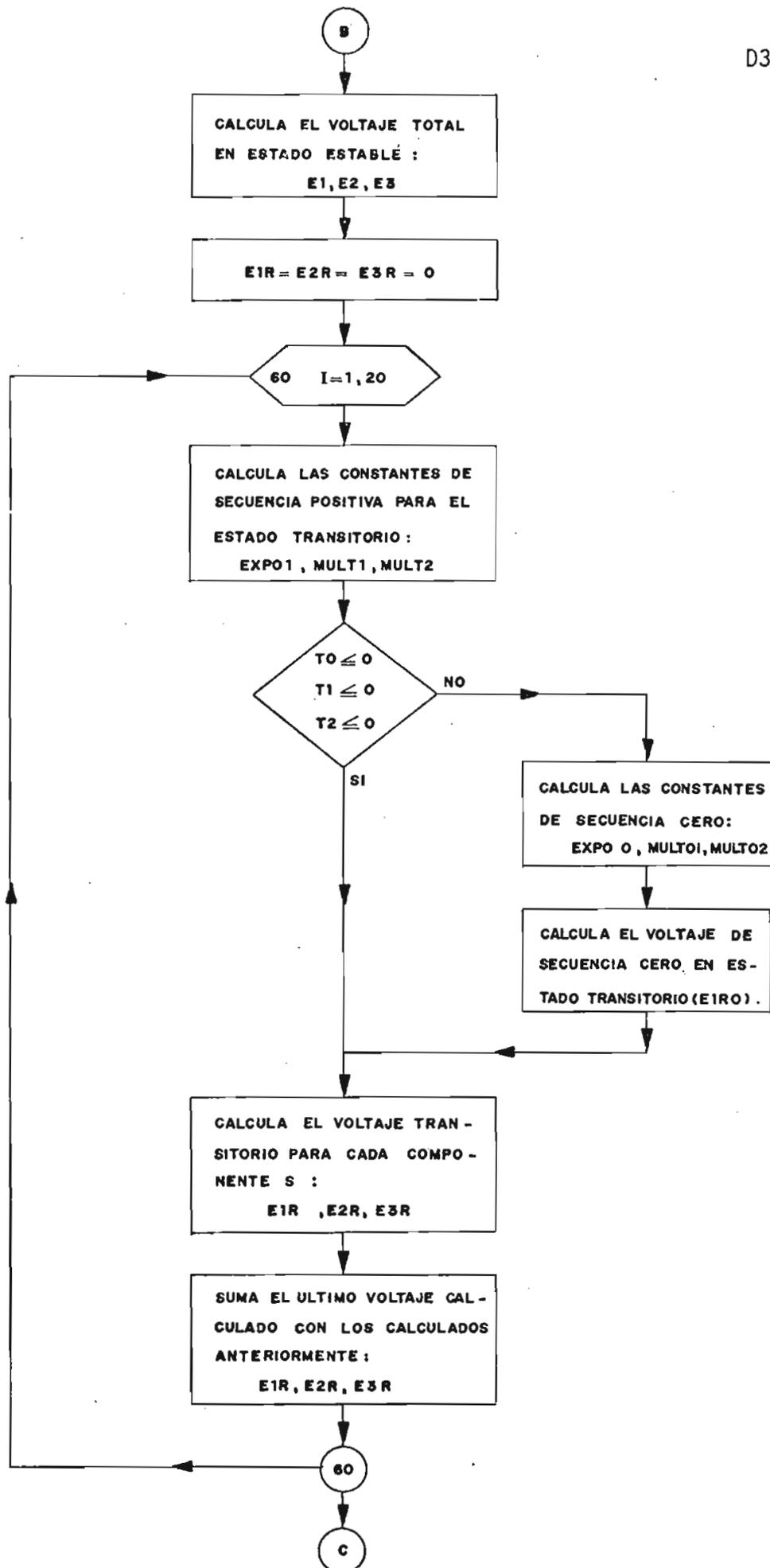
## **APENDICE D**

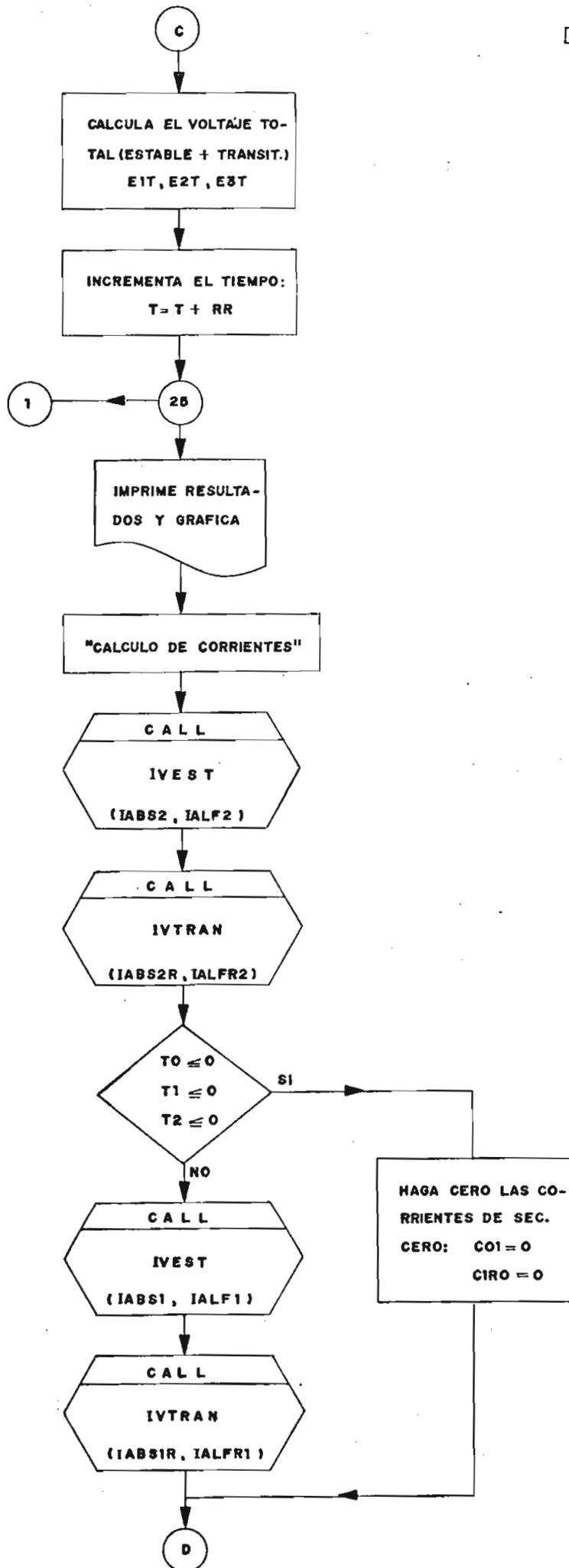
### **DIAGRAMAS DE FLUJO**

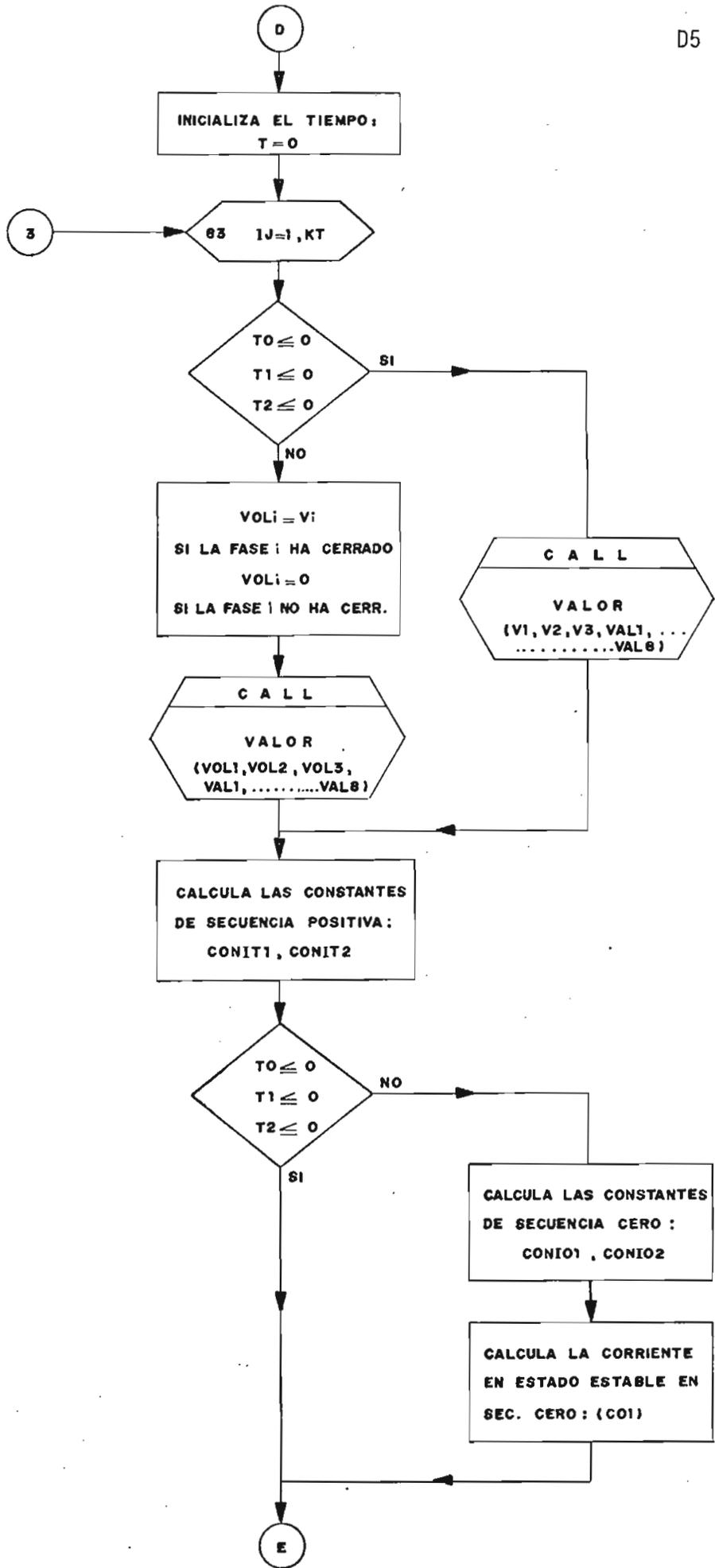
PROGRAMA PRINCIPAL.-

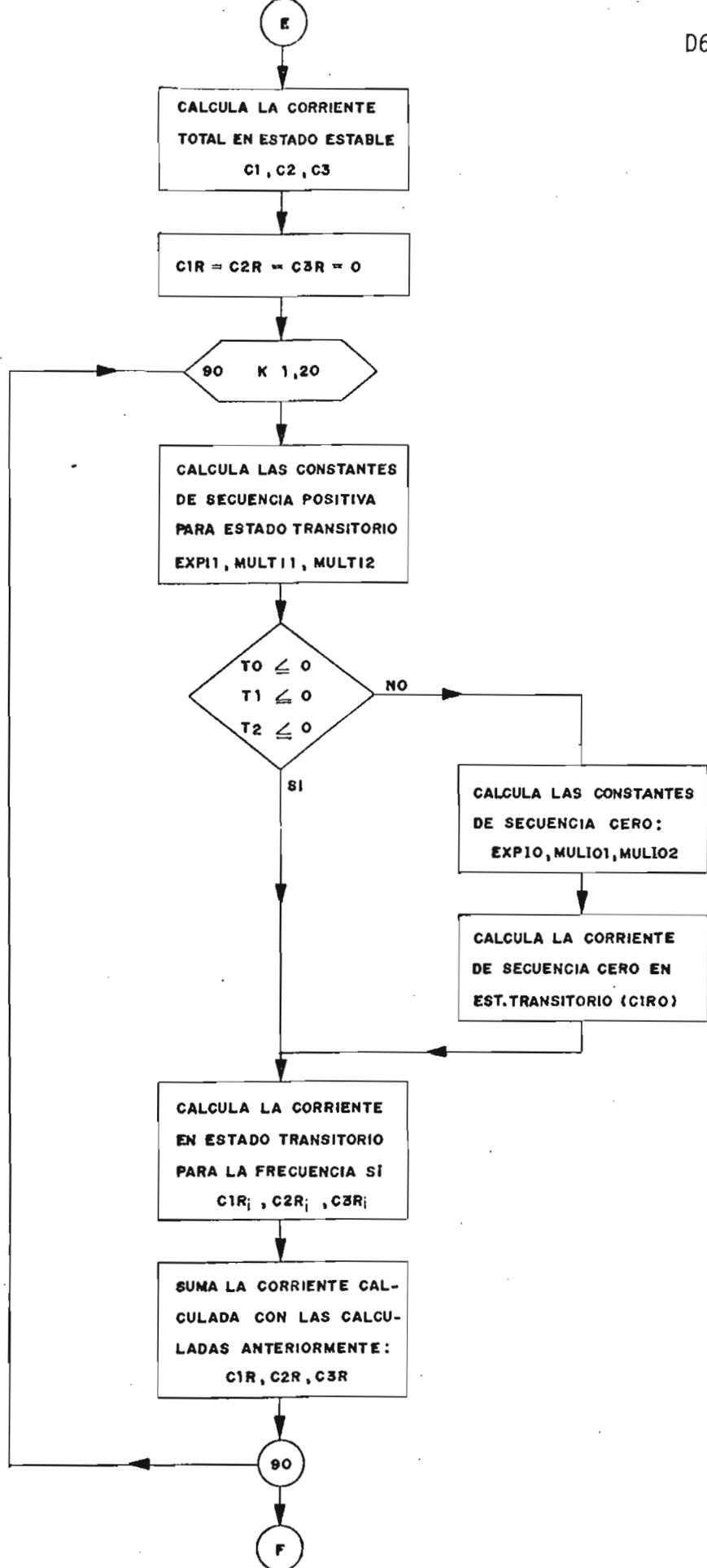


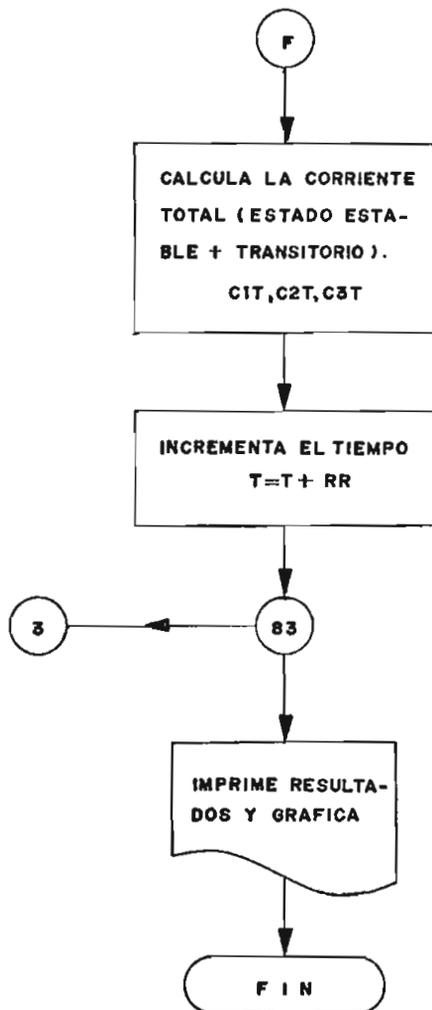




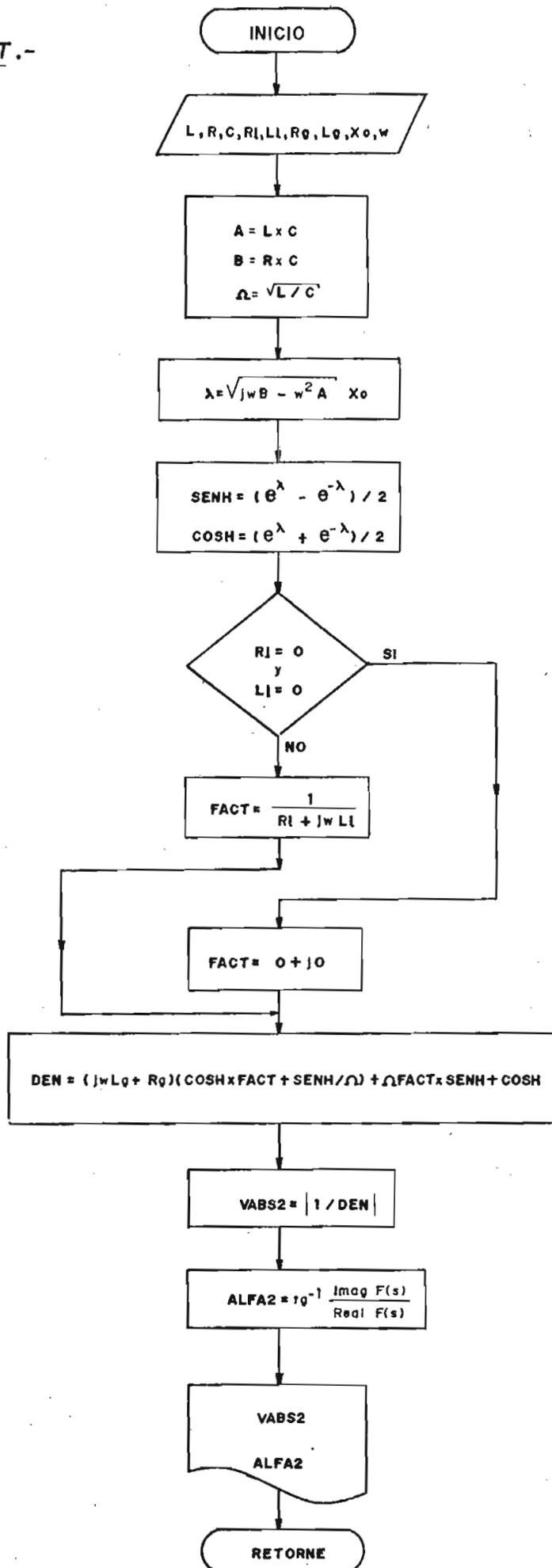




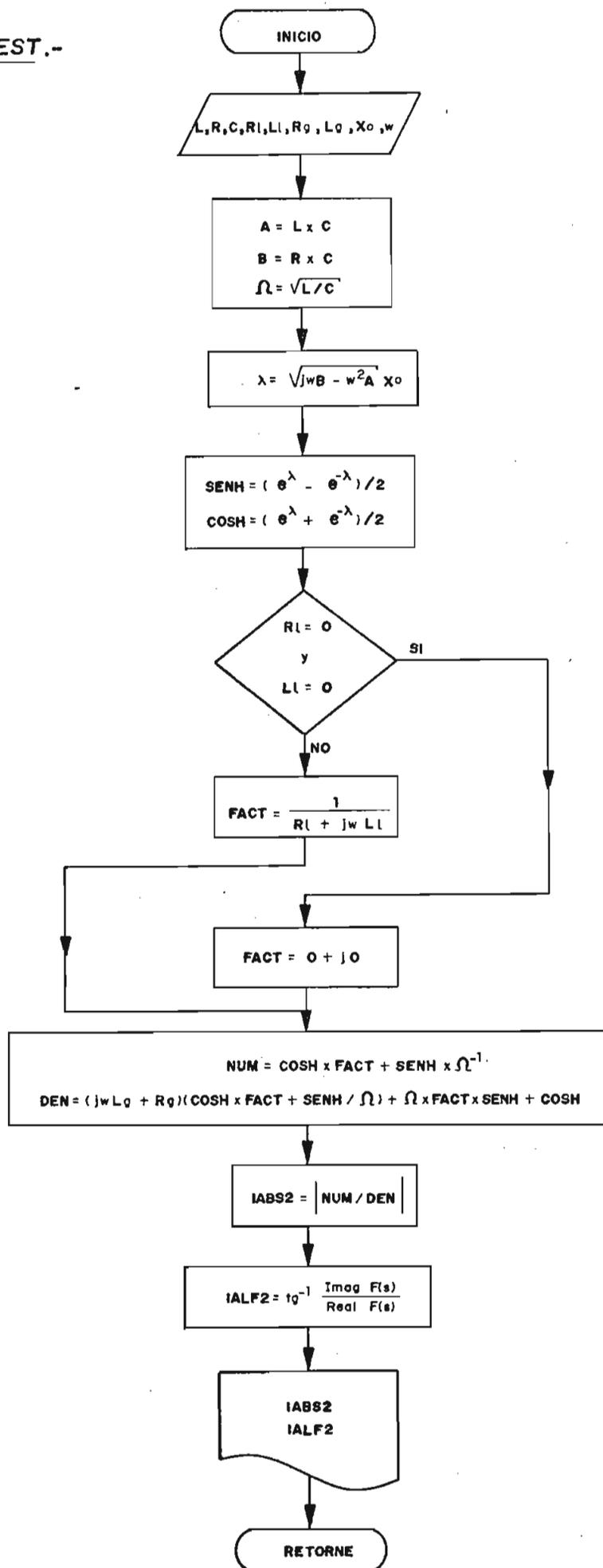




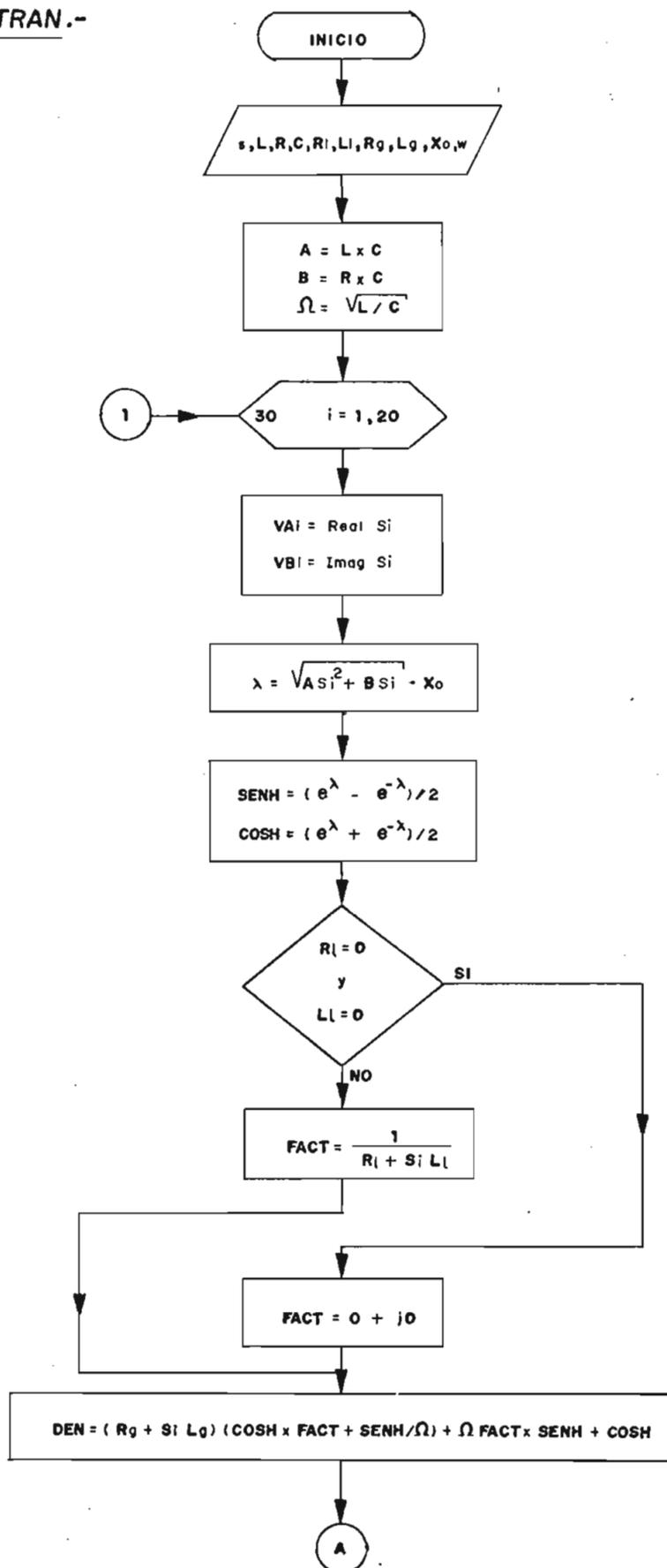
## SUBROUTINA VEST.-

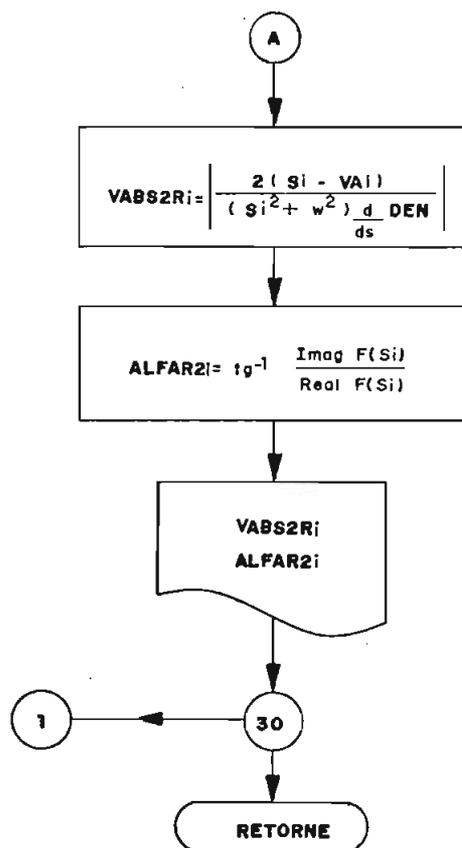


## SUBROUTINA IVEST.-

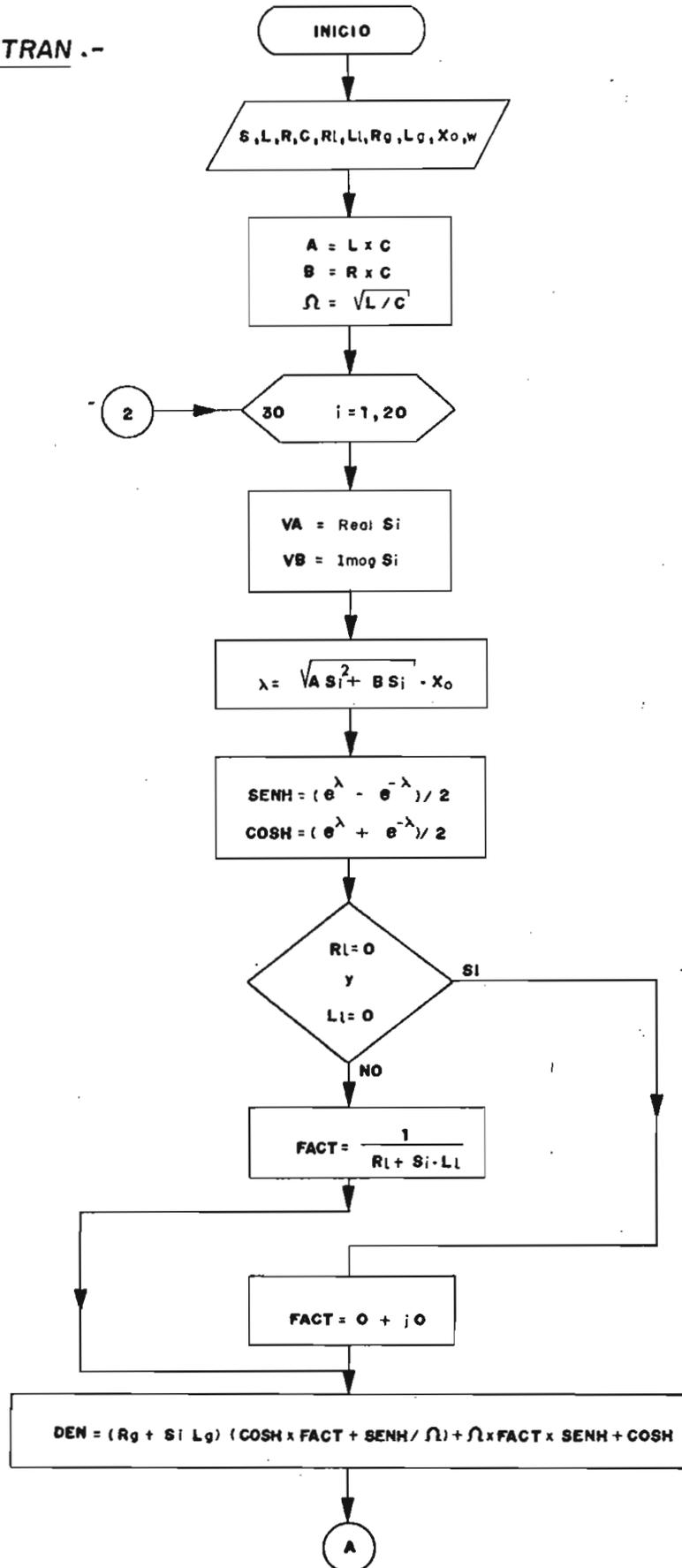


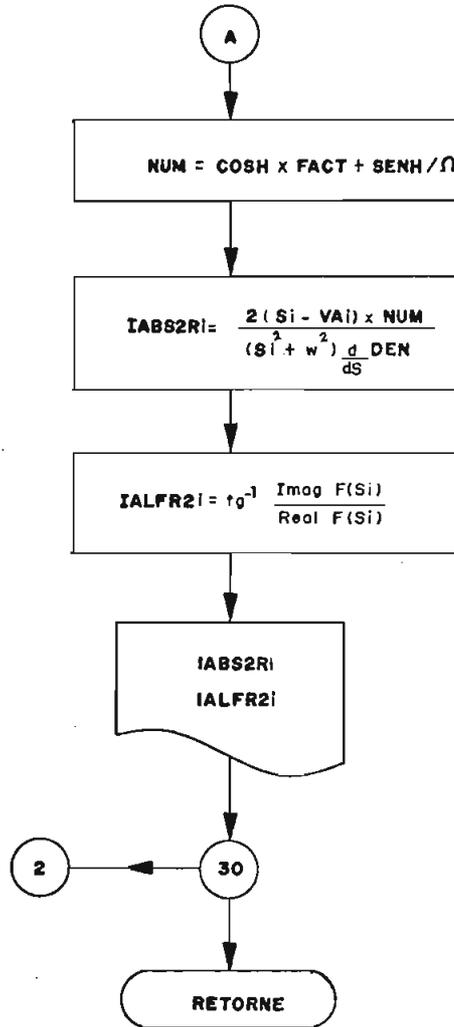
## SUBROUTINA VTRAN.-

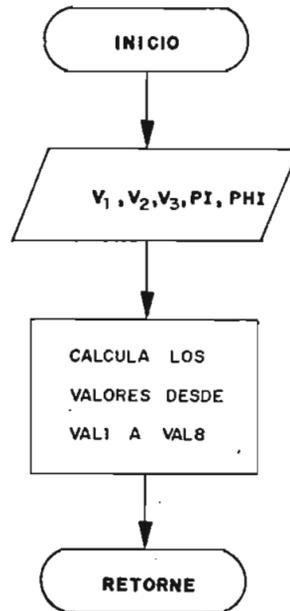


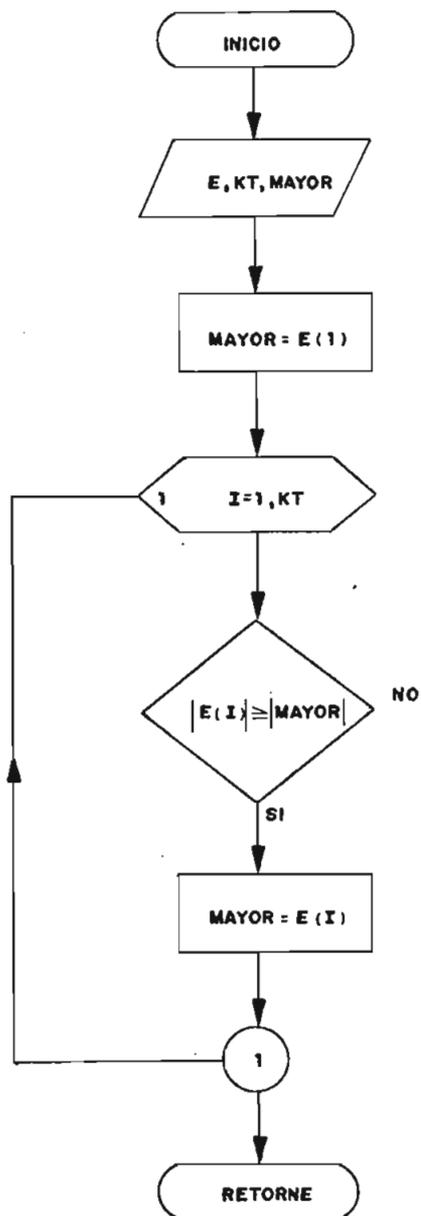


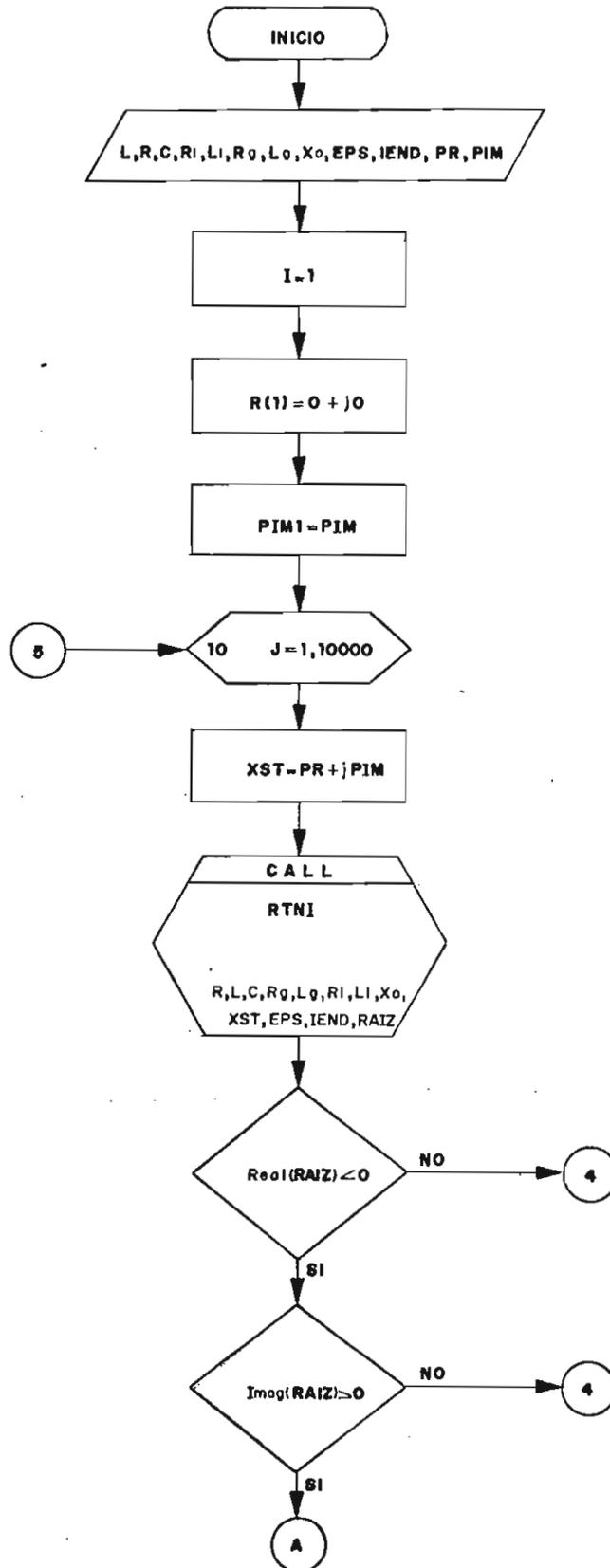
## SUBROUTINA IVTRAN .-

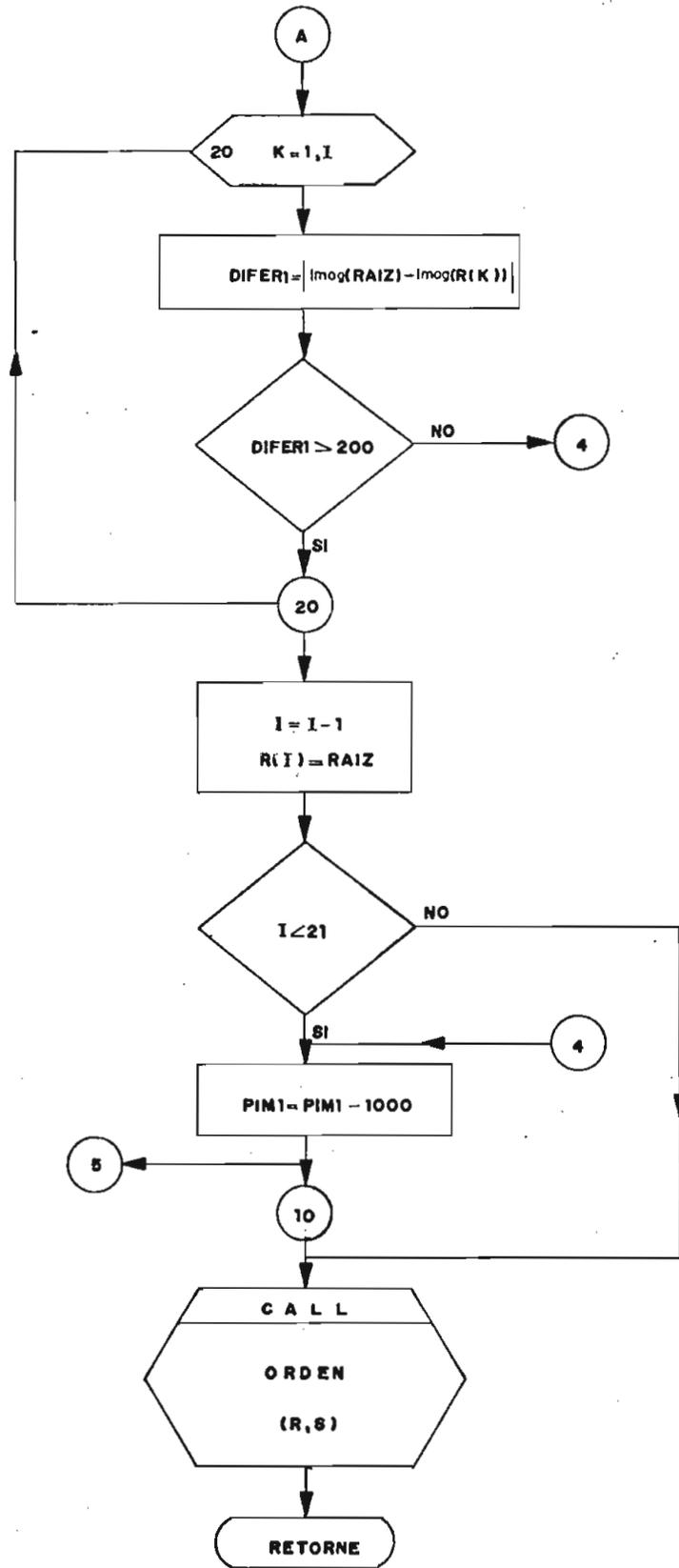


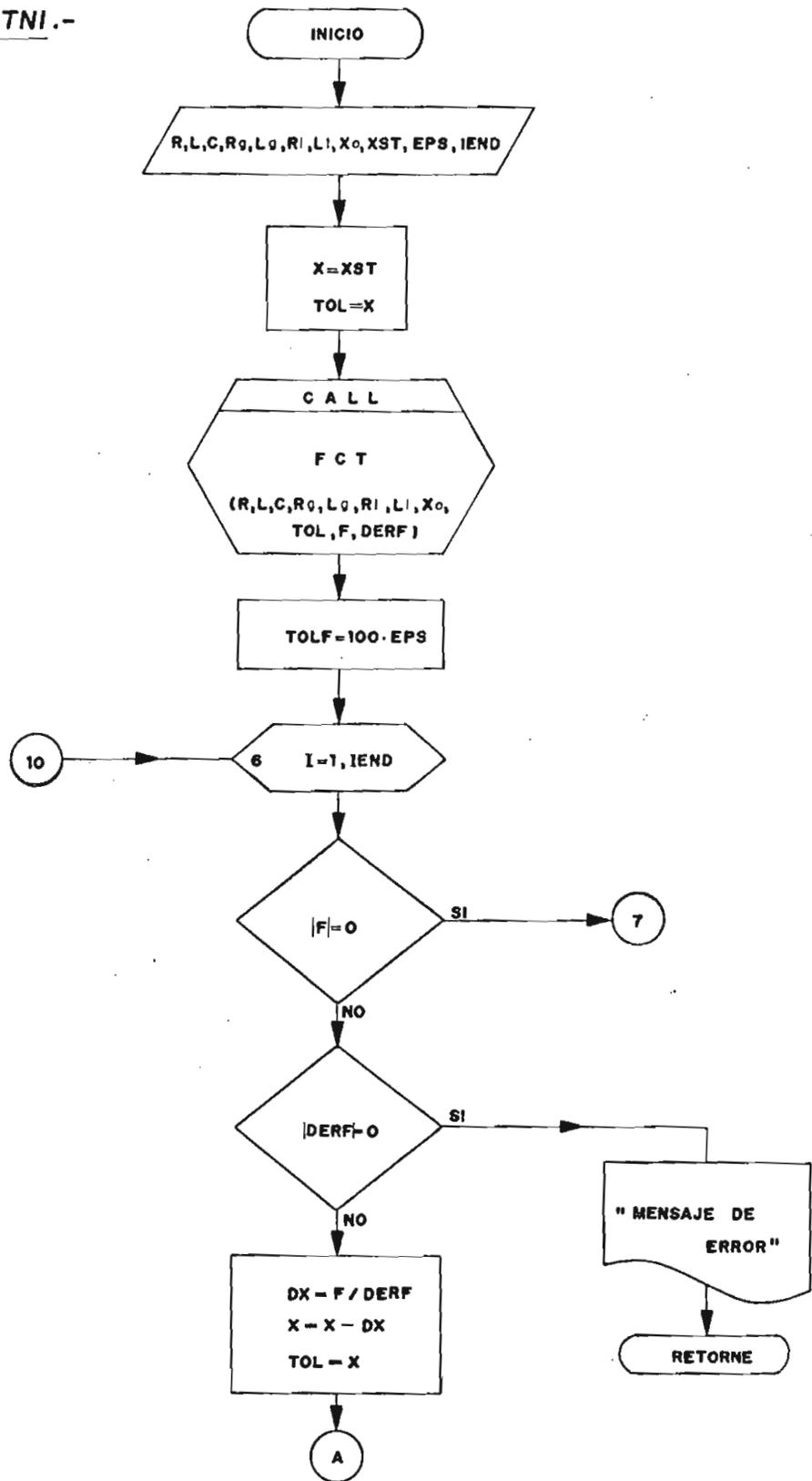


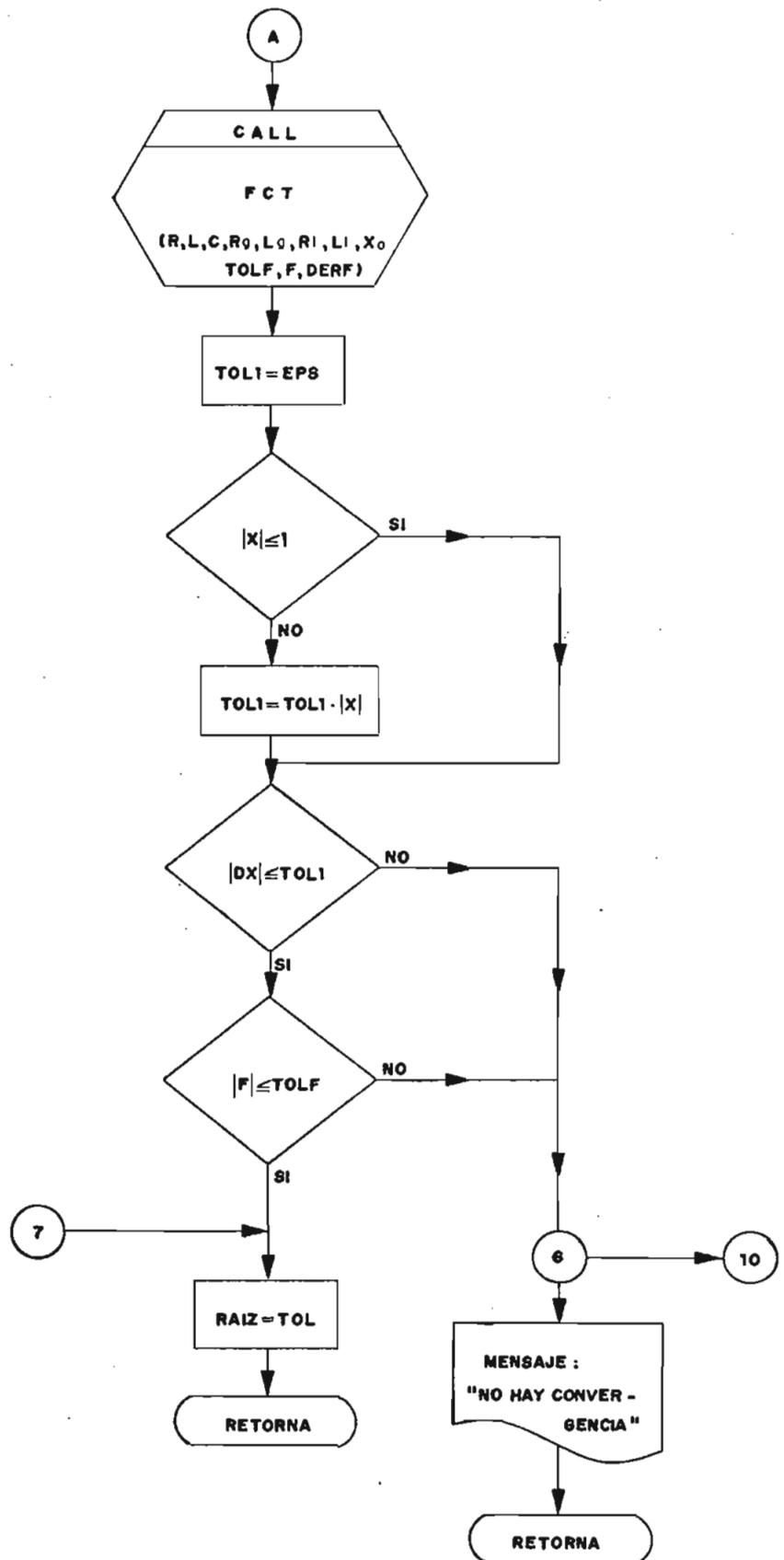
SUBROUTINA VALOR.-

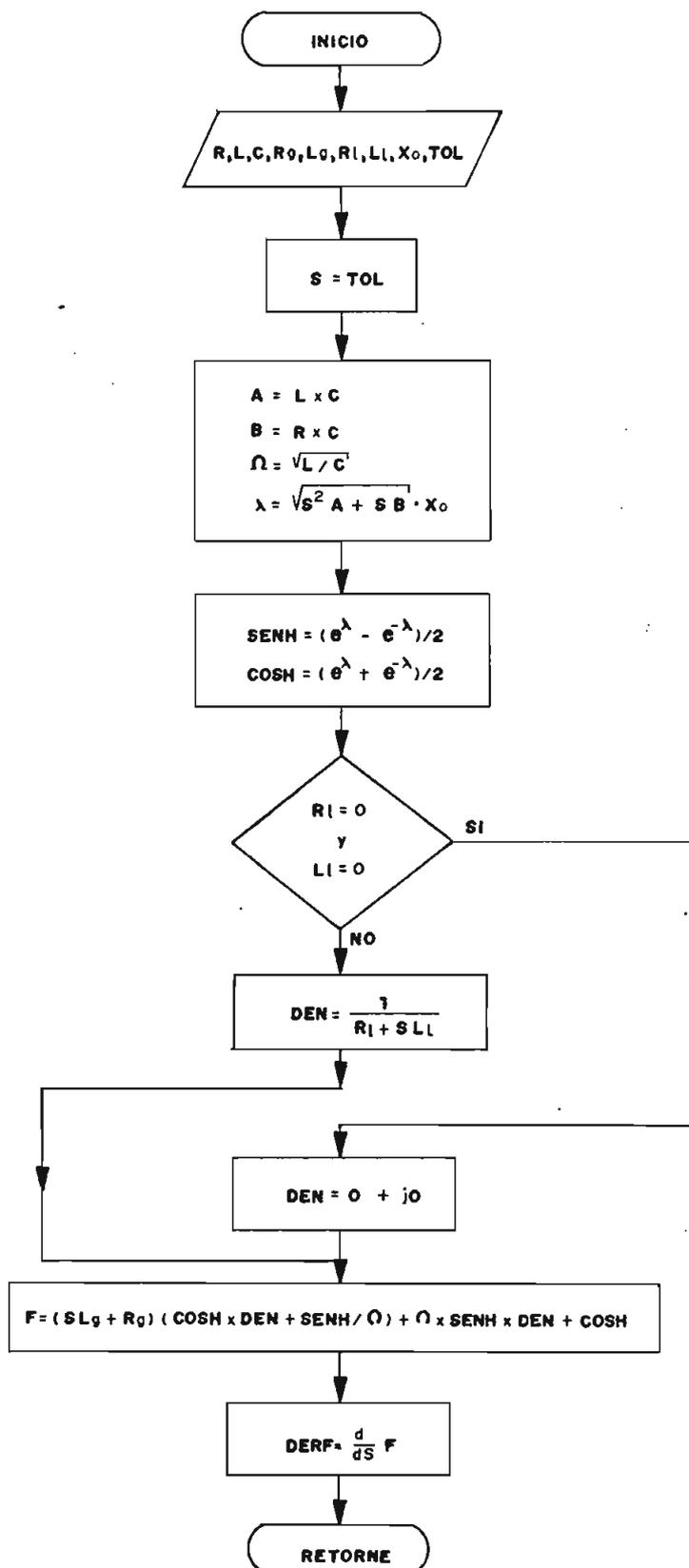
SUBROUTINA VMAYOR.-

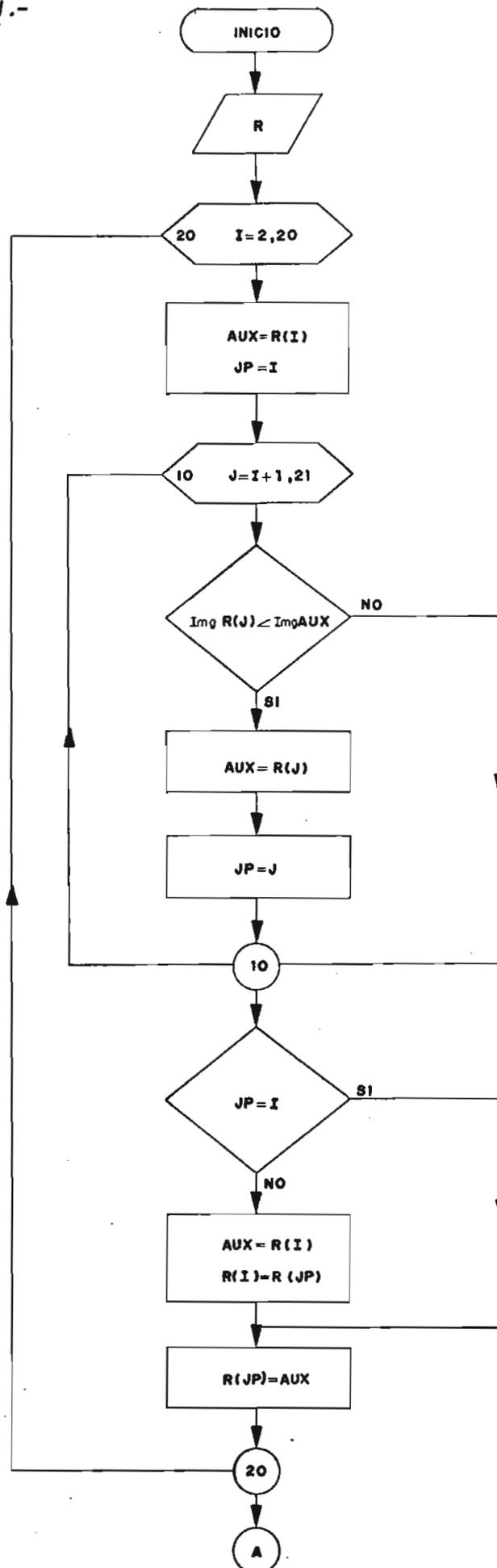
SUBROUTINA COMPF.-

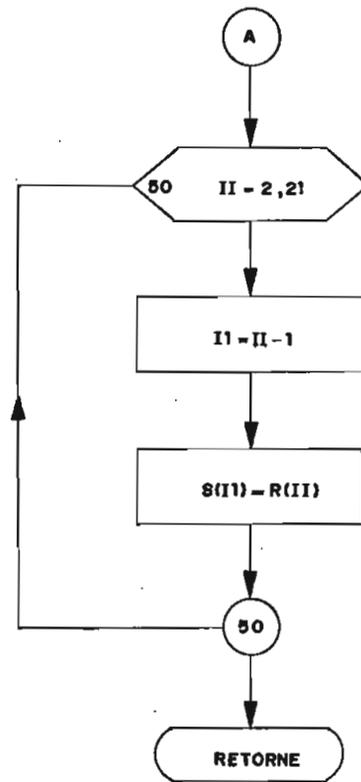


SUBROUTINA RTNI.-

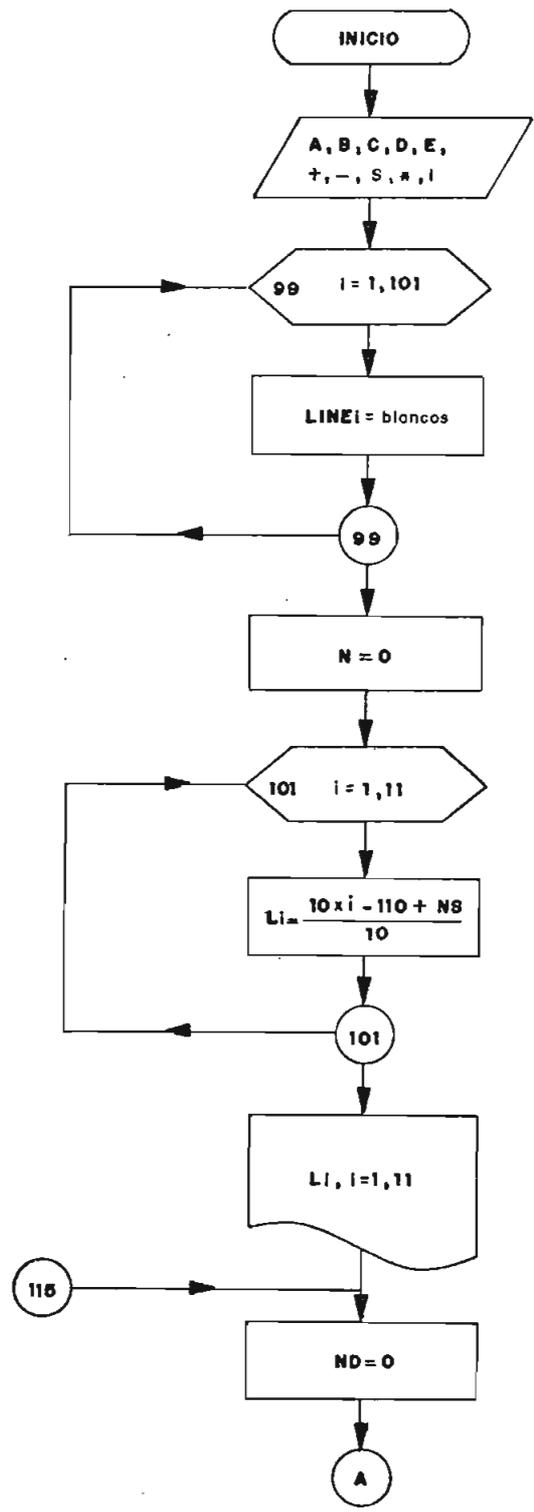


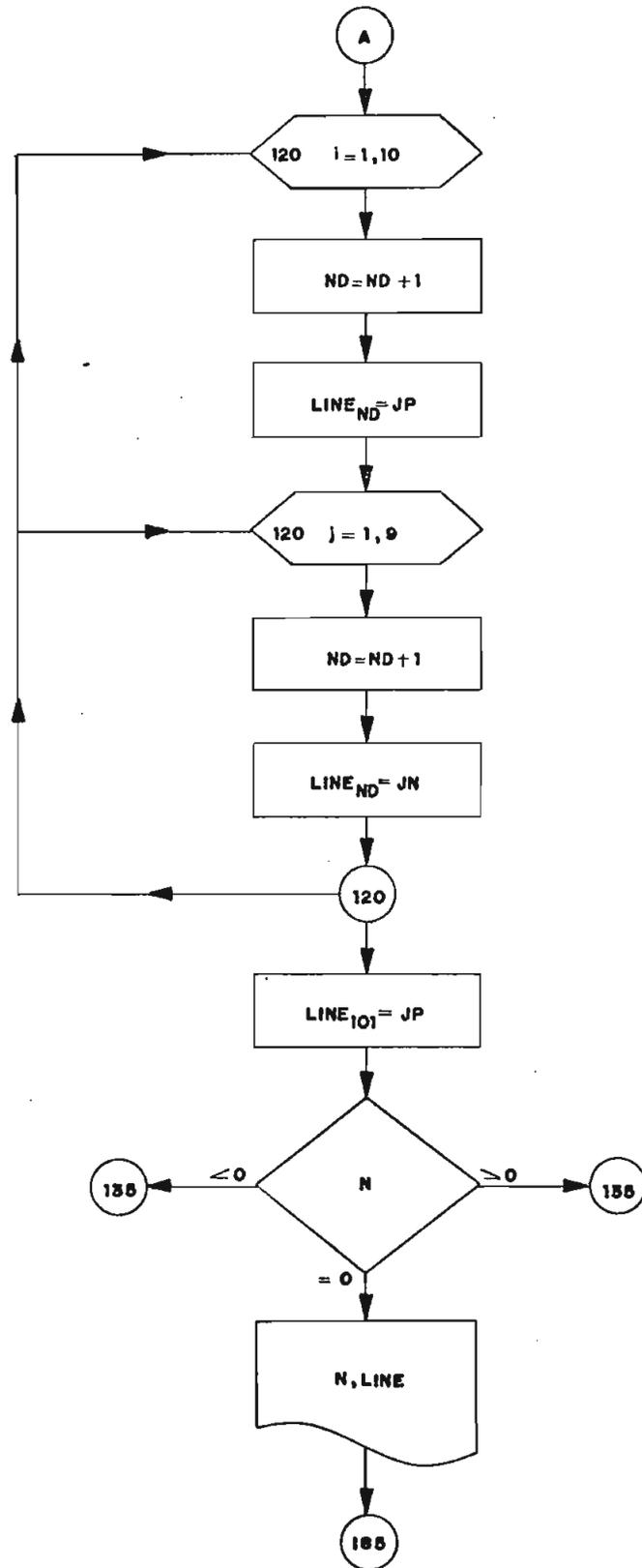
SUBROUTINA FCT.-

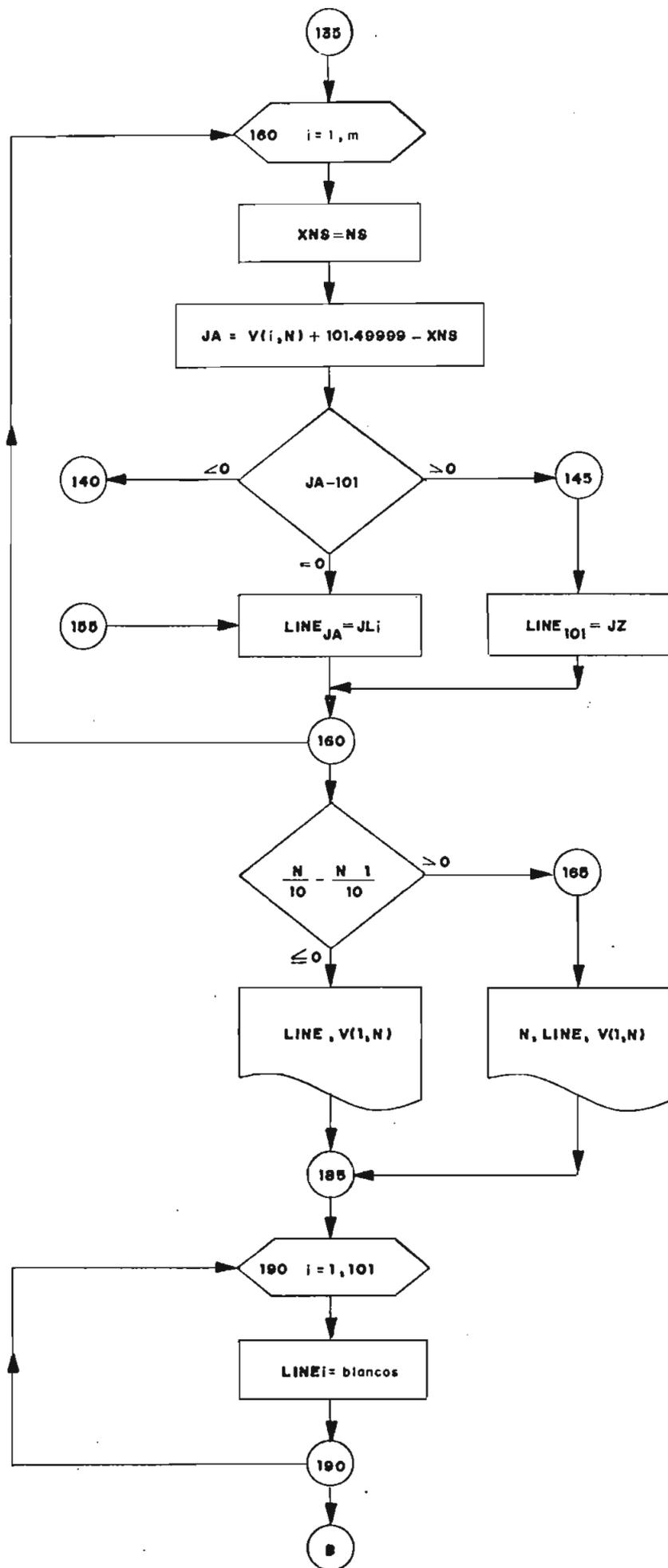
SUBROUTINA ORDEN.-

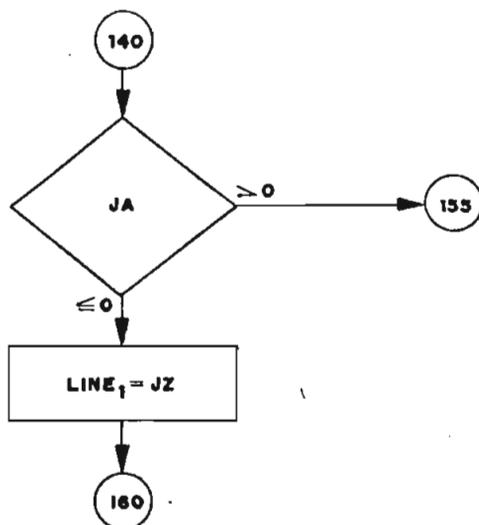
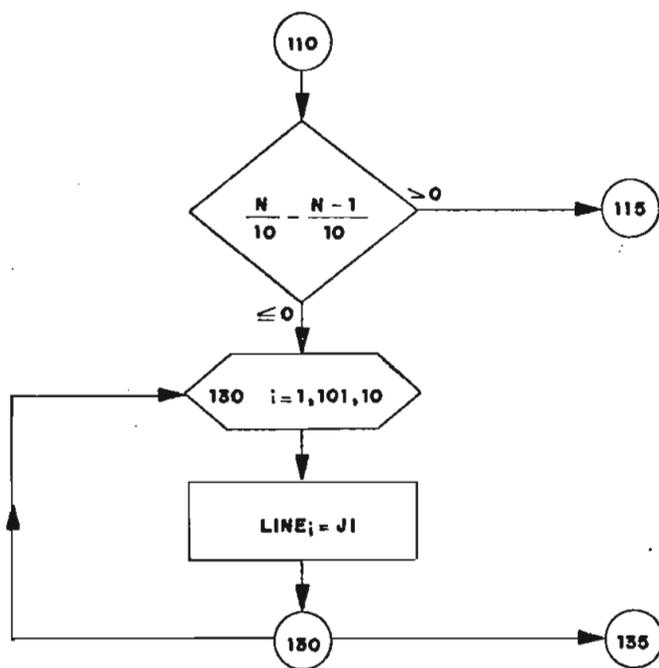
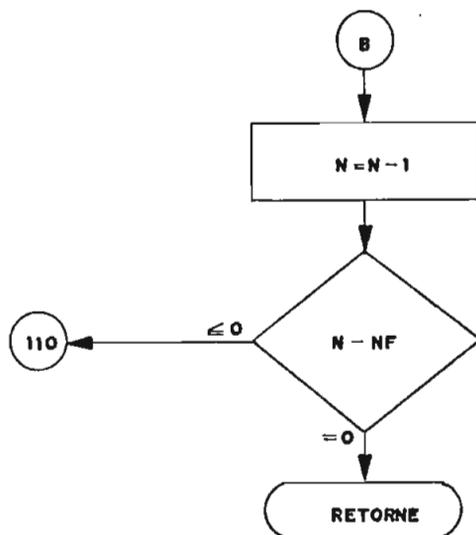


SUBROUTINA PLOT.-









## **APENDICE E**

### **EJEMPLO DE APLICACION**

VOLTAJES TRANSITORIOS POR MANIOBRA EN LINEAS DE TRANSMISION TRIFASICAS

PARAMETROS DE LA LINEA DE TRANSMISION

SECUENCIA POSITIVA SECUENCIA CERO

L1= 0.12481E-02 HENRIOS/KM R0= 0.32358E-02 HENRIOS/KM  
C1= 0.43743E-01 FARADIOS/KM R3= 0.24096E-03 OHMS/KM  
C1= 0.92369E-08 FARADIOS/KM L3= 0.54070E-08 FARADIOS/KM

PARAMETROS DE LA CARGA

RL= 0.00300 OHMS LL= 0.00000 HOS

R3= 0.00300 OHMS L3= 0.00000 HENRIOS

LONGITUD DE LA LINEA = 251.43 KM

ANGULO DE ENERGIZACION = 0.000000 (RAD)

TIEMPO DE OBSERVACION DEL TRANSITORIO = 100 MSES

VOLTAJE NOMINAL = 345.00 KV

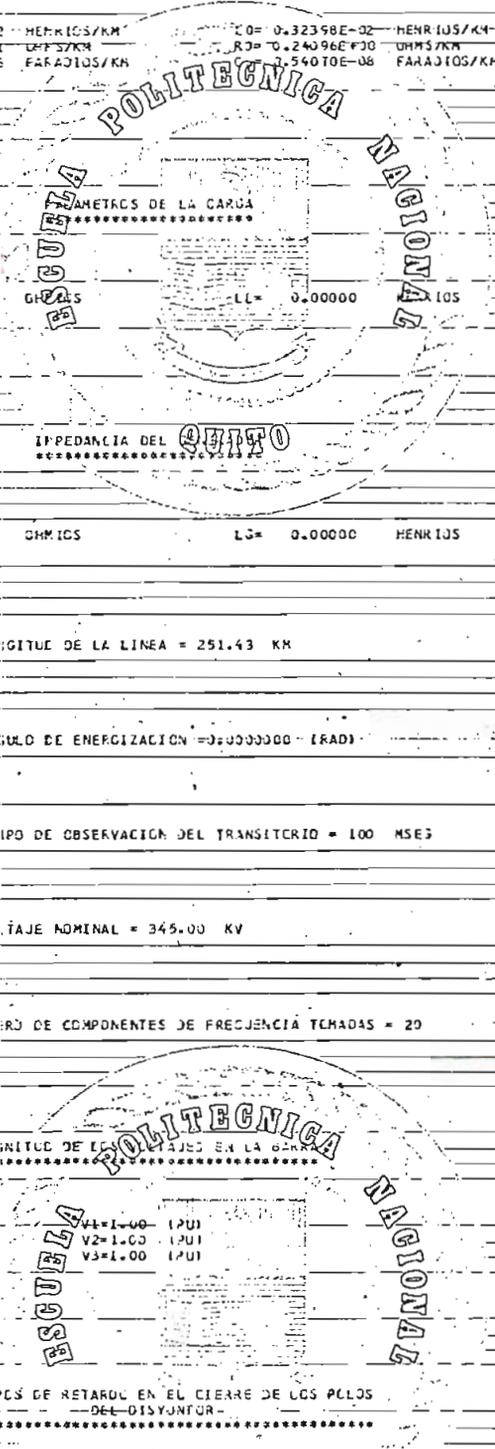
NUMERO DE COMPONENTES DE FRECUENCIA TOMADAS = 20

MAGNITUD DE LOS PULSOS EN LA CARGA

V1=1.00 (PU)  
V2=1.00 (PU)  
V3=1.00 (PU)

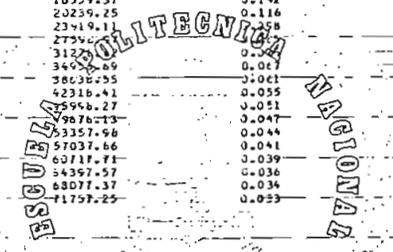
TIEMPOS DE RETARDO EN EL CIERRE DE LOS POLOS DEL DISYUNTOR

EN LA FASE A = 0.00 (MSEG)  
EN LA FASE B = 0.00 (MSEG)  
EN LA FASE C = 0.00 (MSEG)



VALORES DE SECUENCIA POSITIVA

ALZANADA	FRECUENCIA (KHZ)	AMPLITUD	FASE (GR)
0	376.99	1.054	3.38175
1	143.85	1.329	-1.59054
2	5519.77	0.476	-1.27113
3	4199.64	0.255	-1.57458
4	12879.50	0.182	-1.57350
5	76559.37	0.142	-1.57290
6	20239.25	0.116	-1.57252
7	23919.11	0.095	-1.57248
8	2756.00	0.085	-1.57206
9	3122.00	0.075	-1.57191
10	3488.00	0.067	-1.57179
11	3853.00	0.061	-1.57170
12	4218.00	0.055	-1.57173
13	4595.00	0.051	-1.57159
14	4976.00	0.047	-1.57150
15	5357.00	0.044	-1.57145
16	5703.00	0.041	-1.57141
17	6071.00	0.039	-1.57137
18	6457.00	0.036	-1.57134
19	6807.00	0.034	-1.57131
20	7157.00	0.033	-1.57128



VALORES EN EL EXTRA-RECEPTOR (PUL)

QUITO

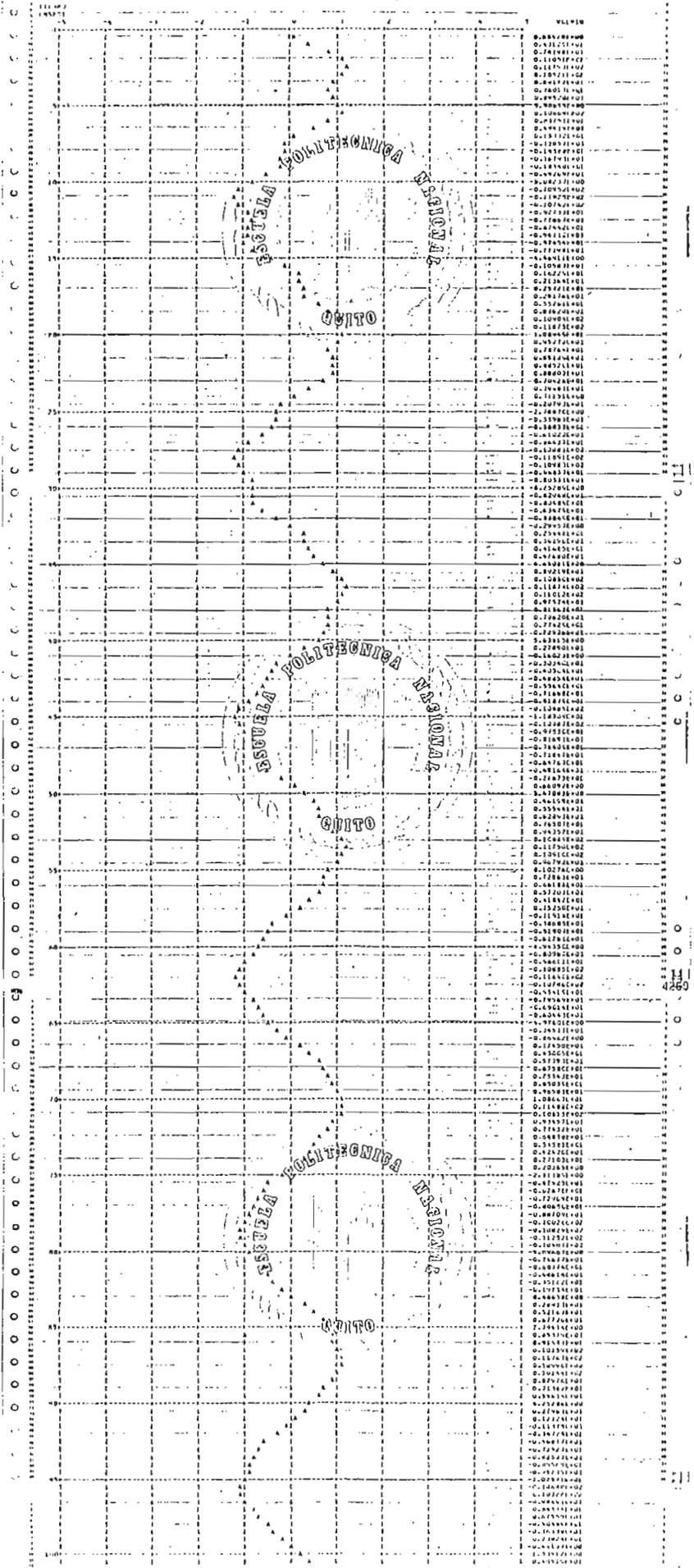
TIEMPO (SEG)	FASE A	FASE B	FASE C
0.00	0.664282E-01	0.665172E+00	0.766744E+00
0.50	0.31647E+00	0.661504E+00	0.13025E+01
1.00	0.781561E+00	0.195113E+01	0.116515E+01
1.50	0.116516E+01	0.198656E+01	0.881506E+00
2.00	0.105213E+01	0.131862E+00	0.118401E+01
2.50	0.691721E+00	0.350664E+00	0.124670E+01
3.00	0.766173E+00	0.960484E+00	0.226627E+00
3.50	0.89196E+00	0.490122E+00	0.945262E+01
4.00	0.996239E+00	0.899631E+00	0.995761E-01
4.50	0.104086E+01	0.405271E+00	0.25358E+00
5.00	0.437506E+00	0.111620E+01	0.195319E+01
5.50	0.494144E+00	0.138266E+01	0.187625E+01
6.00	0.33316E+00	0.59004E+01	0.17326E+01
6.50	0.116570E+00	0.234556E+00	0.115568E+00
7.00	0.145844E+00	0.194541E+00	0.86574E-01
7.50	0.174543E+00	0.168346E+00	0.48554E+00
8.00	0.183433E+00	0.296793E-01	0.153721E+00
8.50	0.18245E+00	0.175845E+01	0.126576E+01
9.00	0.06537E+00	0.176872E+01	0.90538E+00
10.00	0.109523E+01	0.176820E+01	0.67264E+00
10.50	0.116266E+01	0.211581E+00	0.971284E+00
11.00	0.107436E+01	0.466574E-01	0.112005E+01
11.50	0.92724E+00	0.298261E+00	0.122258E+01
12.00	0.776170E+00	0.101521E+01	0.24253E+00
12.50	0.674423E+00	0.22091E+00	0.43290E-01
13.00	0.541119E+00	0.704088E+00	0.237031E+00
13.50	0.974540E+00	0.539595E+00	0.434445E+00
14.00	0.77648E+00	0.103444E+01	0.48862E+00
14.50	0.448451E+00	0.130401E+01	0.175672E+01
15.00	0.135632E+00	0.153702E+01	0.164265E+01
15.50	0.16649E+00	0.290427E+00	0.248168E+00
16.00	0.213444E+00	0.316266E+00	0.10262E+00
16.50	0.257213E+00	0.30697E+00	0.49457E-01
17.00	0.241755E+00	0.10074E+00	0.294142E-01
17.50	0.357013E+00	0.130401E+01	0.445470E+01
18.00	0.33630E+00	0.16571E+01	0.818510E+00
18.50	0.405638E+01	0.16363E+00	0.546180E+00
19.00	0.11874E+01	0.21408E+00	0.973372E+00
19.50	0.10847E+01	0.64332E-01	0.109593E+01
20.00	0.49277E+00	0.23548E+00	0.110871E+01
20.50	0.78169E+00	0.36584E+00	0.350531E+00
21.00	0.85128E+00	0.439494E+00	0.211596E+00
21.50	0.8680E+00	0.521647E+00	0.363253E+00
22.00	0.8801E+00	0.391876E+00	0.496146E+00
22.50	0.70484E+00	0.103708E+01	0.174134E+01
23.00	0.34672E+00	0.127359E+01	0.14640E+01
23.50	0.7118E+00	0.146822E+01	0.153557E+01
24.00	0.7010E+00	0.91086E+00	0.233155E+00
24.50	0.27867E+00	0.454574E+00	0.175033E+00
25.00	0.33910E+00	0.42846E+00	0.88613E-01
25.50	0.36132E+00	0.37588E+00	0.123352E-01
26.00	0.33019E+00	0.154719E+01	0.931972E+00
26.50	0.4671E+00	0.19669E+00	0.39925E+00
27.00	0.10812E+01	0.145148E+01	0.61355E+00
27.50	0.118411E+01	0.73608E+00	0.49552E+00
28.00	0.104129E+01	0.81504E-02	0.105010E+01
28.50	0.96173E+00	0.190825E+00	0.115570E+01
29.00	0.80313E+00	0.330297E+00	0.133400E+01
29.50	0.82519E+00	0.51017E+00	0.314171E+00
30.00	0.829478E+00	0.37887E+00	0.45485E+00
30.50	0.80887E+00	0.7704E+00	0.50312E+00
31.00	0.834719E+00	0.405142E+00	0.162669E+01
31.50	0.334491E+00	0.122072E+01	0.195871E+01
32.00	0.46640E+00	0.40635E+00	0.154384E+01
32.50	0.52443E+00	0.31200E+00	0.257620E+00
33.00	0.341411E+00	0.567431E+00	0.174712E+00
33.50	0.41643E+00	0.512424E+00	0.963125E-01
34.00	0.47679E+00	0.472116E+00	0.468011E-02
34.50	0.66121E+00	0.142111E+01	0.76103E+00
35.00	0.89148E+00	0.141611E+01	0.523191E+00
35.50	0.81043E+00	0.113467E+01	0.262159E+00
36.00	0.11177E+01	0.70337E+00	0.930942E+00
36.50	0.11044E+01	0.235447E-01	0.10471E+01
37.00	0.17779E+00	0.175541E+00	0.115594E+01
37.50	0.17677E+00	0.11180E+00	0.112785E+01
38.00	0.176411E+00	0.05330E+00	0.122047E+00



QUITO

38.50	0.774290E+00	-0.216051E+00	-0.558238E+00
39.00	0.725258E+00	-0.101148E-01	-0.655143E+00
39.50	0.763215E+00	0.495959E+00	-0.255597E+01
40.00	0.278695E+00	0.120714E+01	-0.144603E+01
40.50	-0.160233E-01	0.137753E+01	-0.136151E+01
41.00	-0.307475E+00	0.676250E+00	-0.372844E+00
41.50	-0.403043E+00	0.637077E+00	-0.234038E+00
42.00	-0.482541E+00	0.605656E+00	0.117155E+00
42.50	-0.552400E+00	0.555193E+00	0.120231E+02
43.00	-0.716883E+00	0.135581E+01	-0.638932E+00
43.50	-0.916786E+00	0.132458E+01	-0.445752E+00
44.00	-0.118309E+01	0.124767E+01	-0.159186E+00
44.50	-0.109674E+01	0.304561E+00	0.878134E+00
45.00	-0.109674E+01	0.753115E-01	0.102343E+01
45.50	-0.775300E+00	0.158470E+00	0.113177E+01
46.00	-0.816511E+00	-0.374110E+00	0.119102E+01
46.50	-0.764052E+00	0.237784E+00	0.526308E+00
47.00	-0.718406E+00	0.964317E-01	0.622035E+00
47.50	-0.647673E+00	0.469251E-01	0.694558E+00
48.00	-0.491643E+00	-0.481274E+00	0.147292E+01
48.50	-0.216732E+00	-0.117511E+01	0.125184E+01
49.00	0.660516E-01	0.132831E+01	0.126222E+01
49.50	0.347081E+00	0.12289E+01	0.985804E+00
50.00	0.481500E+00	0.12289E+01	0.235398E+00
50.50	0.555438E+00	0.65729E+00	0.101560E+00
51.00	0.626527E+00	0.590864E+00	0.380570E-01
51.50	0.705075E+00	0.126785E+00	0.502760E+00
52.00	0.945547E+00	-0.121529E+01	0.271723E+00
52.50	0.108810E+01	0.112019E+01	0.312743E-01
53.00	0.117502E+01	0.303265E+00	0.871740E+00
53.50	0.105105E+01	0.631741E-01	0.102785E+01
54.00	0.167857E+00	0.170807E+00	0.113873E+01
54.50	0.816276E+00	0.407149E+00	0.121742E+01
55.00	0.724000E+00	-0.113557E+00	0.615053E+00
55.50	0.661350E+00	0.354500E-01	0.697269E+00
56.00	0.572000E+00	0.180043E+00	0.756047E+00
56.50	0.418223E+00	0.980481E+00	0.139850E+01
57.00	0.152100E+00	0.116525E+01	0.132175E+01
57.50	-0.115170E+00	0.131214E+01	0.119297E+01
58.00	-0.386851E+00	0.144036E+01	0.105351E+01
58.50	-0.515071E+00	0.763166E+00	0.241095E+00
59.00	-0.178120E+00	0.18274E+00	0.160462E+00
59.50	-0.094350E+00	0.653583E+00	0.407659E-01
60.00	-0.609822E+00	0.115006E+01	0.386238E+00
60.50	-0.706111E+00	0.112888E+01	0.463153E+00
61.00	-0.108850E+01	0.102762E+01	0.606757E-01
61.50	-0.116477E+01	0.250657E+00	0.916115E+00
62.00	-0.107659E+01	0.543635E-01	0.102422E+01
62.50	-0.956193E+00	0.172290E+00	0.112645E+01
63.00	-0.795691E+00	0.366820E+00	0.118251E+01
63.50	-0.696137E+00	0.262803E-02	0.687308E+00
64.00	-0.604428E+00	-0.140037E+00	0.744465E+00
64.50	-0.497601E+00	-0.277540E+00	0.775541E+00
65.00	-0.345106E+00	0.100216E+01	0.134827E+01
65.50	-0.669623E-01	0.115613E+01	0.124309E+01
66.00	-0.174496E+00	0.127762E+01	0.110313E+01
66.50	-0.430649E+00	0.133726E+01	0.907211E+00
67.00	-0.573525E+00	0.806885E+00	0.232556E+00
67.50	-0.675803E+00	-0.750123E+00	0.743197E-01
68.00	-0.752427E+00	0.665665E+00	0.889410E-01
68.50	-0.650355E+00	0.112691E+01	0.216518E+00
69.00	-0.585627E+00	0.103769E+01	0.520588E-01
69.50	-0.106663E+01	0.916349E+00	0.170274E+00
70.00	-0.114879E+01	-0.579867E+00	0.568525E+00
70.50	0.106145E+01	-0.330811E-01	0.192837E+01
71.00	0.934573E+00	0.198827E+00	0.113340E+01
71.50	0.774222E+00	0.427888E+00	0.120221E+01
72.00	0.648377E+00	0.927378E-01	0.741114E+00
72.50	0.545406E+00	0.246013E+00	0.751116E+00
73.00	0.424205E+00	0.388882E+00	0.813886E+00
73.50	0.271033E+00	0.979139E+00	0.125017E+01
74.00	-0.203691E-01	0.119614E+01	0.117050E+01
74.50	-0.231389E+00	0.126349E+01	0.133210E+01
75.00	-0.475250E+00	0.134207E+01	0.866822E+00
75.50	-0.267574E+00	0.837453E+00	0.210854E+00
76.00	-0.725442E+00	0.781027E+00	0.513355E-01
76.50	-0.806498E+00	0.697162E+00	0.109336E+00
77.00	-0.887670E+00	0.103541E+01	0.152612E+00
77.50	-0.100259E+01	0.952598E+00	0.455531E-01
78.00	-0.108287E+01	0.827118E+00	0.255757E+00
78.50	-0.112564E+01	0.705576E+00	0.413581E+00
79.00	-0.104606E+01	0.538588E-03	0.103553E+01
79.50	-0.909667E+00	-0.220711E+00	0.113174E+01
80.00	-0.742734E+00	-0.43363E+00	0.118114E+01
80.50	-0.603742E+00	0.199353E+00	0.183305E+00
81.00	-0.486143E+00	0.340184E+00	0.826327E+00
81.50	-0.351453E+00	-0.471175E+00	0.822355E+00
82.00	-0.197138E+00	-0.104915E+01	0.124448E+01
82.50	0.466382E-01	0.116557E+01	0.110294E+01
83.00	0.239125E+00	0.116557E+01	0.952345E+00
83.50	0.521168E+00	0.372011E+01	0.722349E+00
84.00	0.677546E+00	-0.372011E+01	0.154805E+00
84.50	0.775434E+00	-0.298426E+00	0.139527E-01
85.00	0.853751E+00	-0.496756E+00	0.157034E+00
85.50	0.919275E+00	0.993429E+00	0.740169E-01
86.00	0.101557E+01	0.473441E+00	0.162486E+00
86.50	0.137600E+01	0.730879E+00	0.345833E+00
87.00	0.109800E+01	0.549453E+00	0.550144E+00
87.50	0.102000E+01	0.279483E-01	0.104238E+01
88.00	0.870000E+00	0.254790E+00	0.113455E+01
88.50	0.715000E+00	0.473707E+00	0.118132E+01
89.00	0.550000E+00	0.274224E+00	0.830362E+00
89.50	0.425000E+00	0.424701E+00	0.845587E+00
90.00	0.275000E+00	0.350743E+00	0.836353E+00
90.50	-0.123439E+00	0.886524E+00	0.100574E+01
91.00	-0.113746E+00	0.114191E+01	0.102816E+01
91.50	-0.347251E+00	0.122472E+01	0.877432E+00
92.00	-0.568774E+00	0.126692E+01	0.698192E+00
92.50	-0.725260E+00	0.879266E+00	0.154000E+00
93.00	-0.825227E+00	0.804561E+00	0.202650E-01
93.50	-0.945488E+00	0.200724E+00	0.194564E+00
94.00	-0.973544E+00	0.350668E+00	0.505267E-01
94.50	-0.102571E+01	0.768516E+00	0.236757E+00
95.00	-0.136758E+01	0.641559E+00	0.255893E+00
95.50	-0.107265E+01	0.478289E+00	0.544257E+00
96.00	-0.984509E+00	0.752730E-01	0.136618E+01
96.50	-0.845342E+00	0.293555E+00	0.113800E+01
97.00	-0.675566E+00	-0.501256E+00	0.117884E+01
97.50	-0.505294E+00	-0.372022E+00	0.878496E+00
98.00	-0.363380E+00	0.508364E+00	0.811244E+00
98.50	-0.208244E+00	0.629896E+00	0.817540E+00
99.00	-0.061388E-01	0.713105E+00	0.759444E+00
99.50	0.180512E+00	0.114597E+01	0.945433E+00
100.00	0.405150E+00	-0.120568E+01	0.804494E+00

POLITECNICO NACIONAL  
 QUITO



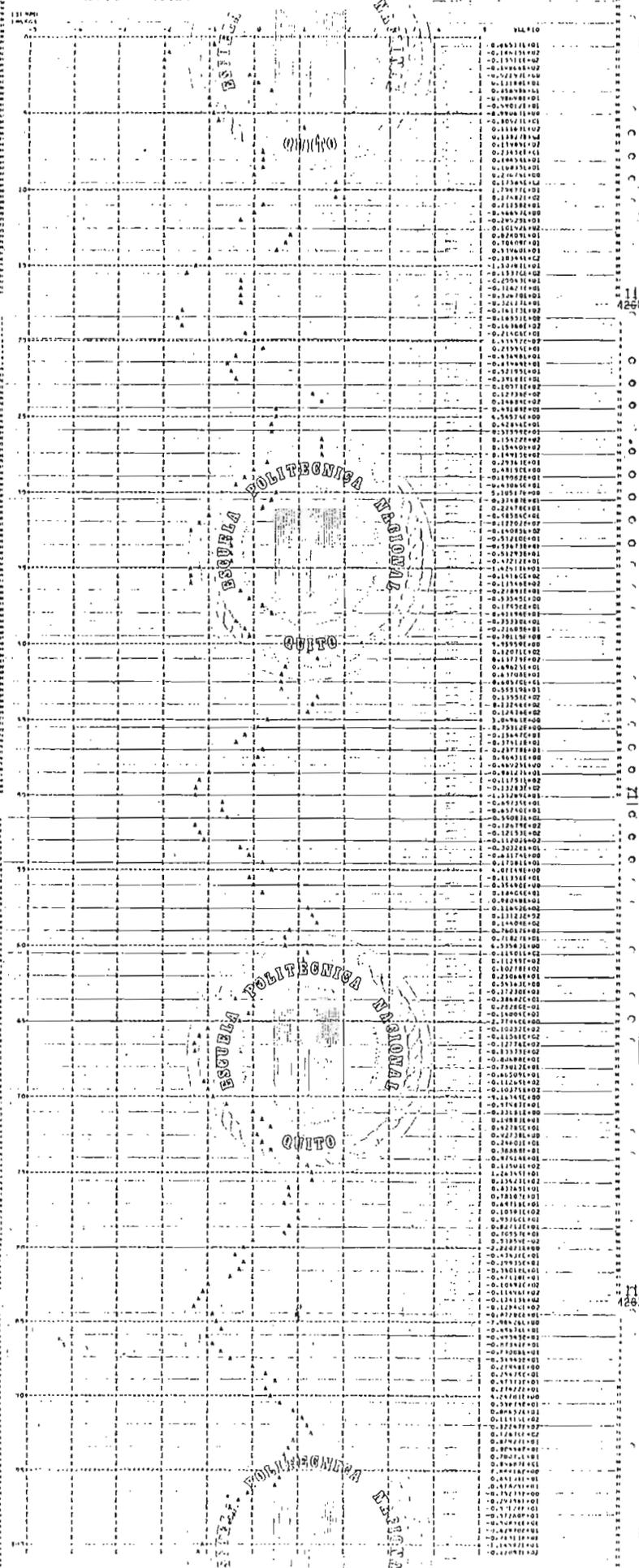
4201

4201

ESUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESUELA POLITÉCNICA NACIONAL

ESUELA POLITÉCNICA NACIONAL



11  
4250

11  
291



CALCULO DE LAS CORRIENTES TRANSIENTAS EN EL TERMINAL DE ENVIO DE LA LINEA

VALORES DE TENSION POSITIVA

ATENUACION	FRECUENCIA (RAD/SEG)	AMPLITUD	FASE (RAD)
0	376.99	0.001	1.91411
1	1825.85	0.004	-0.01975
2	5519.77	0.001	0.00634
3	9195.64	0.001	-0.03379
4	12879.50	0.000	0.00273
5	16559.37	0.000	-0.0210
6	20235.25	0.000	-0.09172
7	23919.11	0.000	-0.03146
8	27598.97	0.000	0.09426
9	31278.82	0.000	0.00111
10	34958.69	0.000	-0.00653
11	38638.55	0.000	-0.00082
12	42318.41	0.000	-0.00076
13	45998.27	0.000	-0.00070
14	49678.13	0.000	-0.00365
15	53357.98	0.000	-0.00361
16	57037.86	0.000	-0.00657
17	60717.71	0.000	-0.00054
18	64397.57	0.000	-0.00051
19	68077.37	0.000	-0.00349
20	71757.25	0.000	

CORRIENTES EN EL TERMINAL DE ENVIO (KA)

TIEMPO (USEC)	FASE A	FASE B	FASE C
0.00	0.290012E+00	-0.266727E+00	0.237725E+01
0.50	0.271451E+00	-0.480151E+00	0.370125E+02
1.00	0.463000E+00	0.100016E+00	-0.503017E+00
1.50	0.322308E+00	0.933933E+00	0.125024E+01
2.00	-0.501784E-02	0.943351E+00	-0.033334E+00
2.50	-0.135273E+00	0.410269E+00	0.275455E+00
3.00	-0.152151E+00	-0.109544E+00	-0.262397E+00
3.50	0.114531E-01	-0.101853E-01	0.047084E+00
4.00	0.114709E+00	-0.621913E-01	-0.525179E-01
4.50	0.660250E-01	0.38546E+00	-0.504572E+00
5.00	0.193580E+00	0.193580E+00	-0.126114E+01
5.50	0.195633E+00	0.900000E+00	-0.506552E+00
6.00	-0.481206E+00	0.378301E+00	0.102644E+00
6.50	-0.43801E+00	-0.229658E+00	-0.678463E+00
7.00	-0.214454E+00	0.73406E+00	0.948E59E+00
7.50	-0.115447E+00	0.118168E+00	0.233654E+00
8.00	-0.115532E+00	0.304389E+00	-0.104651E+00
8.50	0.250000E+00	0.165446E+01	0.140385E+01
9.00	-0.427800E+00	0.451058E+00	-0.237295E-01
9.50	-0.415000E+00	-0.569772E-01	0.276847E+00
10.00	-0.295000E+00	0.72438E+00	0.102452E+01
10.50	-0.810000E-02	0.898002E+00	0.906102E+00
11.00	-0.120000E+00	-0.410301E+00	0.288039E+00
11.50	0.150000E+00	0.278204E-01	0.181452E+00
12.00	0.150000E-01	0.105938E+01	-0.107477E+01
12.50	0.640000E-01	-0.568434E-01	0.716645E-02
13.00	-0.226631E-01	0.365420E+00	0.388283E+00
13.50	0.117426E+00	-0.104633E+01	0.930603E+00
14.00	0.378135E+00	-0.845851E+00	0.467316E+00
14.50	0.461399E+00	-0.365753E+00	-0.956465E-01
15.00	0.441338E+00	0.155219E+00	0.596558E+00
15.50	-0.24076E+00	0.708130E+00	-0.125120E+00
16.00	0.144328E+00	0.142959E+00	-0.287327E+00
16.50	0.136008E+00	-0.198561E+00	0.619535E-01
17.00	-0.226699E+00	-0.999588E+00	0.230850E+00
17.50	0.386772E+00	-0.393120E+00	0.635455E-02
18.00	0.379205E+00	0.672706E-01	0.446476E+00
18.50	-0.275093E+00	-0.634013E+00	-0.935412E+00
19.00	0.154852E-01	0.868149E+00	-0.883636E+00
19.50	-0.113705E+00	0.438754E+00	-0.325051E+00
20.00	-0.155511E+00	-0.836205E-01	0.718821E-01
20.50	0.633568E-01	-0.147546E+01	-0.154289E+01
21.00	0.175616E+01	0.262702E-01	0.828159E-02
21.50	-0.169021E-01	-0.345671E+00	-0.128629E+00
22.00	-0.133145E+00	0.906658E+00	-0.773463E+00
22.50	-0.364543E+00	0.799521E+00	-0.434578E+00
23.00	-0.444236E+00	0.378393E+00	0.658457E-01
23.50	-0.432772E+00	-0.447136E-01	0.442487E+00
24.00	-0.267429E+00	0.745212E+00	0.101264E+01
24.50	-0.166045E+00	-0.143324E+00	0.311367E+00
25.00	-0.150499E+00	0.150303E+00	0.158407E-03
25.50	-0.212255E+00	0.787485E+00	-0.575190E+00
26.00	-0.346761E+00	0.340000E+00	-0.527548E-02
26.50	-0.340916E+00	-0.536544E-01	0.354611E+00
27.00	-0.245244E+00	-0.507214E+00	0.756454E+00
27.50	-0.189220E-01	0.869220E+00	0.888202E+00
28.00	0.108855E+00	-0.44758E+00	0.332523E+00
28.50	0.156628E+00	-0.131372E+00	-0.272564E-01
29.00	0.137648E+00	0.100529E+01	0.111293E+01
29.50	-0.232778E-01	0.556875E-02	-0.269459E-01
30.00	0.535139E-01	0.303234E+00	0.249720E+00



COMPLETAR EN LA PÁGINA 2 DEL DISEÑO

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

QUITO

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

QUITO

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

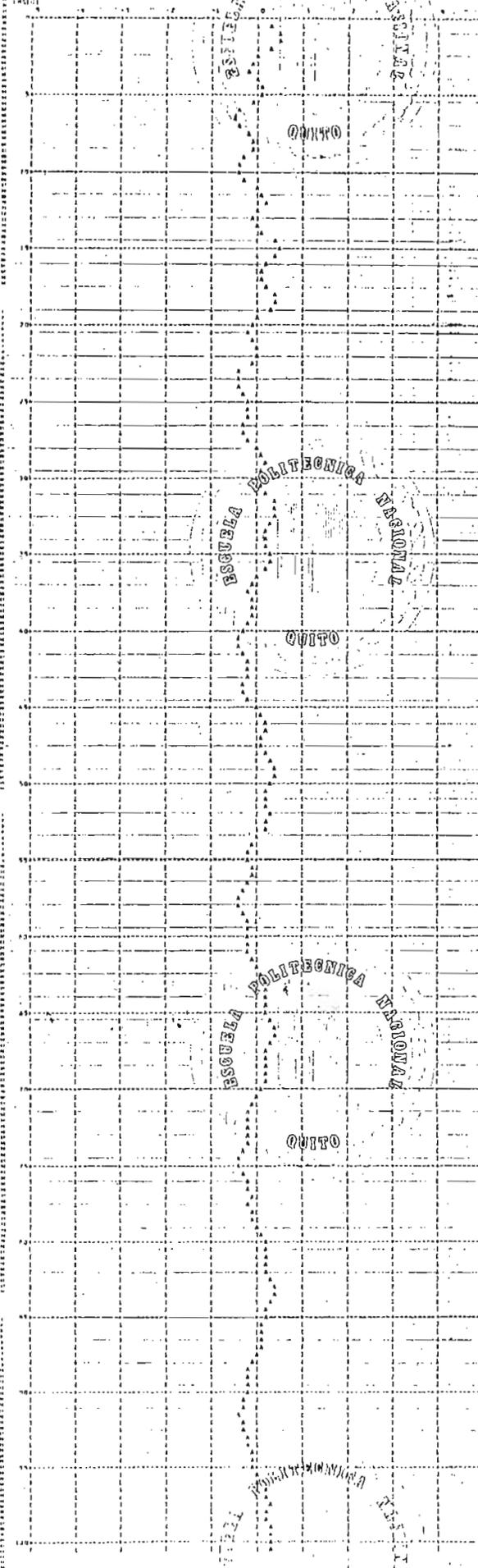
QUITO

ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

Vertical column of alphanumeric codes on the right side of the grid, including values like 0.24000000, 0.24000000, 0.24000000, etc.

Vertical column of alphanumeric codes on the far right side of the grid, including values like 0.24000000, 0.24000000, 0.24000000, etc.

Vertical column of alphanumeric codes on the left side of the grid, including values like 0.24000000, 0.24000000, 0.24000000, etc.



4260

COMPLETAR EN LA PÁGINA 2 DEL DISEÑO





## BIBLIOGRAFIA

1. R. Uram, R. W. Miller, "Mathematical analysis and solution of transmission - line transients, I - Theory", IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS - 83, Nov. 1964, pp 1116, 1123.
2. R. Uram, R. W. Miller, "Mathematical analysis and solution of transmission - line transients, II - Applications", IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol. PAS - 83, Nov 1964, pp 1123 - 1137.
3. Leser Mauricio, "Cálculo digital de los voltajes transitorios al energizar líneas de transmisión trifásicas sin carga", Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Quito, 1982.
4. García Francisco, "Cálculo digital de voltajes y corrientes transitorios", Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Quito, 1978.
5. Orbe Patricio, "Teoría de las líneas multiconductoras", Seminario de Líneas de Transmisión, Escuela Politécnica Nacional, Quito, 1985,
6. Cress P. H., DirRsen P. H., Graham J. W., "Fortran IV con WATFOR y WATFIN", Prentice Hall, España, 1975.

7. P. M. DeRusso, R. J. Roy, CH. Close, "State Variables for Engineers", New York, 1965.
8. Hall y Knight, "Algebra Superior", Unión Tipográfica Hispano Americana, México, 1972.
9. Leithold Louis, "El Cálculo con Geometría Analítica", Harper & Row Latinoamericana, México 1972.
10. Spiegel M., "Transformadas de Laplace", Mc Graw Hill, Bogotá , 1970.
11. Raven, Francis H., "Mathematics of Engineering Systems", Mc Graw Hill Book Company, 1966.
12. M. J. Battisson, S. J. Day, N. Mullineux, K. C. Parton, J. R. Reed, "Calculation of switching phenomena in power systems", PROC. IEE, Vol. 114, No. 4, Abril 1967, pp 478 - 486.
13. McElroy, A. J. and Porter, R. M., "Digital Computer calculation of transients in electrical networks", IEEE, Transactions on Power Apparatus and systems, Vol PAS - 82, Apr. 1963, pp 88-96.
14. Hedman, D.E., "Attenuation of traveling waves on three - phase Lines", IEEE, Transactions on Power Apparatus and Systems, Paper 70 TP 544 - PWR, May 1971, pp 1312 - 1319.

15. Swift, G. W., "The spectra of fault - induced transients", IEEE, Transactions on Power Apparatus and systems", Vol. PAS 98, No.3 May/Jun 1979, pp. 940 - 947.
16. Orbe, P., "Analysis of digital methods to calculate voltages and currents transients", Thesis of Master of Science, The Victoria University og Manchester, England, July 1976,
17. Vass Helena, "Apuntes de circuitos eléctricos II", Escuela Politécnica Nacional, Quito, 1977.