

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE INGENIERÍA MECÁNICA**

**SÍNTESIS CINEMÁTICA DE ORDEN SUPERIOR Y  
DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA TRES Y CUATRO  
POSICIONES PRESCRITAS DE MECANISMOS DE CUATRO  
BARRAS - DISEÑO Y SIMULACIÓN DE APLICACIONES  
INDUSTRIALES**

**TESIS PREVIA A LA OBTENCIÓN DEL GRADO DE MÁSTER EN DISEÑO,  
PRODUCCIÓN Y AUTOMATIZACIÓN INDUSTRIAL**

**JAIME FERNANDO ECHEVERRÍA YÁNEZ**

**[jfecheverria@espe.edu.ec](mailto:jfecheverria@espe.edu.ec)**

**DIRECTOR: ING. JORGE HUMBERTO ESCOBAR LAFUENTE**

**[jorge.escobar@epn.edu.ec](mailto:jorge.escobar@epn.edu.ec)**

**Quito, Septiembre 2014**

## **DECLARACIÓN**

Yo, Jaime Fernando Echeverría Yáñez, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente

---

Jaime Fernando Echeverría Yáñez

## CERTIFICACIÓN

Certificamos que el presente trabajo fue desarrollado en su totalidad por el señor JAIME FERNANDO ECHEVERRÍA YÁNEZ bajo nuestra supervisión.

---

Ing. Jorge Escobar L.  
Director

---

Ing. Luis Soto A.  
Colaborador

## **DEDICATORIA**

A mi padres, que desde el cielo, me han guiado en esta ardua tarea y que mientras estuvieron junto a mi supieron ser un faro en mi camino.

A mi hermana, que en el diario trajinar de este proyecto ha sido mi apoyo.

## **AGRADECIMIENTOS**

Al Ing. Jorge Escobar L., por su paciencia, acertada dirección y sus consejos que fueron de muchísima ayuda para construir este trabajo.

Al Ing. Luis Soto A., por su invaluable e inestimable colaboración a esta tesis.

## ÍNDICE DE CONTENIDOS

<b>RESUMEN.....</b>	<b>xvi</b>
<b>PRESENTACIÓN.....</b>	<b>xviii</b>
<b>CAPÍTULO 1 - <i>FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE MECANISMOS Y MÁQUINAS</i>.....</b>	<b>1</b>
1.1 CONCEPTOS BÁSICOS.....	1
1.2 MECANISMO DE CUATRO BARRAS.....	4
1.3 INVERSIÓN CINEMÁTICA.....	7
1.4 MECANISMO DE CUATRO BARRAS - ANÁLISIS DE POSICIÓN.....	8
1.5 MECANISMO DE CUATRO BARRAS - ANÁLISIS DE VELOCIDAD Y ACCELERACIÓN.....	19
1.6 INTRODUCCIÓN A LA SÍNTESIS DE MECANISMOS.....	26
1.6.1 Método de puntos de precisión con el uso de números complejos - Formato de la diada estándar.....	30
1.6.2 Defectos de rama y orden.....	33
1.6.2.1 Defecto de rama.....	34
1.6.2.2 Defecto de orden.....	35
1.7 ÁNGULO DE TRANSMISIÓN.....	35
1.8 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO.....	40
<b>CAPÍTULO 2 - <i>SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS PARA TRES POSICIONES PRESCRITAS Y SÍNTESIS DE ORDEN SUPERIOR</i>.....</b>	<b>42</b>
2.1 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA TRES POSICIONES PRESCRITAS SIN ESPECIFICACIÓN DE APOYOS FIJOS.....	42
2.1.1 Método gráfico.....	42
2.1.2 Método analítico.....	47

2.2 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA TRES POSICIONES PRESCRITAS MEDIANTE LA ESPECIFICACIÓN DE APOYOS FIJOS.....	58
2.2.1 Método gráfico.....	58
2.2.2 Método analítico.....	61
2.3 CÍRCULOS DE LOS PUNTOS CENTRALES Y PUNTOS CIRCULARES.....	69
2.4 SÍNTESIS DE ORDEN SUPERIOR.....	79
2.4.1 Síntesis de orden superior: Generación de función.....	80
2.5 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO.....	89

### **CAPÍTULO 3 - SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS PARA CUATRO POSICIONES PRESCRITAS.....91**

3.1 CUATRO POSICIONES DE UN ESLABÓN MÓVIL - ANÁLISIS GEOMÉTRICO.....	91
3.2 CURVAS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR - SÍNTESIS GRÁFICA DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA CUATRO POSICIONES PRESCRITAS MEDIANTE EL USO DE CURVAS DE BURMESTER.....	96
3.3 SÍNTESIS ANALÍTICA DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA CUATRO POSICIONES PRESCRITAS.....	112
3.4 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO.....	122

### **CAPÍTULO 4 - IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DE LA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS PARA TRES Y CUATRO POSICIONES PRESCRITAS.....124**

4.1 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GUIADO DE CUERPO EN TRES POSICIONES DADAS(3P) SIN PIVOTES FIJOS PRESCRITOS.....	124
4.2 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO CON TRES POSICIONES DADAS Y PIVOTES FIJOS PRESCRITOS.....	131

<b>4.3 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO CON TRES POSICIONES DADAS MEDIANTE EL EMPLEO DE CÍRCULOS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR.....</b>	<b>138</b>
<b>4.4 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO CON CUATRO POSICIONES DADAS(4P) MEDIANTE EL EMPLEO DE CURVAS DE BURMESTER.....</b>	<b>147</b>
<b>4.5 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO.....</b>	<b>158</b>

## **CAPÍTULO 5 - DISEÑO Y SIMULACIÓN DE MECANISMOS DE CUATRO BARRAS DE APLICACIÓN INDUSTRIAL.....160**

<b>5.1 MECANISMO PARA TRANSPORTAR Y DEPOSITAR MATERIAL EN UN PROCESO INDUSTRIAL.....</b>	<b>160</b>
<b>5.1.1 Planteamiento del problema.....</b>	<b>160</b>
<b>5.1.2 Síntesis del mecanismo con tres posiciones dadas y ubicación de pivotes fijos y móviles mediante el empleo de círculos de punto central y punto circular.....</b>	<b>161</b>
<b>5.2 MECANISMO PICK AND PLACE(COGER Y COLOCAR) PARA ENSAMBLAJE DE PIEZAS EN PROCESOS DE MONTAJE.....</b>	<b>168</b>
<b>5.2.1 Planteamiento del problema.....</b>	<b>168</b>
<b>5.2.2 Síntesis del mecanismo con tres posiciones dadas y ubicación de pivotes fijos y móviles mediante el empleo de círculos de punto central y punto circular.....</b>	<b>169</b>
<b>5.3 MECANISMO DE ELEVACIÓN PARA UNA MINICARGADORA FRONTAL(SKID STEER LOADERS).....</b>	<b>174</b>
<b>5.3.1 Planteamiento del problema.....</b>	<b>174</b>
<b>5.3.2 Síntesis del mecanismo con cuatro posiciones dadas y ubicación de pivotes fijos y móviles mediante el empleo de curvas de Burmester.....</b>	<b>175</b>
<b>5.4 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO.....</b>	<b>187</b>

## **CAPÍTULO 6 - CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....189**

<b>6.1 CONCLUSIONES.....</b>	<b>189</b>
<b>6.2 RECOMENDACIONES.....</b>	<b>191</b>
<b>ANEXOS.....</b>	<b>192</b>

## ÍNDICE DE FIGURAS Y TABLAS

Figura 1.2-1: Mecanismo real y su diagrama cinemático.....	3
Figura 1.2-2: Mecanismo de cuatro barras.....	4
Figura 1.2-3: Categorías de mecanismos de cuatro barras.....	7
Figura 1.3-1: Inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras.....	8
Figura 1.4-1: Mecanismo de cuatro barras - Representación vectorial para el análisis de posición.....	9
Figura 1.4-2: Circuitos de ensamble para un mecanismo manivela-balancín.....	12
Figura 1.4-3: Mecanismo para análisis de posición en el caso 1.....	13
Figura 1.4-4: Simulación en Artas SAM para el mecanismo del caso 1.....	14
Figura 1.4-5: Primera inversión geométrica(línea continua); segunda inversión geométrica(línea entrecortada).....	15
Figura 1.4-6: Gráfico de análisis de posición para el caso 1 con MathCAD.....	18
Figura 1.4-7: Gráfico de análisis de posición para el caso 1 obtenido con Artas SAM.....	19
Figura 1.5-1: Mecanismo de cuatro barras - Representación vectorial para análisis de velocidad y aceleración.....	20
Figura 1.5-2: Curvas de análisis de velocidad para el caso 2.....	24
Figura 1.5-3: Curvas de análisis de aceleración para el caso 2.....	25
Figura 1.5-4: Curvas de análisis de velocidad para el caso 2 generadas con Artas SAM.....	25
Figura 1.5-5: Curvas de análisis de aceleración para el caso 2 generadas con Artas SAM.....	26
Tabla 1.6-1: Mecanismos solución para 2, 3 y 4 eslabones con 1 grado de libertad.....	27
Figura 1.6-1: Algunas soluciones para la síntesis de tipo de la tabla 1.6-1.....	28
Figura 1.6.1-1: Representación vectorial mediante números complejos de un eslabón en rotación pura.....	30
Figura 1.6.1-2: Diada estándar con pares rotatorios, uno fijo o a tierra y otro móvil.....	32
Figura 1.6.2.1-1: Defecto de rama en mecanismo de cuatro barras sintetizado...34	34
Figura 1.7-1: Ángulo de transmisión de un mecanismo de cuatro barras.....	36

Figura 1.7-2: Valores mínimo y máximo del ángulo de transmisión de un mecanismo de cuatro barras.....	36
Figura 1.7-3: Gráfica del ángulo de transmisión vs el ángulo de entrada para el caso 1.....	39
Figura 1.7-4: Mecanismo repetido de la figura 1.6.2.1-1.....	39
Figura 2.1.1-1: Posiciones del acoplador.....	43
Figura 2.1.1-2: Paso 1.....	43
Figura 2.1.1-3: Paso 2.....	44
Figura 2.1.1-4: Paso 3.....	44
Figura 2.1.1-5: Eslabón DE entre las posiciones 1 y 2.....	45
Figura 2.1.1-6: Paso 1.....	46
Figura 2.1.1-7: Paso 2.....	46
Figura 2.1.1-8: Paso 3.....	46
Figura 2.1.2-1: a) Mecanismo de cuatro barras con su nomenclatura para los ángulos de giro de sus eslabones, b) Representación vectorial del mecanismo...	47
Tabla 2.1.2-1: Estrategia para la solución de las ecuaciones de síntesis de generación de movimiento.....	49
Figura 2.1-1: Posiciones para síntesis del mecanismo del caso 1.....	50
Figura 2.1-2: Síntesis gráfica del caso 1.....	51
Figura 2.1-3: Dimensiones del mecanismo sintetizado en el caso 1.....	52
Figura 2.1-4: Posiciones extremas del mecanismo sintetizado en el caso 1.....	52
Figura 2.1-5: Simulación para el caso 1 en Artas SAM.....	53
Figura 2.1-6: Diada motriz para el mecanismo sintetizado en el caso 1.....	54
Figura 2.1-7: Simulación en Artas SAM para el mecanismo con diada motriz.....	55
Figura 2.1-8: Variables de diseño y de elección libre para el caso 1.....	56
Figura 2.2.1-1: Paso 1.....	58
Figura 2.2.1-2: Paso 2.....	59
Figura 2.2.1-3 Paso 3.....	59
Figura 2.2.1-4: Paso 4.....	60
Figura 2.2.1-5: Paso 5.....	60
Figura 2.2.1-6: Paso 6.....	61
Figura 2.2.2-1: Diada estándar con tres posiciones prescritas para síntesis con especificación de apoyos fijos.....	62

Figura 2.2.2-2: Solución gráfica para $\beta_{12}$ y $\beta_{13}$ .....	64
Figura 2.2.2-3: Posiciones para la síntesis con pivotes fijos dados del caso 2.....	65
Figura 2.2.2-4: Esquema para las diadas del caso 2.....	66
Figura 2.2.2-5: Vectores posición para:(a) el pivote fijo $O_1$ , (b) el pivote fijo $O_2$ ....	66
Figura 2.2.2-6: Mecanismo sintetizado para el caso 2.....	68
Figura 2.2.2-7: Mecanismo con sus diada impulsora para el caso 2.....	68
Figura 2.3-1: Esquema vectorial para definir los círculos con punto central y punto circular en una diada.....	69
Figura 2.3-2: Rotación de un eslabón entre las posiciones $i$ y $j$ , respecto del polo $P_{ij}$ .....	73
Figura 2.3-3: Polos $P_{ij}$ , $P_{jk}$ , $P_{ik}$ y sus respectivos polos imagen $P'_{ij}$ , $P'_{jk}$ y $P'_{ik}$ .....	74
Tabla 2.3-1: Rangos de solución para el caso 4.....	76
Figura 2.4.1-1: Mecanismo de cuatro barras en posición inicial y posición $j$ . Representación vectorial.....	80
Tabla 2.4.1-1: Estrategia para la solución de las ecuaciones de síntesis de generación de función.....	81
Figura 2.4.1-2: Posiciones angulares para síntesis del caso 5.....	82
Figura 2.4.1-3: Simulación en Artas SAM para el mecanismo diseñado en el caso 5.....	84
Tabla 2.4.1-2: Estrategia para la solución de las ecuaciones de síntesis de orden superior para la generación de función en la $j$ -ésima posición.....	85
Figura 3.1-1: Cuatro posiciones de un eslabón móvil.....	91
Figura 3.1-2: Triángulos de polos correspondientes a las cuatro posiciones del eslabón móvil.....	92
Figura 3.1-3: Círculo que contiene a $C_1$ , $C_2$ y $C_3$ .....	93
Figura 3.1-4: Líneas entre polos opuestos.....	94
Figura 3.1-5: Diagonales(línea continua gruesa) y lados(línea entrecortada) de dos cuadriláteros.....	95
Figura 3.1-6: Cuadriláteros de polos opuestos correspondientes a los polos de la figura 3.1-4.....	95
Figura 3.1-7: Construcción de los puntos centrales $C'_0$ y $C''_0$ .....	97
Figura 3.1-8: Construcción de los puntos circulares $C'_1$ y $C''_1$ .....	98

Figura 3.1-9: Cuatro posiciones de un eslabón acoplador para diseño de un mecanismo.....	100
Figura 3.1-10: Polos para las posiciones del eslabón acoplador del caso 1.....	100
Figura 3.1-11: Cuadrilátero de polos opuestos para el caso 1.....	101
Figura 3.1-12: Curva de puntos centrales para el caso 1.....	101
Figura 3.1-13: Polos y polos imagen para las posiciones del acoplador en el caso 1.....	102
Figura 3.1-14: Cuadrilátero de polos opuestos para los polos de la fig. 3.1-13...	102
Figura 3.1-15: Curva de puntos circulares para el caso 1.....	103
Figura 3.1-16: Curvas de Burmester para el caso 1.....	104
Figura 3.1-17: Mecanismo sintetizado gráficamente para el caso 1.....	105
Figura 3.1-18: Posiciones del acoplador para diseño del mecanismo del caso 2.....	106
Figura 3.1-19: Cuadriláteros de polos opuestos para el caso 2.....	107
Figura 3.1-20: Curvas de Burmester para el caso 2.....	108
Figura 3.1-21: Curvas de Burmester, posiciones del acoplador y base para el caso 2.....	109
Figura 3.1-22: Elección de pivotes móviles y fijos para el caso 2.....	110
Figura 3.1-23: Mecanismo sintetizado (a) mostrando las curvas de Burmester, y (b) sin mostrarlas.....	111
Figura 3.3-1: Solución geométrica de la ecuación de compatibilidad.....	114
Figura 3.3-2: Posiciones del eslabón acoplador para síntesis por curvas de Burmester.....	116
Figura 4.1-1: Dimensiones geométricas obtenidas del diseño.....	124
Figura 4.1-2: Posiciones del acoplador para el caso 1.....	128
Figura 4.1-3: Resolución gráfica para la obtención de valores iniciales para $\beta_1$ , $\beta_2$ , $\beta_{1_}$ , $\beta_{2_}$ .....	129
Figura 4.2-1: Dimensiones geométricas obtenidas del diseño.....	132
Figura 4.2-2: Posiciones del acoplador para el caso 2.....	136
Figura 4.3-1: Posiciones del acoplador para el caso 3.....	143
Figura 4.4-1: Mecanismos solución por curvas de Burmester.....	150
Figura 4.4-2: Posiciones del acoplador para el caso 4.....	154
Figura 5.1-1: Transporte y vaciado de material en un proceso industrial.....	160

Figura 5.1-2: Datos iniciales de diseño.....	161
Figura 5.1-3: Círculos de punto central y punto circular primera alternativa.....	162
Figura 5.1-4: Zona de soluciones de los círculos de punto central y punto circular para la primera alternativa.....	162
Figura 5.1-5: Simulación de la primera alternativa de solución en Artas SAM....	164
Figura 5.1-6: Círculos de punto central y circular para la primera diada.....	165
Figura 5.1-7: Círculos de punto central y circular para la segunda diada.....	165
Figura 5.1-8: Simulación de la segunda alternativa de solución en Artas SAM...	167
Figura 5.2-1: Proceso pick and place en un montaje industrial.....	168
Figura 5.2-2: Datos iniciales de diseño.....	169
Figura 5.2-3: Círculos de punto central y circular para la primera diada.....	170
Figura 5.2-4: Círculos de punto central y circular para la segunda diada.....	170
Figura 5.2-5: Círculos reducidos de punto central y circular para la primera diada.....	171
Figura 5.2-6: Círculos reducidos de punto central y circular para la segunda diada.....	171
Figura 5.2-7: Simulación del mecanismo pick and place en Artas SAM.....	174
Figura 5.3-1: Elevación y descarga de material en un minicargador frontal.....	175
Figura 5.3-2: Minicargadora frontal con mecanismo de elevación radial.....	176
Figura 5.3-3: Minicargadora frontal con mecanismo de elevación vertical.....	176
Figura 5.3-4: Dimensiones generales de una minicargadora proporcionadas por un fabricante.....	177
Figuras 5.3-5: Áreas posibles de pivotes móviles y fijos para la información del fabricante.....	177
Figura 5.3-6: Datos de diseño para la trayectoria de elevación con las cuatro posiciones prescritas para el cucharón del mecanismo - primer diseño.....	178
Figura 5.3-7: Curvas de Burmester para la primera solución de la minicargadora - primer diseño.....	178
Figura 5.3-8: Curvas de Burmester para la segunda solución de la minicargadora - primer diseño.....	179
Figura 5.3-9: Mecanismo sintetizado para la minicargadora - primer diseño.....	180
Figura 5.3-10: Simulación en Artas SAM del primer diseño de la minicargadora.....	182

Figura 5.3-11: Datos de diseño para la trayectoria de elevación con las cuatro posiciones prescritas para el cucharón del mecanismo - segundo diseño.....	182
Figura 5.3-12: Curvas de Burmester para la primera solución de la minicargadora - segundo diseño.....	183
Figura 5.3-13: Curvas de Burmester para la segunda solución de la minicargadora - segundo diseño.....	183
Figura 5.3-14: Mecanismo sintetizado para la minicargadora - segundo diseño.....	184
Figura 5.3-15: Simulación en Artas SAM del segundo diseño de la minicargadora.....	186
Figura A-1: Mathcad con distintas barras de herramientas en pantalla.....	192
Figura A-2: Cálculos sencillos en Mathcad.....	193
Figura A-3: Definición y visualización de elementos de una matriz en Mathcad.....	198
Figura A-4: Extracción de una columna de una matriz.....	198
Figura A-5: Arreglos que comienzan en el elemento 1 en lugar del elemento 0.....	198
Figura A-6: Visualización de arreglos.....	199
Figura A-7: Creación de un gráfico de un vector.....	200
Figura A-8: Creación de gráfico de dos vectores.....	200
Figura A-9: Representación gráfica de vectores de una tabla de datos.....	201
Figura A-10: Lectura de coordenadas de un gráfico.....	201
Figura C-1: Mecanismo de cuatro barras.....	211
Figura C-2: Posiciones del eslabonamiento debido a un giro del motor.....	211
Figura C-3: Representación vectorial.....	212
Figura C-4: Forma polar de un número complejo.....	212
Figura C-5: Solución geométrica de la ecuación de compatibilidad.....	215
Figura C-6: Representación vectorial.....	217
Figura C-7: Condiciones del mecanismo de elevación de un volquete - Representación esquemática de variables.....	220

## ÍNDICE DE ANEXOS

A. MANUAL ESENCIAL DE USO DE MATHCAD.....	192
B. MANUAL ESENCIAL DE USO DE ARTAS SAM 6.....	202
C. SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIÓN CON CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN.....	211
C.1 Pivotes fijos no especificados.....	211
C.2 Pivotes fijos especificados.....	217
C.3 Caso de aplicación.....	219
C.4 Conclusiones.....	224

## RESUMEN

El presente proyecto de tesis analiza la temática de la síntesis o diseño de mecanismos de cuatro barras para tres y cuatros posiciones dadas de su eslabón acoplador para el caso de generación de movimiento, es decir, cuando el acoplador ocupa tres o cuatro posiciones determinadas en el plano.

Con el objeto de embarcarse en esta temática se utiliza la metodología de los puntos de precisión con la ayuda de números complejos técnica que es muy útil en tanto y en cuanto se la puede implementar computacionalmente para lograr resultados eficientes y rápidos dentro de lo posible pues la síntesis por sí misma es una tarea muy compleja dado la cantidad de variables que se manejan.

El capítulo 1, engloba una descripción de la terminología y conceptos fundamentales para entender la teoría de mecanismos y máquinas y por ende la temática de la síntesis. Una vez revisados dichos fundamentos se hace un recorrido por el análisis cinemáticos tarea que está íntimamente ligada a la síntesis, para finalmente hacer una introducción a la síntesis de mecanismos a través de la puerta de entrada de la misma que es el estudio de la diada estándar y su matemática. La síntesis puede conllevar en sus cálculos la presencia de errores de síntesis llamados defectos, éstos son analizados sucintamente también en este capítulo.

El capítulo 2 trata la síntesis de guiado de cuerpo para tres posiciones prescritas del mecanismo de cuatro barras, utilizando las tres técnicas posibles: sin prescripción de apoyos fijos, con apoyos fijos dados y mediante el uso de la metodología de círculos de punto central y punto circular. Para complementar esta temática se trata de manera introductoria la síntesis de orden superior en el caso de generación de función. En todos los casos se analiza tanto el método gráfico como el analítico, haciéndose hincapié en este último por su utilidad computacional.

El capítulo 3 enfoca el asunto de la síntesis de generación de movimiento cuando se conocen cuatro posiciones del eslabón acoplador en el mecanismo de cuatro barras empleando tanto el método gráfico como el analítico, éste último desemboca en el análisis de las llamadas curvas de Burmester, que es una metodología de diseño de mecanismos muy especializada.

El capítulo 4, toma las metodologías de síntesis de generación de movimiento analizadas en los capítulos 2 y 3 y a partir de ellas se generan sendas implementaciones computacionales con MathCAD 15, con el objetivo de hacer su uso eficiente y rápido en la solución de problemas de diseño de mecanismos de cuatro barras que se presenten en los problemas industriales.

El capítulo 5, presenta tres casos de aplicación industrial y a través de ellos se ejemplifica el uso que de la síntesis de mecanismos de cuatro barras se puede efectuar en el ámbito industrial. Los casos una vez sintetizados son simulados con la ayuda del software de simulación de mecanismos Artas SAM.

Finalmente, el capítulo 6 presenta conclusiones y recomendaciones sobre las metodologías estudiadas.

En los anexos se presentan manuales muy básicos de MathCAD 15 y Artas SAM 6.1, así como un desarrollo adicional de la síntesis del mecanismos de cuatro barras con cuatro posiciones prescritas para generación de función.

## PRESENTACIÓN

Normalmente cuando se realiza el diseño de detalle de piezas mecánicas en pregrado el estudiante se enfoca específicamente en mecanismos de pares superiores, a saber, levas, engranes, bandas y otros dado que su metodología de diseño está muy desarrollada e incluso normalizada; sin embargo muchas aplicaciones industriales no requieren únicamente del diseño de mecanismos de pares superiores sino del diseño de eslabonamientos o mecanismos de pares inferiores, cuyo desarrollo en la Universidad ecuatoriana y más aún a nivel industrial es muy escasa por su complejidad y esencialmente porque en la escuelas de ingeniería prácticamente son desconocidas aún a nivel de posgrado.

El presente trabajo pretende echar luz sobre el asunto, aún más cuando la misma temática a nivel 3D(diseño robótico) es una de las ramas de la ingeniería hoy por hoy en auge.

La presente tesis se enfoca en el mecanismo de cuatro barras, dado que como se menciona en el capítulo 1, por su simplicidad es uno de los más utilizados, de fácil mantenimiento y eficiente, no obstante las metodologías abordadas en esta tesis se pueden generalizar para mecanismos de seis barras, específicamente las cadenas de Watt y Stephenson que poseen muchísimas aplicaciones industriales, y para mecanismos aún más complejos.

Acorde al desarrollo industrial que se quiere generar en el país cabe mencionar finalmente que el camino de la síntesis de mecanismos y específicamente de eslabonamientos fue uno de los pilares fundamentales seguidos por las grandes potencias industriales, y aún lo son, en su trayecto hacia la industrialización avanzada y por ende será uno de los retos que tendrá que afrontar la nación si quiere

modificar su matriz productiva para generar una sociedad industrial autónoma y sostenible.

# CAPÍTULO 1

## FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE MECANISMOS Y MÁQUINAS

El presente capítulo expondrá los conceptos básicos de la teoría de mecanismos y máquinas, así como un estudio cinemático del mecanismo de cuatro barras y una introducción a la síntesis de mecanismos.

### 1.1 CONCEPTOS BÁSICOS

Es importante en primera instancia definir algunos términos que van a ser de uso frecuente a futuro, he aquí los más esenciales.

**Máquina**, es un dispositivo capaz de transformar y transmitir energía a través de sus componentes con el objetivo de generar una tarea específica, el ejemplo más común en nuestra vida cotidiana es el automóvil, máquina capaz de transformar la energía de la combustión en el motor para generar el movimiento del mismo, existiendo en esencia la conversión de energía química a mecánica.

**Mecanismo**, es una unión de elementos rígidos, denominados usualmente eslabones, capaces de transformar un tipo de movimiento en otro, con la generación y transmisión de fuerzas y momentos en el proceso. Usualmente una máquina es la conexión de varios mecanismos, como en el caso del automóvil, sin embargo en el caso de las máquinas más simples éstas se conforman de un solo mecanismo y en tal situación los términos máquina y mecanismo se pueden utilizar como sinónimos.

El funcionamiento de un mecanismo produce y transmite movimientos y cargas , fuerzas y momentos, por lo que el análisis del mismo requiere del estudio de su cinemática y su dinámica. La cinemática de los mecanismos es el estudio del movimiento de los mismos sin importar los factores que lo producen, mientras que la dinámica consiste en el análisis de las cargas a las que se ve sometido un mecanismo.

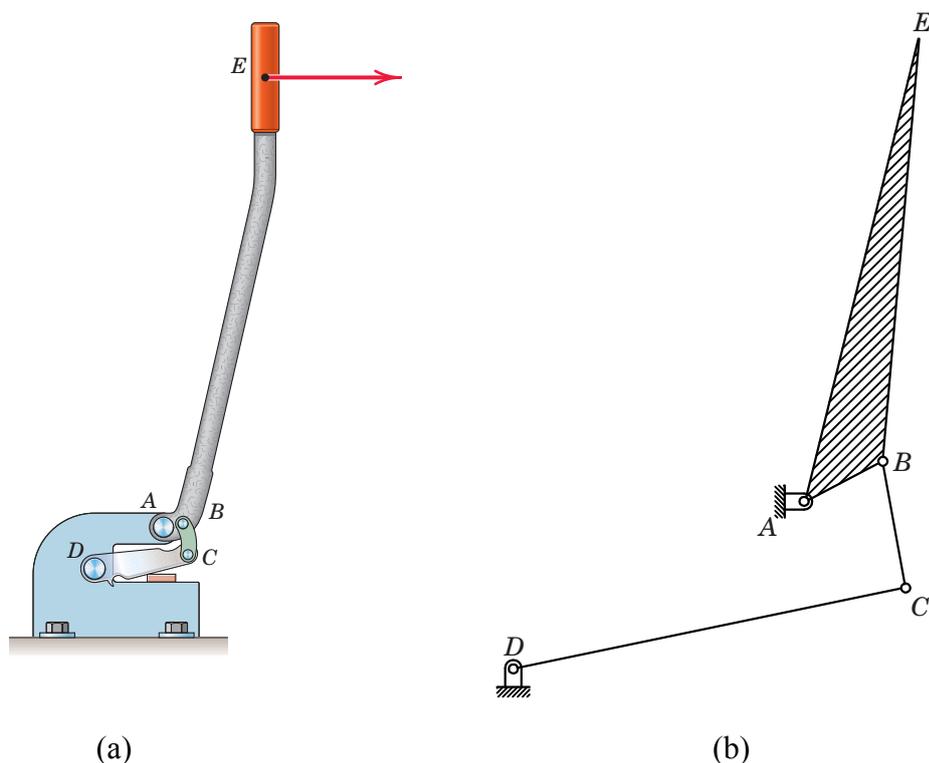
Un **eslabón** de un mecanismo es un cuerpo rígido, es decir indeformable, que en el caso de lazos cerrados posee por lo menos dos nodos que son los puntos de conexión con otros eslabones. Un eslabón que posee dos nodos se denomina binario, aquel que tiene tres nodos ternario y el que posee cuatro nodos cuaternario.

Una **cadena cinemática**, llamada simplemente cadena, es el conjunto de eslabones unidos entre sí; sin embargo para que ésta pueda ser considerada como mecanismo es necesario que uno de los eslabones se halle fijo y sirva como referencia de movimiento a los demás. Éste eslabón fijo de un mecanismo se conoce con el nombre de **bancada** o **bastidor**. Un mecanismo adicionalmente puede tener partes flexibles, por ejemplo resortes, como elementos del mismo, sin embargo estos no son catalogados como eslabones. Además las cadenas cinemáticas se pueden clasificar como cadenas **cerradas** o **abiertas**, las primeras son aquellas cuyos eslabones conforman uno o más contornos cerrados, es decir todos los eslabones tienen como mínimo dos conexiones con otros eslabones en el mecanismo; mientras que una cadena abierta tiene al menos un contorno no cerrado en otras palabras hay por lo menos un eslabón que se conecta solo por un nodo a otro u otros eslabones.

**Par cinemático o junta cinemática**, es la unión o conexión entre dos eslabones de un mecanismo que permite su movimiento relativo. En general, los pares cinemáticos se subdividen en **pares cinemáticos inferiores** y **pares cinemáticos superiores**. Los primeros son aquellos en los cuales la unión entre eslabones se realiza mediante un elemento que tiene contacto superficial con los mismos, mientras que en los segundos la conexión es directa entre eslabones y esta es lineal o puntual. En un eslabonamiento plano, por ejemplo el de cuatro barras, los pares cinemáticos inferiores son la forma de conexión entre elementos utilizada y en esencia se consideran los pares cinemáticos **rotatorios** o **de revoluta** y los pares cinemáticos **prismáticos**. Los rotatorios permiten un giro relativo entre los elementos conectados mientras que los prismáticos permiten una traslación entre los eslabones. Usualmente cualquier eslabón totalmente libre en el plano tiene tres grados de libertad, es decir puede moverse en direcciones x e y así como rotar

con respecto al eje  $z$ ; pero al unirse dos eslabones mediante un par rotatorio le queda restringido al par de eslabones las traslaciones como movimiento relativo y le está permitido únicamente la rotación relativa por ello se dice entonces que un par giratorio o de revolución tiene un grado de libertad; situación análoga le sucede a un par prismático al que le han sido conculcadas una traslación y un giro permitiéndole solo un desplazamiento relativo en una sola dirección definida, por lo que también posee un grado de libertad. En resumen los pares rotatorios y prismáticos se clasifican como pares de un grado de libertad.

**Diagrama cinemático**, se define como un esquema simplificado de un mecanismo real en el que solamente se representan las dimensiones significativas que influyen en la cinemática del mecanismo, pero cada eslabón es un plano sin límites, como se ejemplifica en la figura 1.2-1:



**Fig. 1.2-1:** (a) Mecanismo real, (b) Diagrama cinemático

**Movilidad.** Un concepto fundamental al tratar de analizar o sintetizar mecanismos es el de *movilidad*, definiéndose como el número de coordenadas independientes

que debe tener un mecanismo para que puedan definirse en cualquier instante sus variables cinemáticas, posición, velocidad y aceleración. En forma general, la ecuación de Gruebler para mecanismos planos, establece la movilidad  $m$  en base a la expresión:

$$m = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2 \quad [1.1-1]$$

donde,

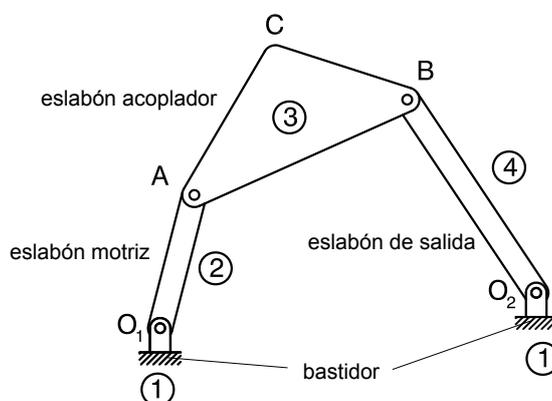
$n$  = número de eslabones del mecanismo

$p_1$  = número de pares cinemáticos de un grado de libertad

$p_2$  = número de pares cinemáticos de dos grados de libertad

## 1.2 MECANISMO DE CUATRO BARRAS

Es el mecanismo de lazo cerrado más simple que existe, pero su simplicidad al contrario de lo que se piensa lo hace el más útil y versátil de los mecanismos pues no requiere de demasiado mantenimiento, es sencillo de construir, barato y por ello el más empleado. Este eslabonamiento tiene tres elementos móviles, un bastidor y cuatro juntas rotatorias de pivote o de pasador, según la fórmula de Gruebler (ec. [1.1-1]) le confiere a este mecanismo una movilidad de 1, es decir solo es necesario darle movimiento a uno de los eslabones móviles para poder definir el movimiento de los otros dos y por ende de todo el mecanismo. Un esquema del mecanismo de cuatro barras se muestra en la figura 1.2-2:



**Fig. 1.2-2:** Mecanismo de cuatro barras

El eslabón al que se le imparte movimiento se denomina eslabón **motriz, de entrada** o **conductor**; el otro eslabón unido al bastidor se conoce como eslabón **de salida, seguidor** o **conducido** mientras que el eslabón de pivotes móviles que “acopla” los eslabones de entrada y salida se llama eslabón **acoplador, flotante, transmisor o biela**.

Como es sencillo de observar el eslabón motriz y el de salida al tener pivote a tierra o fijo están obligados a generar un movimiento de rotación pura mientras que el eslabón acoplador posee un movimiento más complejo de rotación y traslación combinados o movimiento plano general. Un punto cualquiera del eslabón acoplador llamado **punto trazador de trayectoria** genera una curva denominada **curva acopladora** que es de sexto orden<sup>1</sup>.

En un mecanismo de cuatro barras sus eslabones podrían dar un giro completo o simplemente oscilar, ello depende de las dimensiones de los eslabones. El criterio de Grashof confirma este hecho afirmando que **“en un mecanismo plano de cuatro barras para que al menos un eslabón del mecanismo dé un giro completo es necesario que la suma de los eslabones más corto y más largo no pueda ser mayor que la suma de los dos eslabones restantes”**, en base a esta afirmación se puede categorizar de forma general a los mecanismos de cuatro barras como **mecanismos Grashof**, aquellos que cumplen con el criterio anterior y **mecanismos no-Grashof** a los que no lo hacen.

Supóngase que las longitudes de los eslabones de un mecanismo de cuatro barras se nominan como:  $s$  al eslabón más corto,  $l$  al más largo,  $p$  y  $q$  a los eslabones restantes, entonces los mecanismos Grashof, se pueden dividir en cinco categorías:

Si  $s + l < p + q$ :

---

<sup>1</sup>Wunderlich(1963) dedujo que el máximo orden de una curva de acoplador,  $q$ , para un mecanismo con  $n$  eslabones conectados con juntas de revolución únicamente, esta dado por:  $q = 3 \left( 2^{\frac{n}{2}-1} \right)$

**Mecanismo manivela-balancín**, cuando el eslabón más corto lo constituye el eslabón de entrada pivotado al bastidor, mientras que éste es uno de los eslabones adyacentes; en este mecanismo el eslabón de entrada da un giro completo mientras que el de salida ejecuta una oscilación.

**Mecanismo doble manivela o eslabonamiento de arrastre**, cuando el eslabón más corto es el bastidor; en este caso tanto el eslabón de entrada como el de salida realizan giro completo.

**Mecanismo doble balancín**, cuando el eslabón más corto es el acoplador, y en esta categoría de mecanismo eslabón de entrada y salida ejecutan una oscilación. Es fácil inferir que dado que dos de los tres eslabones móviles no realizan giro completo y al cumplir con el criterio de Grashof al menos uno debe hacerlo entonces el eslabón acoplador realizará un giro completo.

**Mecanismo balancín-manivela**, es cuando el eslabón más corto lo constituye el eslabón de salida pivotado al bastidor, en cuyo caso el eslabón de entrada efectúa una oscilación mientras que el de salida realiza giro completo.

Si  $s + l = p + q$ :

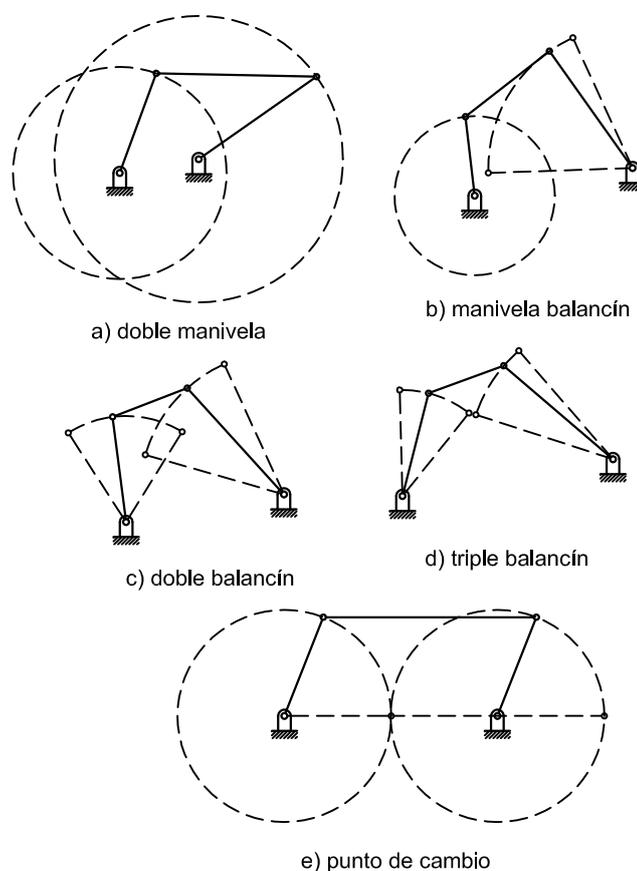
Es posible las cuatro categorías anteriores, pero ellas sufren de la condición denominada **punto de cambio**, en la cual, las líneas centrales de todos los eslabones se vuelven colineales. Cualquier mecanismo que presente esta condición se denomina **mecanismo de punto de cambio**. El movimiento del eslabonamiento luego de haber alcanzado esta condición es indeterminado pudiendo seguir la misma dirección o hallarse en un determinado circuito de ensamble<sup>2</sup> o invertirse tal situación, por ello se considera al mecanismo de punto de cambio una configuración de singularidad.

Un mecanismo no-Grashof, llamado usualmente triple balancín, al no cumplir con el criterio de Grashof, es decir  $s + l > p + q$ , provoca que ninguno de los eslabones móviles pueda dar un giro completo. La figura 1.2-3, muestra la categorización de

---

<sup>2</sup> Véase el ítem 1.4 correspondiente al análisis de posición.

los mecanismos de cuatro barras de acuerdo al cumplimiento o no del criterio de Grashof.



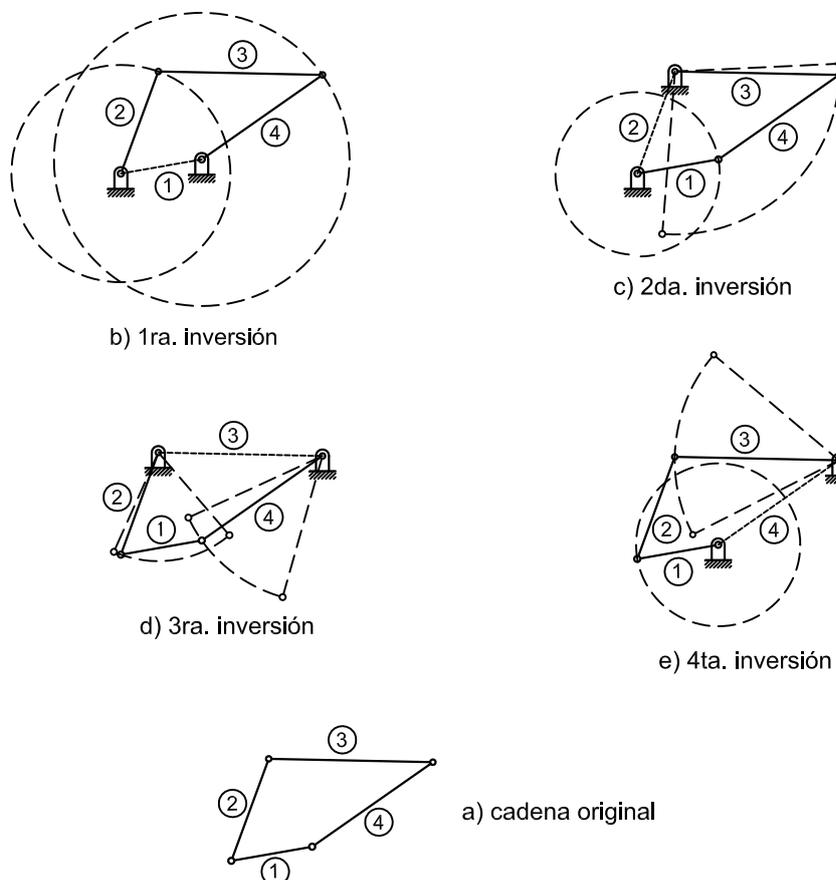
**Fig. 1.2-3:** Categorías de mecanismos de cuatro barras

### 1.3 INVERSIÓN CINEMÁTICA

Un procedimiento muy útil tanto en el análisis como en la síntesis de mecanismos lo constituye la denominada inversión cinemática, la cual consiste en la generación de varios mecanismos cambiando únicamente el eslabón bastidor. Si se generan todas las inversiones cinemáticas de una cadena de cuatro barras, todos los mecanismos obtenidos serán cuadriláteros articulados. Al generar las inversiones cinemáticas de una cadena, no se altera el movimiento relativo entre los eslabones, aunque el movimiento absoluto puede ser distinto.

En base a lo mencionado en el anterior párrafo se puede inferir que un mecanismo de cuatro barras tiene cuatro inversiones cinemáticas posibles; a cada inver-

sión cinemática le puede corresponder un mecanismo de categoría diferente a la de los demás. En la figura 1.3-1 se muestran las inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras.

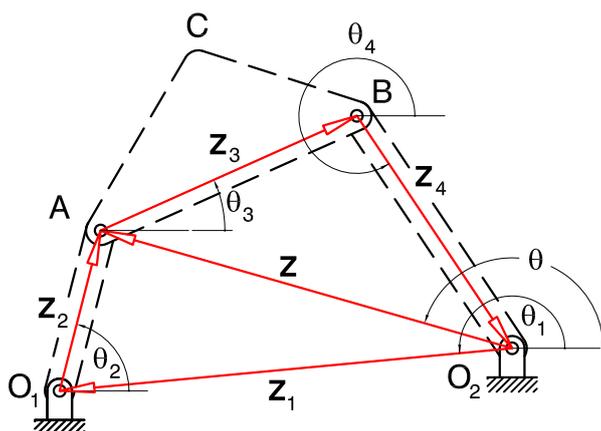


**Fig. 1.3-1:** Inversiones cinemáticas de un mecanismo de cuatro barras.

#### 1.4 MECANISMO DE CUATRO BARRAS – ANÁLISIS DE POSICIÓN

El objetivo del análisis de posición consiste en hallar la expresión para las posiciones angulares del acoplador y del seguidor en cualquier instante de funcionamiento del mecanismo en base a prescribir las dimensiones del bastidor, eslabón de entrada, acoplador y seguidor así como la posición angular del conductor. **Un desplazamiento angular se considera positivo si es medido con respecto al eje real en sentido antihorario, caso contrario será negativo**; la notación empleada de aquí en adelante representa a un vector con una letra mayúscula en negrita, mientras que su magnitud con la misma letra en minúscula sin negrilla.

Considérese el mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 1.4-1 en la que se supone conocidas las longitudes de los eslabones  $z_1$ ,  $z_2$ ,  $z_3$ ,  $z_4$  y los ángulos del bastidor y del eslabón de entrada  $\theta_1$  y  $\theta_2$  respectivamente, entonces el objetivo es hallar el ángulo del acoplador,  $\theta_3$  y del eslabón de salida,  $\theta_4$  en función de las variables anteriores.



**Fig. 1.4-1:** Mecanismo de cuatro barras – Representación vectorial para el análisis de posición

Se puede establecer para dicho mecanismo la siguiente ecuación de lazo cerrado:

$$\mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 = 0 \quad [1.4-1]$$

pero:

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}_1 + \mathbf{z}_2 \quad [1.4-2]$$

por lo que,

$$\mathbf{z} + \mathbf{z}_3 + \mathbf{z}_4 = 0 \quad [1.4-3]$$

entonces se sustituye la forma polar de los vectores complejos en la ecuación [1.4-3] y se tiene:

$$ze^{i\theta} + z_3e^{i\theta_3} + z_4e^{i\theta_4} = 0 \quad [1.4-4]$$

donde,

$$ze^{i\theta} = z_1e^{i\theta_1} + z_2e^{i\theta_2} \quad [1.4-5]$$

reacomodando la expresión (1.4-4),

$$ze^{i\theta} + z_3e^{i\theta_3} = -z_4e^{i\theta_4} \quad [1.4-6]$$

y multiplicando cada lado de esta última expresión por su complejo conjugado,

$$\begin{aligned} (ze^{i\theta} + z_3e^{i\theta_3})(ze^{-i\theta} + z_3e^{-i\theta_3}) &= (-z_4e^{i\theta_4})(-z_4e^{-i\theta_4}) \\ z^2 + z_3^2 + zz_3(e^{-i(\theta-\theta_3)} + e^{-i(\theta_3-\theta)}) &= z_4^2 \\ z^2 + z_3^2 + zz_3(e^{i(\theta_3-\theta)} + e^{-i(\theta_3-\theta)}) &= z_4^2 \end{aligned}$$

pero dado que  $e^{i\alpha} + e^{-i\alpha} = 2\cos\alpha$ , entonces:

$$z^2 + z_3^2 + 2zz_3 \cos(\theta_3 - \theta) = z_4^2 \quad [1.4-7]$$

si la expresión [1.4-4] se hubiese reacomodado de la siguiente manera:

$$ze^{i\theta} + z_4e^{i\theta_4} = -z_3e^{i\theta_3} \quad [1.4-8]$$

entonces por un procedimiento similar al anterior se obtiene:

$$z^2 + z_4^2 + 2zz_4 \cos(\theta_4 - \theta) = z_3^2 \quad [1.4-9]$$

De forma similar si se realiza dicho procedimiento a la expresión [1.4-5] se tiene:

$$\begin{aligned} z^2 &= z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \cos(\theta_1 - \theta_2) \\ z &= \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)} \end{aligned} \quad [1.4-10]$$

Ahora bien, si se trabaja la expresión [1.4-5] en su forma trigonométrica se tiene

$$z(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta) = z_1(\cos\theta_1 + i\operatorname{sen}\theta_1) + z_2(\cos\theta_2 + i\operatorname{sen}\theta_2) \quad [1.4-11]$$

separando ésta última ecuación en sus partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} z\cos\theta &= z_1\cos\theta_1 + z_2\cos\theta_2 \\ z\operatorname{sen}\theta &= z_1\operatorname{sen}\theta_1 + z_2\operatorname{sen}\theta_2 \end{aligned} \quad [1.4-12]$$

de donde, dividiendo la segunda ecuación de [1.4-12] para la primera:

$$\theta = \operatorname{atan}\left(\frac{z_1\operatorname{sen}\theta_1 + z_2\operatorname{sen}\theta_2}{z_1\cos\theta_1 + z_2\cos\theta_2}\right) \quad [1.4-13]$$

En lugar del arco tangente usual, se utilizará la función  $\operatorname{atan2}(x,y)$ <sup>3</sup> (donde  $y = z_1\operatorname{sen}\theta_1 + z_2\operatorname{sen}\theta_2$  ;  $x = z_1\cos\theta_1 + z_2\cos\theta_2$ ) la cual despliega valores de  $\theta$  para el rango  $-\pi \leq \theta \leq \pi$  ; esta función se denomina arco tangente de dos argumentos.

De la expresión [1.4-7] se deduce que:

$$\cos(\theta_3 - \theta) = \frac{z_4^2 - z_3^2 - z^2}{2zz_3}$$

pero dado que,  $\cos(2\pi - \alpha) = \cos(\alpha)$ , entonces existen dos valores para  $\theta_3$  dados por:

$$\theta_3 = \theta + \operatorname{acos}\left(\frac{z_4^2 - z_3^2 - z^2}{2zz_3}\right) \quad [1.4-14]$$

---

<sup>3</sup> En MathCAD la función se escribe  $\operatorname{atan2}(x,y)$ .

$$\theta_3 = 2\pi + \theta - a \cos \left( \frac{z_4^2 - z_3^2 - z^2}{2zz_3} \right) \quad [1.4-15]$$

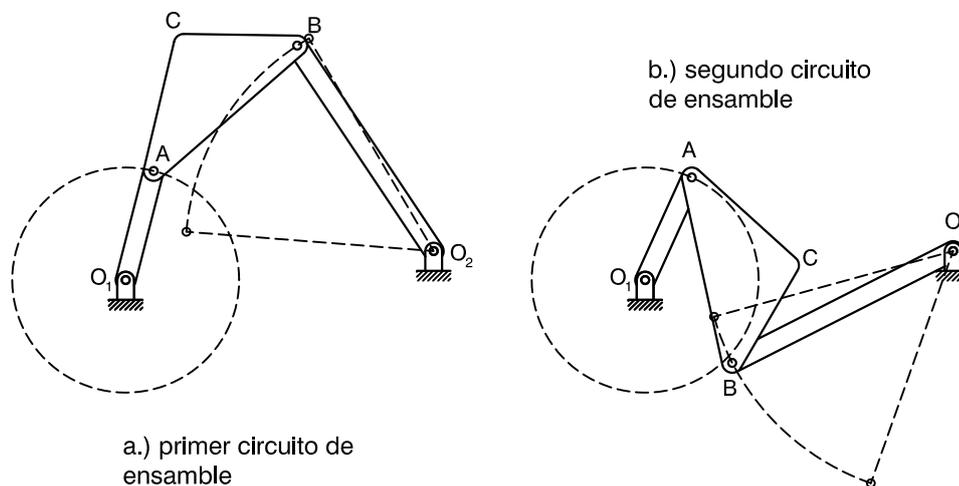
De forma análoga a partir de la expresión [1.4-9] se obtienen para  $\theta_4$  dos valores dados por:

$$\theta_4 = \theta + a \cos \left( \frac{z_3^2 - z_4^2 - z^2}{2zz_4} \right) \quad [1.4-16]$$

$$\theta_4 = 2\pi + \theta - a \cos \left( \frac{z_3^2 - z_4^2 - z^2}{2zz_4} \right) \quad [1.4-17]$$

Las expresiones [1.4-14] a [1.4-17] junto con [1.4-10] y [1.4-13] cumplen con el objetivo planteado en el análisis de posición.

Para los mecanismos de cuatro barras existen dos regiones posibles de movimiento, ejemplificados para la categoría manivela-balancín en la figura 1.4-2:



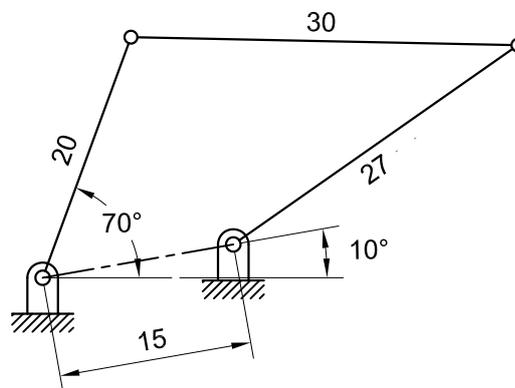
**Fig. 1.4-2:** Circuitos de ensamblaje para un mecanismo manivela-balancín.

Estas regiones se denominan *circuitos de ensamblaje* o *inversiones geométricas*, y un mecanismo de cuatro barras no puede pasar del primero al segundo circuito de ensamblaje sin haberse desarmado previamente. Las expresiones [1.4-14] y [1.4-

17] son válidas para uno de los circuitos de ensamble mientras que [1.4-15] y [1.4-16] están dadas para el otro; una breve construcción en un software CAD, por ejemplo AutoCAD, dilucidará a cuál de las inversiones geométricas corresponde cada pareja de valores.

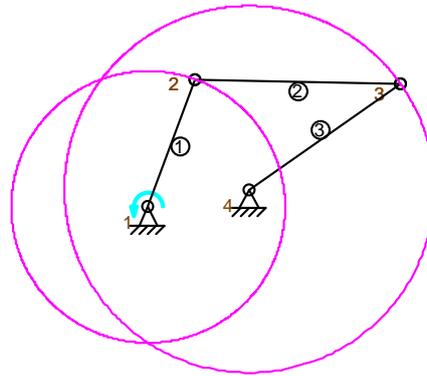
**Caso 1:**

Se efectúa el análisis de posición para el mecanismo de cuatro barras descrito en la figura 1.4-3:



**Fig. 1.4-3:** Mecanismo para análisis de posición en el caso 1

Se categoriza primero el mecanismo, la suma de su eslabón más corto y más largo es 45 mm, mientras que la suma de los otros dos da 47 mm, por lo que se trata de un mecanismo de Grashof, y al estar el eslabón más corto en el bastidor es entonces un mecanismo de doble manivela. Esta categoría del mecanismo se verifica mediante la simulación del mismo con el software Artas SAM como se muestra en la figura 1.4-4, donde las trayectorias del eslabón de entrada y de salida se grafican con ayuda del programa:



**Fig. 1.4-4:** Simulación en Artas SAM para el mecanismo del caso 1

Se ha generado una implementación con la ayuda del software matemático MathCAD para automatizar los cálculos, ésta se detalla a continuación:

Ingreso de la información conocida:

$$z_1 := 15 \cdot \text{mm} \quad z_2 := 20 \cdot \text{mm} \quad z_3 := 30 \cdot \text{mm} \quad z_4 := 27 \cdot \text{mm} \quad \theta_1 := 190 \cdot \frac{\pi}{180}$$

Ecuaciones para los ángulos del eslabón acoplador y del seguidor en el mecanismo:

$$\theta(\theta_2) := \text{atan2}(z_1 \cdot \cos(\theta_1) + z_2 \cdot \cos(\theta_2), z_1 \cdot \sin(\theta_1) + z_2 \cdot \sin(\theta_2))$$

$$z(\theta_2) := \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + 2 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_1 - \theta_2)}$$

$$\theta_3(\theta_2) := \begin{pmatrix} \theta(\theta_2) + \arccos\left(\frac{z_4^2 - z_3^2 - z(\theta_2)^2}{2 \cdot z(\theta_2) \cdot z_3}\right) \\ 2 \cdot \pi + \theta(\theta_2) - \arccos\left(\frac{z_4^2 - z_3^2 - z(\theta_2)^2}{2 \cdot z(\theta_2) \cdot z_3}\right) \end{pmatrix}$$

$$\theta_4(\theta_2) := \begin{pmatrix} 2 \cdot \pi + \theta(\theta_2) - \arccos\left(\frac{z_3^2 - z_4^2 - z(\theta_2)^2}{2 \cdot z(\theta_2) \cdot z_4}\right) \\ \theta(\theta_2) + \arccos\left(\frac{z_3^2 - z_4^2 - z(\theta_2)^2}{2 \cdot z(\theta_2) \cdot z_4}\right) \end{pmatrix}$$

como se observa los ángulos de acoplador y seguidor se hallan en un vector porque se calcularán para ambas inversiones geométricas del mecanismo aunque el análisis enfatizara solo en la primera de ellas. Cabe además recalcar que los cálculos se efectuarán en radianes ya que por defecto MathCAD utiliza dicha unidad y eso facilita la implementación, sin embargo cuando se requiera una interpretación en grados MathCAD puede efectuar la conversión respectiva de forma automática.

Ingresando el valor de  $\theta_2 = 70^\circ$  en radianes a las fórmulas implementadas, se tiene:

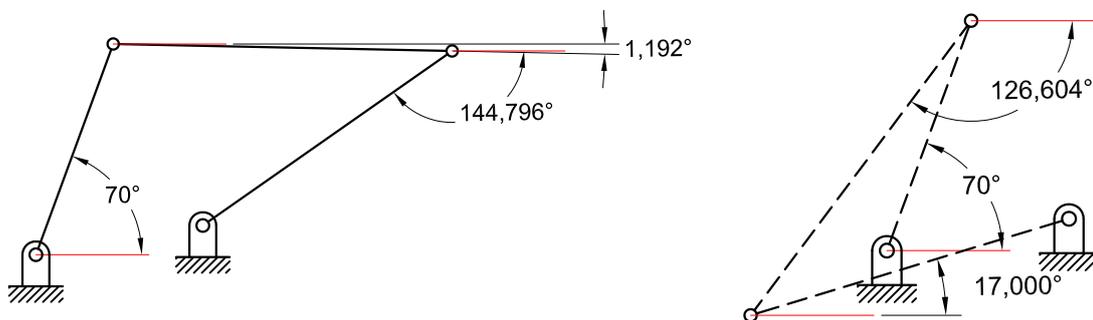
$$\theta_3\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \begin{pmatrix} 233.396 \\ 358.808 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \quad \theta_4\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \begin{pmatrix} 377 \\ 215.204 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

Las respuestas están expresadas en grados sexagesimales con el fin de realizar una comparación con los resultados obtenidos de un análisis gráfico efectuado con AutoCAD; para efecto de esta comparación es necesario escribir los ángulos calculados en el rango entre  $-\pi$  y  $\pi$ , por lo que hay que restar de  $2\pi$  a cada vector, entonces:

$$\theta_3\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -126.604 \\ -1.192 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

$$\theta_4\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 17 \\ -144.796 \end{pmatrix} \cdot \text{deg}$$

si se dibuja la configuración gráfica de las dos inversiones geométricas del mecanismo se tiene lo que muestra la figura 1.4-5:



**Fig. 1.4-5:** Primera inversión geométrica (línea continua); segunda inversión geométrica (línea entrecortada)

Las líneas en rojo en las gráficas muestran el eje real positivo y como puede notarse de inmediato los ángulos del análisis gráfico coinciden exactamente con los calculados por la formulación analítica. Esta formulación es capaz de generalizarse para analizar posicionalmente al mecanismo durante una vuelta completa del eslabón motriz, a partir de su posición inicial; de principio se conoce que las fórmulas deben estar restadas de  $2\pi$  tal como se ha corroborado en el cálculo anterior.

Tabulando las posiciones angulares para eslabón acoplador y seguidor con una implementación en MathCAD, se tiene:

$$\theta_{2d} := 70, 80 \dots 420 \quad \theta_{2r} := 70 \cdot \frac{\pi}{180}, 80 \cdot \frac{\pi}{180} \dots 420 \cdot \frac{\pi}{180}$$

$\theta_{2d} =$	$\theta_{2r} =$	$\theta_3(\theta_{2r})_2 =$	$\theta_4(\theta_{2r})_2 =$	$\theta_3(\theta_{2r})_2 - 2 \cdot \pi =$	$\theta_4(\theta_{2r})_2 - 2 \cdot \pi =$
70	1.222	358.808	215.204	-1.192	-144.796
80	1.396	364.745	226.464	4.745	-133.536
90	1.571	369.991	236.829	9.991	-123.171
100	1.745	374.819	246.521	14.819	-113.479
110	1.92	379.412	255.671	19.412	-104.329
120	2.094	383.898	264.355	23.898	-95.645
130	2.269	388.372	272.614	28.372	-87.386
140	2.443	392.909	280.471	32.909	-79.529
150	2.618	397.572	287.936	37.572	-72.064
160	2.793	402.409	295.011	42.409	-64.989
170	2.967	407.462	301.695	47.462	-58.305
180	3.142	52.763	-52.011	-307.237	-412.011
190	3.316	58.336	-46.105	-301.664	-406.105
200	3.491	64.195	-40.579	-295.805	-400.579
210	3.665	70.348	-35.419	-289.652	-395.419
220	3.84	76.793	-30.605	-283.207	-390.605
230	4.014	83.524	-26.111	-276.476	-386.111
240	4.189	90.532	-21.906	-269.468	-381.906
250	4.363	97.802	-17.956	-262.198	-377.956
260	4.538	105.323	-14.221	-254.677	-374.221
270	4.712	113.083	-10.658	-246.917	-370.658
280	4.887	121.08	-7.219	-238.92	-367.219
290	5.061	129.315	-3.847	-230.685	-363.847
300	5.236	137.808	-0.474	-222.192	-360.474
310	5.411	146.604	3	-213.396	-357
320	5.585	155.797	6.724	-204.203	-353.276
330	5.76	165.584	10.966	-194.416	-349.034
340	5.934	176.403	16.267	-183.597	-343.733
350	6.109	189.362	23.945	-170.638	-336.055
360	6.283	207.692	37.794	-152.308	-322.206
370	6.458	239.207	67.266	-120.793	-292.734
380	6.632	280.661	110.763	-79.339	-249.237
390	6.807	311.335	145.917	-48.665	-214.083
400	6.981	330.274	170.138	-29.726	-189.862
410	7.156	342.724	188.106	-17.276	-171.894
420	7.33	351.732	202.659	-8.268	-157.341

Se observa de la tabla de valores anterior que la formulación de los ángulos del acoplador y el seguidor tienen continuidad para los valores en rojo, de esto se deduce que se tendrá una función continua a trozos con la primera parte en la que se sustrae  $2\pi$  y la otra en la que se mantiene la formulación original para los ángulos  $\theta_3$  y  $\theta_4$ ; pero el punto de continuidad entre la fórmula restada y la no restada es necesario hallarlo.

El valor de transición se ha calculado con MathCAD mediante ensayo y error para tres dígitos decimales de precisión y es de 3.010 y sus cálculos se muestran a continuación:

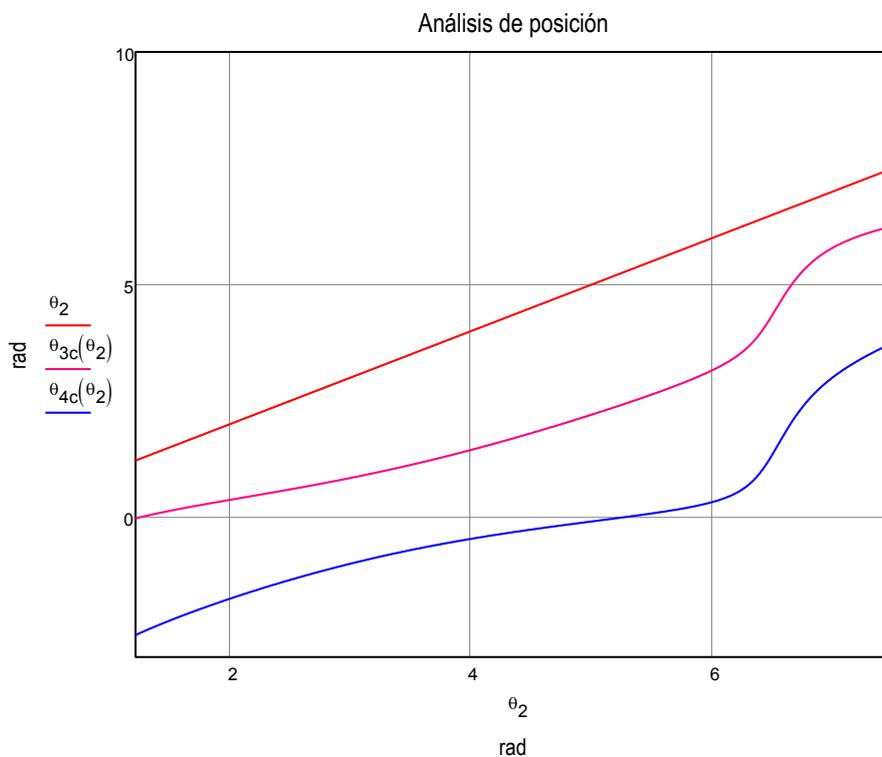
$$\begin{array}{ll} \theta_3(3.0) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -49.164 \\ 48.443 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} & \theta_3(3.1) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -405.635 \\ -308.524 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \\ \theta_3(3.01) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -48.807 \\ 48.742 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} & \theta_3(3.02) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -408.45 \\ -310.958 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \\ \theta_3(3.010) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -48.807 \\ 48.742 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} & \theta_3(3.011) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -408.771 \\ -311.228 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \\ \\ \theta_4(3.0) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 56.366 \\ -57.087 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} & \theta_4(3.1) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -300.683 \\ -413.476 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \\ \theta_4(3.01) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 56.655 \\ -56.72 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} & \theta_4(3.02) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -303.054 \\ -416.354 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \\ \theta_4(3.010) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} 56.655 \\ -56.72 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} & \theta_4(3.011) - 2 \cdot \pi = \begin{pmatrix} -303.316 \\ -416.683 \end{pmatrix} \cdot \text{deg} \end{array}$$

Con este análisis entonces se plantean las siguientes fórmulas corregidas para  $\theta_3$  y  $\theta_4$  como:

$$\theta_{3c}(\theta_2) := \begin{cases} \theta_3(\theta_2)_2 - 2 \cdot \pi & \text{if } 70 \cdot \frac{\pi}{180} \leq \theta_2 \leq 3.010 \\ \theta_3(\theta_2)_2 & \text{if } 3.010 < \theta_2 \leq 2 \cdot \pi + 70 \cdot \frac{\pi}{180} \end{cases}$$

$$\theta_{4c}(\theta_2) \begin{cases} \theta_4(\theta_2)_2 - 2 \cdot \pi & \text{if } 70 \cdot \frac{\pi}{180} \leq \theta_2 \leq 3.010 \\ \theta_4(\theta_2)_2 & \text{if } 3.010 < \theta_2 \leq 2 \cdot \pi + 70 \cdot \frac{\pi}{180} \end{cases}$$

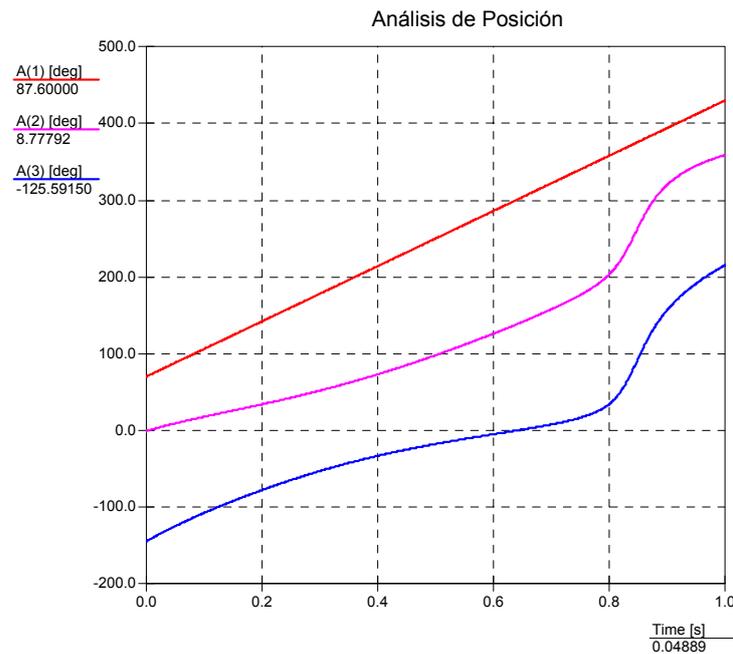
Se toma únicamente las segundas componentes de los vectores  $\theta_3(\theta_2)$  y  $\theta_4(\theta_2)$  que corresponden al primer circuito de ensamble y se grafican las funciones continuas a trozos  $\theta_{3c}(\theta_2)$  y  $\theta_{4c}(\theta_2)$



**Fig. 1.4-6:** Gráfico de análisis de posición para el caso 1 con MathCAD

La curva de análisis está graficada en el rango  $70^\circ \leq \theta_2 \leq 430^\circ$ , es decir una vuelta completa del eslabón de entrada desde su posición inicial. Adicionalmente se ha graficado la variación de  $\theta_2$  en el transcurso de una vuelta del mecanismo.

La misma curva para una revolución del mecanismo obtenida con el software Artas SAM es:

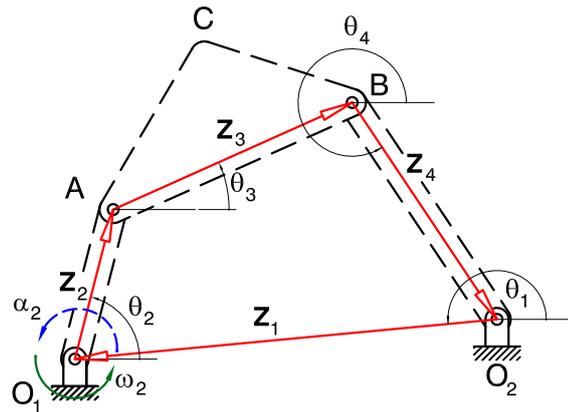


**Fig. 1.4-7:** Gráfico de análisis de posición para el caso 1 obtenido con Artas SAM

## 1.5 MECANISMO DE CUATRO BARRAS – ANÁLISIS DE VELOCIDAD Y ACELERACIÓN

El análisis de velocidad y aceleración consiste en hallar las expresiones para velocidad y aceleración angulares del acoplador y del seguidor en cualquier instante de funcionamiento del mecanismo en base a prescribir las dimensiones del bastidor, manivela, acoplador y seguidor así como posición, velocidad y aceleración angulares del eslabón de entrada.

Considérese el mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura 1.4-4 en la que se supone conocidas las longitudes de los eslabones  $z_1, z_2, z_3, z_4$ , las posiciones angulares de los eslabones  $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$  y la velocidad y aceleración angulares del eslabón de entrada,  $\omega_2$  y  $\alpha_2$ , respectivamente, entonces el objetivo es hallar la velocidad y aceleración angulares del acoplador,  $\omega_3$  y  $\alpha_3$ , y del eslabón de salida,  $\omega_4$  y  $\alpha_4$ , en función de las variables anteriores.



**Fig. 1.5-1:** Mecanismo de cuatro barras – Representación vectorial para análisis de velocidad y aceleración

A partir de la ecuación de lazo cerrado en su forma polar, dada por:

$$z_1 e^{i\theta_1} + z_2 e^{i\theta_2} + z_3 e^{i\theta_3} + z_4 e^{i\theta_4} = 0 \quad [1.5-1]$$

se deriva con respecto al tiempo dicha expresión, bajo la consideración de que los eslabones no se deforman por la condición de cuerpo rígido, entonces:

$$z_1 e^{i\theta_1} i \frac{d\theta_1}{dt} + z_2 e^{i\theta_2} i \frac{d\theta_2}{dt} + z_3 e^{i\theta_3} i \frac{d\theta_3}{dt} + z_4 e^{i\theta_4} i \frac{d\theta_4}{dt} = 0 \quad [1.5-2]$$

dado que el bastidor está fijo,  $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$ , entonces:

$$z_2 e^{i\theta_2} i \omega_2 + z_3 e^{i\theta_3} i \omega_3 + z_4 e^{i\theta_4} i \omega_4 = 0 \quad [1.5-3]$$

que en su forma trigonométrica se escribe:

$$z_2 i \omega_2 (\cos \theta_2 + i \operatorname{sen} \theta_2) + z_3 i \omega_3 (\cos \theta_3 + i \operatorname{sen} \theta_3) + z_4 i \omega_4 (\cos \theta_4 + i \operatorname{sen} \theta_4) = 0 \quad [1.5-4]$$

separando ahora partes real e imaginaria:

$$\begin{aligned} -z_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 - z_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 - z_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= 0 \\ z_2 \omega_2 \cos \theta_2 + z_3 \omega_3 \cos \theta_3 + z_4 \omega_4 \cos \theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad [1.5-5]$$

y reacomodando las ecuaciones:

$$\begin{aligned} z_3 \omega_3 \operatorname{sen} \theta_3 + z_4 \omega_4 \operatorname{sen} \theta_4 &= -z_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ z_3 \omega_3 \cos \theta_3 + z_4 \omega_4 \cos \theta_4 &= -z_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{aligned} \quad [1.5-6]$$

el sistema anterior es lineal en las variables  $\omega_3$  y  $\omega_4$  por determinarse; calculando dichas variables por la regla de Cramer, se tiene:

$$\omega_3 = \frac{\begin{vmatrix} -z_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 & z_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ -z_2 \omega_2 \cos \theta_2 & z_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_3 \operatorname{sen} \theta_3 & z_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ z_3 \cos \theta_3 & z_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}$$

$$\omega_4 = \frac{\begin{vmatrix} z_3 \operatorname{sen} \theta_3 & -z_2 \omega_2 \operatorname{sen} \theta_2 \\ z_3 \cos \theta_3 & -z_2 \omega_2 \cos \theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_3 \operatorname{sen} \theta_3 & z_4 \operatorname{sen} \theta_4 \\ z_3 \cos \theta_3 & z_4 \cos \theta_4 \end{vmatrix}}$$

y simplificando,

$$\omega_3 = \omega_2 \frac{z_2 \operatorname{sen}(\theta_2 - \theta_4)}{z_3 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}$$

$$\omega_4 = \omega_2 \frac{z_2 \operatorname{sen}(\theta_3 - \theta_2)}{z_4 \operatorname{sen}(\theta_4 - \theta_3)}$$

Si se vuelve a derivar con respecto al tiempo la expresión [1.5-2], bajo la condición de cuerpo rígido y con  $\frac{d\theta_1}{dt} = 0$  y  $\frac{d^2\theta_1}{dt^2} = 0$ , entonces:

$$-z_2 \left( \frac{d\theta_2}{dt} \right)^2 e^{i\theta_2} + z_2 \frac{d\omega_2}{dt} e^{i\theta_2} i - z_3 \left( \frac{d\theta_3}{dt} \right)^2 e^{i\theta_3} + z_3 \frac{d\omega_3}{dt} e^{i\theta_3} i - z_4 \left( \frac{d\theta_4}{dt} \right)^2 e^{i\theta_4} + z_4 \frac{d\omega_4}{dt} e^{i\theta_4} i = 0$$

expresándola en notación simplificada,

$$-z_2\omega_2^2 e^{i\theta_2} + z_2\alpha_2 e^{i\theta_2} i - z_3\omega_3^2 e^{i\theta_3} + z_3\alpha_3 e^{i\theta_3} i - z_4\omega_4^2 e^{i\theta_4} + z_4\alpha_4 e^{i\theta_4} i = 0$$

y desarrollándola en su forma trigonométrica, para luego separarla en partes real e imaginaria se obtiene:

$$\begin{aligned} -z_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - z_3\omega_3^2 \cos\theta_3 - z_4\omega_4^2 \cos\theta_4 - z_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 - z_3\alpha_3 \operatorname{sen}\theta_3 - z_4\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_4 &= 0 \\ -z_2\omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 - z_3\omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3 - z_4\omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 + z_2\alpha_2 \cos\theta_2 + z_3\alpha_3 \cos\theta_3 + z_4\alpha_4 \cos\theta_4 &= 0 \end{aligned} \quad [1.5-7]$$

reacomodando el sistema anterior,

$$\begin{aligned} z_3\alpha_3 \operatorname{sen}\theta_3 + z_4\alpha_4 \operatorname{sen}\theta_4 &= -z_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - z_3\omega_3^2 \cos\theta_3 - z_4\omega_4^2 \cos\theta_4 - z_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ z_3\alpha_3 \cos\theta_3 + z_4\alpha_4 \cos\theta_4 &= z_2\omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 + z_3\omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3 + z_4\omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 - z_2\alpha_2 \cos\theta_2 \end{aligned} \quad [1.5-8]$$

El sistema [1.5-8] posee como únicas incógnitas a  $\alpha_3$  y  $\alpha_4$ , entonces resolviéndolas por regla de Cramer:

$$\alpha_3 = \frac{\begin{vmatrix} -z_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - z_3\omega_3^2 \cos\theta_3 - z_4\omega_4^2 \cos\theta_4 - z_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 & z_4 \operatorname{sen}\theta_4 \\ z_2\omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 + z_3\omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3 + z_4\omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 - z_2\alpha_2 \cos\theta_2 & z_4 \cos\theta_4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_3 \operatorname{sen}\theta_3 & z_4 \operatorname{sen}\theta_4 \\ z_3 \cos\theta_3 & z_4 \cos\theta_4 \end{vmatrix}} \quad [1.5-9]$$

$$\alpha_4 = \frac{\begin{vmatrix} z_3 \operatorname{sen}\theta_3 & -z_2\omega_2^2 \cos\theta_2 - z_3\omega_3^2 \cos\theta_3 - z_4\omega_4^2 \cos\theta_4 - z_2\alpha_2 \operatorname{sen}\theta_2 \\ z_3 \cos\theta_3 & z_2\omega_2^2 \operatorname{sen}\theta_2 + z_3\omega_3^2 \operatorname{sen}\theta_3 + z_4\omega_4^2 \operatorname{sen}\theta_4 - z_2\alpha_2 \cos\theta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_3 \operatorname{sen}\theta_3 & z_4 \operatorname{sen}\theta_4 \\ z_3 \cos\theta_3 & z_4 \cos\theta_4 \end{vmatrix}}$$

calculando los determinantes y simplificando finalmente se obtiene:

$$\alpha_3 = \frac{z_4 \omega_4^2 - z_2 \cos(\theta_2 - \theta_4) \omega_2^2 - z_3 \cos(\theta_3 - \theta_4) \omega_3^2 - z_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_4)}{z_3 \sin(\theta_3 - \theta_4)} \quad [1.5-10]$$

$$\alpha_4 = \frac{-z_3 \omega_3^2 - z_2 \cos(\theta_2 - \theta_3) \omega_2^2 + z_4 \cos(\theta_3 - \theta_4) \omega_4^2 - z_2 \alpha_2 \sin(\theta_2 - \theta_3)}{z_4 \sin(\theta_3 - \theta_4)}$$

De igual manera como en el análisis de posición, aquí se podrán obtener expresiones diferentes de velocidad y aceleración angular correspondientes a cada circuito de ensamble con solo derivar las expresiones [1.4-14] a [1.4-17].

### Caso 2:

Para el mecanismo del caso 1, se amplía el análisis cinemático generando el análisis de velocidad y aceleración. Supóngase que al eslabón motriz se le imparte una velocidad angular constante de 60 rpm.

Se ha ampliado la implementación de MathCAD generada para el análisis de posición para la automatización de los cálculos de velocidades y aceleraciones.

Ingreso de la información conocida:

$$\omega_2 := 60 \cdot \text{rpm} \quad \alpha_2 := 0 \cdot \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Ecuaciones para las velocidades y aceleraciones angulares del eslabón acoplador y del seguidor en el mecanismo:

$$\omega_3(\theta_2) := \omega_2 \cdot \frac{z_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_4(\theta_2))}{z_3 \cdot \sin(\theta_4(\theta_2) - \theta_3(\theta_2))}$$

$$\omega_4(\theta_2) := \omega_2 \cdot \frac{z_2 \cdot \sin(\theta_3(\theta_2) - \theta_2)}{z_4 \cdot \sin(\theta_4(\theta_2) - \theta_3(\theta_2))}$$

$$\alpha_3(\theta_2) := \frac{z_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_4(\theta_2)) + z_3 \cdot \omega_3(\theta_2)^2 \cdot \cos(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2)) + z_4 \cdot \omega_4(\theta_2)^2 + z_2 \cdot \alpha_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_4(\theta_2))}{z_3 \cdot \sin(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}$$

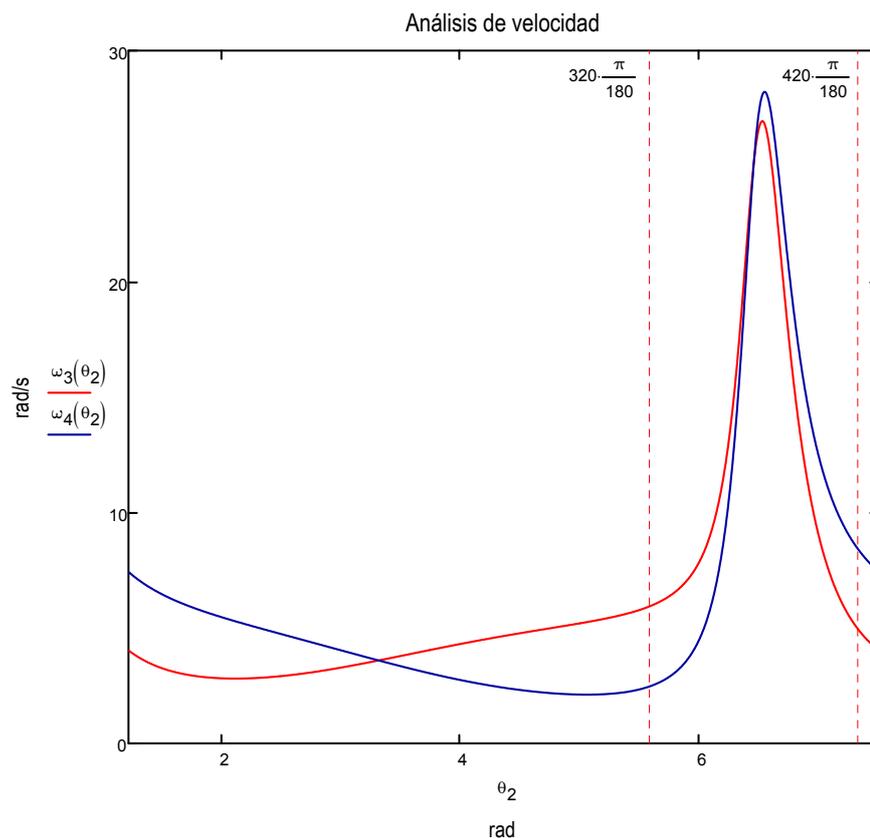
$$\alpha_4(\theta_2) := \frac{z_2 \cdot \omega_2^2 \cdot \cos(\theta_2 - \theta_3(\theta_2)) + z_3 \cdot \omega_3(\theta_2)^2 + z_4 \cdot \omega_4(\theta_2)^2 \cdot \cos(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2)) + z_2 \cdot \alpha_2 \cdot \sin(\theta_2 - \theta_3(\theta_2))}{z_4 \cdot \sin(\theta_3(\theta_2) - \theta_4(\theta_2))}$$

Ingresando el valor de  $\theta_2 = 70^\circ$  en radianes a las fórmulas implementadas, se tiene<sup>4</sup>:

$$\omega_3\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \begin{pmatrix} 5.638 \\ 4.029 \end{pmatrix} \frac{1}{s} \quad \omega_4\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \begin{pmatrix} 2.241 \\ 7.425 \end{pmatrix} \frac{1}{s}$$

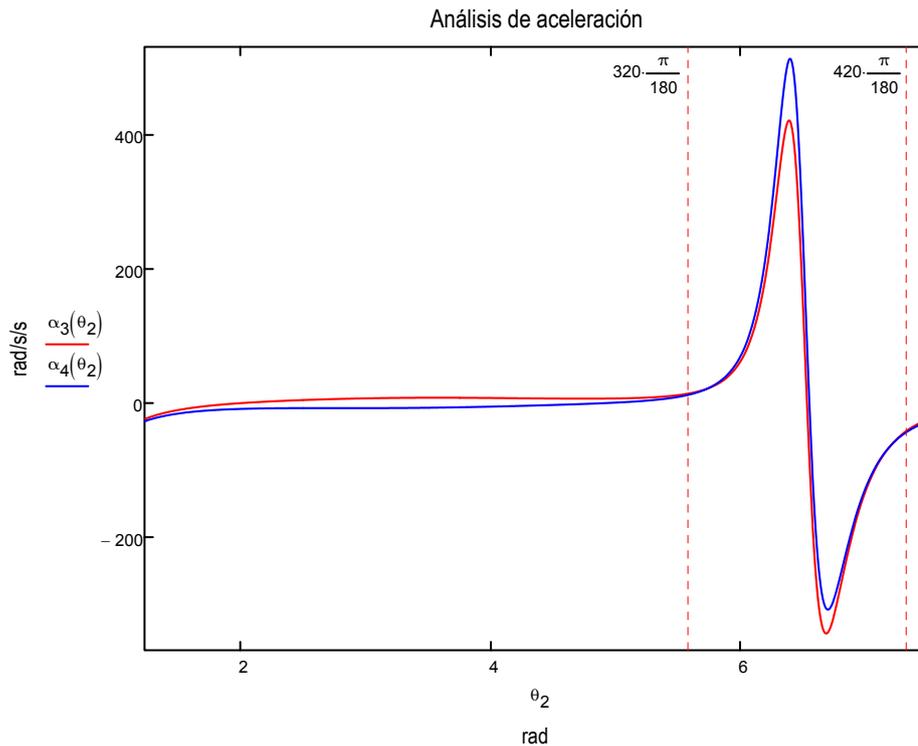
$$\alpha_3\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \begin{pmatrix} -30.822 \\ 17.939 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2} \quad \alpha_4\left(70 \cdot \frac{\pi}{180}\right) = \begin{pmatrix} 69.312 \\ -35.325 \end{pmatrix} \frac{1}{s^2}$$

Las curvas de velocidades y aceleraciones en función del ángulo del eslabón de entrada se visualizan como:



**Fig. 1.5-2:** Curvas de análisis de velocidad para el caso 2

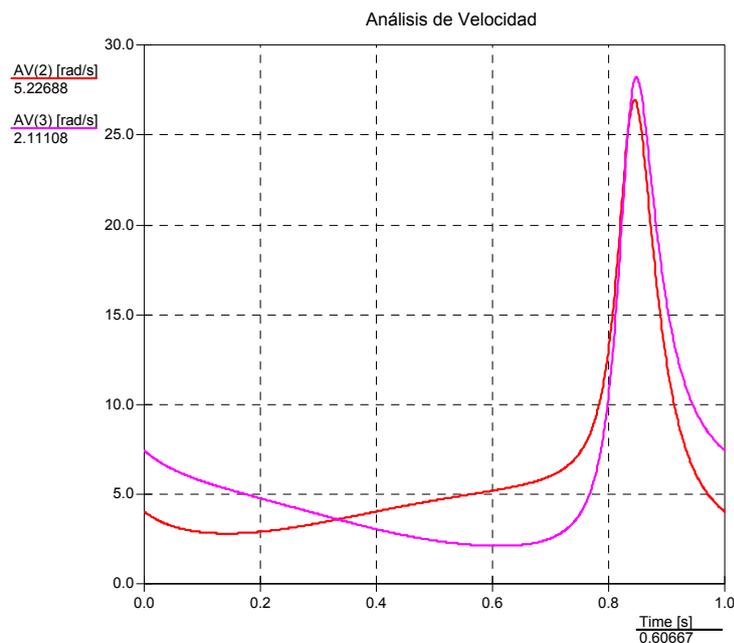
<sup>4</sup>Los vectores presentan los valores para ambos circuitos de ensamble, pero las gráficas se realizan para el primer circuito.



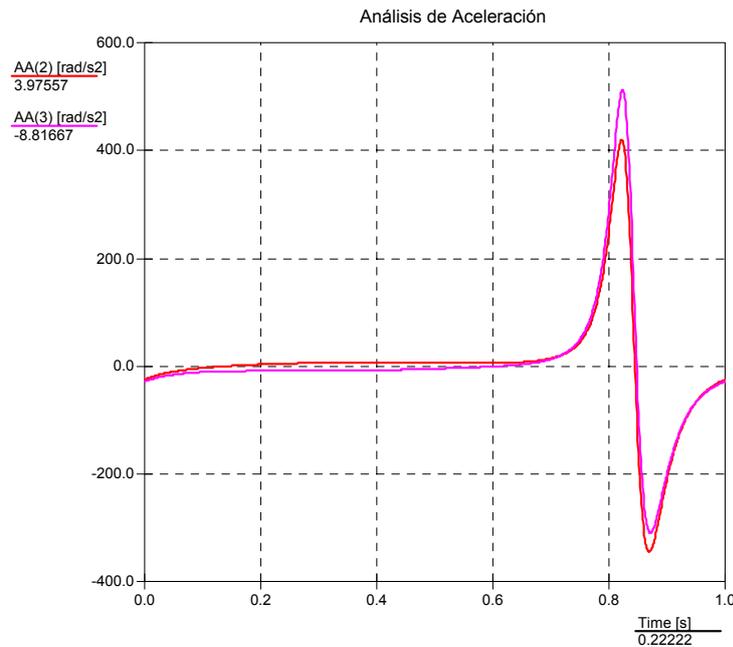
**Fig. 1.5-3:** Curvas de análisis de aceleración para el caso 2

De las gráficas se puede concluir que el mecanismo, alcanza sus mayores valores de velocidad y aceleración angular entre los  $320^\circ$  y  $420^\circ$ .

Las curvas de velocidad y aceleración obtenidas por el software Artas SAM son:



**Fig. 1.5-4:** Curvas de análisis de velocidad para el caso 2 generadas con Artas SAM



**Fig. 1.5-5:** Curvas de análisis de aceleración para el caso 2 generadas con Artas SAM

## 1.6 INTRODUCCIÓN A LA SÍNTESIS DE MECANISMOS

El estudio de un mecanismo tiene usualmente dos fases: el **análisis** consistente en la determinación de las variables cinemáticas del mismo siempre y cuando se conozcan todas las dimensiones, la posición inicial de los eslabones en un mecanismo y las condiciones de entrada; y la **síntesis** que es la tarea opuesta al análisis, es decir, la determinación del tipo, dimensiones y posición inicial de los eslabones de un mecanismo si se prescribe o conoce el tipo de movimiento que va a desarrollar el mecanismo.

La síntesis se clasifica de forma general en dos tipos: Síntesis de tipo o topológica y síntesis dimensional.

**Síntesis de tipo:** Esta clase de síntesis busca hallar cual es la topología de eslabonamientos y juntas más adecuada para realizar una determinada tarea y normalmente requiere de la experiencia del diseñador para aplicarse; así por ejemplo podría ser más conveniente elegir en determinada situación de diseño un eslabonamiento antes que elegir un mecanismo de levas o uno de engranes, únicamente un estudio exhaustivo y una experiencia práctica del diseñador hará que la

elección sea la más adecuada; un ejemplo de tal situación la presentan Erdman y Sandor<sup>[3]</sup> en el diseño de un mecanismo de transmisión de velocidad variable. Una de las síntesis de tipo más usuales es la *síntesis de número*, mediante la cual se establece el tipo de eslabones y juntas, es decir la topología del mecanismo, necesarios para obtener un determinado valor de movilidad tomando como criterio de diseño la ecuación de Gruebler. Por ejemplo considérese que se desea diseñar la topología de mecanismos que contengan hasta cuatro eslabones y posean 1 grado de libertad; la ecuación de Gruebler se expresa entonces como:

$$1 = 3(n - 1) - 2p_1 - p_2$$

o sea,

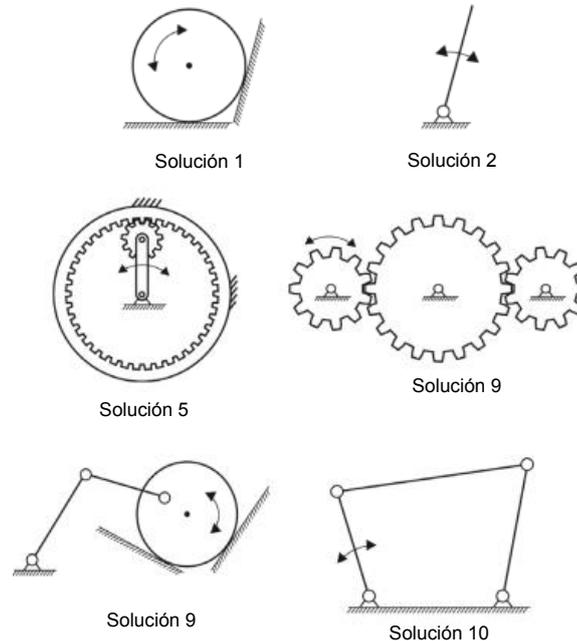
$$4 = 3n - 2p_1 - p_2$$

A partir de esta ecuación se puede deducir la tabla 1.6-1, que indica el número de eslabones del mecanismo, la cantidad de pares cinemáticos de primer orden y el número de pares cinemáticos de segundo orden:

**Tabla 1.6-1:** Mecanismos solución para 2, 3 y 4 eslabones con 1 grado de libertad

Solución No.	n	p <sub>1</sub>	p <sub>2</sub>
<b>1</b>	2	0	2
<b>2</b>	2	1	0
<b>3</b>	3	0	5
<b>4</b>	3	1	3
<b>5</b>	3	2	1
<b>6</b>	4	0	8
<b>7</b>	4	1	6
<b>8</b>	4	2	4
<b>9</b>	4	3	2
<b>10</b>	4	4	0

De la tabla de soluciones se esquematizan seguidamente algunas de ellas:



**Figura 1.6-1:** Algunas soluciones para la síntesis de tipo de la tabla 1.6-1

**Síntesis dimensional:** Normalmente este tipo de síntesis se la puede efectuar bajo dos clases de metodologías: forma gráfica y analítica. La forma gráfica de la síntesis dimensional tuvo un gran uso hasta antes del notable desarrollo de la computación y era de hecho el estándar del diseño de mecanismos. La forma analítica de la síntesis tuvo un desarrollo muy restringido en un principio, dado que para poderla hacer útil era necesario el desarrollo de métodos numéricos de cálculo, sin embargo cuando la informática estuvo en capacidad de lograr esta empresa la forma analítica de la síntesis obtuvo la trascendencia que actualmente posee. Hoy por hoy la forma analítica de la síntesis tanto exacta, sin el empleo de métodos numéricos, como aproximada, con el empleo de métodos numéricos, tiene preeminencia sobre la forma gráfica, aunque está última no ha perdido vigencia dado que también el desarrollo informático ha proporcionado software CAD que hace de esta metodología muy precisa.

El presente trabajo se centrará en el uso de la forma analítica, sin dejar con ello de auxiliarse de la forma gráfica. Dentro de la forma analítica de síntesis, a su vez en la actualidad existen dos metodologías generales de gran uso y desarrollo: el empleo de las matrices de desplazamiento desarrollado inicialmente por Suh y

Radcliffe<sup>[1]</sup> y el uso de la forma vectorial con números complejos desarrollado especialmente por Sandor y Erdman<sup>[2],[3]</sup>; ésta última metodología es la adoptada para el desarrollo del presente trabajo.

La síntesis dimensional se clasifica, de acuerdo al tipo de tarea asignada al movimiento del mecanismo, en síntesis dimensional de: generación de función, generación de trayectoria y generación de movimiento o guiado de cuerpo rígido, ésta última es el interés primario de la presente tesis.

La *síntesis de generación de función*, correlaciona una función de entrada con una de salida en el mecanismo, resultando por lo general un mecanismo de doble balancín o un mecanismo manivela-balancín con entrada y salida de rotación pura o un mecanismo manivela-corredera con rotación de entrada y traslación de salida o viceversa.

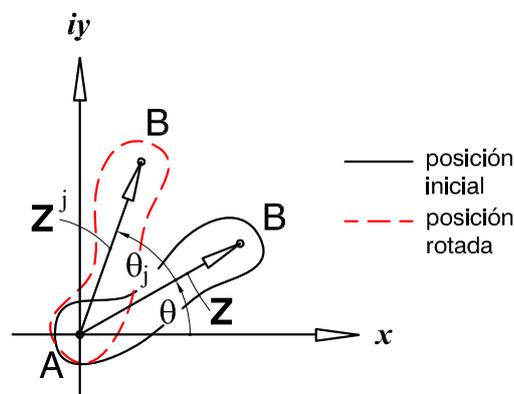
La *síntesis de generación de trayectoria*, consiste en controlar un punto en el plano de movimiento del mecanismo de forma tal que el mismo describa una trayectoria determinada; esto se obtiene usualmente en los mecanismos manivela-balancín o doble balancín prescribiendo la trayectoria de un punto definido del eslabón acoplador, que será la trayectoria de salida o deseada. Es frecuente que se defina la temporización del arribo del punto por posiciones determinada de la trayectoria prescrita, denominándose a este problema como *síntesis de generación de trayectoria con temporización prescrita*.

La *síntesis de generación de movimiento o guiado de cuerpo rígido*, consiste en controlar una línea en el plano de movimiento del mecanismo, para que esta asuma un conjunto determinado de posiciones prescritas. Esta categoría de síntesis generalmente se aplica a un mecanismo manivela-balancín o doble balancín, en donde una línea definida del eslabón acoplador adquirirá un conjunto de posiciones definidas.

### 1.6.1 MÉTODO DE PUNTOS DE PRECISIÓN CON EL USO DE NÚMEROS COMPLEJOS – FORMATO DE LA DIADA ESTÁNDAR

En el presente estudio se aplica el método de puntos de precisión (Precision-Point Method-PPM) con el empleo de números complejos, originalmente desarrollado por Sandor<sup>[2]</sup>, y posteriormente por Erdman y Sandor<sup>[3]</sup>. Este procedimiento se puede aplicar a un eslabonamiento si su topología permite descomponerlo en subsistemas más sencillos denominadas cadenas abiertas simples (Single Open Chains - SOC) entre las que se cuentan esencialmente las diadas, triadas y tétradas. La tarea del dimensionamiento del eslabonamiento de cuatro barras es simplificada si se conocen un número definido de posiciones del eslabón acoplador del mecanismo denominadas posiciones de precisión. En función del número de eslabones de la SOC y de los posiciones de precisión se genera un sistema de ecuaciones complejo, no lineal.

De forma general un eslabonamiento se puede modelar mediante el empleo de vectores para representar la posición de los eslabones y sus desplazamientos. Los vectores posición de puntos en el eslabón de un mecanismo plano serán expresados mediante números complejos. Por ejemplo, considérese un eslabón que gira en rotación pura, en sentido antihorario considerado por definición como positivo, sin traslación respecto a uno de sus extremos como se muestra en la figura 1.6.1-1:



**Fig. 1.6.1 – 1:** Representación vectorial mediante números complejos de un eslabón en rotación pura.

dado que el eslabón es un sólido rígido, es decir indeformable, el vector posición de B respecto a A en la posición inicial, se puede representar como:

$$\mathbf{Z} = ze^{i\theta} \quad [1.6.1-1]$$

donde  $\theta$  es el ángulo subtendido por el vector posición AB inicial con respecto al eje real, mientras que el mismo vector posición para el eslabón, pero en la posición angular girada  $j$ , se puede escribir como:

$$\mathbf{Z}^j = ze^{i(\theta+\theta_j)} \quad [1.6.1-2]$$

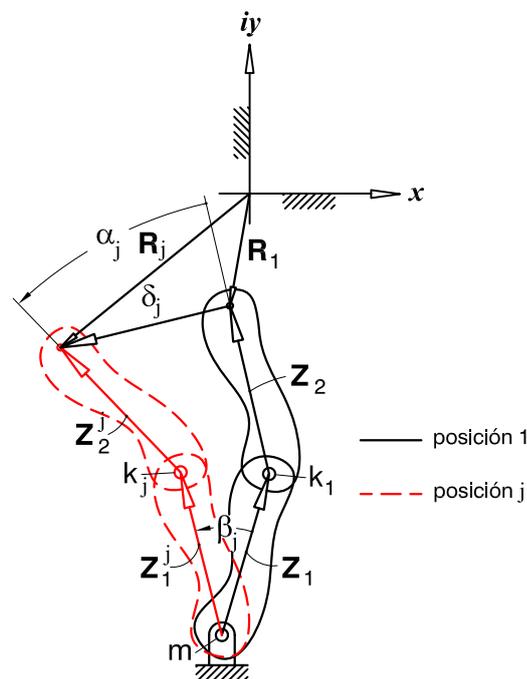
siendo  $\theta_j$  el ángulo relativo del vector posición AB rotado con respecto al vector posición inicial. Simplificando la expresión [1.7.1-2] se obtiene:

$$\mathbf{Z}^j = ze^{i\theta} e^{i\theta_j} = \mathbf{Z} e^{i\theta_j} \quad [1.6.1-3]$$

Puesto que el vector posición rotado  $\mathbf{Z}^j$  se puede expresar como producto del vector posición antes de la rotación  $\mathbf{Z}$  por el término  $e^{i\theta_j}$ , a éste último se le denomina *operador rotacional* y determina el giro en ángulo  $\theta_j$  de un vector desde su posición inicial hasta una posición  $j$  cualquiera.

Una diada es la representación vectorial de una pareja de eslabones conectados entre sí mediante una junta de rotación. En el método propuesto por Erdman y Sandor los vectores se representan mediante números complejos bajo el esquema de diadas.

Se considera la figura 1.6.1-2:



**Fig. 1.6.1 – 2:** Diada estándar con pares rotatorios, uno fijo o a tierra y otro móvil.

Se representan la posición de los dos eslabones 1 y 2 de la diada, el primero con un par de rotación fijo( $m$ ) a bastidor esquematizado mediante el vector de posición  $Z_1$  en su posición inicial 1 y por el vector de posición  $Z_1^j$  en su posición final  $j$  y el segundo con un par de rotación móvil( $k_j = 1,2,\dots$ ) se grafica mediante el vector de posición  $Z_2$  en su posición inicial 1 y por el vector de posición  $Z_2^j$  en su posición final  $j$ . De forma similar se representan los ángulos de rotación relativa medidos en la posición final  $j$  respecto a la inicial 1,  $\beta_{1j}$ ,  $\alpha_{2j}$  donde  $j(j = 2,3,4,\dots)$  indica la  $j$ -ésima posición. En esta metodología se considerarán como positivos los ángulos de rotación relativa en sentido antihorario y en esa forma son mostrados en la figura 1.6.1-2. Adicionalmente se muestra el vector de desplazamiento entre la posición inicial 1 y la final  $j$  denotado como  $\delta_j$  ( $j = 2,3,\dots$ ).

Como se observa se forma un lazo vectorial cerrado al cual se le aplica la ecuación:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \delta_j - \mathbf{Z}_1^j - \mathbf{Z}_2^j = \mathbf{0} \quad [1.6.1-4]$$

de donde, reacomodando los términos:

$$(\mathbf{Z}_1^j - \mathbf{Z}_1) + (\mathbf{Z}_2^j - \mathbf{Z}_2) = \delta_j \quad [1.6.1-5]$$

pero,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1^j &= \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} \\ \mathbf{Z}_2^j &= \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} \end{aligned} \quad [1.6.1-6]$$

dado que  $e^{i\beta_{1j}}$  y  $e^{i\alpha_{2j}}$  ( $j = 2,3,4,\dots$ ) para la  $j$ -ésima posición representan los operadores de rotación pura respecto a la posición inicial 1, entonces la ecuación 1.6.1-5 se simplifica a:

$$\mathbf{Z}_1 (e^{i\beta_{1j}} - 1) + \mathbf{Z}_2 (e^{i\alpha_{2j}} - 1) = \delta_j \quad [1.6.1-7]$$

para la  $j$ -ésima posición ( $j = 2,3,4,\dots$ ). La ecuación [1.6.1-7] se denomina **forma estándar de la diada** si  $\delta_j$  está prescrita así como  $\alpha_{2j}$  o bien  $\beta_{1j}$ . El vector desplazamiento para la posición  $j$ -ésima está dado por:

$$\delta_j = \mathbf{R}_j - \mathbf{R}_1 \quad [1.6.1-8]$$

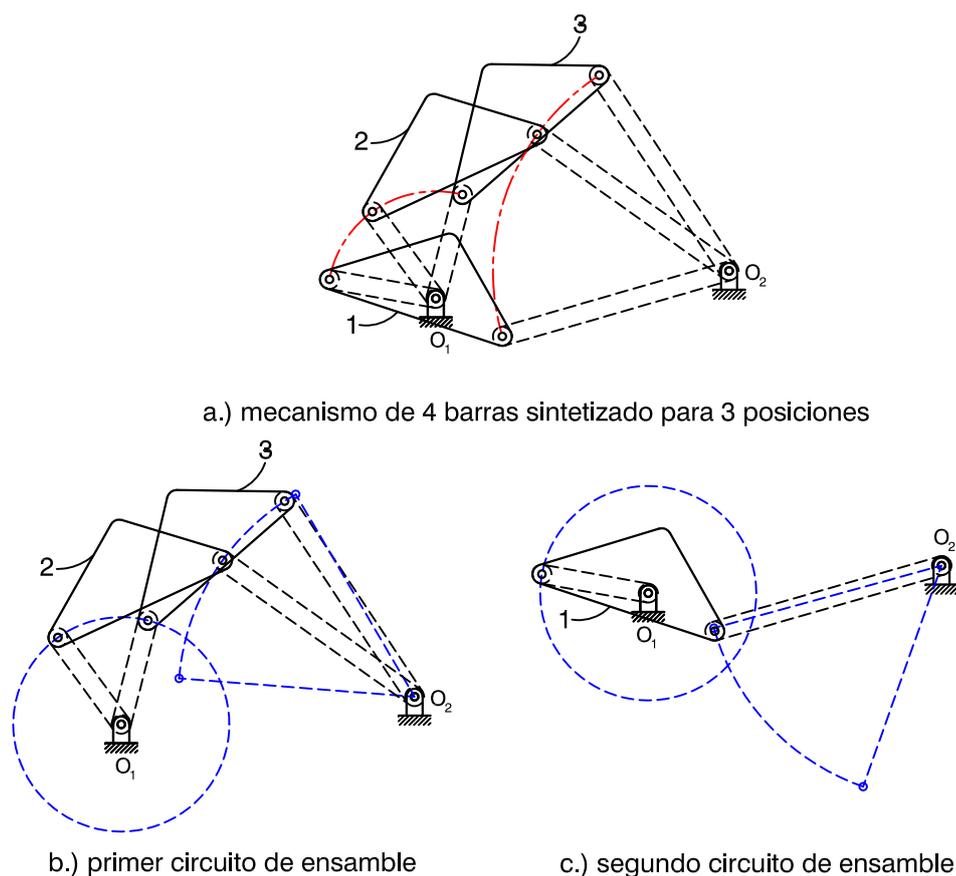
## 1.6.2 DEFECTOS DE RAMA Y ORDEN

Una vez ejecutada la síntesis de un mecanismo y halladas las dimensiones de sus eslabones es posible que el eslabonamiento así determinado posea uno o más de los siguientes tipos de defectos:

### 1.6.2.1 DEFECTO DE RAMA

Se presenta en el mecanismo sintetizado, cuando al cambiar de una posición de precisión a otra el mismo tendría que desensamblarse, es decir una posición de precisión pertenece a un circuito de ensamble mientras que la otra pertenece a un diferente circuito de ensamble. Un mecanismo que presente este tipo de defecto debe ser sintetizado de nuevo dado que este error no puede ser solucionado de forma alguna, por lo que es indispensable luego de sintetizar un mecanismo analizarlo o simularlo.

La figura siguiente muestra un mecanismo de cuatro barras y posiciones del acoplador que presentan defecto de rama.



**Fig. 1.6.2.1 – 1:** Defecto de rama en mecanismo de cuatro barras sintetizado.

Como se observa claramente al pasar el acoplador de la posición 1 y a la 2 está pasando del segundo circuito de ensamble al primero, lo que en términos prácti-

cos significa que debería desarmarse el circuito, como se indicó en el apartado 1.4, para que sea posible dicho cambio de posición; en consecuencia si la síntesis produce dicho eslabonamiento este presentaría un defecto de rama.

#### 1.6.2.2 DEFECTO DE ORDEN

Este defecto consiste en que las posiciones de precisión de un mecanismo no siguen el orden prescrito, a pesar de que sean alcanzadas por el mecanismo.

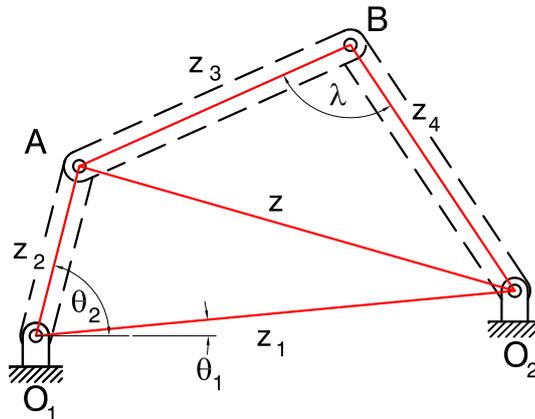
Si es importante la secuencia de las posiciones de precisión entonces este defecto conlleva un nuevo proceso de síntesis, caso contrario es un error de poca relevancia.

#### 1.7 ÁNGULO DE TRANSMISIÓN<sup>5</sup>

Un índice importante para valorar la calidad del mecanismo sintetizado es la medición del **ángulo de transmisión**  $\lambda$ . Este se define como el ángulo formado entre el eslabón acoplador y el eslabón de salida, como se muestra en la figura 1.7-1; aunque de forma más general se debe considerar como el valor absoluto del ángulo agudo del par de ángulos formados en la intersección del eslabón acoplador y de salida. El ángulo de transmisión no es un valor constante y varía de un valor mínimo a un máximo conforme el mecanismo se mueve.

---

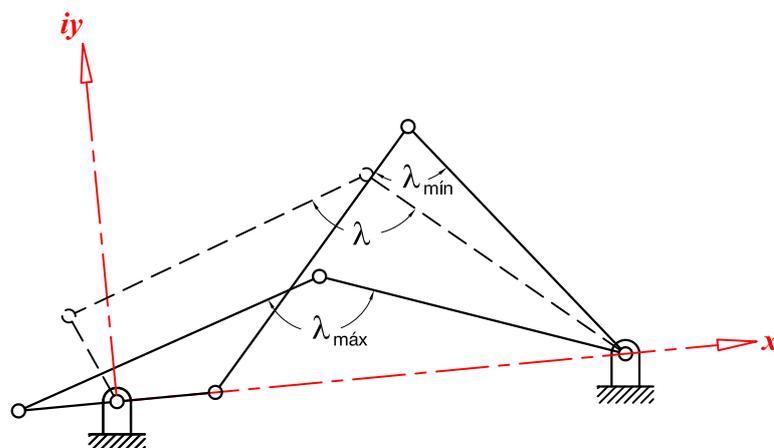
<sup>5</sup> El análisis mostrado en este apartado es válido para un mecanismo de cuatro barras manivela-balancín y para uno doble manivela.



**Fig. 1.7 – 1:** Angulo de transmisión de un mecanismo de cuatro barras.

El valor óptimo del ángulo de transmisión es de  $90^\circ$ , dado que con esta geometría el acoplador transmite al eslabón de salida la máxima fuerza y velocidad posibles. Este ángulo es imposible mantenerlo debido al movimiento de los eslabones en el mecanismo, sin embargo se considera aceptable si el ángulo de transmisión está en el rango  $45^\circ < \lambda < 135^\circ$ ; valores fuera de este rango generan una transmisión ineficiente de movimiento y fuerza.

El valor mínimo y máximo del ángulo de transmisión se presentan cuando el eslabón motriz se halla en posición horizontal (respecto al eje real) como se muestra en la figura 1.7-2:



**Fig. 1.7 – 2:** Valores mínimo y máximo del ángulo de transmisión de un mecanismo de cuatro barras.

Utilizando la figura 1.7-1 y aplicando la ley de cosenos al triángulo  $O_2AB$ ,

$$z^2 = z_3^2 + z_4^2 - 2z_3z_4 \cos(\lambda) \quad [1.7-1]$$

entonces,

$$\cos(\lambda) = \frac{z_3^2 + z_4^2 - z^2}{2z_3z_4} \quad [1.7-2]$$

sustituyendo en [1.7-2] la expresión [1.4-10],

$$\cos(\lambda) = \frac{z_3^2 + z_4^2 - z_1^2 - z_2^2 - 2z_1z_2 \cos(\theta_1 - \theta_2)}{2z_3z_4} \quad [1.7-3]$$

Si se considera el eje real la semirrecta que pasa por  $O_1$  y  $O_2$ , entonces  $\theta_1 = 0$ , por lo que:

$$\begin{aligned} \cos(\lambda) &= \frac{z_3^2 + z_4^2 - z_1^2 - z_2^2 - 2z_1z_2 \cos(-\theta_2)}{2z_3z_4} \\ \cos(\lambda) &= \frac{z_3^2 + z_4^2 - z_1^2 - z_2^2 - 2z_1z_2 \cos(\theta_2)}{2z_3z_4} \end{aligned} \quad [1.7-4]$$

y,

$$\lambda = \arccos\left(\frac{z_3^2 + z_4^2 - z_1^2 - z_2^2 - 2z_1z_2 \cos(\theta_2)}{2z_3z_4}\right) \quad [1.7-5]$$

con esta expresión se puede obtener el ángulo de transmisión para cualquier posición angular del eslabón motriz.

Además  $\lambda$  adquirirá sus valores mínimo y máximo cuando  $\theta_2 = 0^\circ$  y  $\theta_2 = 180^\circ$ , respectivamente, de lo cual:

$$\lambda_{\min} = \arccos \left[ \frac{z_3^2 + z_4^2 - (z_1 - z_2)^2}{2z_3z_4} \right] \quad [1.7-6]$$

$$\lambda_{\max} = \arccos \left[ \frac{z_3^2 + z_4^2 - (z_1 + z_2)^2}{2z_3z_4} \right] \quad [1.7-7]$$

### **Caso 3:**

Para el mecanismo del caso 1, se determina el rango del ángulo de transmisión del mismo.

La implementación en MathCAD para el cálculo del ángulo de transmisión es:

$$\lambda(\theta_2) := \arccos \left( \frac{z_3^2 + z_4^2 - z_1^2 - z_2^2 - 2 \cdot z_1 \cdot z_2 \cdot \cos(\theta_2)}{2 \cdot z_3 \cdot z_4} \right)$$

$$\lambda_{\max} := \arccos \left[ \frac{z_3^2 + z_4^2 - (z_1 + z_2)^2}{2 \cdot z_3 \cdot z_4} \right]$$

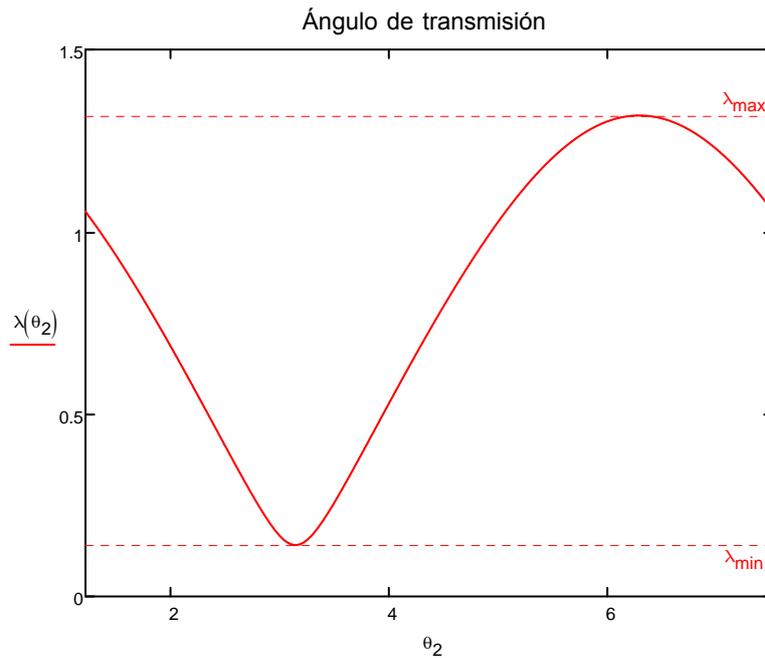
$$\lambda_{\min} := \arccos \left[ \frac{z_3^2 + z_4^2 - (z_1 - z_2)^2}{2 \cdot z_3 \cdot z_4} \right]$$

sus valores máximo y mínimo, son:

$$\lambda_{\min} = 8.059 \text{ deg}$$

$$\lambda_{\max} = 75.559 \text{ deg}$$

y su gráfica para una vuelta del mecanismo es:

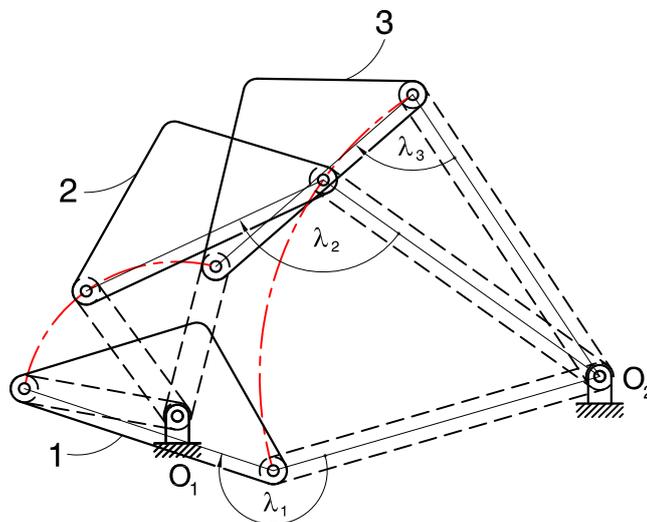


**Fig. 1.7 – 3:** Gráfica del ángulo de transmisión vs. el ángulo de entrada para el caso 1

Se puede concluir del análisis que las dimensiones del mecanismo no son las adecuadas para un buen rendimiento, porque existen valores muy bajos del ángulo de transmisión.

El ángulo de transmisión además proporciona un procedimiento analítico muy sencillo para determinar la existencia de un defecto de rama como se ejemplifica a continuación:

Se considera el mecanismo sintetizado de la figura 1.6.2.1-1 repetido a continuación:



**Fig. 1.7 – 4:** Mecanismo de la fig. 1.6.2.1-1

En él se han graficado los ángulos de transmisión en cada posición medidos en sentido horario desde el seguidor hacia el acoplador y se han nominado  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$ , entonces el mecanismo estaría libre de defectos de rama si, en todas las posiciones de precisión, se cumpliese que  $0 < \lambda_i < \pi$  ( $i = 1, 2, 3$ ) o  $\pi < \lambda_i < 2\pi$  ( $i = 1, 2, 3$ ), pero en el caso ejemplificado  $\lambda_2$  y  $\lambda_3$  están en el rango  $(0, \pi)$  mientras que  $\pi < \lambda_1 < 2\pi$  por lo que se deduce que el mecanismo posee un defecto de rama tal y como se ha demostrado gráficamente en el apartado 1.6.2.1.

## 1.8 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

- 1 Suh, C.H. y Radcliffe, C. W. (1978). *Kinematics and Mechanism Design*. (1ra Edición). New York, Estados Unidos: John Wiley & Sons.
- 2 Sandor, G. N. (1959). *A General Complex Number Method for Plane Kinematic Synthesis with Applications*. (Disertación doctoral). Columbia University, Ann Arbor, Estados Unidos.
- 3 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1998). *Diseño de Mecanismos: Análisis y Síntesis*. (3ra edición). México, México: Ed Pearson. Caps: 1, 3, 4 y 8.
- 4 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. (1ra Edición). New Jersey, Estados Unidos: Ed Prentice-Hall. Caps: 1 y 2.
- 5 Norton, R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria: Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos*. (5ta Edición) México, México: Ed. McGraw-Hill. Caps: 1, 2, 3, 4, 6 y 7.
- 6 Myszka, D. H. (2012). *Máquinas y Mecanismos*. (4ta Edición) México, México: Ed. Pearson. Caps: 1, 4 y 5.

- 7 Russell, K. Shen, Q. y Sodhi, R.S. (2014). *Mechanism Design: Visual and Programmable Approaches*. (1ra Edición). Boca Raton, Estados Unidos: CRC Press. Caps: 1, 2 y 3.
- 8 Gans, R. (1991). *Analytical Kinematics: Analysis and Synthesis of Planar Mechanisms*. (1ra Edición). Stoneham, Estados Unidos: Ed. Butterworth-Heinemann. Caps: 1, 2, 5 y 6.
- 9 Burton, P. (1979) *Kinematics and Dynamics of Planar Machinery*. (1ra Edición). New Jersey, Estados Unidos: Ed. Prentice-Hall. Cap. 1.
- 10 Cleghorn, W. L. (2010) *Mechanics of Machines*. (1ra Edición). New York, Estados Unidos: Ed. Oxford Press. Caps: 1, 2 y 4.
- 11 Mabie, H. H. y Reinholtz, C. F. (1987), *Mechanisms and Dynamics of Machinery*. (4ta Edición). New York, Estados Unidos: Ed. Wiley & Sons. Cap. 11.
- 12 Manual del usuario MathCAD versión 15
- 13 Manual del usuario Artas SAM versión 6.1
- 14 Maxfield, B. (2006) *Engineering with MathCAD*. (1ra. Edición). New York, Estados Unidos: Ed. Butterworth-Heinemann. Caps: 9, 11, 14 y 15.
- 15 Maxfield, B. (2009). *Essential MathCAD for Engineering, Science and Math*. (2da Edición). Waltham, Estados Unidos: Ed. Academic Press. Caps: 5, 7, 9 y 12.

## CAPÍTULO 2

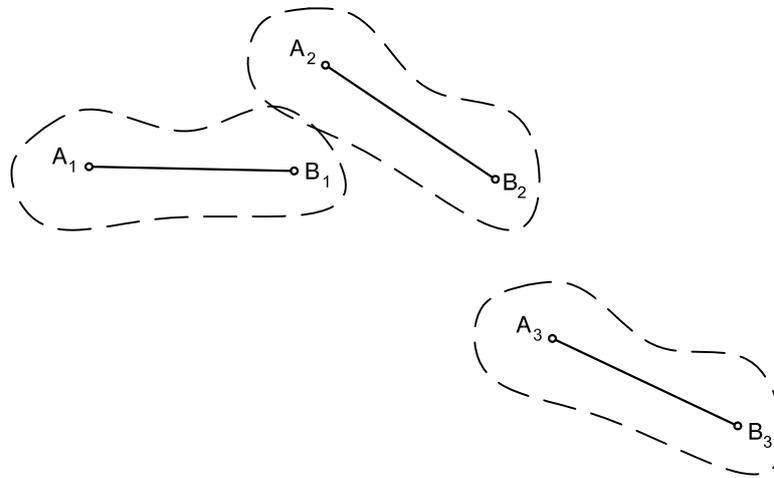
# SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS PARA TRES POSICIONES PRESCRITAS Y SÍNTESIS DE ORDEN SUPERIOR

El presente capítulo procederá a desarrollar los métodos gráfico y analítico para la síntesis de un mecanismo de cuatro barras para tres posiciones prescritas, incluyendo el caso de pivotes fijos dados; todas las ecuaciones serán generadas por el método de puntos de precisión con el uso de números complejos introducido en el capítulo anterior. Adicionalmente se tratará la metodología alternativa del uso de los círculos de puntos centrales y puntos circulares así como una introducción a la síntesis de orden superior.

## 2.1 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA TRES POSICIONES PRESCRITAS SIN ESPECIFICACIÓN DE APOYOS FIJOS.

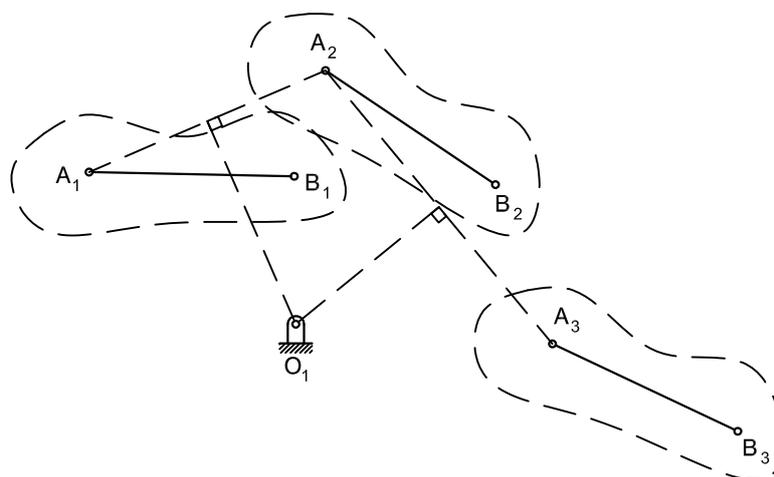
### 2.1.1 MÉTODO GRÁFICO.

Se considera el problema de diseñar un mecanismo de cuatro barras si se conocen tres posiciones sucesivas del acoplador. Las posiciones del acoplador se representan mediante las líneas  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  y  $A_3B_3$  como se muestra en la figura 2.1.1-1:



**Fig. 2.1.1 – 1:** Posiciones del acoplador

Paso 1: Se trazan las líneas  $A_1A_2$  y  $A_2A_3$ . Luego las perpendiculares medias de los segmentos  $A_1A_2$  y  $A_2A_3$ . La intersección de las mencionadas perpendiculares marca la posición del primer pivote fijo  $O_1$ .



**Fig. 2.1.1 – 2:** Paso 1

Paso 2: Se repite el proceso del paso anterior entre los puntos  $B_1$ ,  $B_2$  y  $B_3$ , encontrándose la ubicación del segundo pivote fijo  $O_2$ .

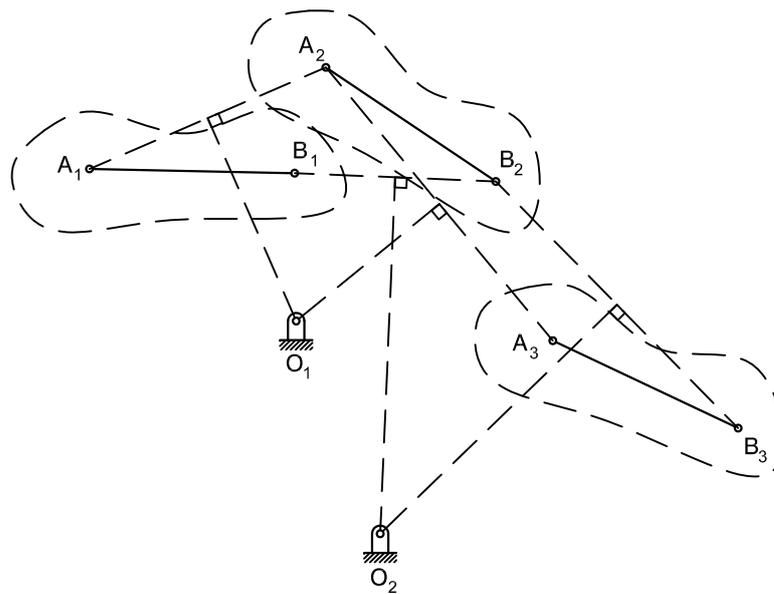


Fig. 2.1.1 – 3: Paso 2

Paso 3: El mecanismo buscado es el cuadrilátero articulado  $O_1A_1B_1O_2$ .

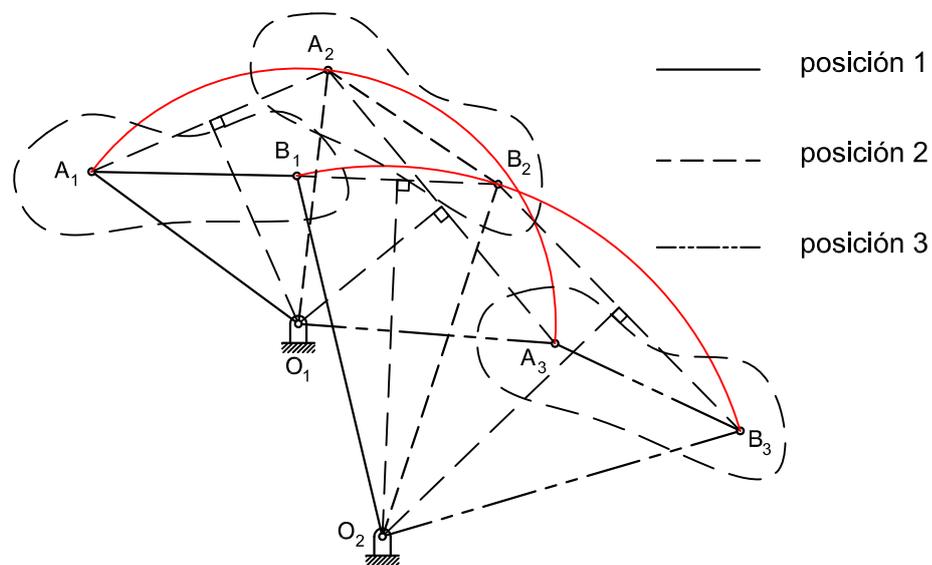


Fig. 2.1.1 – 4: Paso 3

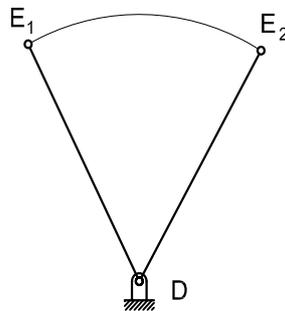
Como se puede observar de la gráfica el eslabonamiento sintetizado conduce al eslabón acoplador a través de las posiciones 1, 2 y 3. Sin embargo si se elige una línea diferente AB dentro del acoplador para determinar su posición se tendrá una solución distinta, así entonces para la determinación de  $O_1$  existen  $\infty^2$  posibles

soluciones dado que existen infinitas posibilidades de elección para el conjunto de puntos  $A_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  e infinitas para el conjunto de puntos  $B_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .

El eslabonamiento resultante de este procedimiento puede cumplir cualquier categoría de Grashof; si el mecanismo es un doble balancín, un triple balancín o un balancín manivela entonces se requerirá de una diada motriz o impulsora para controlar y limitar su movimiento a las posiciones especificadas. Adicionalmente la solución hallada por este procedimiento debe ser simulada para verificar que no existan defectos de rama u orden.

La diada motriz también se puede sintetizar gráficamente como se explica a continuación:

Considérese el problema de diseñar una diada motriz para generar la oscilación del eslabón DE de la posición  $DE_1$  a la posición  $DE_2$  como se muestra en la figura 2.1.1-5:



**Fig. 2.1.1 – 5:** Eslabón DE entre las posiciones 1 y 2

**Paso 1:** Con un radio especificado centrado en D se genera un arco que corta a las líneas  $DE_1$  y  $DE_2$  en los puntos  $C_1$  y  $C_2$ .

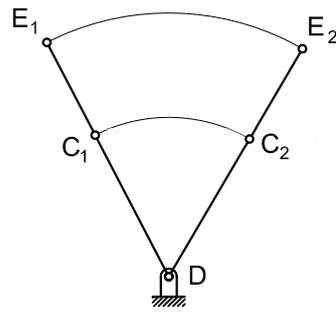


Fig. 2.1.1 – 6: Paso 1

Paso 2: Sobre un punto arbitrario de la línea extendida  $C_1C_2$  se fija un punto A que será el pivote fijo de la diada motriz.

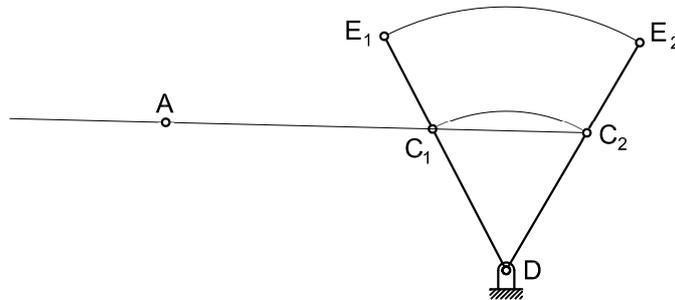


Fig. 2.1.1 – 7: Paso 2

Paso 3: El eslabón motor de la diada conductora tendrá como longitud

$$\overline{AB_1} = \overline{AB_2} = \frac{\overline{C_1C_2}}{2}, \text{ como se muestra en la figura 2.1.1-8:}$$

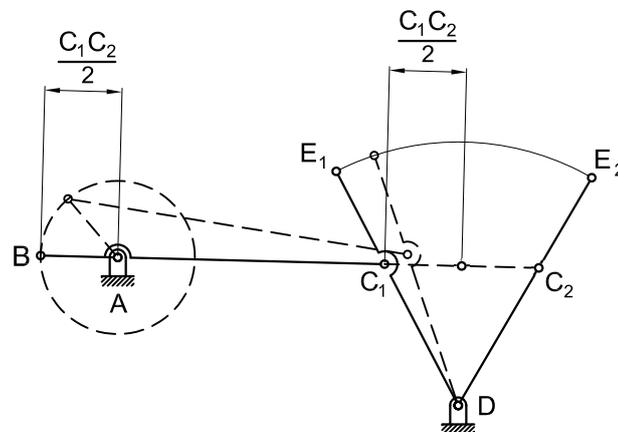
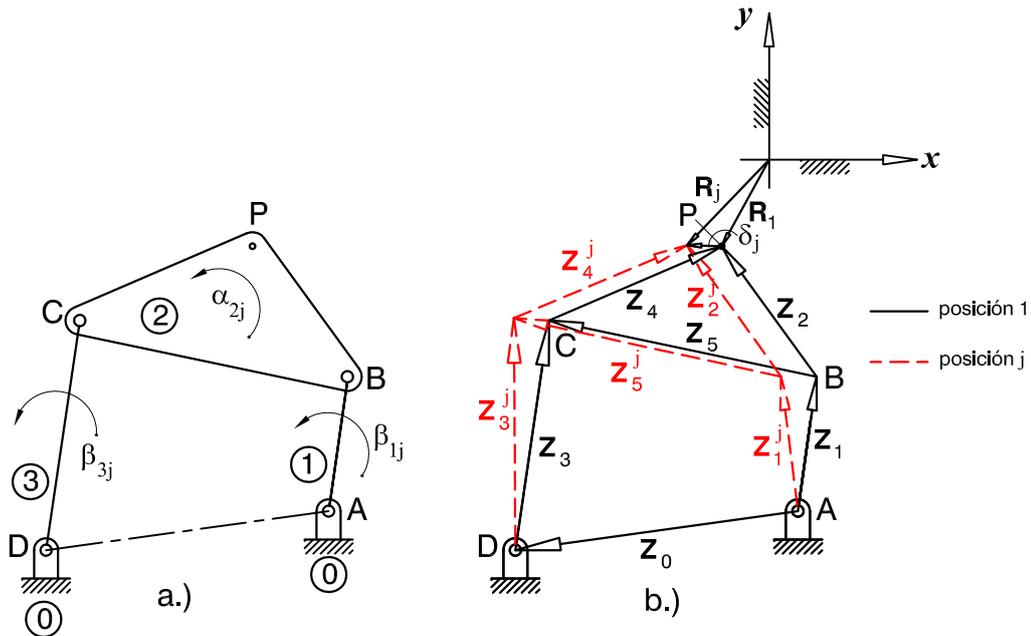


Fig. 2.1.1 – 8: Paso 3

Así entonces, la diada matriz ABC mediante un giro completo en el eslabón AB producirá una rotación definida del eslabón DE entre la posiciones  $DE_1$  y  $DE_2$  tanto de ida como de vuelta.

### 2.1.2 MÉTODO ANALÍTICO.

Para un mecanismo de cuatro barras, se considera la figura 2.1.2-1,



**Fig. 2.1.2 – 1:** a) Mecanismo de cuatro barras con su nomenclatura para los ángulos de giro de sus eslabones, b) Representación vectorial del mecanismo

En este esquema se pueden identificar las siguientes variables:

$\beta_{1j}$ , ángulo relativo de desplazamiento angular del eslabón motriz 1 desde la posición inicial 1 a la  $j$ -ésima posición.

$\beta_{3j}$ , ángulo relativo de desplazamiento angular del eslabón de salida 3 desde la posición inicial 1 a la  $j$ -ésima posición.

$\alpha_{2j}$ , ángulo relativo de desplazamiento angular del eslabón acoplador 2 desde la posición inicial 1 a la  $j$ -ésima posición.

$\delta_j$ , vector relativo de desplazamiento del punto de precisión P del eslabón acoplador 2 desde la posición inicial 1 a la  $j$ -ésima posición.

$Z_0, Z_1, Z_2, Z_3, Z_4$  y  $Z_5$ , vectores de posición del mecanismo.

$\mathbf{Z}_1^j, \mathbf{Z}_2^j, \mathbf{Z}_3^j, \mathbf{Z}_4^j$  y  $\mathbf{Z}_5^j$ , vectores de posición para la j-ésima posición del mecanismo

Con el objetivo de obtener las dimensiones del mecanismo,  $\mathbf{Z}_0, \mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4$  y  $\mathbf{Z}_5$ , propósito de la síntesis, será necesario definir algunas de las variables, llamadas *variables prescritas*<sup>4</sup>, mientras que otras podrán tomar ciertos valores arbitrarios por lo que se denominarán *variables de elección libre*; la meta final de las variables prescritas y las de elección libre es plantear un sistema de ecuaciones que pueda ser resuelto y por ende se logren calcular las dimensiones del mecanismo.

En la fig. 2.1.2-1, se visualizan dos diadas: diada  $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2$  y diada  $\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_4$ .

Para la diada  $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2$ , se puede escribir:

$$\mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{1j}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{2j}} - 1) = \delta_j \quad [2.1.2-1]$$

y para la diada  $\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_4$  se tiene:

$$\mathbf{Z}_3(e^{i\beta_{3j}} - 1) + \mathbf{Z}_4(e^{i\alpha_{2j}} - 1) = \delta_j \quad [2.1.2-2]$$

Si se prescriben los ángulos  $\beta_{1j}$  y  $\beta_{3j}$  y los desplazamientos  $\delta_j$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) con los ángulos  $\alpha_{2j}$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) como variables de elección libre se enfrenta un problema de síntesis dimensional de **generación de trayectoria**, mientras que si se prescriben los ángulos  $\beta_{1j}$  y  $\beta_{3j}$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) con los ángulos  $\alpha_{2j}$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) y  $\mathbf{Z}_3$ , vector posición del eslabón de salida, como variables de elección libre entonces se afronta un problema de síntesis dimensional de **generación de función**<sup>5</sup>, finalmente si se prescriben los ángulos  $\alpha_{2j}$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) y los desplazamientos  $\delta_j$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) con los ángulos  $\beta_{1j}$  y  $\beta_{3j}$  ( $j = 2,3,4\dots$ ) como variables de elección libre entonces se presenta un problema de síntesis dimensional de **generación de movimiento o guiado de cuerpo**.

<sup>4</sup> Estas son las variables de diseño del mecanismo.

<sup>5</sup> En el apéndice C se desarrolla la metodología de cuatro posiciones de precisión con el uso de números complejos para el caso de generación de función, muy útil también en el diseño de aplicaciones industriales.

La siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el problema de generación de movimiento:

**Tabla 2.1.2-1:** Estrategia para la solución de las ecuaciones de síntesis de generación de movimiento

Ecuación No.	Variables prescritas	Incógnitas	Variables de elección libre
[2.1.2-1]	$\delta_j, \alpha_{2j}$	$\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2$	$\beta_{1j}$
[2.1.2-2]	$\delta_j, \alpha_{2j}$	$\mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4$	$\beta_{3j}$

Para tres puntos de precisión:

La diada  $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2$  genera el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{12}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{22}} - 1) &= \delta_2 \\ \mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{13}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{23}} - 1) &= \delta_3 \end{aligned} \quad [2.1.2-3]$$

y la diada  $\mathbf{Z}_3\mathbf{Z}_4$  produce el sistema:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_3(e^{i\beta_{32}} - 1) + \mathbf{Z}_4(e^{i\alpha_{22}} - 1) &= \delta_2 \\ \mathbf{Z}_3(e^{i\beta_{33}} - 1) + \mathbf{Z}_4(e^{i\alpha_{23}} - 1) &= \delta_3 \end{aligned} \quad [2.1.2-4]$$

resolviendo (2.1.2-3) y (2.1.2-4), por la aplicación de la regla de Cramer se tiene:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}} \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}} \quad [2.1.2-5]$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{32}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{33}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}} \quad \mathbf{Z}_4 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{32}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_{33}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{32}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{33}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}} \quad [2.1.2-6]$$

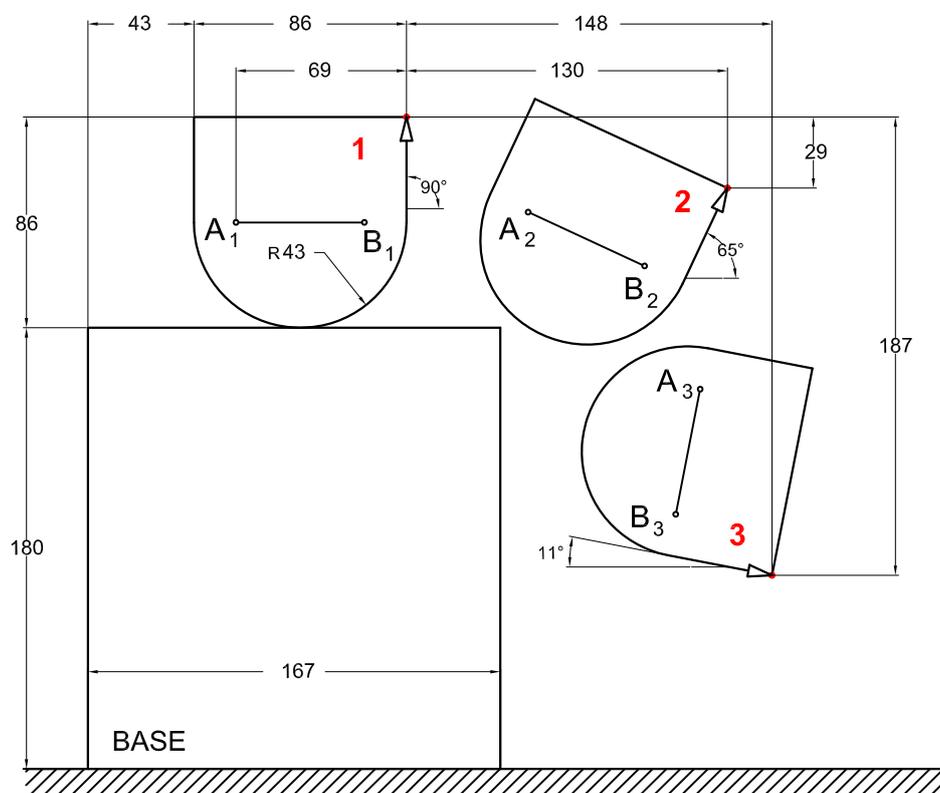
los valores restantes,  $\mathbf{Z}_0$  y  $\mathbf{Z}_5$ , se obtienen a partir de las ecuaciones de circuito:

$$\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad [2.1.2-7]$$

$$\mathbf{Z}_5 = \mathbf{Z}_2 - \mathbf{Z}_4 \quad [2.1.2-8]$$

### Caso 1:

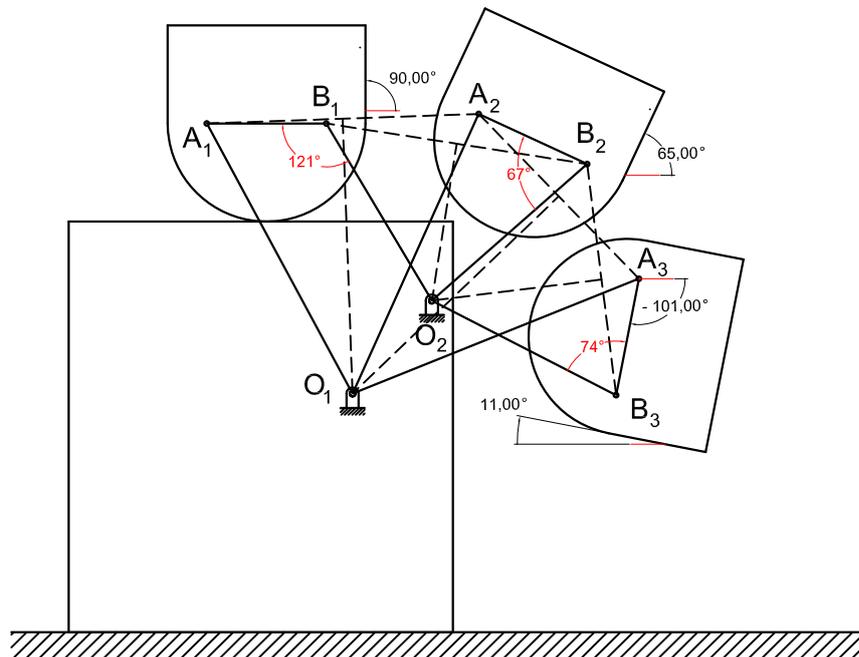
Se sintetiza un mecanismo de cuatro barras para mover el objeto mostrado en la figura 2.1-1, a través de las tres posiciones mostradas en la misma, tanto de ida como de retorno (1-2-3-2-1), con los puntos A y B como pivotes móviles. Se va a emplear el procedimiento gráfico y el analítico.



**Fig. 2.1 – 1:** Posiciones para síntesis del mecanismo del caso 1

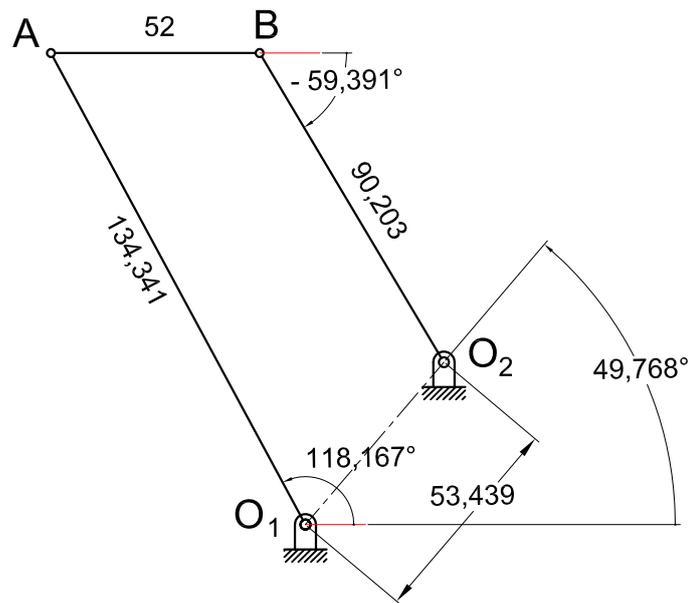
Método gráfico

Se procede como se ha explicado en el apartado 2.1.1: el punto de corte de las perpendiculares medias de los segmentos  $A_1A_2$  y  $A_2A_3$  generan el pivote  $O_1$ , mientras que el cruce de las perpendiculares medias a las líneas  $B_1B_2$  y  $B_2B_3$  produce el pivote  $O_2$ , tal como se muestra en el gráfico 2.1-2:



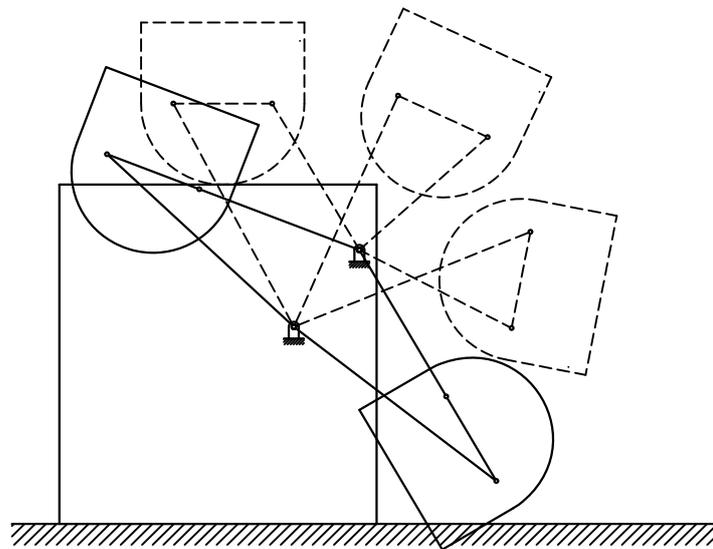
**Fig. 2.1. – 2:** Síntesis gráfica del caso 1

El mecanismo sintetizado  $O_1ABO_2$ , entonces se dimensiona y sus medidas, en la posición inicial, se muestran a continuación:



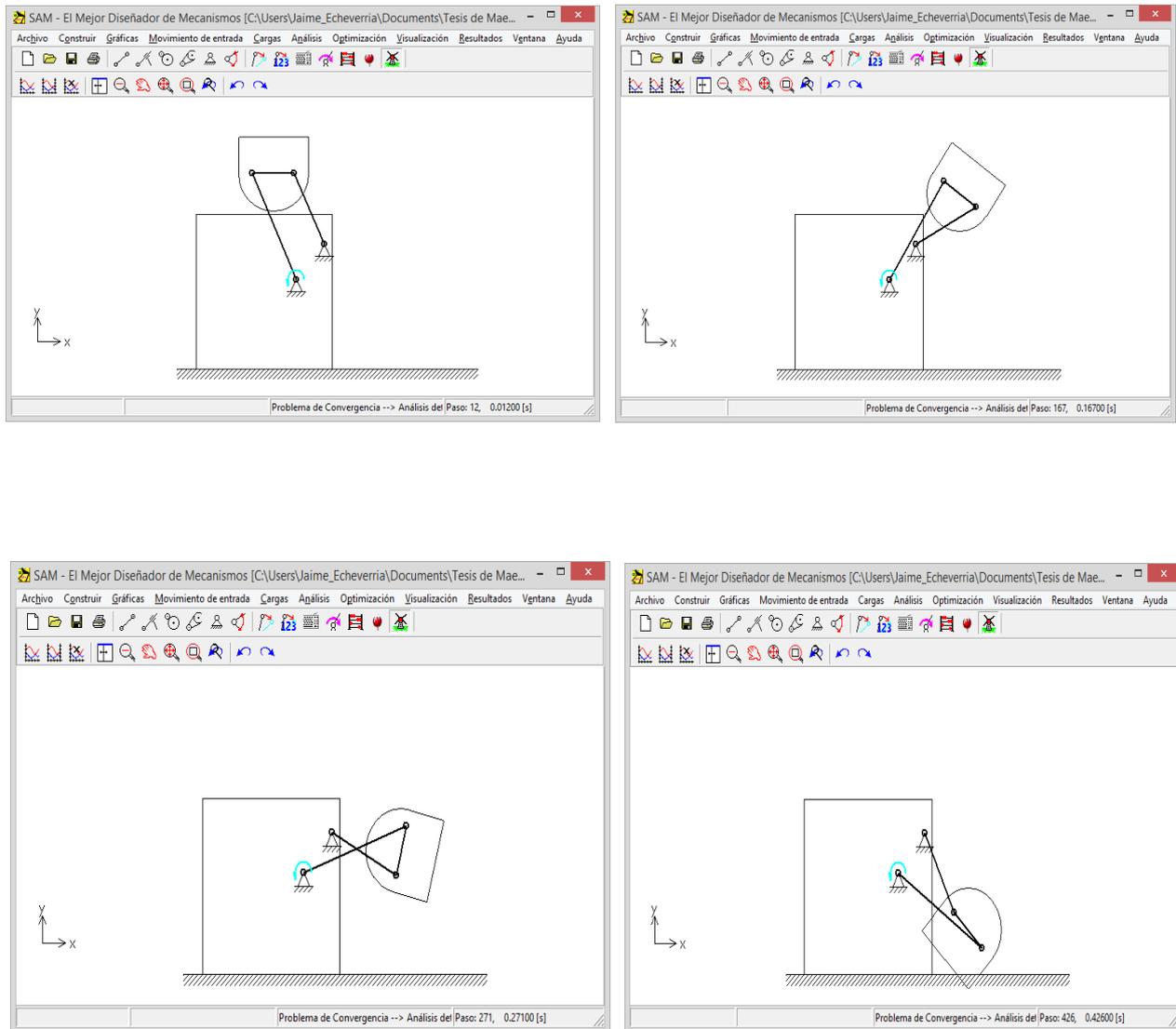
**Fig. 2.1. – 3:** Dimensiones del mecanismo sintetizado en el caso 1

Aplicando el criterio de Grashof se categoriza al mecanismo como del tipo triple balancín, y de la figura 2.1-2 se puede inferir fácilmente que el mecanismo no va a poseer defecto de rama, al observar que los ángulos de transmisión están en el rango de  $(0, \pi)$ ; sin embargo es poco probable que al llegar a la tercera posición de precisión, luego de haber pasado por la primera y la segunda, empiece el regreso hacia la posición inicial. Esta conjetura se vuelve una certeza al dibujar las posiciones extremas del mecanismo como se muestran en la figura 2.1-4:



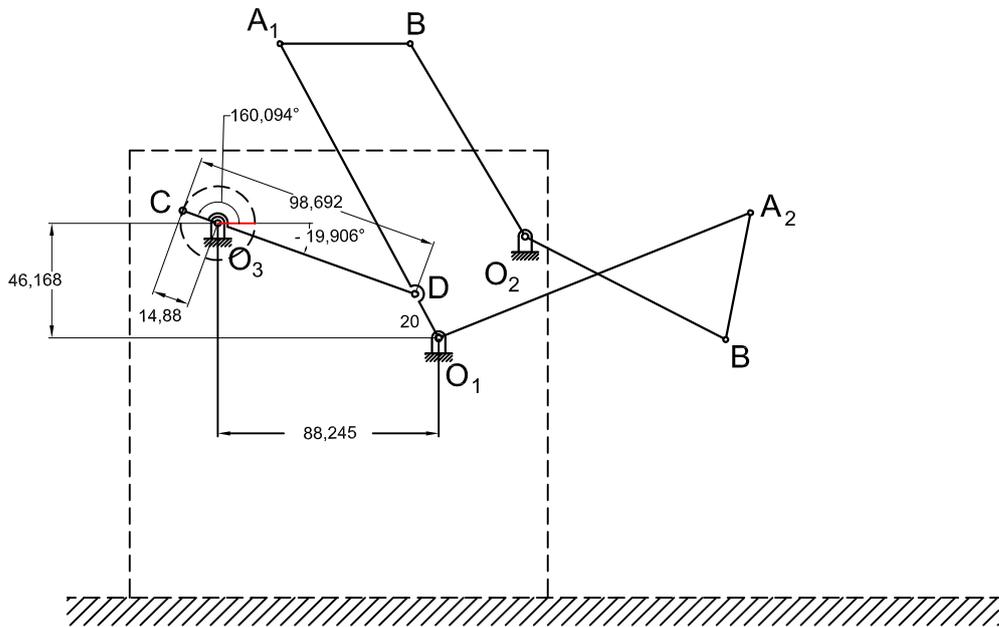
**Fig. 2.1 – 4:** Posiciones extremas del mecanismo sintetizado en el caso 1

Una simulación en Artas SAM del mecanismo sintetizado cuyas capturas de pantalla se muestran, confirma que el mecanismo logra las posiciones prescritas pero no se detiene y retorna a partir de la última posición.



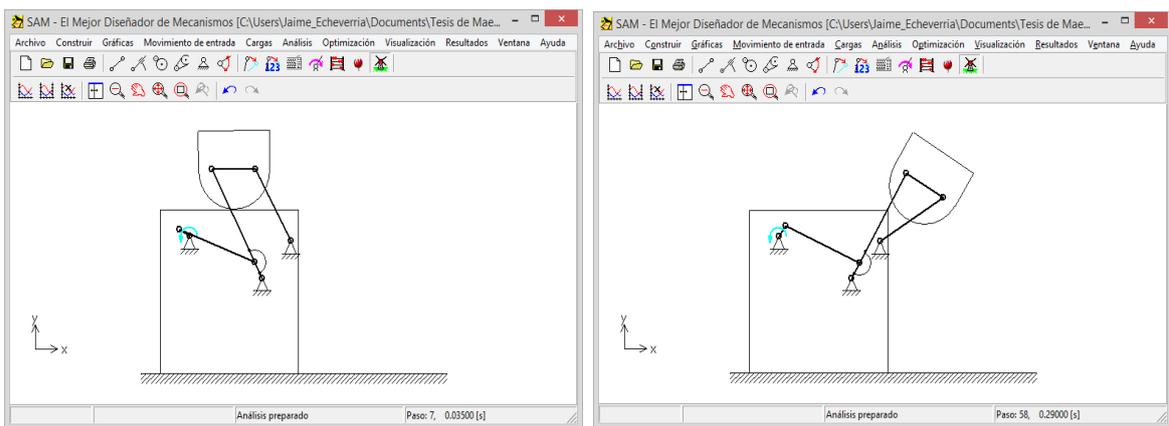
**Fig. 2.1 – 5:** Simulación para el caso 1 en Artas SAM

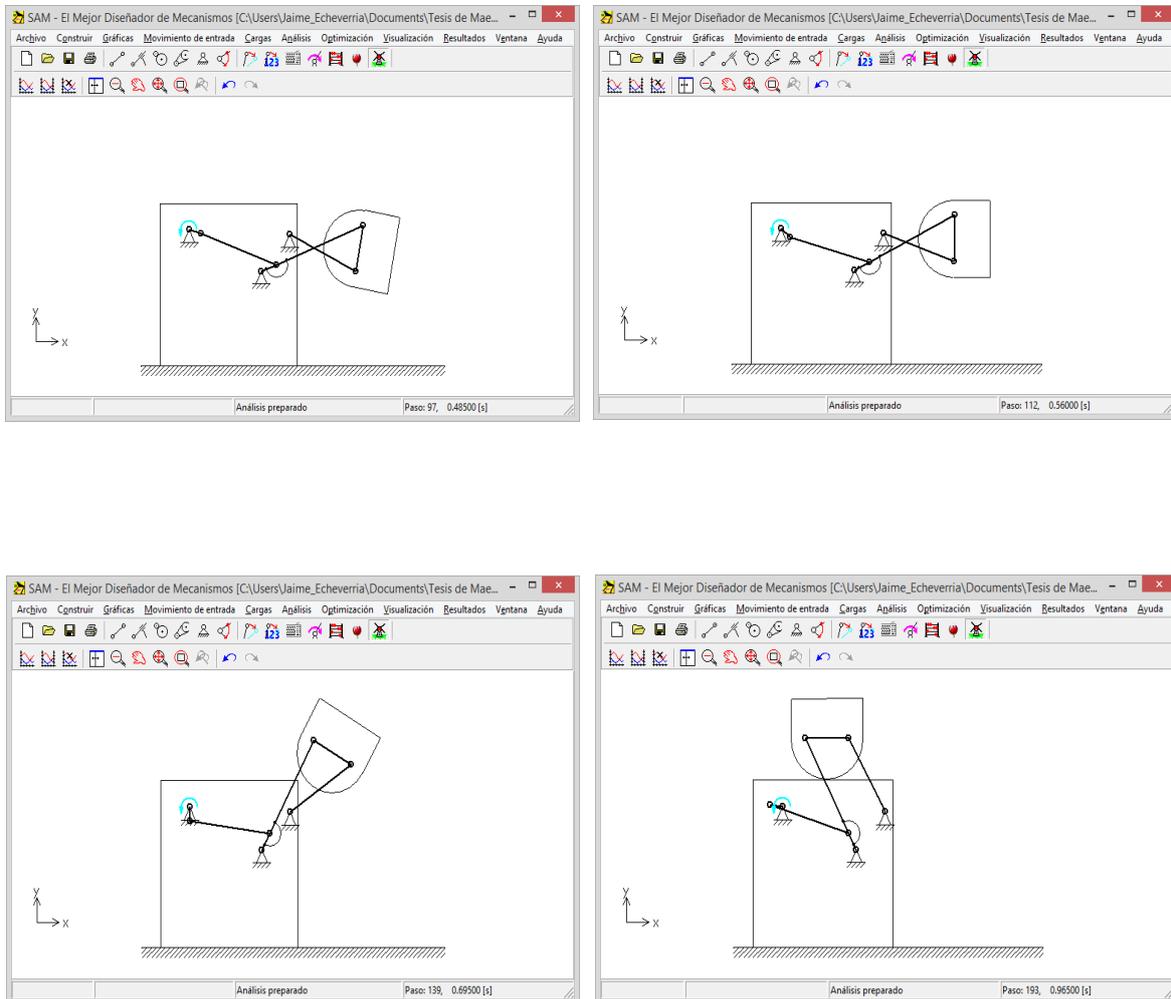
Para viabilizar el retorno por las posiciones de precisión 1 y 2 a partir de alcanzar la posición 3 es necesario añadir una diada motriz como se explico en el apartado 2.1.1; la diada motriz sintetizada y sus dimensiones obtenidas se muestran en la figura 2.1-6:



**Fig. 2.1 – 6:** Diada motriz para el mecanismo sintetizado en el caso 1

El mecanismo de seis barras así diseñado cumple con lo pedido por el enunciado del caso, como se demuestra con la secuencia de imágenes capturadas de la simulación generada con Artas SAM:





**Fig. 2.1 – 7:** Simulación en Artas SAM para el mecanismo con diada motriz

### Método analítico

El gráfico 2.1-8 muestra las variables de diseño o prescritas y las de elección libre para el mecanismo de acuerdo a la notación desarrollada en el apartado 2.1.2:

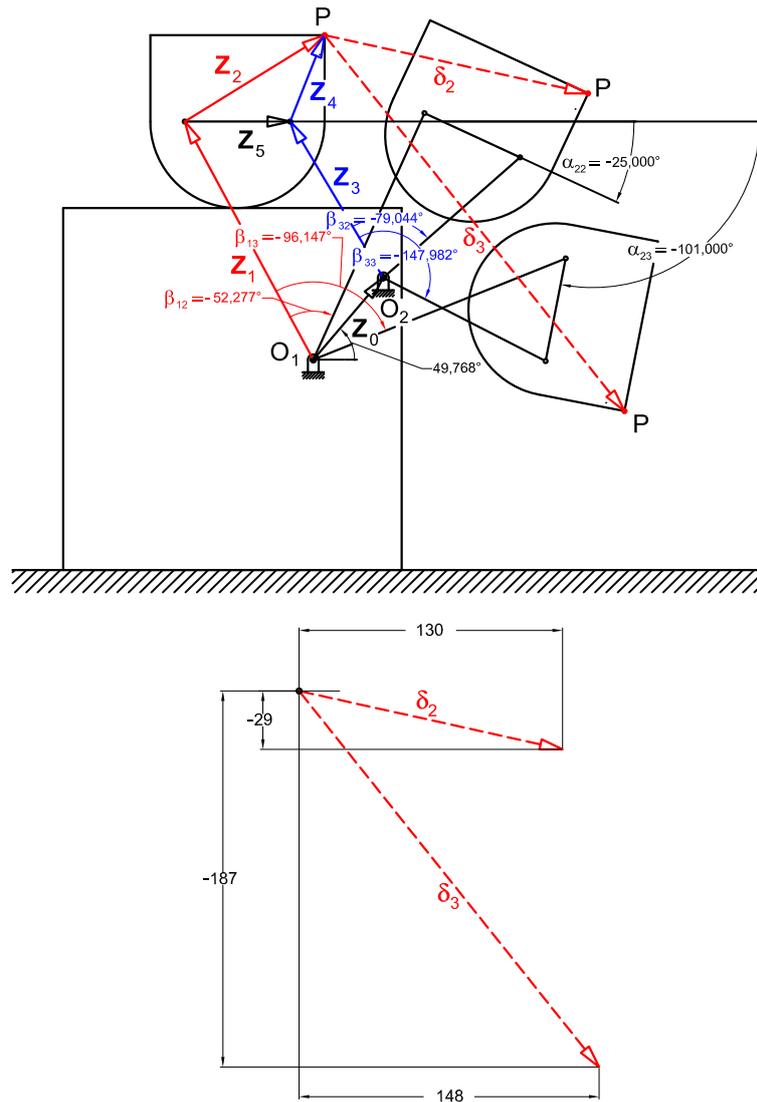


Fig. 2.1 – 8: Variables de diseño y de elección libre para el caso 1

Una implementación sencilla desarrollada en MathCAD para el cálculo por el método analítico se incluye a continuación:

**Variables de diseño:**

$$i := \sqrt{-1} \quad \delta_2 := 130 - 29 \cdot i \quad \delta_3 := 148 - 187 \cdot i \quad \alpha_{22} := -25 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \alpha_{23} := -101 \cdot \frac{\pi}{180}$$

**Variables de elección libre:**

$$\beta_{12} := -52.277 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_{13} := -96.147 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_{32} := -79.044 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_{33} := -147.982 \cdot \frac{\pi}{180}$$

**Síntesis de las diadas  $Z_1Z_2$  y  $Z_3Z_4$ :**

$$Z_1 := \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 \\ e^{i \cdot \beta_{13}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$Z_2 := \frac{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{13}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 \\ e^{i \cdot \beta_{13}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$Z_3 := \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{32}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 \\ e^{i \cdot \beta_{33}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$Z_4 := \frac{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{32}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{33}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{32}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 \\ e^{i \cdot \beta_{33}} - 1 & e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$Z_0 := Z_1 + Z_2 - Z_3 - Z_4 \quad Z_5 := Z_2 - Z_4$$

y los resultados generados son:

**Resultados:**

$$Z_0 = 34.515 + 40.797i$$

$$Z_1 = -63.415 + 118.433i$$

$$|Z_0| = 53.439 \quad \arg(Z_0) = 49.768 \cdot \text{deg}$$

$$|Z_1| = 134.342 \quad \arg(Z_1) = 118.167 \cdot \text{deg}$$

$$Z_3 = -45.93 + 77.634i$$

$$Z_5 = 52 - 1.28i \times 10^{-3}$$

$$|Z_3| = 90.204 \quad \arg(Z_3) = 120.609 \cdot \text{deg}$$

$$|Z_5| = 52 \quad \arg(Z_5) = -1.41 \times 10^{-3} \cdot \text{deg}$$

*Posición del primer pivote desde P:*

*Posición del segundo pivote desde P:*

$$-Z_1 - Z_2 = -5.585 - 161.432i$$

$$-Z_3 - Z_4 = 28.93 - 120.634i$$

Como se observa los resultados obtenidos son idénticos a los del método gráfico tal cual debe suceder. Sin embargo, no es una solución única ya que existe infinito número de valores de  $\beta_{12}$  e infinito número de valores de  $\beta_{13}$  para elegir, lo que significa que hay  $\infty^2$  posibles soluciones, para la diada  $Z_1Z_2$  y lo mismo para la diada  $Z_3Z_4$ . El método gráfico proporciona exclusivamente una sola solución de las muchísimas existentes. Afortunadamente la síntesis analítica de tres posiciones se puede ayudar de metodología gráfica para la exploración de las soluciones, pero en el caso de mayor número de puntos de precisión o de diseño de mecanismos más complejos donde estas técnicas gráficas generalmente no están disponibles la única forma de llegar a una solución factible es el ensayo y el error a través de métodos más eficaces con la ayuda de una implementación computacional.

## 2.2 SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA TRES POSICIONES PRESCRITAS MEDIANTE LA ESPECIFICACIÓN DE APOYOS FIJOS.

Usualmente en diseños industriales se conocen las posibles ubicaciones de los pivotes del bastidor antes que los ángulos de rotación del eslabón de entrada y del seguidor del mecanismo de cuatro barras, en cuyo caso se aplica la metodología de la especificación de apoyos fijos que va a ser desarrollado.

### 2.2.1 MÉTODO GRÁFICO

A continuación se detallan todos los pasos requeridos para la resolución gráfica del problema de hallar un mecanismo de cuatro barras si se proporciona la posición de los puntos de bastidor:

Paso 1: Se considera las posiciones  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  y  $A_3B_3$  del acoplador y las posiciones  $O_1$  y  $O_2$  de los pivotes fijos como conocidos, trazándose una línea entre ellos.

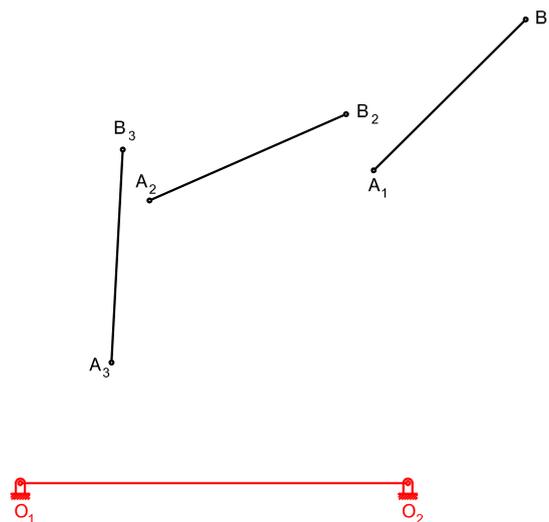
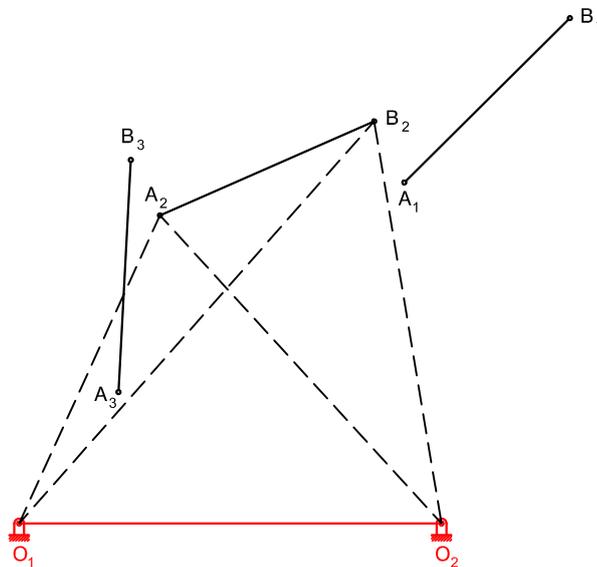


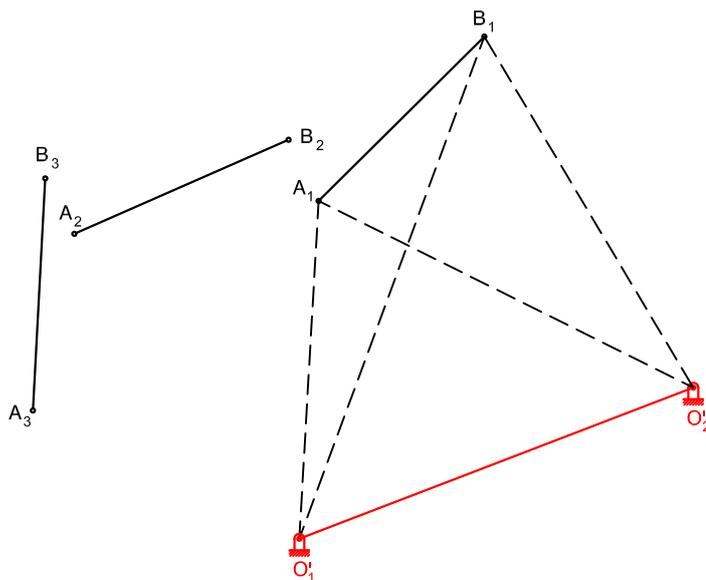
Fig. 2.2.1 – 1: Paso 1

Paso 2: Se construyen los triángulos  $A_2O_1B_2$  y  $A_2O_2B_2$ , como se muestra en la figura 2.2.1-2:



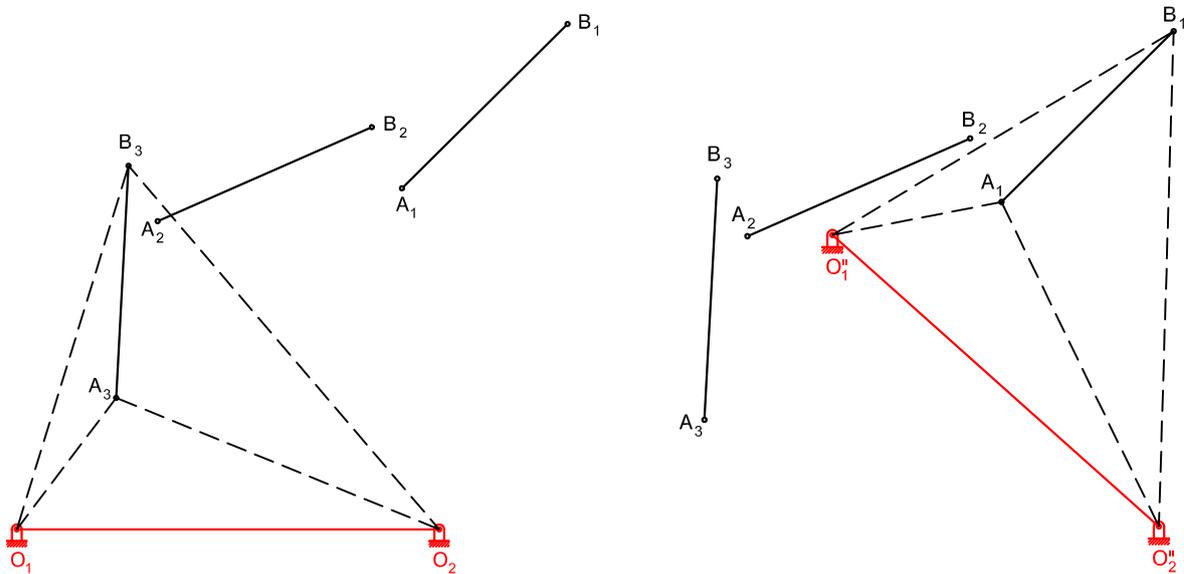
**Fig. 2.2.1 – 2:** Paso 2

Paso 3: Dichos triángulos se transfieren a  $A_1B_1$  y se rotan un ángulo tal que construyen los triángulos  $A_1O'_1B_1$  y  $A_1O'_2B_1$ , dibujándose la línea  $O'_1O'_2$  como se muestra en la figura 2.2.1-3:



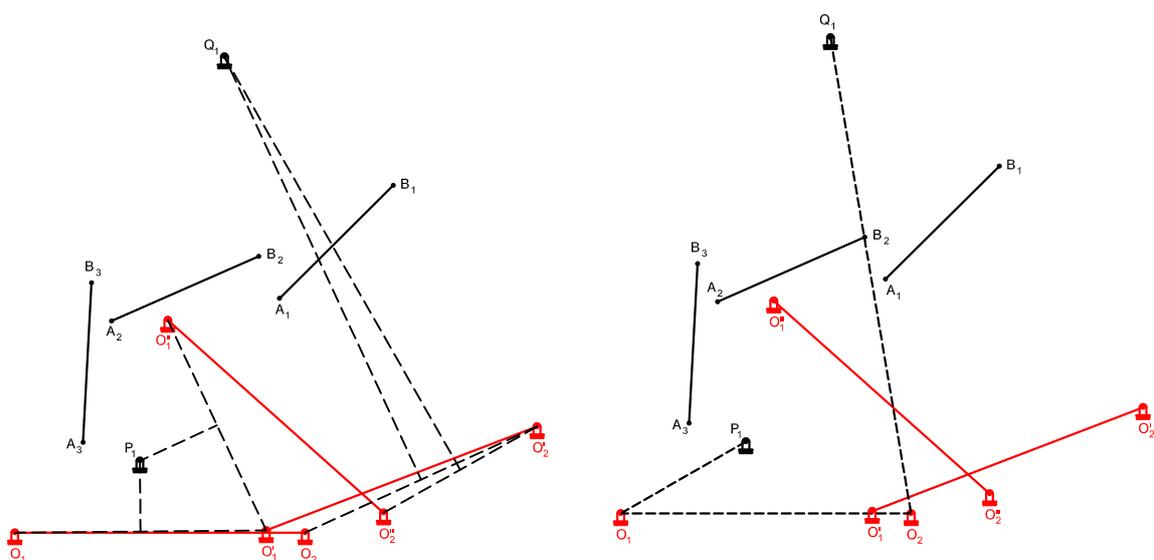
**Fig. 2.2.1 – 3:** Paso 3

**Paso 4:** Ahora, se construyen los triángulos  $A_3O_1B_3$  y  $A_3O_2B_3$ , y se transfieren y rotan hacia la línea  $A_1B_1$  como en el paso anterior para luego generar la línea  $O''_1O''_2$ , como se muestran en la figura 2.2.1-4:



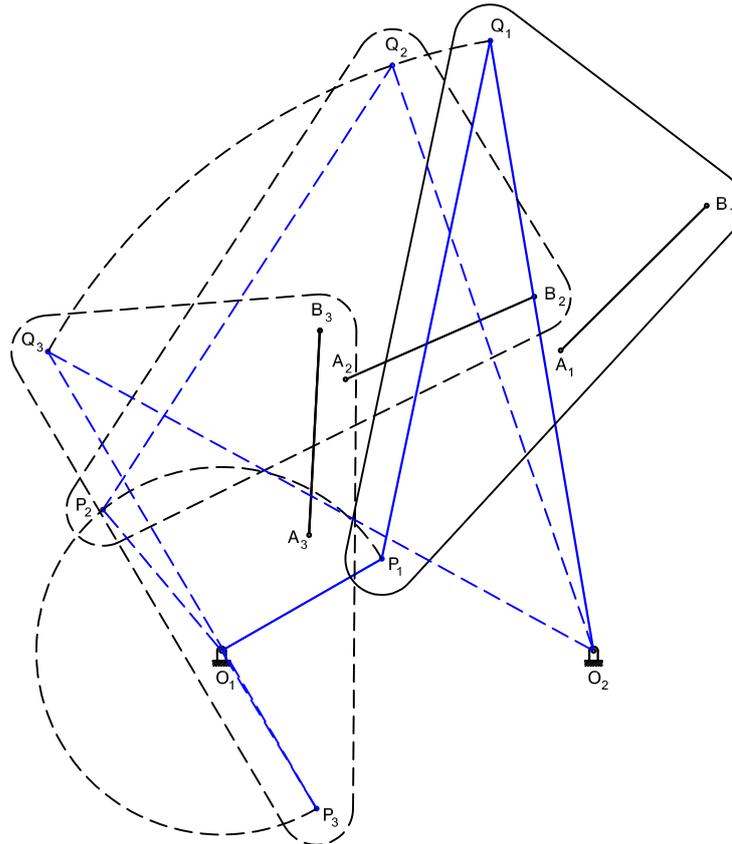
**Fig. 2.2.1 – 4: Paso 4**

**Paso 5:** Las líneas  $O_1O_2$ ,  $O'_1O'_2$  y  $O''_1O''_2$  son las tres posiciones del problema inverso basado en la fijación de las posiciones dadas originales, con ellas y en base al método gráfico del apartado 2.1.1 se construye el mecanismo de cuatro barras  $P_1O_1O_2Q_1$ .



**Fig. 2.2.1 – 5: Paso 5**

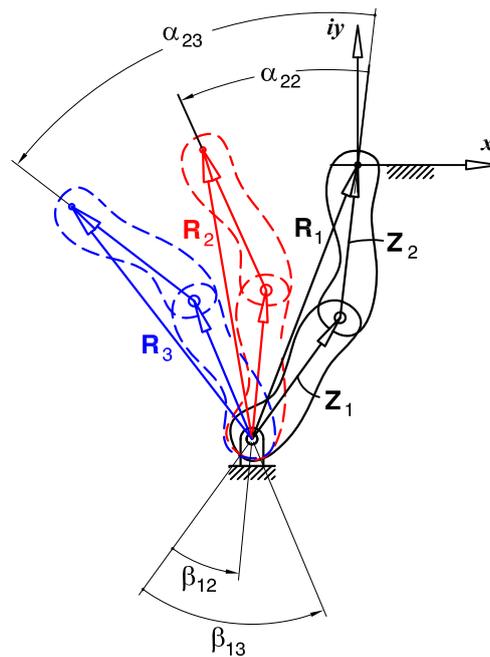
**Paso 6:** Finalmente el mecanismo del paso anterior se invierte, quedando generado el mecanismo  $O_1P_1Q_1O_2$ , que como lo muestra la figura presentada a continuación pasa por las posiciones  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$  y  $A_3B_3$  y tiene como pivotes fijos  $O_1$  y  $O_2$ .



**Fig. 2.2.1 – 6:** Paso 6

## 2.2.2 MÉTODO ANALÍTICO

Se considera la figura 2.2.2-1



**Fig. 2.2.2 – 1:** Díada estándar con tres posiciones prescritas para síntesis con especificación de apoyos fijos.

Se pueden establecer tres ecuaciones de circuito para cada una de las posiciones prescritas que ocupa la diada:

$$\mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = \mathbf{R}_1 \quad [2.2.2-1]$$

$$\mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{12}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{22}} = \mathbf{R}_2 \quad [2.2.2-2]$$

$$\mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{13}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{23}} = \mathbf{R}_3 \quad [2.2.2-3]$$

las ecuaciones (2.2.2-1), (2.2.2-2) y (2.2.2-3) forman un sistema de tres ecuaciones complejas con dos incógnitas,  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ , también complejas; para que tal sistema tenga solución para  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$  es necesario que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{R}_1 \\ e^{i\beta_{12}} & e^{i\alpha_{22}} & \mathbf{R}_2 \\ e^{i\beta_{13}} & e^{i\alpha_{23}} & \mathbf{R}_3 \end{vmatrix} = 0 \quad [2.2.2-4]$$

si se desarrolla el determinante anterior en base a la primera columna se tiene:

$$\begin{vmatrix} e^{i\alpha_{22}} & \mathbf{R}_2 \\ e^{i\alpha_{23}} & \mathbf{R}_3 \end{vmatrix} - e^{i\beta_{12}} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{R}_1 \\ e^{i\alpha_{23}} & \mathbf{R}_3 \end{vmatrix} + e^{i\beta_{13}} \begin{vmatrix} 1 & \mathbf{R}_1 \\ e^{i\alpha_{22}} & \mathbf{R}_2 \end{vmatrix} = 0 \quad [2.2.2-5]$$

que simplificando se reduce a:

$$(e^{i\alpha_{22}}\mathbf{R}_3 - e^{i\alpha_{23}}\mathbf{R}_2) + e^{i\beta_{12}}(e^{i\alpha_{23}}\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3) + e^{i\beta_{13}}(\mathbf{R}_2 - e^{i\alpha_{22}}\mathbf{R}_1) = 0 \quad [2.2.2-6]$$

ó

$$\Delta_1 + e^{i\beta_{12}}\Delta_2 + e^{i\beta_{13}}\Delta_3 = 0 \quad [2.2.2-7]$$

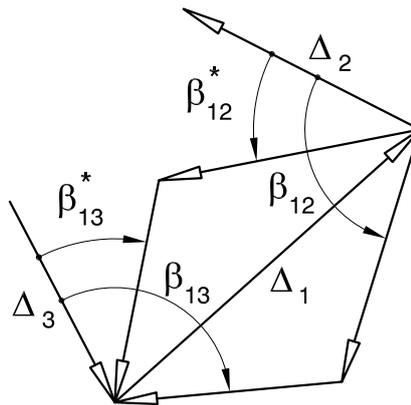
con

$$\Delta_1 = e^{i\alpha_{22}}\mathbf{R}_3 - e^{i\alpha_{23}}\mathbf{R}_2$$

$$\Delta_2 = e^{i\alpha_{23}}\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_3$$

$$\Delta_3 = \mathbf{R}_2 - e^{i\alpha_{22}}\mathbf{R}_1$$

En la metodología de los pivotes fijos,  $\alpha_{22}$  y  $\alpha_{23}$  son prescritos, por lo que  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  son conocidos, entonces la ecuación [2.2.2-7] se convierte en la ecuación a partir de la cual se pueden obtener  $\beta_{12}$  y  $\beta_{13}$ , recordando que al ser una ecuación compleja se pueden obtener dos ecuaciones escalares a partir de ella. Sin embargo la ecuación [2.2.2-7] es no lineal en las variables  $\beta_{12}$  y  $\beta_{13}$  por lo que requeriría de una solución algo tediosa si se expanden los números complejos por la ecuación de Euler o un método numérico. Una construcción gráfica muy simple ayudará a resolver dicha ecuación, para ello se tiene en cuenta la figura 2.2.2-2:



**Fig. 2.2.2 – 2:** Solución gráfica para  $\beta_{12}$  y  $\beta_{13}$ .

En la mencionada figura se representan los vectores  $\Delta_1$ ,  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$ , y se puede observar que  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  han girado respecto de  $\Delta_1$  lo cual es lógico si se analiza detenidamente la ecuación [2.2.2-7] y se observa que en ella  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  están multiplicados por los operadores rotacionales  $e^{i\beta_{12}}$  y  $e^{i\beta_{13}}$ , mientras que  $\Delta_1$  al no estar multiplicado por ningún operador rotacional se puede considerar fijo. Entonces girando los vectores  $\Delta_2$  y  $\Delta_3$  alrededor de  $\Delta_1$ , se obtienen las configuraciones que resuelven la ecuación [2.2.2-7], en éstas se obtienen 2 soluciones: la solución trivial en la que  $\beta_{12}^* = \alpha_{22}$  y  $\beta_{13}^* = \alpha_{23}$ , que se puede verificar muy fácilmente sustituyendo estas soluciones en la ecuación [2.2.2-6], la cual le convierte en una igualdad; la otra solución está dada por las expresiones:

$$\beta_{12} = 2 \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_2) - \arg(\Delta_2 e^{i\alpha_{22}}) \quad [2.2.2-8]$$

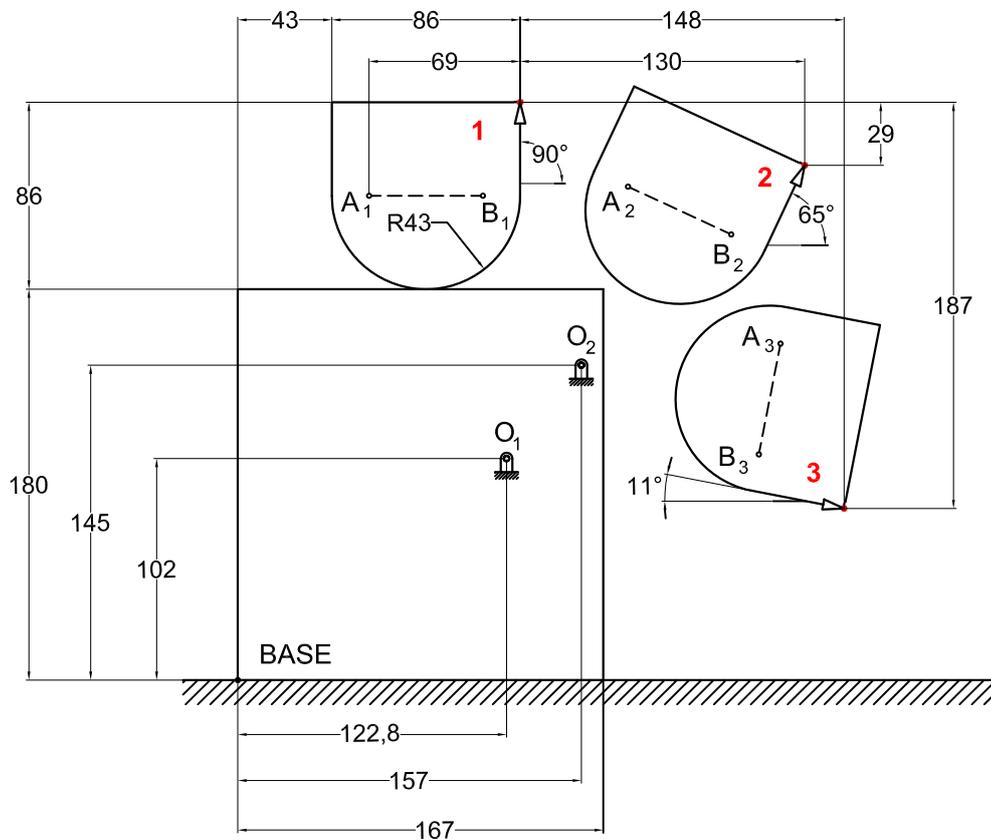
$$\beta_{13} = 2 \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_3) - \arg(\Delta_3 e^{i\alpha_{23}}) \quad [2.2.2-9]$$

conocidos los valores para  $\beta_{12}$  y  $\beta_{13}$  éstos pueden ser reemplazados, junto con los valores prescritos de  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\mathbf{R}_1$ ,  $\mathbf{R}_2$  y  $\mathbf{R}_3$  en cualesquiera dos ecuaciones del sistema: ecuación [2.2.2-1], ecuación [2.2.2-2] y ecuación [2.2.2-3] para hallar  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ .

A un mecanismo de 4 barras se puede aplicar sucesivamente la mencionada metodología a las diadas  $Z_1Z_2$  y  $Z_3Z_4$  para encontrar los valores de  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_3$  y  $Z_4$  y en base a ellos las demás dimensiones del mecanismo.

### Caso 2:

Se sintetiza el mecanismo del caso 1 para las posiciones de los pivotes fijos mostradas en la figura 2.2.2-3, usando el procedimiento analítico.



**Fig. 2.2.2 – 3:** Posiciones para la síntesis con pivotes fijos dados del caso 2

El esquema siguiente muestra las diadas  $Z_1Z_2$  y  $Z_1Z_2$  a ser calculadas mediante la metodología analizada en el apartado 2.2.2:

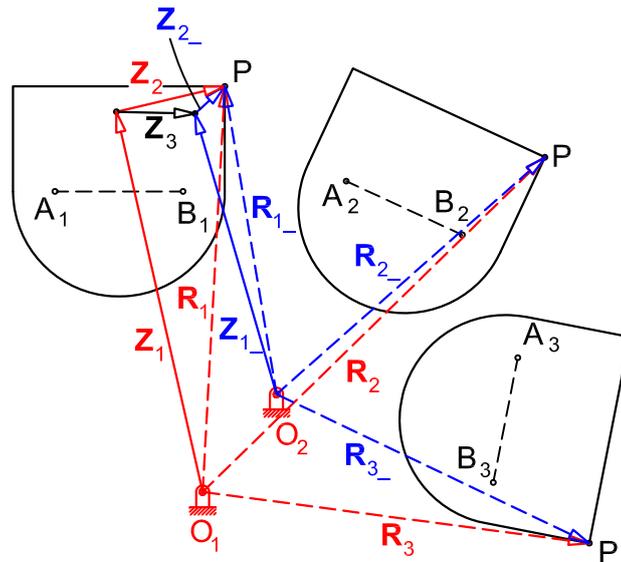


Fig. 2.2.2 – 4: Esquema para las diadas del caso 2

y las figuras 2.2.2-5 (a) y (b) mostradas a continuación representan los vectores posición entre los pivotes fijos y el punto P para cada posición:

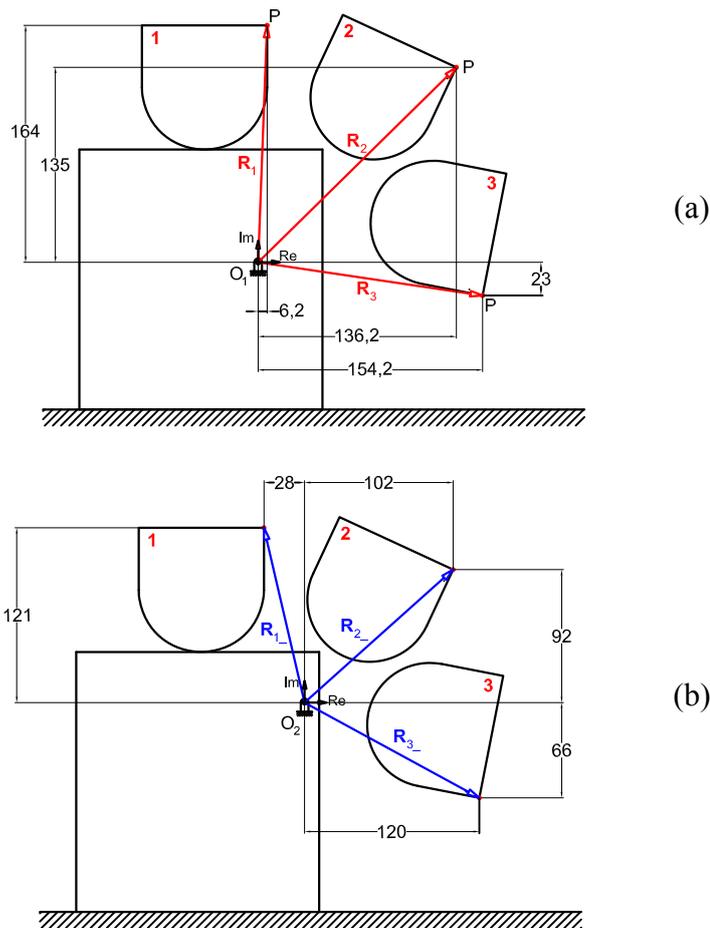


Fig. 2.2.2 – 5: Vectores posición para: (a) el pivote fijo  $O_1$ , y (b) el pivote fijo  $O_2$

Conociendo los ángulos  $\alpha_{22}$  y  $\alpha_{23}$  y los datos para  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$ ,  $R_{1\_}$ ,  $R_{2\_}$  y  $R_{3\_}$  del diagrama anterior se generan las siguientes implementaciones en MathCAD que permiten encontrar  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_{1\_}$  y  $Z_{2\_}$ :

**Síntesis de 3 posiciones con pivotes fijos prescritos**

$$i := \sqrt{-1} \quad \alpha_{22} := -25 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \alpha_{23} := -101 \cdot \frac{\pi}{180}$$

**Diada  $Z_1 Z_2$ :**

$$R_1 := 6.2 + 164 \cdot i \quad R_2 := 136.2 + 135 \cdot i \quad R_3 := 154.2 - 23 \cdot i$$

$$\Delta_1 := \begin{vmatrix} e^{i \cdot \alpha_{22}} & R_2 \\ e^{i \cdot \alpha_{23}} & R_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 := - \begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i \cdot \alpha_{23}} & R_3 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 := \begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i \cdot \alpha_{22}} & R_2 \end{vmatrix}$$

$$\beta_{12} := 2 \cdot \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_2) - \arg(e^{i \cdot \alpha_{22}} \cdot \Delta_2) \quad \beta_{13} := 2 \cdot \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_3) - \arg(e^{i \cdot \alpha_{23}} \cdot \Delta_3)$$

$$Z_1 := \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 1 \\ R_2 & e^{i \cdot \alpha_{22}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \end{vmatrix}} \quad Z_2 := \frac{\begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \end{vmatrix}}$$

$$Z_1 = -61.917 + 112.415i$$

$$Z_2 = 68.117 + 51.585i$$

**Diada  $Z_{1\_} Z_{2\_}$ :**

$$R_{1\_} := -28 + 121 \cdot i \quad R_{2\_} := 102 + 92 \cdot i \quad R_{3\_} := 120 - 66 \cdot i$$

$$\Delta_{1\_} := \begin{vmatrix} e^{i \cdot \alpha_{22}} & R_{2\_} \\ e^{i \cdot \alpha_{23}} & R_{3\_} \end{vmatrix} \quad \Delta_{2\_} := - \begin{vmatrix} 1 & R_{1\_} \\ e^{i \cdot \alpha_{23}} & R_{3\_} \end{vmatrix} \quad \Delta_{3\_} := \begin{vmatrix} 1 & R_{1\_} \\ e^{i \cdot \alpha_{22}} & R_{2\_} \end{vmatrix}$$

$$\beta_{12\_} := 2 \cdot \arg(-\Delta_{1\_}) - \arg(\Delta_{2\_}) - \arg(e^{i \cdot \alpha_{22}} \cdot \Delta_{2\_})$$

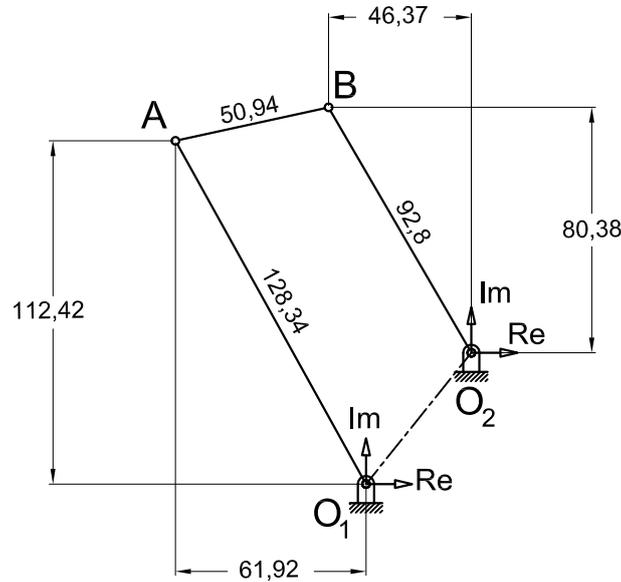
$$\beta_{13\_} := 2 \cdot \arg(-\Delta_{1\_}) - \arg(\Delta_{3\_}) - \arg(e^{i \cdot \alpha_{23}} \cdot \Delta_{3\_})$$

$$Z_{1\_} := \frac{\begin{vmatrix} R_{1\_} & 1 \\ R_{2\_} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_{12\_}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \end{vmatrix}} \quad Z_{2\_} := \frac{\begin{vmatrix} 1 & R_{1\_} \\ e^{i \cdot \beta_{12\_}} & R_{2\_} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_{12\_}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \end{vmatrix}}$$

$$Z_{1\_} = -46.374 + 80.382i$$

$$Z_{2\_} = 18.374 + 40.618i$$

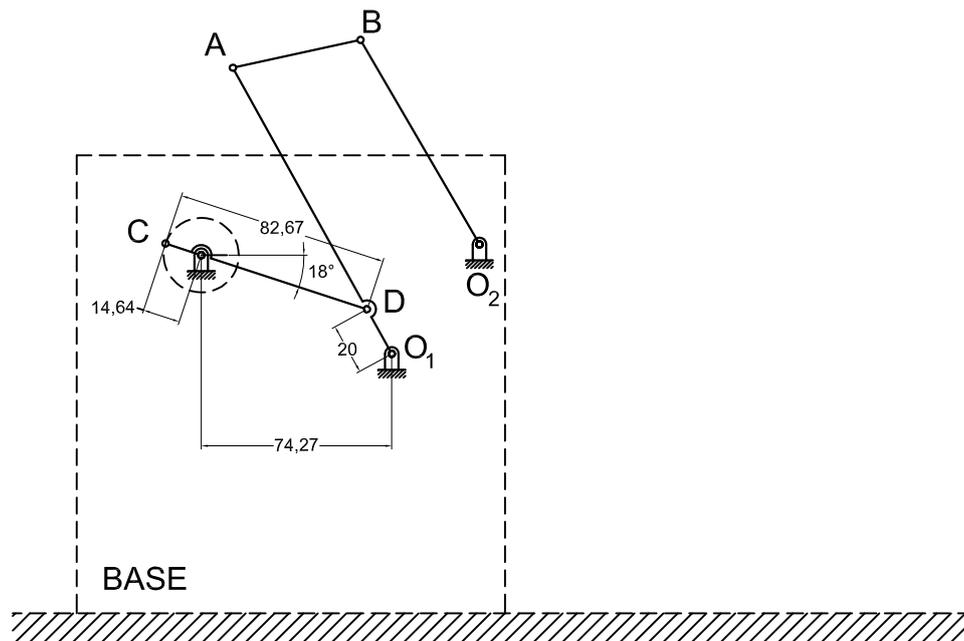
Con los valores hallados el mecanismo de cuatro barras configurado es el siguiente:



**Fig. 2.2.2 – 6:** Mecanismo sintetizado para el caso 2

Una simulación en Artas SAM del mecanismo muestra que es necesario añadir una diada impulsora al mecanismo para limitarlo a las posiciones requeridas.

Finalmente, el mecanismo con su correspondiente diada impulsora se muestra en el gráfico siguiente:

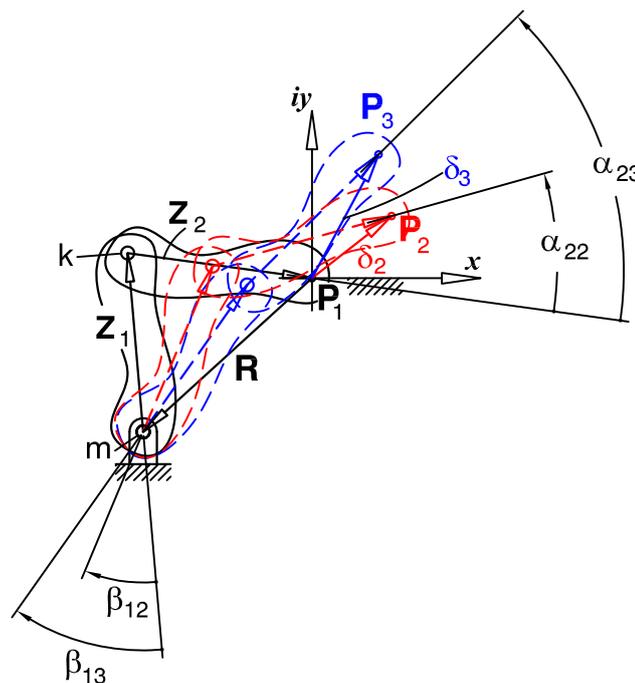


**Fig. 2.2.2 – 7:** Mecanismo con su diada impulsora para el caso 2

## 2.3 CÍRCULOS DE LOS PUNTOS CENTRALES Y PUNTOS CIRCULARES

Una metodología más eficiente que la descrita en los apartados 2.1 y 2.2 consiste en hallar el lugar geométrico de todas las posibles soluciones al problema de la síntesis de tres posiciones. Loerch, Erdman y Sandor<sup>[1]</sup> demostraron que si una de las variables de libre elección toma un valor arbitrario al tiempo que se permite que la otra variable de libre elección tome todos los valores posibles, de 0 a  $2\pi$ , los lugares geométricos resultantes para los pivotes fijos  $m$  y  $k$  de una diada son parejas de círculos.

Se considera la figura 2.3-1:



**Fig. 2.3 – 1:** Esquema vectorial para definir los círculos con punto central y punto circular en una diada.

Para generación de movimiento  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{23}$ ,  $\delta_2$  y  $\delta_3$  están prescritos y son elecciones libres  $\beta_{12}$  y  $\beta_{13}$ ; por lo tanto si se escoge arbitrariamente un determinado valor para  $\beta_{12}$ , entonces el lugar geométrico descrito por los puntos  $m$  y  $k$  son círculos cuando  $\beta_{13}$  varía entre 0 y  $2\pi$ . El círculo descrito por el pivote fijo  $m$  se denomina

**círculo de punto central** o **círculo M**, mientras que el círculo descrito por el pivote móvil k se denomina **círculo de punto circular** o **círculo K**. La ventaja del uso de los círculos de punto central y de punto circular es que permiten visualizar todas las posibles posiciones ocupadas por los pivotes fijos y móviles para la diada sintetizada, lo cual es de inmensa utilidad si en el diseño de un mecanismo se conoce un área específica donde ubicar los pivotes tanto fijos como móviles del mecanismo. Los círculos M y K pueden ser generados de forma analítica con la metodología del uso de ecuaciones de lazo cerrado para una diada.

Para el esquema vectorial de la diada mostrada en la figura 2.3-1 se puede escribir para cada posición de precisión las siguientes ecuaciones de lazo cerrado:

$$\mathbf{R} + \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 = 0 \quad [2.3-1]$$

$$\mathbf{R} + \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{12}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{22}} = \delta_2 \quad [2.3-2]$$

$$\mathbf{R} + \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{13}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{23}} = \delta_3 \quad [2.3-3]$$

La posición del pivote fijo m está dado por el vector  $\mathbf{R}$ , mientras que la posición del pivote móvil k está expresada por el vector  $-\mathbf{Z}_2$ , ambos con respecto al origen del sistema de coordenadas fijo situado convencionalmente en el primer punto de precisión  $P_1$ . El sistema lineal complejo formado por las ecuaciones [2.3-1], [2.3-2] y [2.3-3] se puede resolver por regla de Cramer y se obtiene:

$$\mathbf{R} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i\beta_{12}} & e^{i\alpha_{22}} \\ \delta_3 & e^{i\beta_{13}} & e^{i\alpha_{23}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\beta_{12}} & e^{i\alpha_{22}} \\ 1 & e^{i\beta_{13}} & e^{i\alpha_{23}} \end{vmatrix}} \quad [2.3-4]$$

$$-\mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i\beta_{12}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i\beta_{13}} & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i\beta_{12}} & -e^{i\alpha_{22}} \\ 1 & e^{i\beta_{13}} & -e^{i\alpha_{23}} \end{vmatrix}} \quad [2.3-5]$$

resolviendo [2.3-4] y [2.3-5] se tiene:

$$\mathbf{R} = \frac{\delta_2 (e^{i\beta_{13}} - e^{i\alpha_{23}}) - \delta_3 (e^{i\beta_{12}} - e^{i\alpha_{22}})}{e^{i\alpha_{22}} - e^{i\alpha_{23}} + e^{i\beta_{13}} - e^{i\beta_{12}} + e^{i\beta_{12}} e^{i\alpha_{23}} - e^{i\alpha_{22}} e^{i\beta_{13}}} \quad [2.3-6]$$

$$= \frac{\delta_2 (e^{i\beta_{13}} - e^{i\alpha_{23}}) - \delta_3 (e^{i\beta_{12}} - e^{i\alpha_{22}})}{e^{i\alpha_{22}} - e^{i\alpha_{23}} + e^{i\beta_{13}} - e^{i\beta_{12}} + e^{i(\beta_{12} + \alpha_{23})} - e^{i(\alpha_{22} + \beta_{13})}}$$

$$-\mathbf{Z}_2 = \frac{-\delta_2 (e^{i\beta_{13}} - 1) + \delta_3 (e^{i\beta_{12}} - 1)}{e^{i\beta_{12}} - e^{i\beta_{13}} + e^{i\alpha_{23}} - e^{i\alpha_{22}} - e^{i\beta_{12}} e^{i\alpha_{23}} + e^{i\alpha_{22}} e^{i\beta_{13}}} \quad [2.3-7]$$

$$= \frac{-\delta_2 (e^{i\beta_{13}} - 1) + \delta_3 (e^{i\beta_{12}} - 1)}{e^{i\beta_{12}} - e^{i\beta_{13}} + e^{i\alpha_{23}} - e^{i\alpha_{22}} - e^{i(\beta_{12} + \alpha_{23})} + e^{i(\alpha_{22} + \beta_{13})}}$$

y

$$\mathbf{Z}_1 = -\mathbf{R} - \mathbf{Z}_2 \quad [2.3-8]$$

dado que en las expresiones anteriores todas las variables son prescritas excepto  $\beta_{13}$  que varía entre 0 y  $2\pi$ , entonces se puede escribir las mismas en la forma:

$$\mathbf{R}(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{aZ} + \mathbf{b}}{\mathbf{cZ} + \mathbf{d}} \quad [2.3-9]$$

$$-\mathbf{Z}_2(\mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{eZ} + \mathbf{f}}{\mathbf{gZ} + \mathbf{h}} \quad [2.3-10]$$

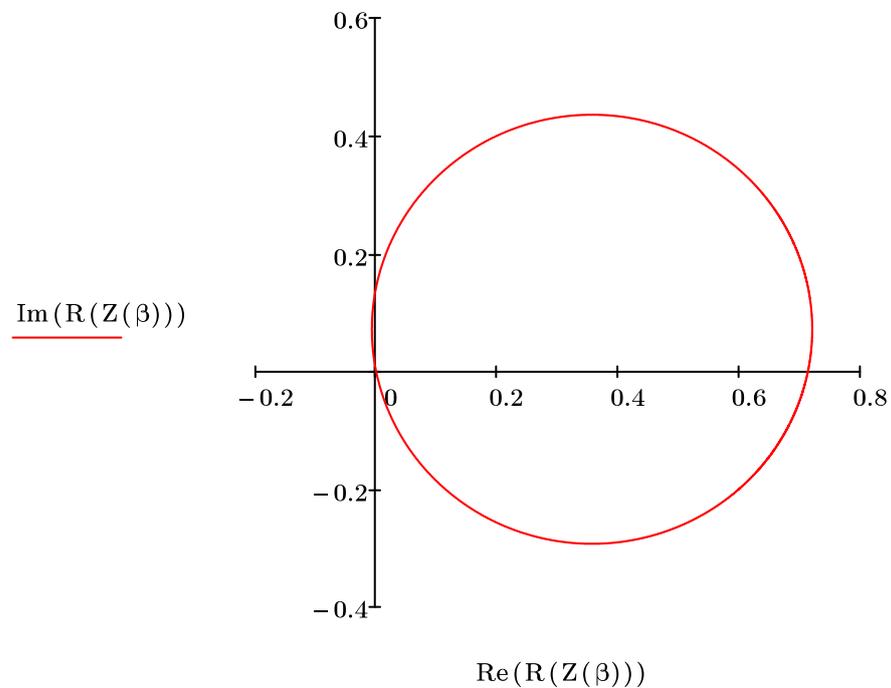
donde  $\mathbf{Z} = e^{i\beta_{13}}$  y los valores de a, b, c, d, e, f, g y h son constantes complejas definidas ya que provienen de operaciones con las variables prescritas. Las expresiones [2.3-9] y [2.3-10] corresponden a mapeos o transformaciones bilineales que generan como lugares geométricos de dichas expresiones a círculos, pudiendo en ciertos casos degenerarse en líneas.

**Caso 3:**

Se demuestra que el mapeo bilineal  $R(Z) = \frac{aZ + b}{cZ + d}$ , genera como una curva  $\text{Im}(R(Z))$  vs.  $\text{Re}(R(Z))$  un círculo, para valores constantes complejos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  y para  $Z = e^{i\beta}$  con  $0 \leq \beta \leq 2\pi$ .

La siguiente implementación en MathCAD y su correspondiente gráfica produce lo pedido en el análisis de caso:

$$\begin{aligned}
 i &:= \sqrt{-1} \\
 a &:= 2 + 3 \cdot i & b &:= 2 - 3 \cdot i & c &:= 4 + 5 \cdot i & d &:= 2 - 3 \cdot i \\
 \beta &:= 0 \quad ,0.001 \quad .. \quad 2 \cdot \pi \\
 Z(\beta) &:= e^{\beta \cdot i} \\
 R(Z) &:= \frac{a \cdot Z + b}{c \cdot Z + d}
 \end{aligned}$$

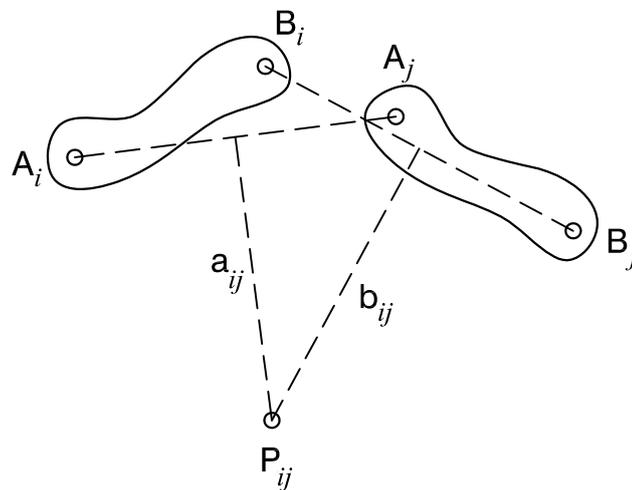


En conclusión las expresiones [2.3-6] y [2.3-7] permiten obtener los círculos de punto central y punto circular respectivamente.

Es posible también describir un método gráfico para la generación de los círculos M y K, el cual se puede emplear para la verificación de lo obtenido analíticamente por las expresiones [2.3-6] y [2.3-7].

Antes de describir el procedimiento gráfico es indispensable introducir el concepto de polo y polo imagen.

Si se lleva un eslabón desde una posición  $i$  a otra  $j$  distinta y arbitrariamente prescrita es suficiente una rotación simple como se muestra en la figura 2.3-2 alrededor de un centro de rotación adecuado:



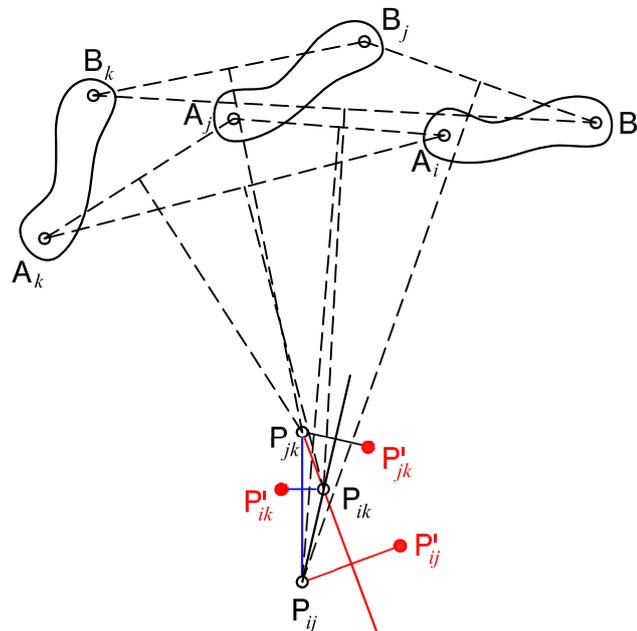
**Fig. 2.3 – 2:** Rotación de un eslabón entre las posiciones  $i$  y  $j$ , respecto del polo  $P_{ij}$ .

Este centro de rotación denominado polo y denotado  $P_{ij}$ <sup>6</sup> se encuentra gráficamente al trazar las normales medias  $a_{ij}$  y  $b_{ij}$  a los segmentos de recta que conectan dos posiciones correspondientes de cada uno de los puntos A y B, es decir  $A_i$ ,  $A_j$ ,  $B_i$ ,  $B_j$ .

Si el eslabón es llevado a través de las posiciones  $i$ ,  $j$  y  $k$  entonces se pueden hallar los polos  $P_{ij}$ ,  $P_{jk}$  y  $P_{ik}$ , definiéndose el polo imagen de  $P_{ij}$  como la imagen reflejada de  $P_{ij}$  respecto de la línea formada por  $P_{jk}$  y  $P_{ik}$ ; de forma similar se puede definir el polo imagen de cualquiera de los otros dos polos. En la figura 2.3-3

<sup>6</sup>  $P_{ij} = P_{ji}$

se dibujan los polos y sus respectivos polos imagen para un eslabón moviéndose entre las posiciones i, j y k:



**Fig. 2.3 – 3:** Polos  $P_{ij}$ ,  $P_{jk}$ ,  $P_{ik}$  y sus respectivos polos imagen  $P'_{ij}$ ,  $P'_{jk}$  y  $P'_{ik}$ .

A continuación se describe el procedimiento gráfico para generar los círculos M y K, con los valores prescritos de  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{23}$  y  $\beta_{12}$  y la variación de  $\beta_{13}$ :

**Paso 1:** Se determinan los valores prescritos para  $\delta_2$ ,  $\delta_3$ ,  $\alpha_{22}$ ,  $\alpha_{23}$  y el valor escogido para  $\beta_{12}$ .

**Paso 2:** Se hallan los polos  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{23}$  y el polo imagen  $P'_{23}$ .

**Paso 3:** Se encuentran los polos de intersección de círculo:  $P_{13}$  y  $P_{23}$  para los círculos M; y  $P_{13}$  y  $P'_{23}$  para los círculos K.

**Paso 4:** Se bisecan las líneas entre los pares de polos de intersección para encontrar las líneas de centros para los círculos M y K.

**Paso 5:** Para cada valor del ángulo  $\beta_{12}$ , se disponen los centros de los círculos de manera que  $\angle P_{13}C_M P_{23} = \beta_{12}$  y  $\angle P'_{23}C_K P_{13} = \alpha_{22} - \beta_{12}$ . Es importante señalar

que la dirección de rotación de los ángulos es de  $P_{13}$  a  $P_{23}$  para los círculos M y de  $P'_{23}$  a  $P_{13}$  para los círculos K.

**Paso 6:** Se dibujan entonces los pares de círculos, con centro  $C_M$  y  $C_K$ , por los polos de intersección.

#### **Caso 4:**

Para los tres posiciones del eslabón rígido mostrado en el caso 1, se hallan los círculos M y K para  $\beta_{12} = 30^\circ$  y  $\beta_{12\_} = 50^\circ$ , además se visualiza la solución del caso 2 bajo la óptica de los círculos de punto central y circular. Se emplea en todo el procedimiento la metodología analítica.

Para construir los círculos pedidos, se crea una implementación en MathCAD para calcular y graficar las expresiones [2.3-4] y [2.3-5] que definen los círculos M y K. La implementación y las gráficas se presentan a continuación:

$$\alpha_{22} := \frac{-25 \cdot \pi}{180} \quad \alpha_{23} := \frac{-101 \cdot \pi}{180} \quad i := \sqrt{-1}$$

$$\delta_2 := 130 - 29 \cdot i \quad \delta_3 := 148 - 187 \cdot i$$

$$\text{Diada 1 (Z}_1\text{Z}_2\text{)} \dots$$

$$\text{Base}_x := \begin{pmatrix} -129 \\ 38 \\ 38 \\ -129 \\ -129 \end{pmatrix} \quad \text{Base}_y := \begin{pmatrix} -266 \\ -266 \\ -86 \\ -86 \\ -266 \end{pmatrix}$$

$$\text{inicio1} := 0 \quad \text{paso1} := (\text{inicio1} + 1) \quad \text{fin1} := 360$$

$$\beta_{12} := \frac{30 \cdot \pi}{180} \quad \beta_{13} := \frac{\text{inicio1} \cdot \pi}{180}, \frac{\text{paso1} \cdot \pi}{180} \dots \frac{\text{fin1} \cdot \pi}{180}$$

$$R(\beta_{13}) := \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

$$Z_2(\beta_{13}) := \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13}} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12}} & -e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13}} & -e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

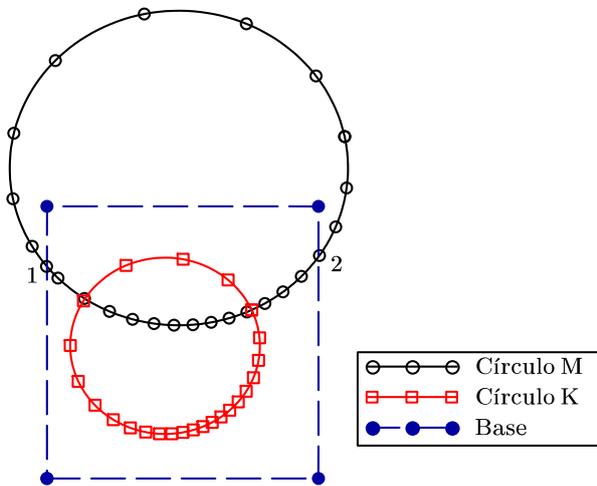
Diada 2 ( $Z_1, Z_2$ )...

$$\text{inicio2} := 0 \quad \text{paso2} := (\text{inicio2} + 1) \quad \text{fin2} := 360$$

$$\beta_{12\_} := \frac{50 \cdot \pi}{180} \quad \beta_{13\_} := \frac{\text{inicio2} \cdot \pi}{180}, \frac{\text{paso2} \cdot \pi}{180} \dots \frac{\text{fin2} \cdot \pi}{180}$$

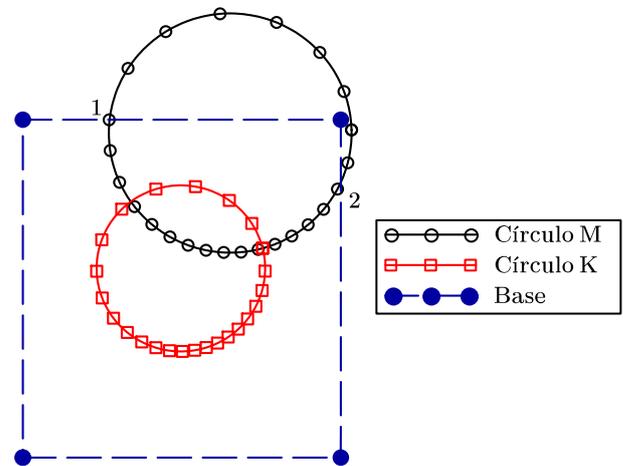
$$R_-(\beta_{13\_}) := \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

Círculos M y K para la diada 1



$$Z_2_-(\beta_{13\_}) := \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & -e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & -e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

Círculos M y K para la diada 2



Se observa de las gráficas que entre los puntos 1 y 2 del círculo M, tanto para la diada 1 como para la 2, existe una infinidad de posibles pivotes fijos a los cuales les corresponderían otra infinita cantidad de pivotes móviles, generándose un rango de solución. Si se explora sobre la misma implementación se observa que los rangos de solución están dados por la siguiente tabla:

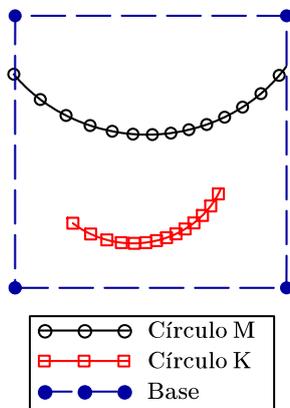
**Tabla 2.3-1:** Rangos de solución para el caso 4

	$\beta_{12}$ ó $\beta_{12\_}$	$\beta_{13}$ ó $\beta_{13\_}$
Diada 1	$30^\circ$	$\approx 113^\circ$ hasta $\approx 314^\circ$
Diada 2	$50^\circ$	$\approx 108^\circ$ hasta $\approx 337^\circ$

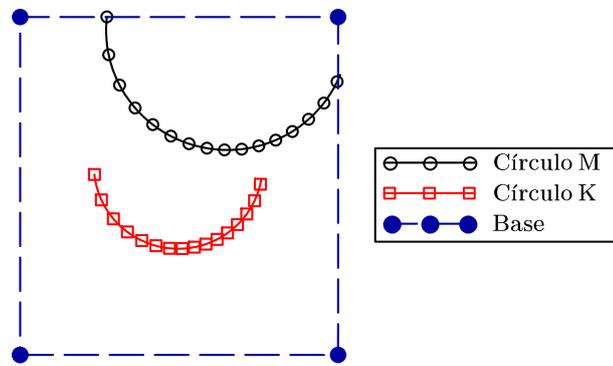
Con dos valores definidos de la tabla anterior y a partir de las expresiones [2.3-6], [2.3-7] y [2.3-8] quedan definidas las diadas y por ende diseñado el mecanismo.

Los siguientes gráficos muestran la ubicación de los pivotes móviles para el rango de puntos de bastidor que se hallan dentro de la base del mecanismo:

Círculos M y K para la diada 1



Círculos M y K para la diada 2



Una implementación idéntica permite presentar las soluciones de los casos 1 y 2 dentro de la metodología de los círculos M y K y esta se muestra a continuación, con los correspondientes gráficos de las diadas y el mecanismo sintetizado:

$$\alpha_{22} := \frac{-25 \cdot \pi}{180} \quad \alpha_{23} := \frac{-101 \cdot \pi}{180} \quad i := \sqrt{-1}$$

$$\delta_2 := 130 - 29 \cdot i \quad \delta_3 := 148 - 187 \cdot i$$

$$\text{Base}_x := \begin{pmatrix} -129 \\ 38 \\ 38 \\ -129 \\ -129 \end{pmatrix} \quad \text{Base}_y := \begin{pmatrix} -266 \\ -266 \\ -86 \\ -86 \\ -266 \end{pmatrix}$$

**Diada 1 ( $Z_1 Z_2$ )...**

$$\text{inicio1} := 0 \quad \text{paso1} := (\text{inicio1} + 1) \quad \text{fin1} := 360$$

$$\beta_{12} := \frac{306.928 \cdot \pi}{180} \quad \beta_{13} := \frac{\text{inicio1} \cdot \pi}{180}, \frac{\text{paso1} \cdot \pi}{180} \dots \frac{\text{fin1} \cdot \pi}{180}$$

$$R(\beta_{13}) := \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

$$Z_2(\beta_{13}) := \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13}} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12}} & -e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13}} & -e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

**Diada 2 ( $Z_1 Z_2$ )...**

$$\text{inicio2} := 0 \quad \text{paso2} := (\text{inicio2} + 1) \quad \text{fin2} := 360$$

$$\beta_{12\_} := \frac{282.735 \cdot \pi}{180} \quad \beta_{13\_} := \frac{\text{inicio2} \cdot \pi}{180}, \frac{\text{paso2} \cdot \pi}{180} .. \frac{\text{fin2} \cdot \pi}{180}$$

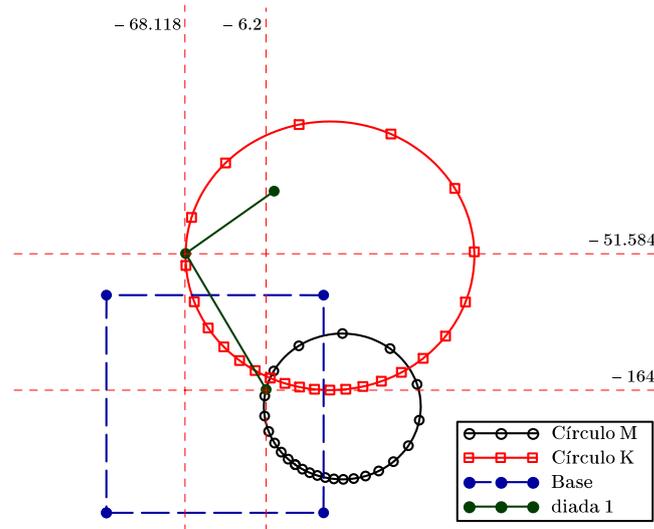
$$R_-(\beta_{13\_}) := \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

$$Z_{2_-}(\beta_{13\_}) := \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{12\_}} & -e^{i \cdot \alpha_{22}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_{13\_}} & -e^{i \cdot \alpha_{23}} \end{pmatrix}}$$

$$\text{diada1}_y := \begin{pmatrix} -164 \\ -51.584 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{diada1}_x := \begin{pmatrix} -6.2 \\ -68.118 \\ 0 \end{pmatrix}$$

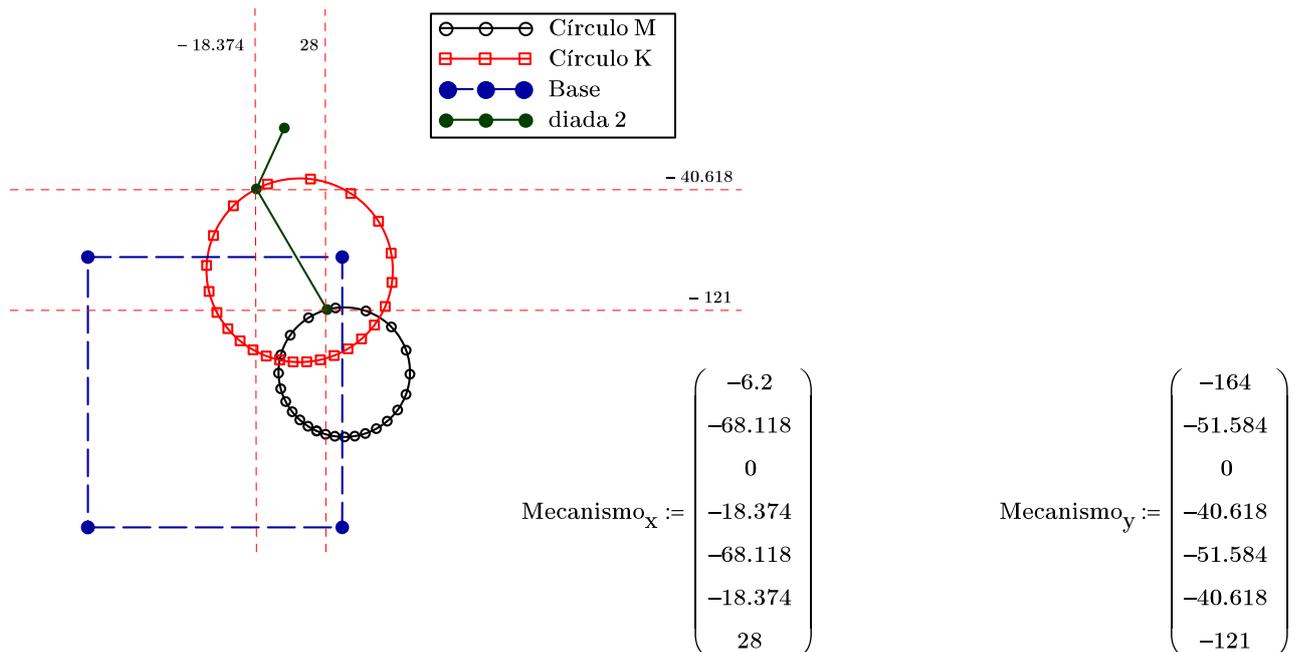
Círculos M y K para la diada 1



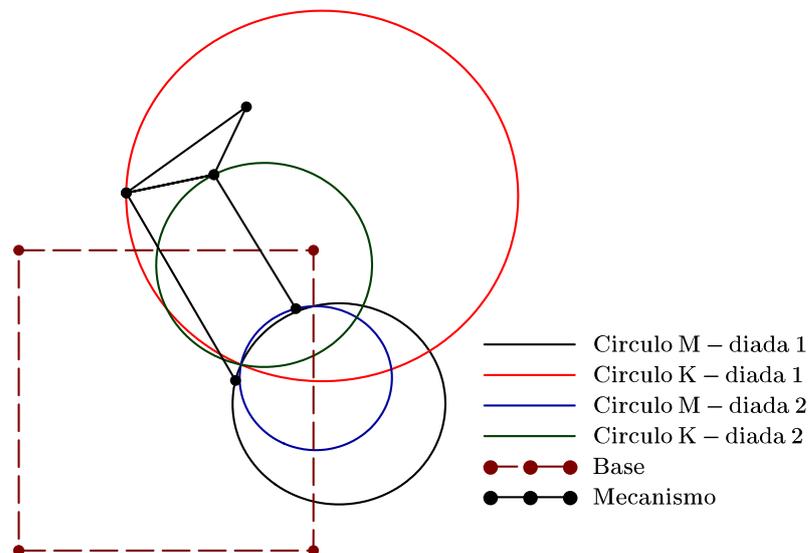
$$\text{diada2}_y := \begin{pmatrix} -121 \\ -40.618 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{diada2}_x := \begin{pmatrix} 28 \\ -18.374 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Círculos M y K para la diada 2



Círculos M y K para ambas diadas y mecanismo



## 2.4 SÍNTESIS DE ORDEN SUPERIOR

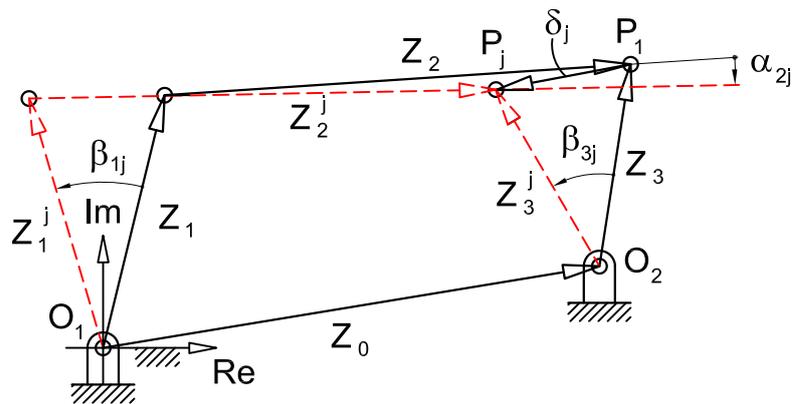
Por lo general no únicamente se prescriben desplazamientos de puntos de interés de un mecanismo o desplazamientos angulares de eslabones, también se especifican velocidades y aceleraciones, tanto lineales como angulares, de puntos de interés o eslabones del mecanismo. La síntesis de orden superior tiene como ob-

jetivo fundamental prescribir aparte de los desplazamientos las velocidades y aceleraciones lineales y/o angulares y en base a dicha información dimensionar un mecanismo.

La síntesis de orden superior se puede aplicar a cualquiera de las tareas cinemáticas, a saber generación de función, generación de trayectoria y generación de movimiento. Aquí se va a exponer el caso de la síntesis de orden superior para la generación de función.

### 2.4.1 SÍNTESIS DE ORDEN SUPERIOR: GENERACIÓN DE FUNCIÓN

Se considera el mecanismo de cuatro barras y su representación vectorial mostrada en la figura 2.4.1-1:



**Fig. 2.4.1 – 1:** Mecanismo de cuatro barras en posición inicial y posición j. Representación vectorial.

La ecuación de lazo cerrado para el mecanismo en la posición j es:

$$\mathbf{Z}_1^j + \mathbf{Z}_2^j + \mathbf{Z}_3^j - \mathbf{Z}_0 = 0 \quad [2.4.1-1]$$

que escribiéndola en su forma polar da,

$$\mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} = \mathbf{Z}_0 \quad [2.4.1-2]$$

La siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el problema de generación de función:

**Tabla 2.4.1-1:** Estrategia para la solución de las ecuaciones de síntesis de generación de función

Ecuación No.	Variables prescritas	Incógnitas	Variables de elección libre
[2.4.1-2]	$\beta_{1j}, \beta_{3j}, \mathbf{Z}_0$	$\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$	$\alpha_{2j}$

Si la expresión (2.4.1-1) se desarrolla para las posiciones  $j = 1, 2$  y  $3$ , se tiene el sistema:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_1 + \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 &= \mathbf{Z}_0 \\
 \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{12}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{22}} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{32}} &= \mathbf{Z}_0 \quad [2.4.1-3] \\
 \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{13}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{23}} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{33}} &= \mathbf{Z}_0
 \end{aligned}$$

resolviéndose el sistema anterior mediante la regla de Cramer se tiene:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_0 & 1 & 1 \\ \mathbf{Z}_0 & e^{i\alpha_{22}} & e^{i\beta_{32}} \\ \mathbf{Z}_0 & e^{i\alpha_{23}} & e^{i\beta_{33}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{12}} & e^{i\alpha_{22}} & e^{i\beta_{32}} \\ e^{i\beta_{13}} & e^{i\alpha_{23}} & e^{i\beta_{33}} \end{vmatrix}} \quad [2.4.1-4]$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \mathbf{Z}_0 & 1 \\ e^{i\beta_{12}} & \mathbf{Z}_0 & e^{i\beta_{32}} \\ e^{i\beta_{13}} & \mathbf{Z}_0 & e^{i\beta_{33}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ e^{i\beta_{12}} & e^{i\alpha_{22}} & e^{i\beta_{32}} \\ e^{i\beta_{13}} & e^{i\alpha_{23}} & e^{i\beta_{33}} \end{vmatrix}} \quad [2.4.1-5]$$



$$\beta_{12} := 15 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_{13} := 35 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_{32} := 7 \cdot \frac{\pi}{180} \quad \beta_{33} := 17 \cdot \frac{\pi}{180} \quad Z_0 := -500$$

$$i := \sqrt{-1}$$

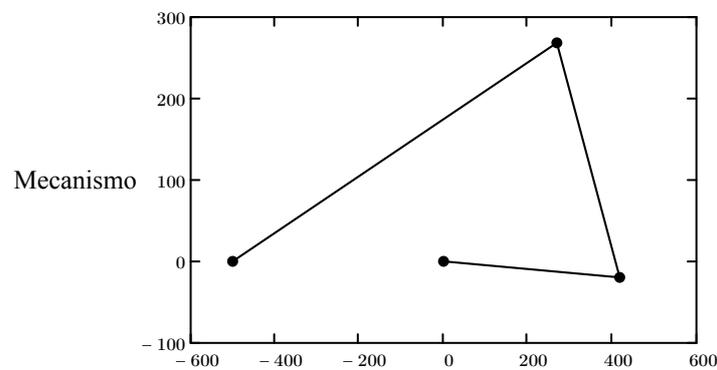
$$Z_1(\alpha_{22}, \alpha_{23}) := \frac{\begin{pmatrix} Z_0 & 1 & -1 \\ Z_0 e^{i \cdot \alpha_{22} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{32}} & \\ Z_0 e^{i \cdot \alpha_{23} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{33}} & \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{32}} \\ e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{33}} \end{pmatrix}}$$

$$Z_2(\alpha_{22}, \alpha_{23}) := \frac{\begin{pmatrix} 1 & Z_0 & -1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & Z_0 & -e^{i \cdot \beta_{32}} \\ e^{i \cdot \beta_{13}} & Z_0 & -e^{i \cdot \beta_{33}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{32}} \\ e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{33}} \end{pmatrix}}$$

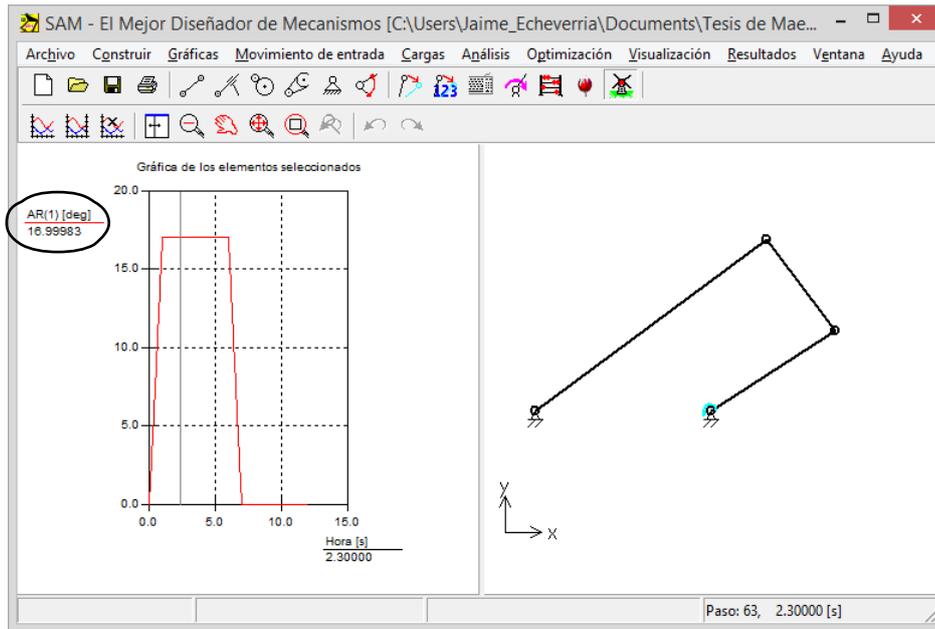
$$Z_3(\alpha_{22}, \alpha_{23}) := \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & Z_0 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22} \cdot \frac{\pi}{180}} & Z_0 \\ e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23} \cdot \frac{\pi}{180}} & Z_0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i \cdot \beta_{12}} & e^{i \cdot \alpha_{22} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{32}} \\ e^{i \cdot \beta_{13}} & e^{i \cdot \alpha_{23} \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \beta_{33}} \end{pmatrix}} \quad \alpha_{22} := 6 \quad \alpha_{23} := 10$$

$$Z_1(6, 10) = 418.064 - 19.733i \quad Z_2(6, 10) = -149.158 + 288.009i \quad Z_3(6, 10) = 768.906 + 268.276i$$

$$\text{Mecanismo}_y := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Im}(Z_1(\alpha_{22}, \alpha_{23})) \\ \text{Im}(Z_1(\alpha_{22}, \alpha_{23}) + Z_2(\alpha_{22}, \alpha_{23})) \\ \text{Im}(Z_0) \end{pmatrix} \quad \text{Mecanismo}_x := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Re}(Z_1(\alpha_{22}, \alpha_{23})) \\ \text{Re}(Z_1(\alpha_{22}, \alpha_{23}) + Z_2(\alpha_{22}, \alpha_{23})) \\ \text{Re}(Z_0) \end{pmatrix}$$



La simulación siguiente en Artas SAM confirma el ángulo de apertura del seguidor:



**Fig. 2.4.1 – 3:** Simulación en Artas SAM para el mecanismo diseñado en el caso 5

Derivándose la ecuación [2.4.1-2] con respecto al tiempo,

$$i\mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} + i\mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} + i\mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} = 0 \quad [2.4.1-7]$$

de donde,

$$\mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} = 0 \quad [2.4.1-8]$$

y si se deriva la expresión [2.4.1-7] con respecto al tiempo y se simplifica la expresión resultante, resulta:

$$\mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) \dot{\alpha}_{2j} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) \dot{\beta}_{3j} = 0 \quad [2.4.1-9]$$

Empleando las ecuaciones [2.4.1-2], [2.4.1-8] y [2.4.1-9] se posee un sistema de tres ecuaciones complejas, con el que es posible determinar la dimensión de los eslabones móviles, prescribiendo el eslabón fijo. Sin embargo el sistema considera la información únicamente de una posición determinada  $j$ , si se posee información prescrita para más de un punto de precisión en las ecuaciones [2.4.1-2], [2.4.1-8] y [2.4.1-9] el problema de síntesis para dicha información se convierte en

una tarea de *síntesis óptima* que no será tratado en el presente trabajo de titulación.

Así entonces, para la  $j$ -ésima posición:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} &= \mathbf{Z}_0 \\ \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} &= 0 \\ \mathbf{Z}_1 e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) + \mathbf{Z}_2 e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) + \mathbf{Z}_3 e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) &= 0 \end{aligned} \quad [2.4.1-10]$$

La siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el problema de orden superior para generación de función en la  $j$ -ésima posición:

**Tabla 2.4.1-2:** Estrategia para la solución de las ecuaciones de síntesis de orden superior para la generación de función en la  $j$ -ésima posición

Ecuación No.	Variables prescritas	Incógnitas	Variables de elección libre
[2.4.1-10]	$\beta_{1j}, \beta_{3j}, \dot{\beta}_{1j}, \dot{\beta}_{3j}, \ddot{\beta}_{1j}, \ddot{\beta}_{3j}, \mathbf{Z}_0$	$\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$	$\alpha_{2j}, \dot{\alpha}_{2j}, \ddot{\alpha}_{2j}$

Resolviendo el sistema [2.4.1-10] por regla de Cramer se tiene:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_0 & e^{i\alpha_{2j}} & e^{i\beta_{3j}} \\ 0 & e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} & e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} \\ 0 & e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) & e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{1j}} & e^{i\alpha_{2j}} & e^{i\beta_{3j}} \\ e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} & e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} & e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} \\ e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) & e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) & e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) \end{vmatrix}} \quad [2.4.1-11]$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} e^{i\beta_{1j}} & \mathbf{z}_0 & e^{i\beta_{3j}} & & & \\ e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} & 0 & e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} & & & \\ e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) & 0 & e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) & & & \\ \hline e^{i\beta_{1j}} & e^{i\alpha_{2j}} & e^{i\beta_{3j}} & & & \\ e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} & e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} & e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} & & & \\ e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) & e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) & e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) & & & \end{array} \right] \quad [2.4.1-12]$$

$$\mathbf{z}_3 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} e^{i\beta_{1j}} & e^{i\alpha_{2j}} & \mathbf{z}_0 & & & \\ e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} & e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} & 0 & & & \\ e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) & e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) & 0 & & & \\ \hline e^{i\beta_{1j}} & e^{i\alpha_{2j}} & e^{i\beta_{3j}} & & & \\ e^{i\beta_{1j}} \dot{\beta}_{1j} & e^{i\alpha_{2j}} \dot{\alpha}_{2j} & e^{i\beta_{3j}} \dot{\beta}_{3j} & & & \\ e^{i\beta_{1j}} (i\ddot{\beta}_{1j} - \dot{\beta}_{1j}^2) & e^{i\alpha_{2j}} (i\ddot{\alpha}_{2j} - \dot{\alpha}_{2j}^2) & e^{i\beta_{3j}} (i\ddot{\beta}_{3j} - \dot{\beta}_{3j}^2) & & & \end{array} \right] \quad [2.4.1-13]$$

Si la posición en la que se prescriben las variables cinemáticas es la inicial entonces,

$$\mathbf{z}_1 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \mathbf{z}_0 & 1 & 1 & & & \\ 0 & \dot{\alpha}_{21} & \dot{\beta}_{31} & & & \\ 0 & i\ddot{\alpha}_{21} - \dot{\alpha}_{21}^2 & i\ddot{\beta}_{31} - \dot{\beta}_{31}^2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & & & \\ \dot{\beta}_{11} & \dot{\alpha}_{21} & \dot{\beta}_{31} & & & \\ i\ddot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_{11}^2 & i\ddot{\alpha}_{21} - \dot{\alpha}_{21}^2 & i\ddot{\beta}_{31} - \dot{\beta}_{31}^2 & & & \end{array} \right] \quad [2.4.1-14]$$

$$\mathbf{z}_2 = \left[ \begin{array}{ccc|ccc} 1 & \mathbf{z}_0 & 1 & & & \\ \dot{\beta}_{11} & 0 & \dot{\beta}_{31} & & & \\ i\ddot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_{11}^2 & 0 & i\ddot{\beta}_{31} - \dot{\beta}_{31}^2 & & & \\ \hline 1 & 1 & 1 & & & \\ \dot{\beta}_{11} & \dot{\alpha}_{21} & \dot{\beta}_{31} & & & \\ i\ddot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_{11}^2 & i\ddot{\alpha}_{21} - \dot{\alpha}_{21}^2 & i\ddot{\beta}_{31} - \dot{\beta}_{31}^2 & & & \end{array} \right] \quad [2.4.1-15]$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & \mathbf{Z}_0 \\ \dot{\beta}_{11} & \dot{\alpha}_{21} & 0 \\ i\ddot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_{11}^2 & i\ddot{\alpha}_{21} - \dot{\alpha}_{21}^2 & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \dot{\beta}_{11} & \dot{\alpha}_{21} & \dot{\beta}_{31} \\ i\ddot{\beta}_{11} - \dot{\beta}_{11}^2 & i\ddot{\alpha}_{21} - \dot{\alpha}_{21}^2 & i\ddot{\beta}_{31} - \dot{\beta}_{31}^2 \end{vmatrix}} \quad [2.4.1-16]$$

en este caso solo se necesitan prescribir las variables cinemáticas, velocidades y aceleraciones, del mecanismo en la posición inicial y la posición de los pivotes fijos mediante  $\mathbf{Z}_0$ .

### Caso 6:

Se diseña un mecanismo de cuatro barras, para que alcance el seguidor una velocidad y una aceleración angular de 1.15 rad/s y  $-0.15 \text{ rad/s}^2$ , respectivamente. Se considera que la velocidad y aceleración angulares del eslabón acoplador en dichas condiciones es de 0.65 rad/s y  $0.10 \text{ rad/s}^2$  respectivamente.

Para el diseño se utilizarán las expresiones [2.4.1-14] a [2.4.1-16], sin embargo las mismas requieren del conocimiento de la ubicación de los pivotes fijos, por lo que en la implementación presentada a continuación las expresiones dependen de  $\mathbf{Z}_0$ :

$$i := \sqrt{-1} \quad \omega_{\beta_{11}} := 2 \quad \alpha_{\beta_{11}} := 0.5 \quad \omega_{\beta_{31}} := 1.15 \quad \alpha_{\beta_{31}} := -0.15 \quad \omega_{\alpha_{21}} := 0.65$$

$$\alpha_{\alpha_{21}} := 0.10$$

$$\omega_{\beta_{11}} = \frac{d}{dt}\beta_{11} \quad \alpha_{\beta_{11}} = \frac{d^2}{dt^2}\beta_{11} \quad \omega_{\beta_{31}} = \frac{d}{dt}\beta_{31} \quad \alpha_{\beta_{31}} = \frac{d^2}{dt^2}\beta_{31}$$

$$\omega_{\alpha_{21}} = \frac{d}{dt}\alpha_{21} \quad \alpha_{\alpha_{21}} = \frac{d^2}{dt^2}\alpha_{21} \quad Z_0 := 200$$

$$Z_1 := \frac{\begin{bmatrix} Z_0 & 1 & -1 \\ 0 & \omega_{\alpha_{21}} & -\omega_{\beta_{31}} \\ 0 & i \cdot \alpha_{\alpha_{21}} - (\omega_{\alpha_{21}})^2 & (\omega_{\beta_{31}})^2 - i \cdot \alpha_{\beta_{31}} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \omega_{\beta_{11}} & \omega_{\alpha_{21}} & -\omega_{\beta_{31}} \\ i \cdot \alpha_{\beta_{11}} - (\omega_{\beta_{11}})^2 & i \cdot \alpha_{\alpha_{21}} - (\omega_{\alpha_{21}})^2 & (\omega_{\beta_{31}})^2 - i \cdot \alpha_{\beta_{31}} \end{bmatrix}}$$

$$Z_2 := \frac{\begin{bmatrix} 1 & Z_0 & -1 \\ \omega_{\beta_{11}} & 0 & -\omega_{\beta_{31}} \\ i \cdot \alpha_{\beta_{11}} - (\omega_{\beta_{11}})^2 & 0 & (\omega_{\beta_{31}})^2 - i \cdot \alpha_{\beta_{31}} \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \omega_{\beta_{11}} & \omega_{\alpha_{21}} & -\omega_{\beta_{31}} \\ i \cdot \alpha_{\beta_{11}} - (\omega_{\beta_{11}})^2 & i \cdot \alpha_{\alpha_{21}} - (\omega_{\alpha_{21}})^2 & (\omega_{\beta_{31}})^2 - i \cdot \alpha_{\beta_{31}} \end{bmatrix}}$$

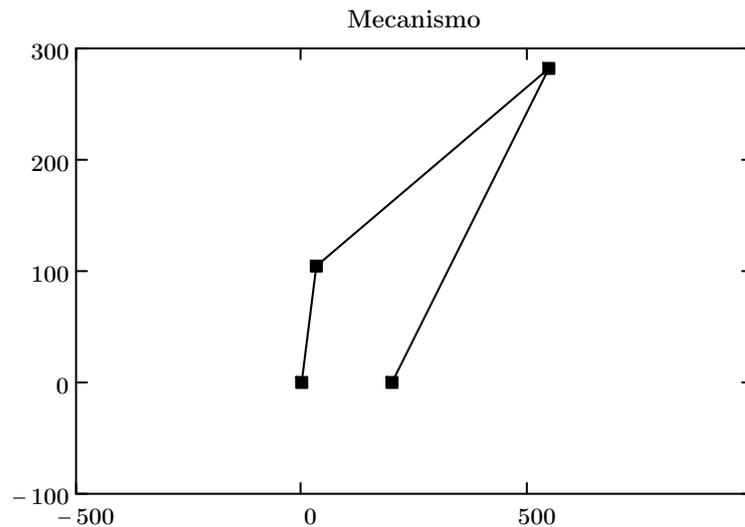
$$Z_3 := \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 & Z_0 \\ \omega_{\beta_{11}} & \omega_{\alpha_{21}} & 0 \\ i \cdot \alpha_{\beta_{11}} - (\omega_{\beta_{11}})^2 & i \cdot \alpha_{\alpha_{21}} - (\omega_{\alpha_{21}})^2 & 0 \end{bmatrix}}{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \omega_{\beta_{11}} & \omega_{\alpha_{21}} & -\omega_{\beta_{31}} \\ i \cdot \alpha_{\beta_{11}} - (\omega_{\beta_{11}})^2 & i \cdot \alpha_{\alpha_{21}} - (\omega_{\alpha_{21}})^2 & (\omega_{\beta_{31}})^2 - i \cdot \alpha_{\beta_{31}} \end{bmatrix}}$$

$$Z_1 = 32.429 + 104.454i$$

$$Z_2 = 515.129 + 177.572i$$

$$Z_3 = 347.558 + 282.026i$$

$$\text{Mecanismo}_x := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Re}(Z_1) \\ \text{Re}(Z_1 + Z_2) \\ \text{Re}(Z_1 + Z_2 - Z_3) \end{pmatrix} \quad \text{Mecanismo}_y := \begin{pmatrix} 0 \\ \text{Im}(Z_1) \\ \text{Im}(Z_1 + Z_2) \\ \text{Im}(Z_1 + Z_2 - Z_3) \end{pmatrix}$$



## 2.5 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

- 1 Loerch, R.J. Erdman, A. G. y Sandor, G. N. (1979) *On the existence of circle-point circles for three precision point dyad synthesis*, ASME, Paper JOURNAL OF MECHANICAL DESIGN, pp. 554-562.
- 2 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1998). *Diseño de Mecanismos: Análisis y Síntesis*. (3ra edición). México, México: Ed Pearson. Cap: 8.
- 3 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. (1ra Edición). New Jersey, Estados Unidos: Ed Prentice-Hall. Caps: 2.
- 4 Norton, R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria: Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos*. (5ta Edición) México, México: Ed. McGraw-Hill. Caps: 3 y 5.
- 5 Hartenberg, R. S. y Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages*. (1ra Edición). New York, Estados Unidos: Ed. McGraw-Hill. Cap. 8.
- 6 Chiang C. H. (2000). *Kinematics and Design of Planar Mechanisms*. (1ra Edición). Malabar, Estados Unidos: Ed. Krieger Publishing. Cap. 3.

- 7 Russell, K. Shen, Q. y Sodhi, R.S. (2014). *Mechanism Design: Visual and Programmable Approaches*. (1ra Edición). Boca Raton, Estados Unidos: CRC Press. Caps: 4 y 6.
- 8 Gans, R. (1991). *Analytical Kinematics: Analysis and Synthesis of Planar Mechanisms*. (1ra Edición). Stoneham, Estados Unidos: Ed. Butterworth-Heinemann. Cap. 8.
- 9 Waldron, K. J. y Kinzel, G. L. (2004). *Kinematics, Dynamics and Design of Machinery*. (2da Edición). New Delhi, India: Ed. Wiley & Sons India. Cap. 6.
- 10 McCarthy, M. J. y Song Soh, G. (2004) *Geometric Design of Linkages*. (2da Edición). Massachusetts, Estados Unidos: Ed. Springer. Cap. 3.
- 11 Manual del usuario MathCAD versión 15
- 12 Manual del usuario Artas SAM versión 6.1
- 13 Maxfield, B. (2006) *Engineering with MathCAD*. (1ra. Edición). New York, Estados Unidos: Ed. Butterworth-Heinemann. Caps: 9, 11, 14 y 15.
- 14 Maxfield, B. (2009). *Essential MathCAD for Engineering, Science and Math*. (2da Edición). Waltham, Estados Unidos: Ed. Academic Press. Caps: 5, 7, 9 y 12.

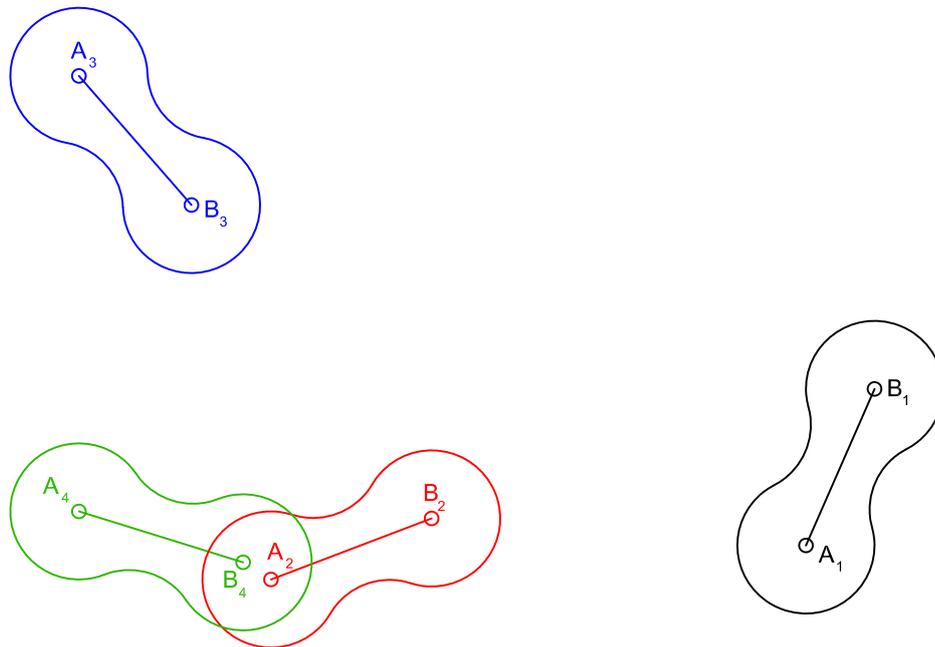
## CAPÍTULO 3

### SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS PARA CUATRO POSICIONES PRESCRITAS

El presente capítulo desarrollará tanto el procedimiento gráfico como analítico para sintetizar un mecanismo de cuatro barras cuando se conocen cuatro posiciones del movimiento de su eslabón acoplador.

#### 3.1 CUATRO POSICIONES DE UN ESLABÓN MÓVIL - ANÁLISIS GEOMÉTRICO

Considérese cuatro posiciones de un eslabón móvil con respecto al plano fijo, representadas mediante las líneas  $A_1B_1$ ,  $A_2B_2$ ,  $A_3B_3$  y  $A_4B_4$  como lo muestra la figura 3.1-1:



**Fig. 3.1-1:** Cuatro posiciones de un eslabón móvil

Las tres rotaciones generadas por el movimiento de dicho eslabón producen los polos  $P_{12}$ ,  $P_{23}$  y  $P_{34}$  así como los ángulos de rotación  $\alpha_{12}$ ,  $\alpha_{23}$  y  $\alpha_{34}$ . Adicionalmente otras tres rotaciones pueden ser posibles, a saber la rotación de la posición 1 a la 3, de la posición 2 a la 4 y de la posición 1 a la 4, pudiéndose determinar los

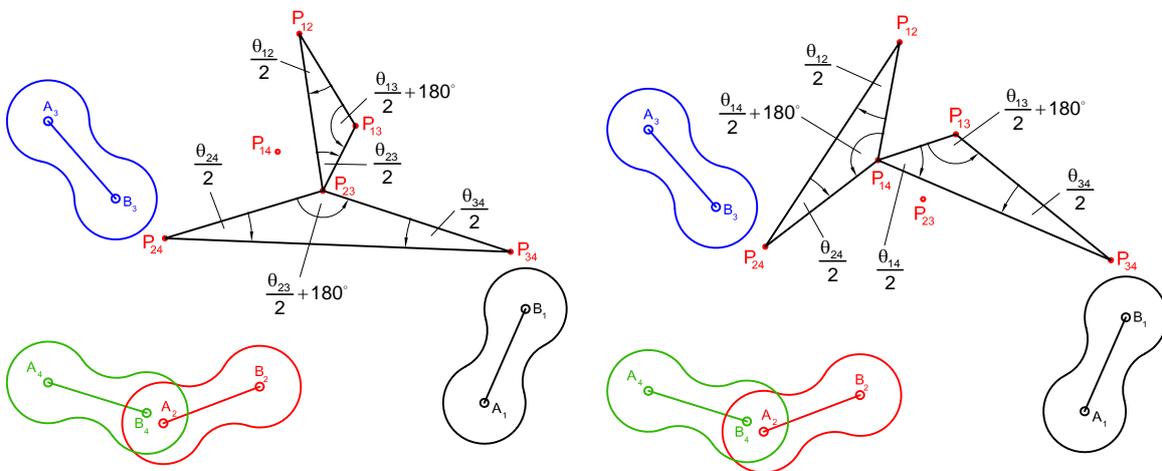
polos  $P_{13}$ ,  $P_{24}$  y  $P_{14}$  de ángulos de rotación  $\alpha_{13}$ ,  $\alpha_{24}$  y  $\alpha_{14}$ . En resumen el movimiento de un eslabón a través de 4 posiciones puede producir seis polos:

$P_{12}$                    $P_{23}$                    $P_{34}$                    $P_{13}$                    $P_{24}$                    $P_{14}$

Éstos se pueden agrupar para formar cuatro diferentes triángulos de polos,

$\triangle P_{12}P_{23}P_{13}$                    $\triangle P_{12}P_{24}P_{14}$                    $\triangle P_{13}P_{34}P_{14}$                    $\triangle P_{23}P_{34}P_{24}$

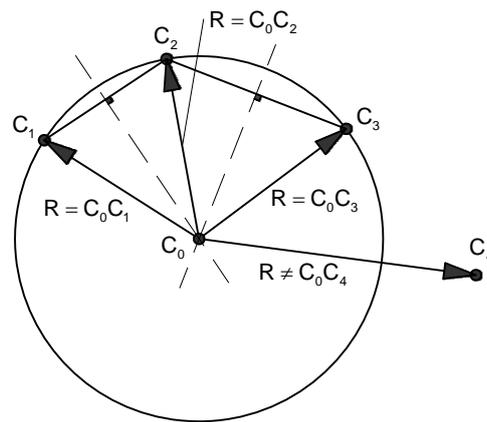
como lo muestra la figura 3.1-2:



**Fig. 3.1-2:** Triángulos de polos correspondientes a las cuatro posiciones del eslabón móvil

Cualquier punto  $C$  del eslabón puede tomar tres posiciones  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  a través de las cuales un círculo, o una línea recta, se pueden dibujar en el plano fijo respecto del cual se mueven; si se considera a la línea recta como un círculo de radio infinito, entonces se puede afirmar que puede siempre dibujarse un círculo a través de las tres posiciones de un punto móvil del eslabón acoplador<sup>1)</sup>. El centro  $C_0$  del círculo que contiene a  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  puede encontrarse al intersecar las normales medias a las líneas  $C_1C_2$  y  $C_2C_3$ , como se muestra en la figura 3.1-3:

<sup>1</sup> Esta afirmación fue demostrada analíticamente en el apartado 2.3



**Fig. 3.1-3:** Círculo que contiene a  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ .

Sin embargo, de forma general la posición  $C_4$  no descansa sobre el círculo generado por  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$ . Para que ello ocurriese se debe cumplir que  $C_0C_1 = C_0C_2 = C_0C_3 = C_0C_4$  y dichos valores corresponderían al radio del círculo de centro  $C_0$  lo cual podría ocurrir solo para ciertos puntos  $C$  del eslabón móvil y de forma similar únicamente un punto particular del plano fijo puede ser elegido como centro del círculo que contiene a  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$ .

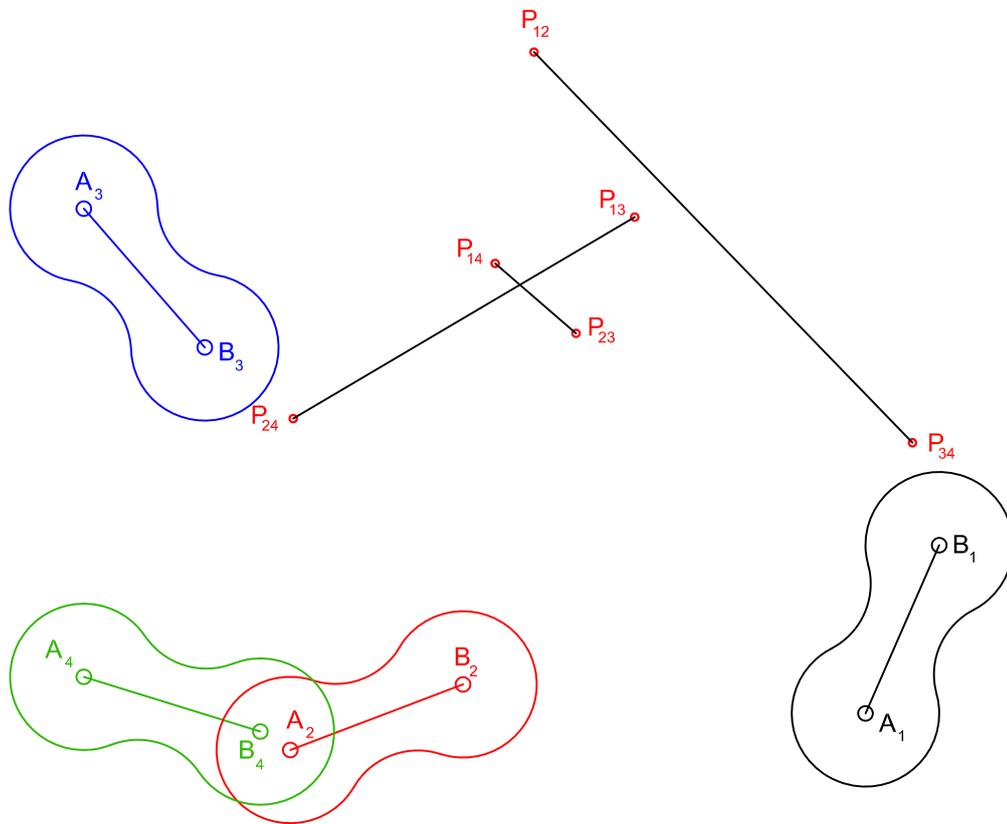
El punto  $C$  del eslabón móvil que asume las posiciones  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  y  $C_4$  que descansan sobre un círculo cuando dicho eslabón se mueve a través de las posiciones 1, 2, 3 y 4 lleva la denominación de **punto circular<sup>2)</sup>**, mientras que el centro  $C_0$  de tal círculo en el plano fijo se llama **punto central**.

Se definen como **polos opuestos** a dos polos que llevan diferentes subíndices, por lo que para los seis polos generados existen tres parejas de polos opuestos, éstas son:

$$(P_{13}, P_{24}) \quad (P_{23}, P_{14}) \quad (P_{12}, P_{34})$$

Dichas parejas de polos opuestos pueden formar líneas al conectarse entre sí, como lo muestra la figura 3.1-4:

<sup>2</sup> Estos puntos ya fueron referidos en el apartado 2.3, pero desde una perspectiva analítica y para el caso de tres posiciones prescritas ocupadas por un eslabón acoplador móvil.



**Fig. 3.1-4:** Líneas entre polos opuestos.

Un **cuadrilátero de polos opuestos** es aquel que contiene como sus diagonales a dos líneas que conectan dos polos opuestos y es posible dibujar tres cuadriláteros de polos opuestos, a saber:

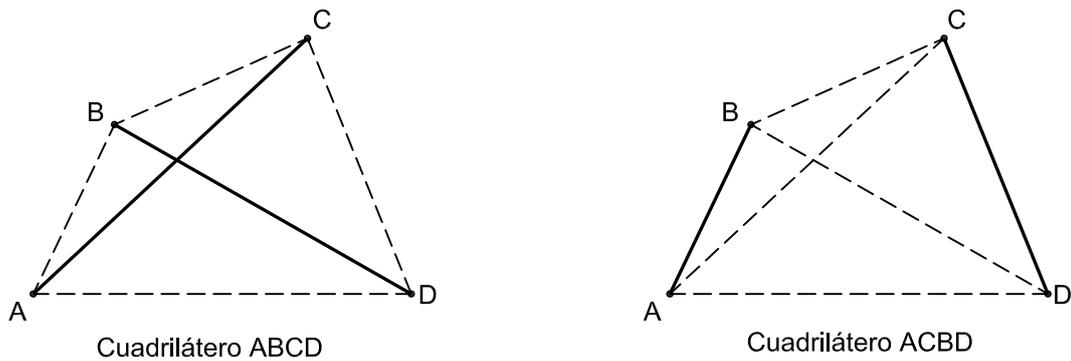
$$\triangle P_{23}P_{13}P_{14}P_{24}$$

$$\triangle P_{13}P_{12}P_{24}P_{34}$$

$$\triangle P_{14}P_{12}P_{23}P_{34}$$

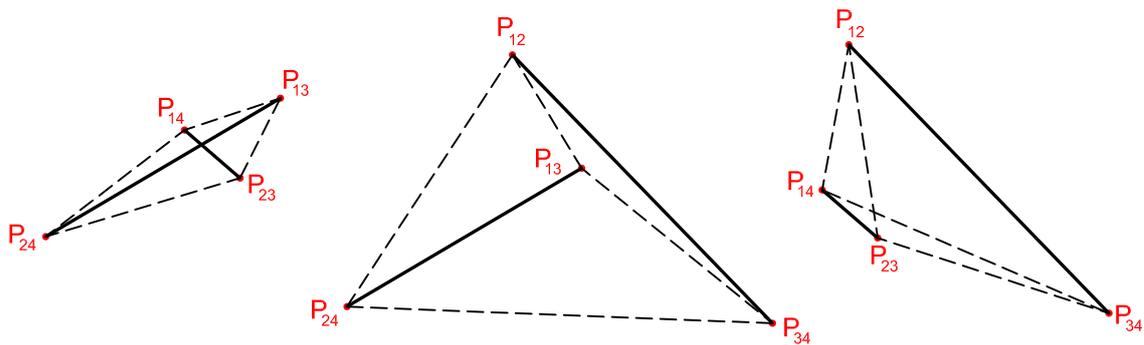
La distinción entre los lados y las diagonales de un cuadrilátero de polos opuestos debe analizarse minuciosamente de acuerdo a lo definido en el párrafo anterior. Esta afirmación se aclara en la figura 3.1-5, donde el orden distinto de la nominación de los cuadriláteros mostrados cambia la interpretación de lados y diago-

nales aunque si se mira la estructura general parecería ser la misma, pero los lados se marcan con línea entrecortada mientras que las diagonales se marcan con línea continua gruesa.



**Fig. 3.1-5:** Diagonales(línea continua gruesa) y lados(línea entrecortada) de dos cuadriláteros.

Los tres cuadriláteros de polos opuestos se muestran en la figura 3.1-6:



**Fig. 3.1-6:** Cuadriláteros de polos opuestos correspondientes a los polos de la Fig. 3.1-4.

En cada uno de ellos existen cuatro lados (mostrados con líneas entrecortadas) y dos diagonales (mostradas con líneas sólidas gruesas) que conectan los polos opuestos; dos lados serán adyacentes si tienen un vértice común y opuestos si no lo tienen.

### 3.2 CURVAS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR - SÍNTESIS GRÁFICA DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA CUATRO POSICIONES PRESCRITAS MEDIANTE EL USO DE CURVAS DE BURMESTER.

Cuando un eslabón móvil ocupa sucesivamente cuatro posiciones con respecto a un plano fijo, los lados opuestos de cada cuadrilátero de polos opuestos subtienden ángulos que son iguales o difieren por  $180^\circ$  en un punto central. Por el contrario, cualquier punto desde el cual dos lados opuestos de un cuadrilátero de polos opuestos forma ángulos iguales o que difieren por  $180^\circ$  es un punto central.

El proceso de construcción de un punto central bajo la afirmación del párrafo anterior es como sigue:

Dado un cuadrilátero de polos opuestos  $\triangle P_{13}P_{14}P_{24}P_{23}$ , entonces:

(1) Construya las normales medias  $h'$  y  $h''$  de los dos lados opuestos, por ejemplo  $P_{13}P_{14}$  y  $P_{23}P_{24}$ .

(2) Genere ángulos arbitrarios

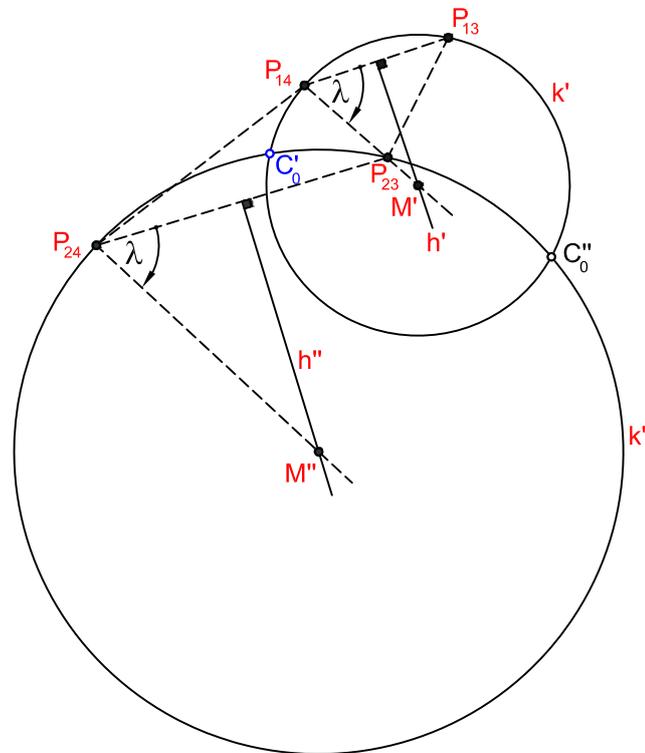
$$\angle M'P_{14}P_{13} = \angle M''P_{24}P_{23} = \lambda$$

(3) Dibuje el círculo  $k'$  de centro  $M'$  que pase por  $P_{13}$  y  $P_{14}$  y el círculo  $k''$  de centro  $M''$  que atraviese por  $P_{23}$  y  $P_{24}$ .

(4) La intersección de los círculos  $k'$  y  $k''$  producen los puntos  $C'_0$  y  $C''_0$ .

Los ángulos centrales  $P_{13}M'P_{14}$  y  $P_{23}M''P_{24}$  son iguales, mientras que los ángulos inscritos  $P_{13}C'_0P_{14}$  y  $P_{23}C'_0P_{24}$  son iguales entre sí y la mitad de los ángulos centrales anteriores. De forma similar, los ángulos inscritos  $P_{13}C''_0P_{14}$  y  $P_{23}C''_0P_{24}$  son también iguales. Se concluye entonces que los lados opuestos  $P_{13}P_{14}$  y  $P_{23}P_{24}$  del cuadrilátero de polos opuestos  $P_{13}P_{14}P_{24}P_{23}$  subtienden ángulos iguales desde  $C'_0$

y  $C''_0$ , por lo que dichos puntos son puntos centrales por lo indicado en el párrafo inicial de este apartado. La figura 3.1-7 gráfica el procedimiento anterior:

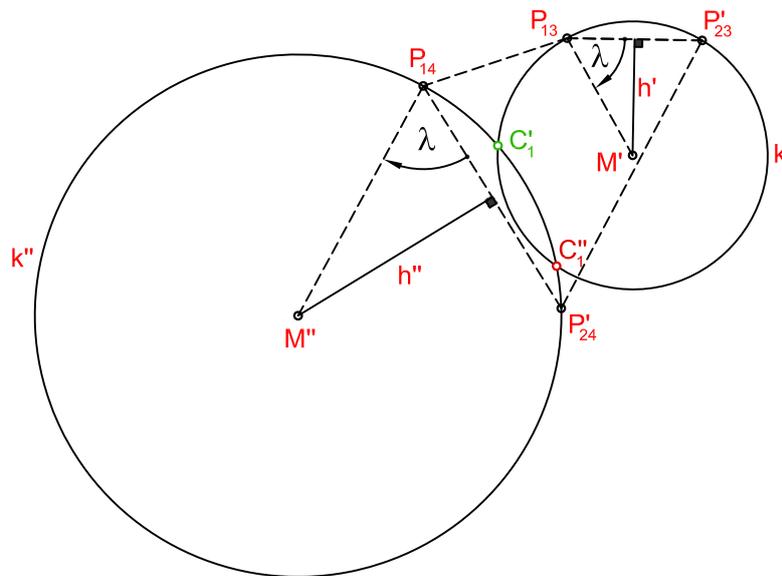


**Fig. 3.1-7:** Construcción de los puntos centrales  $C'_0$  y  $C''_0$ .

Si bien el procedimiento se ejemplificó para los lados opuestos  $P_{13}P_{14}$  y  $P_{23}P_{24}$  del cuadrilátero de polos opuestos  $\triangle P_{13}P_{14}P_{24}P_{23}$ , ésta se puede aplicar usando los lados opuestos  $P_{14}P_{24}$  y  $P_{13}P_{23}$  o empleando otro cuadrilátero de lados opuestos.

Por otro lado, la construcción de un punto circular, es decir aquel punto del eslabón móvil que ocupa las posiciones  $C_1, C_2, C_3, C_4$  se puede deducir a partir de la metodología anterior para determinar un punto central simplemente revirtiendo los roles de los planos fijo y móvil. Si el movimiento del eslabón respecto al plano fijo se considera relativo a la posición 1, un punto central  $C_0$  fijo en el plano de bastidor ocupa las cuatro posiciones  $C_{01}, C_{02}, C_{03}, C_{04}$  equidistantes del correspondiente punto circular  $C_1$ . El punto circular  $C_1$  se puede entonces construir como un punto central, pero empleando los seis polos que representan las tres rota-

ciones sucesivas del plano fijo con respecto a la posición 1. Así entonces los polos  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{14}$  permanecen inalterados y  $P_{23}$ ,  $P_{24}$ ,  $P_{34}$  deben ser reemplazados por sus polos imagen  $P^1_{23}$ ,  $P^1_{24}$ ,  $P^1_{34}$ . Una vez encontrados estos polos imagen un cuadrilátero de polos opuestos tal como  $\triangle P_{13}P_{14}P^1_{24}P^1_{23}$  se puede emplear con el procedimiento explicado para el caso de un punto central para producir dos puntos circulares  $C'_1$  y  $C''_2$  como se muestra en la figura 3.1-8:



**Fig. 3.1-8:** Construcción de los puntos circulares  $C'_1$  y  $C''_1$ .

Para diferentes valores de un ángulo  $\lambda$  arbitrariamente elegidos se generarán diferentes parejas de puntos centrales  $C'_0$  y  $C''_0$ . El lugar geométrico de dichos puntos conforme  $\lambda$  varía de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  constituye la denominada **curva de puntos centrales**. Además, como en el caso de los puntos centrales, el lugar geométrico de las parejas de puntos  $C'_1$  y  $C''_1$  cuando  $\lambda$  varía de  $-90^\circ$  a  $90^\circ$  forma la llamada **curva de puntos circulares**; la curva de puntos centrales y la de puntos circulares llevan la denominación genérica de **curvas de Burmester** y mediante ellas se puede sintetizar gráficamente un mecanismo de cuatro barras.

La curva de puntos centrales pasa a través de los seis polos  $P_{12}$ ,  $P_{23}$ ,  $P_{34}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{24}$ ,  $P_{14}$  y además dicha curva pasa a través de las intersecciones:

$$Q_{12} \text{ de } P_{13}P_{23} \text{ y } P_{14}P_{24}$$

$Q_{13}$  de  $P_{12}P_{23}$  y  $P_{14}P_{34}$

$Q_{14}$  de  $P_{12}P_{24}$  y  $P_{13}P_{34}$

$Q_{23}$  de  $P_{12}P_{13}$  y  $P_{24}P_{34}$

$Q_{24}$  de  $P_{12}P_{14}$  y  $P_{23}P_{34}$

$Q_{34}$  de  $P_{13}P_{14}$  y  $P_{23}P_{24}$

La curva de puntos circulares en cambio pasa a través de los seis polos  $P_{12}$ ,  $P_{23}^1$ ,  $P_{34}^1$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{24}^1$ ,  $P_{14}$  así como a través de las intersecciones:

$Q_{12}^1$  de  $P_{13}P_{23}^1$  y  $P_{14}P_{24}^1$

$Q_{13}^1$  de  $P_{12}P_{23}^1$  y  $P_{14}P_{34}^1$

$Q_{14}^1$  de  $P_{12}P_{24}^1$  y  $P_{13}P_{34}^1$

$Q_{23}^1$  de  $P_{12}P_{13}$  y  $P_{24}^1P_{34}^1$

$Q_{24}^1$  de  $P_{12}P_{14}$  y  $P_{23}^1P_{34}^1$

$Q_{34}^1$  de  $P_{13}P_{14}$  y  $P_{23}^1P_{24}^1$

Para cada punto circular hay un correspondiente y único punto central. El punto central  $C_0$  correspondiente a un punto circular  $C_1$  dado puede ser determinado mediante el uso de las siguientes igualdades:

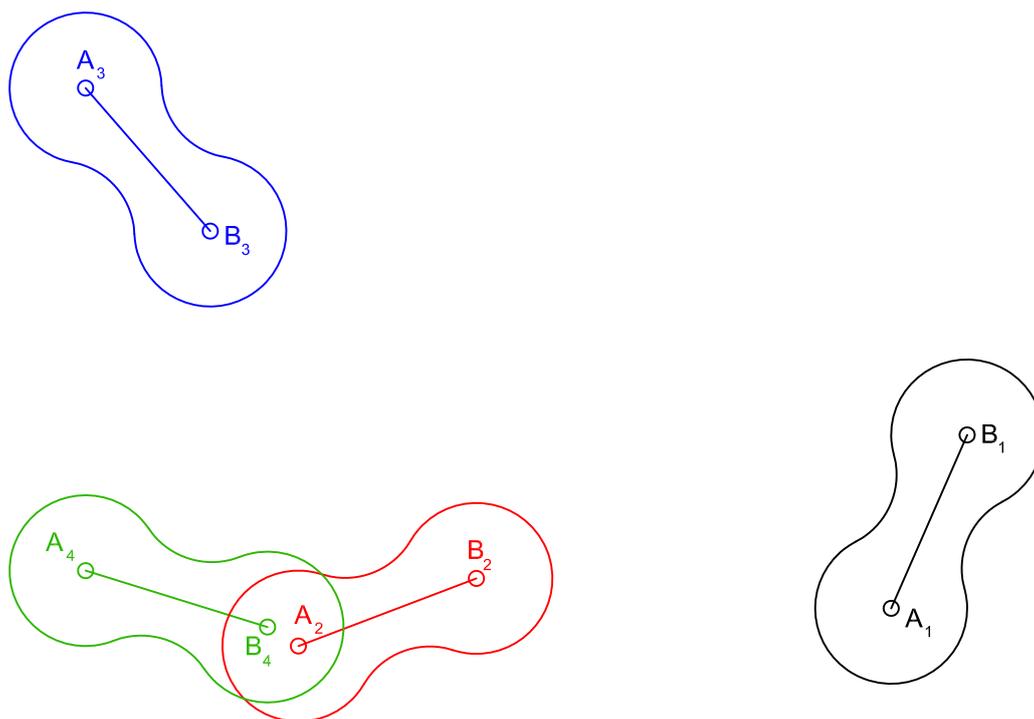
$$\angle C_1 P_{12} C_0 = \angle P_{13} P_{12} P_{23} = \frac{\alpha_{12}}{2} \quad \text{o} \quad \frac{\alpha_{12}}{2} + 180^\circ$$

$$\angle C_1 P_{13} C_0 = \angle P_{13} P_{13} P_{23} = \frac{\alpha_{13}}{2} \quad \text{o} \quad \frac{\alpha_{13}}{2} + 180^\circ$$

Este procedimiento se muestra en el caso 2.

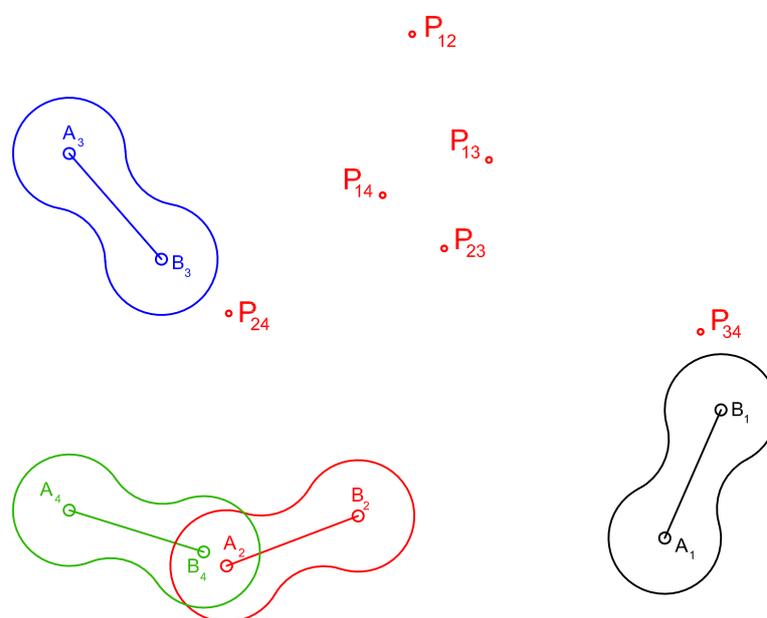
### **Caso 1:**

El gráfico 3.1-9 muestra las cuatro posiciones ocupadas por un eslabón móvil, se dibujan las curvas de Burmester y se halla un mecanismo de cuatro barras cuyo acoplador permite el movimiento de dicho eslabón por las posiciones indicadas.



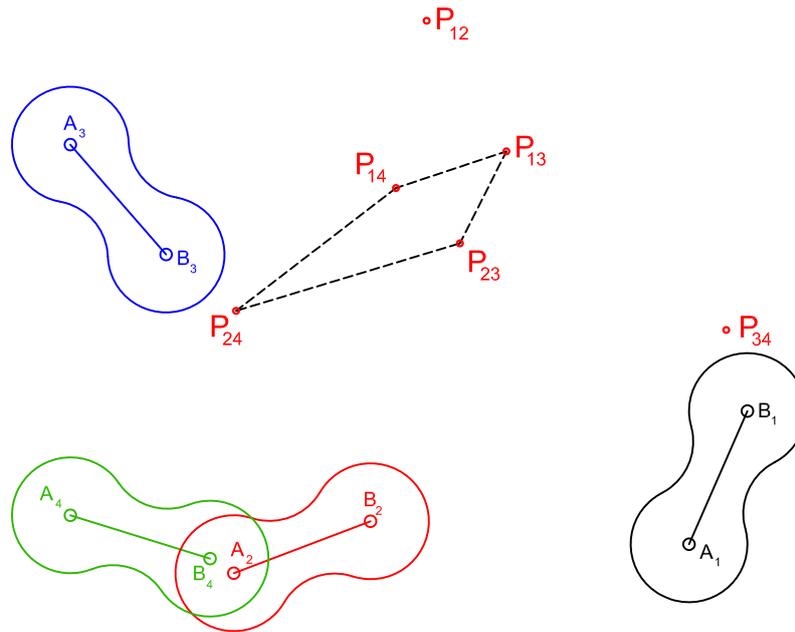
**Fig. 3.1-9:** Cuatro posiciones de un eslabón acoplador para diseño de un mecanismo.

Se construyen los polos para las cuatro posiciones del eslabón



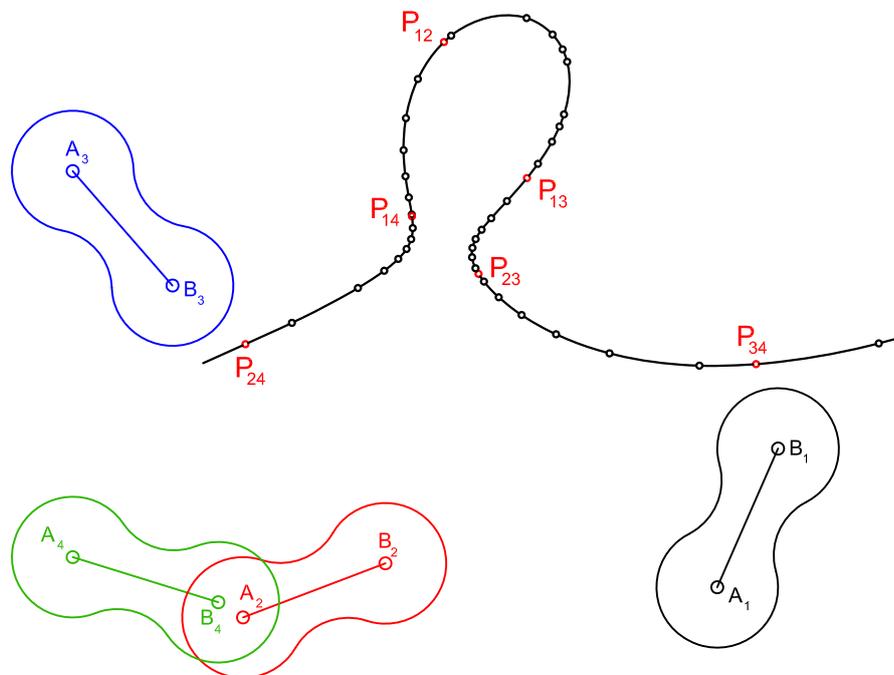
**Fig. 3.1-10:** Polos para las posiciones del eslabón acoplador del caso 1.

seguidamente se genera el cuadrilátero de polos opuestos  $\triangle P_{13}P_{14}P_{24}P_{23}$ :



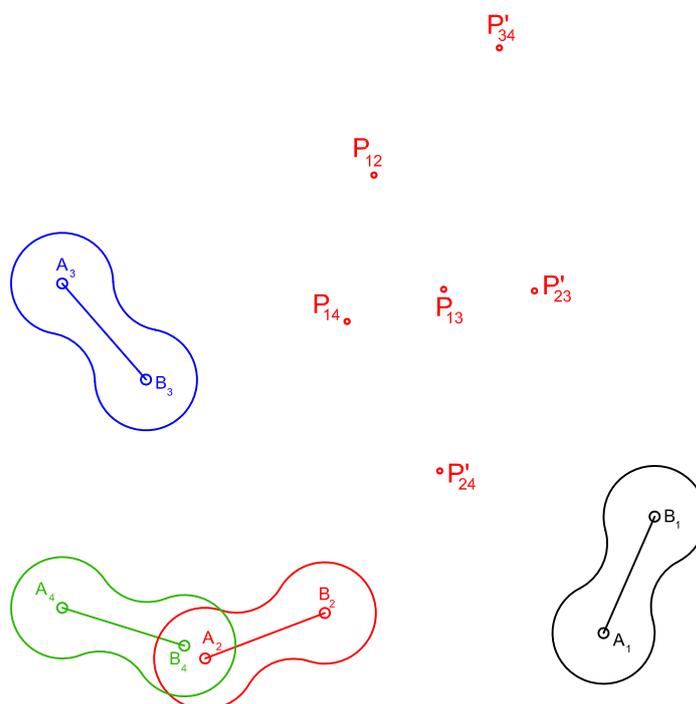
**Fig. 3.1-11:** Cuadrilátero de polos opuestos para el caso 1.

y a partir de este variando los ángulos de giro de los lados opuestos  $P_{14}P_{13}$  y  $P_{24}P_{23}$  desde  $-90^\circ$  hasta  $90^\circ$  en pasos de  $10^\circ$ ,  $5^\circ$  en algunos tramos y  $1^\circ$  en otros; entonces se obtiene el siguiente lugar geométrico correspondiente a la curva de puntos centrales:



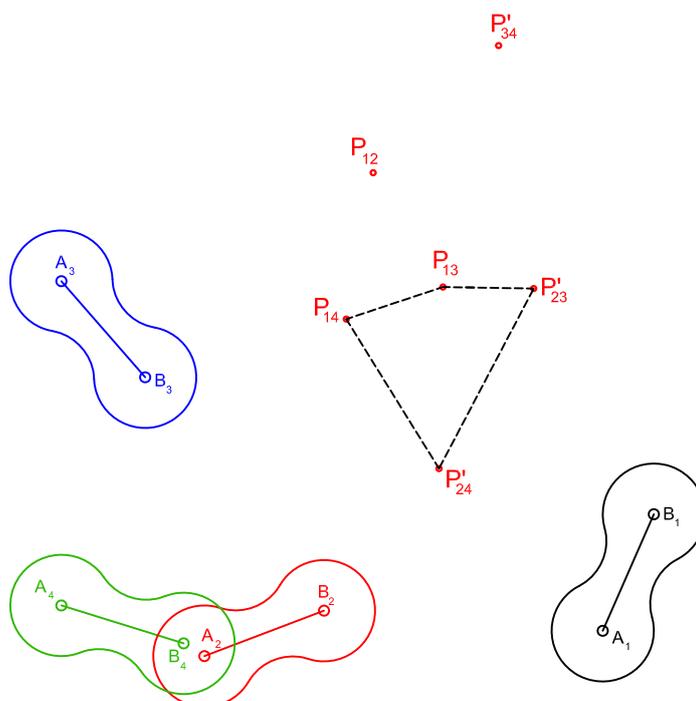
**Fig. 3.1-12:** Curva de puntos centrales para el caso 1.

Se construyen los polos  $P_{12}$ ,  $P_{13}$ ,  $P_{14}$ ,  $P_{23}^1$ ,  $P_{24}^1$ ,  $P_{34}^1$ :



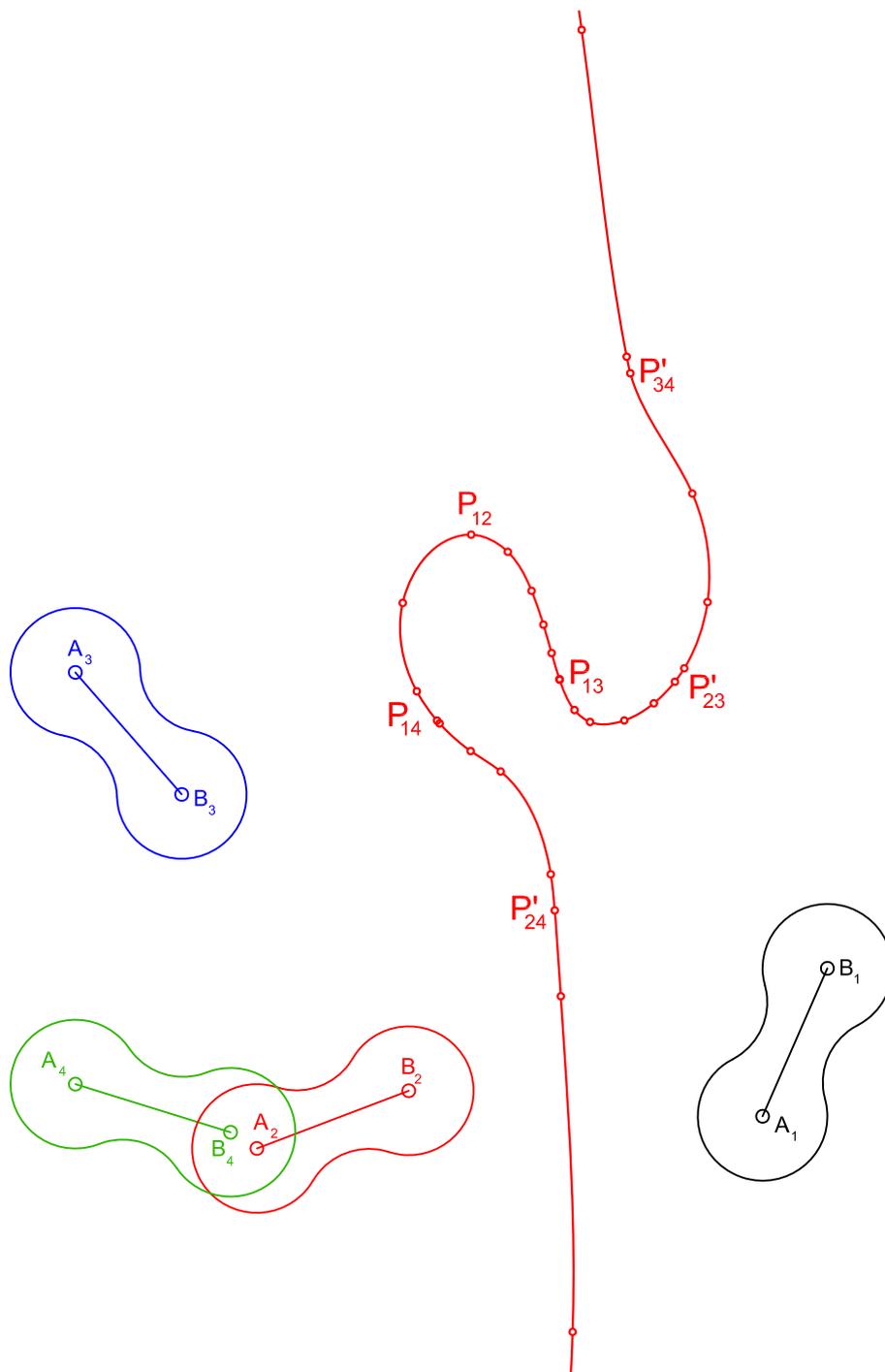
**Fig. 3.1-13:** Polos y polos imagen para las posiciones del acoplador en el caso 1.

y a partir de éstos el cuadrilátero de polos opuestos  $\square P_{13}P_{14}P_{24}^1P_{23}^1$ :



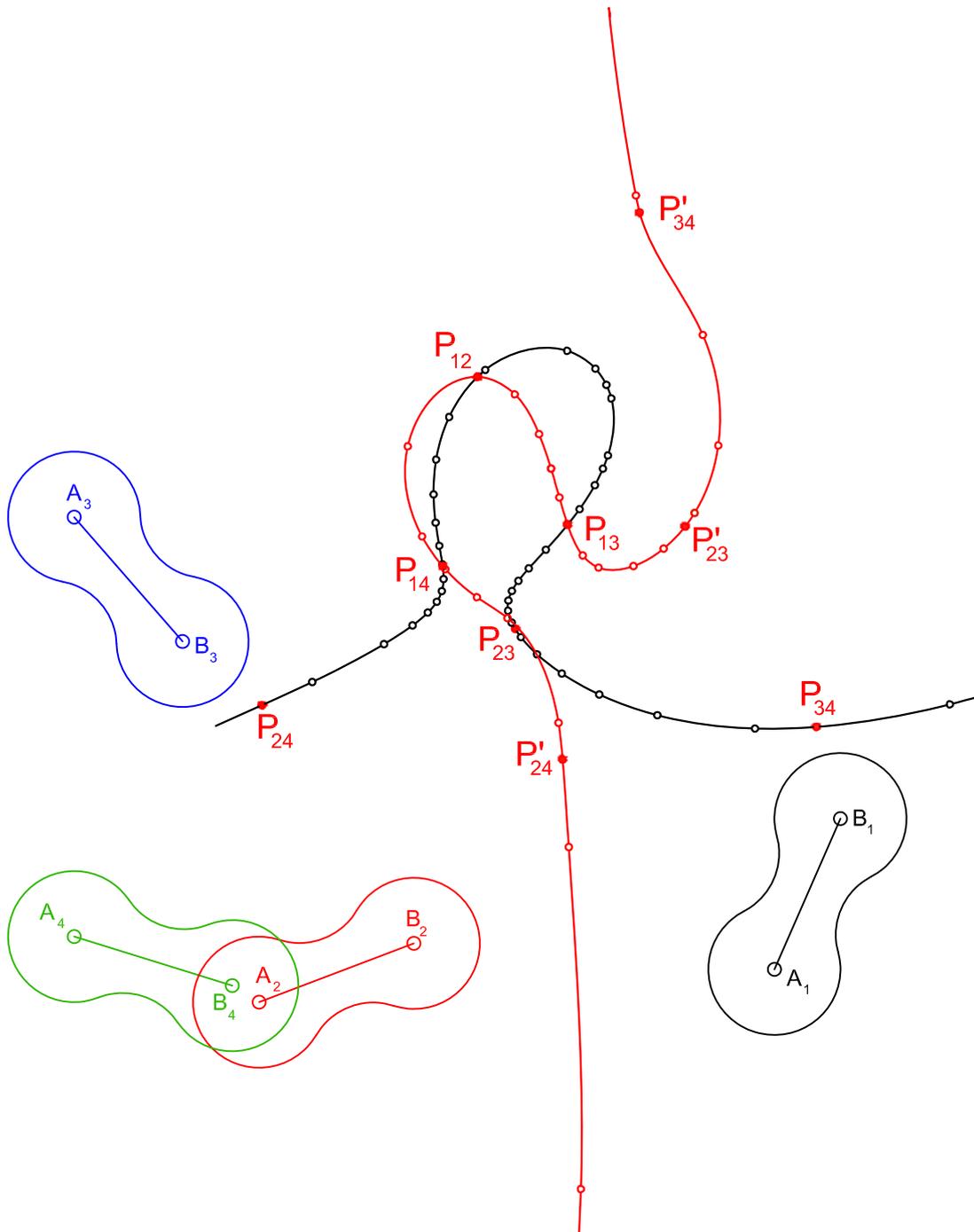
**Fig. 3.1-14:** Cuadrilátero de polos opuestos para los polos de la fig. 3.1-13.

siguiendo el mismo proceso anterior con los lados opuestos  $P_{13}P'_{23}$  y  $P_{14}P'_{24}$ , se obtiene la siguiente curva de puntos circulares



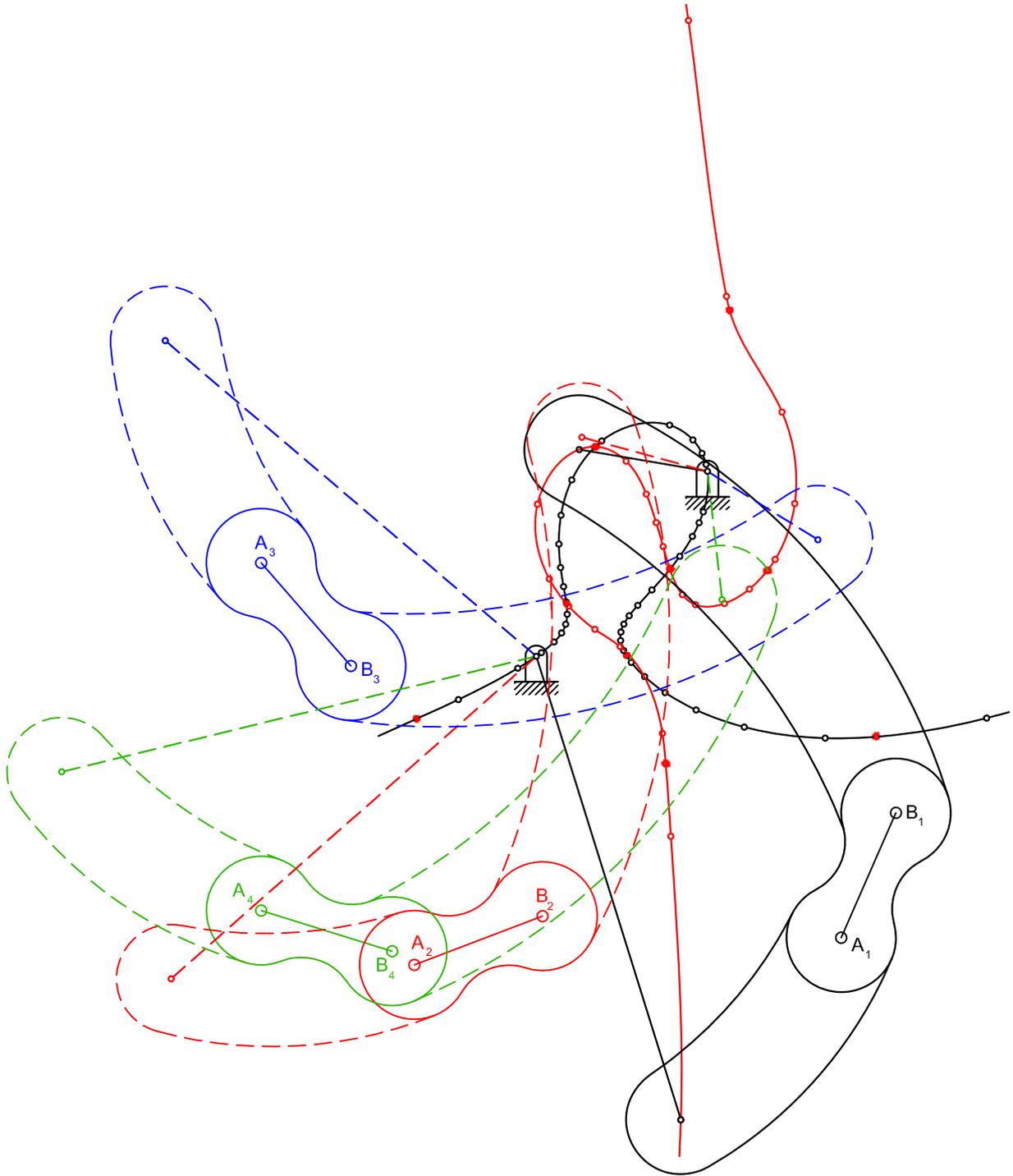
**Fig. 3.1-15:** Curva de puntos circulares para el caso 1.

ambas curvas de Burmester se muestran en la siguiente figura:



**Fig. 3.1-16:** Curvas de Burmester para el caso 1.

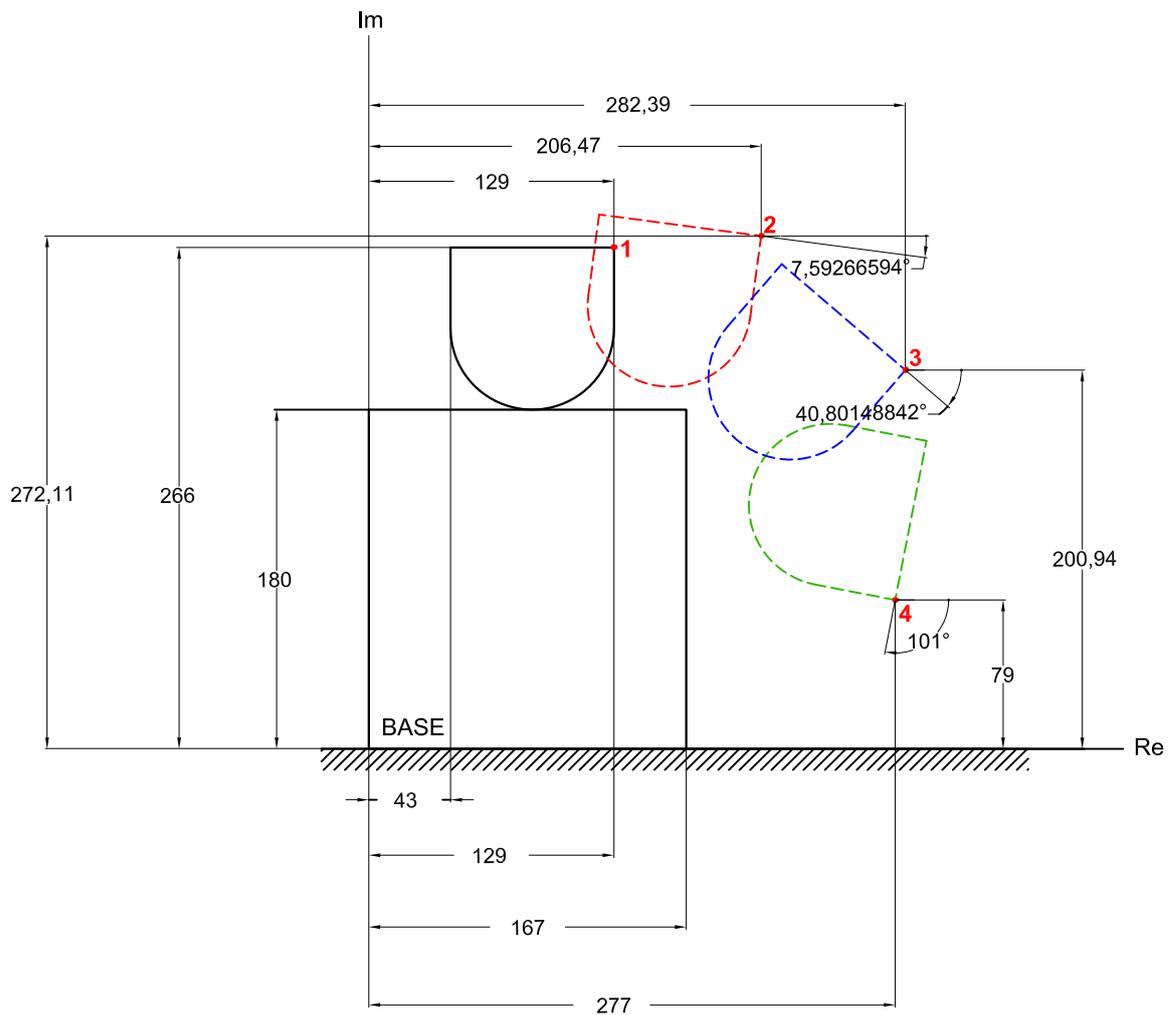
y el mecanismo de cuatro barras que permite dichas posiciones es:



**Fig. 3.1-17:** Mecanismo sintetizado graficamente para el caso 1.

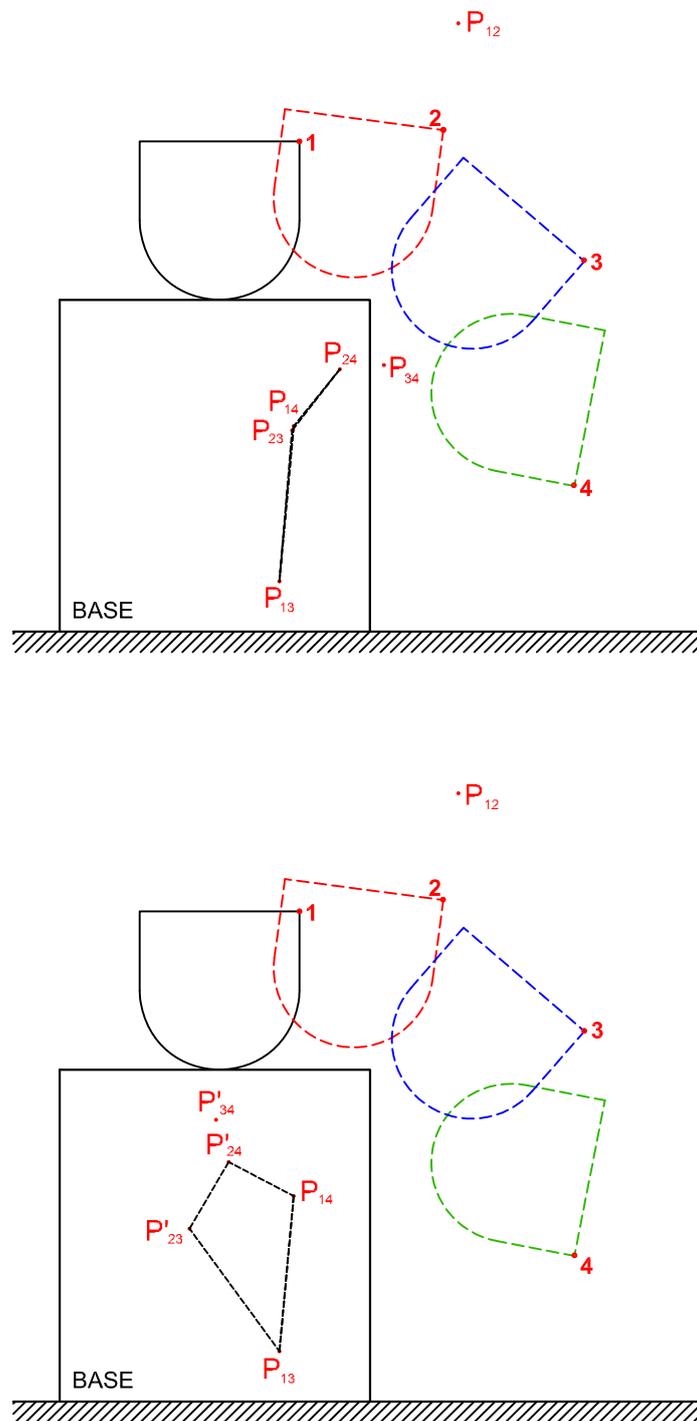
**Caso 2:**

Se sintetiza gráficamente mediante curvas de Burmester un mecanismo de cuatro barras para mover el objeto mostrado en la figura 3.1-18, a través de las cuatro posiciones indicadas en la misma. En el diseño los pivotes fijos deben hallarse dentro del área marcada como base.



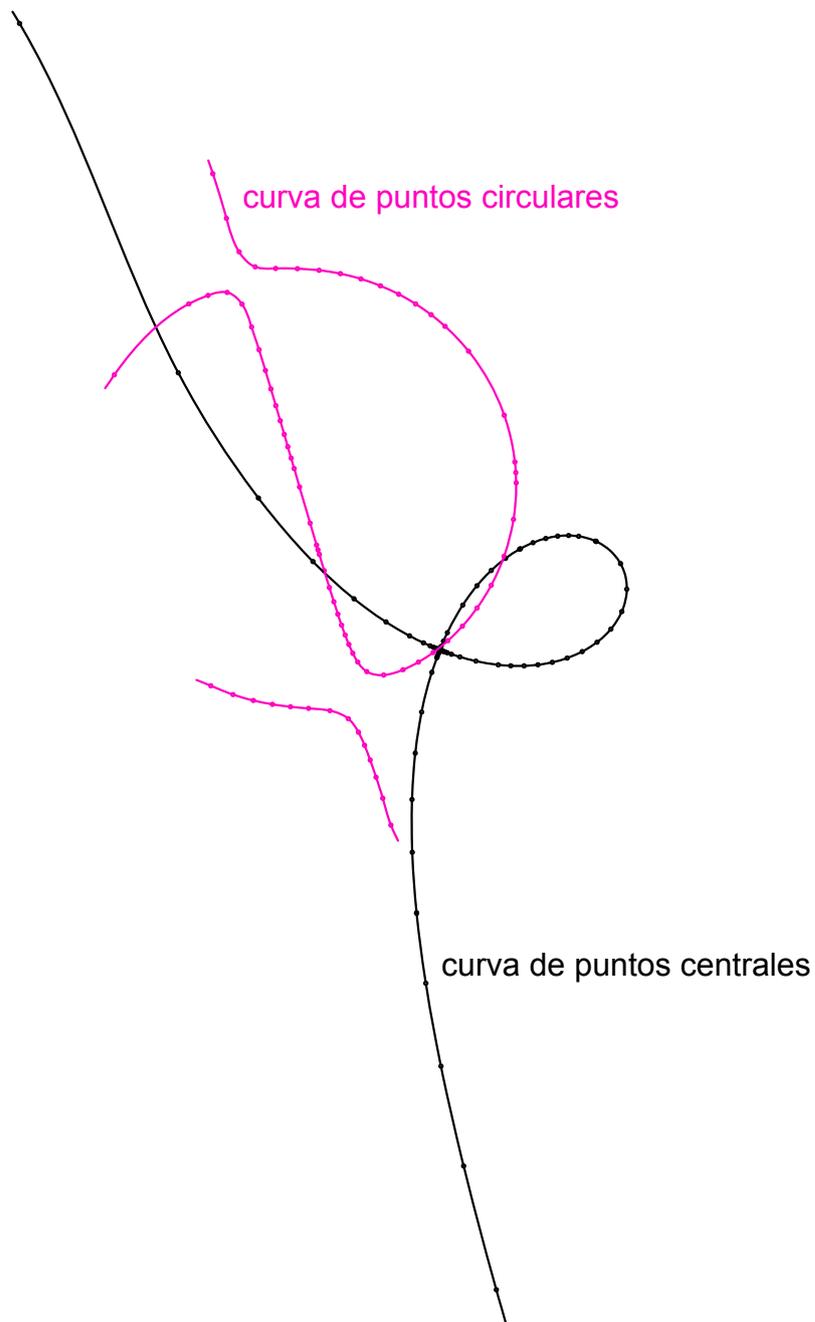
**Fig. 3.1-18:** Posiciones del acoplador para diseño del mecanismo del caso 2.

Para los cuadriláteros de polos opuestos mostrados,



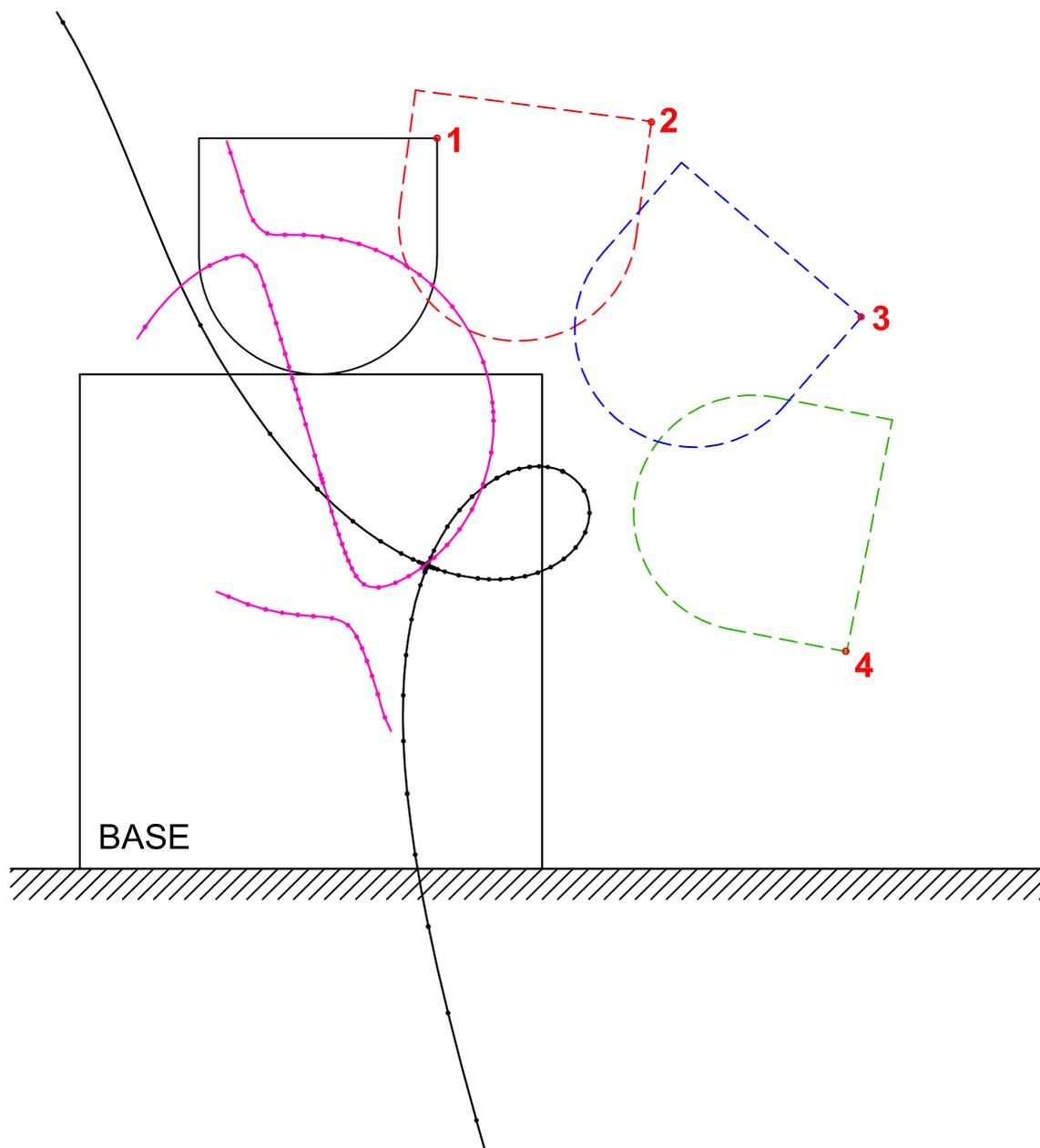
**Fig. 3.1-19:** Cuadriláteros de polos opuestos para el caso 2.

se generan las siguientes curvas de Burmester,



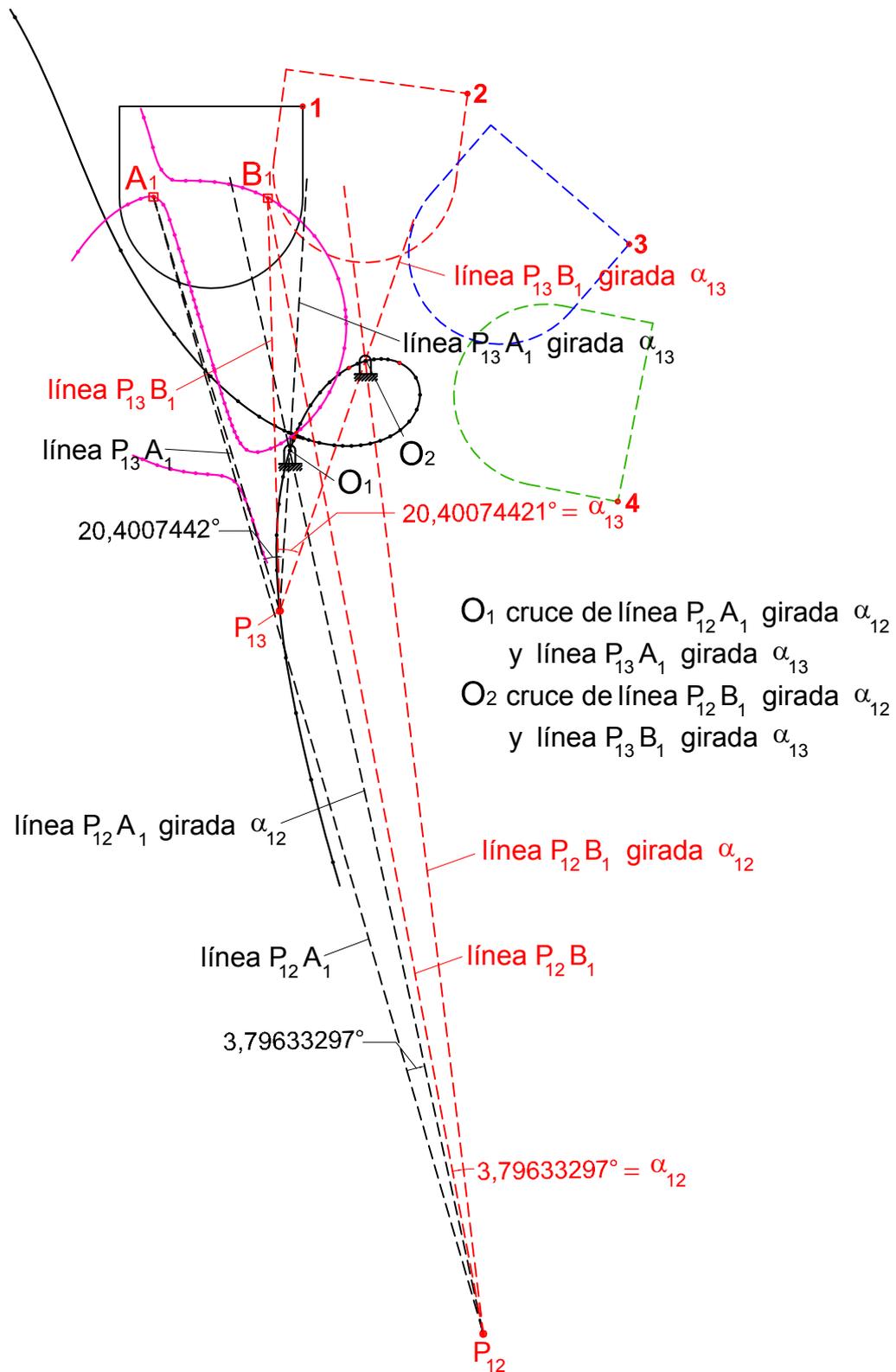
**Fig. 3.1-20:** Curvas de Burmester para el caso 2.

las mencionadas curvas se indican sobre las cuatro posiciones del objeto y sobre el área donde deben ubicarse los puntos de bastidor como se muestra en la figura 3.1-21:



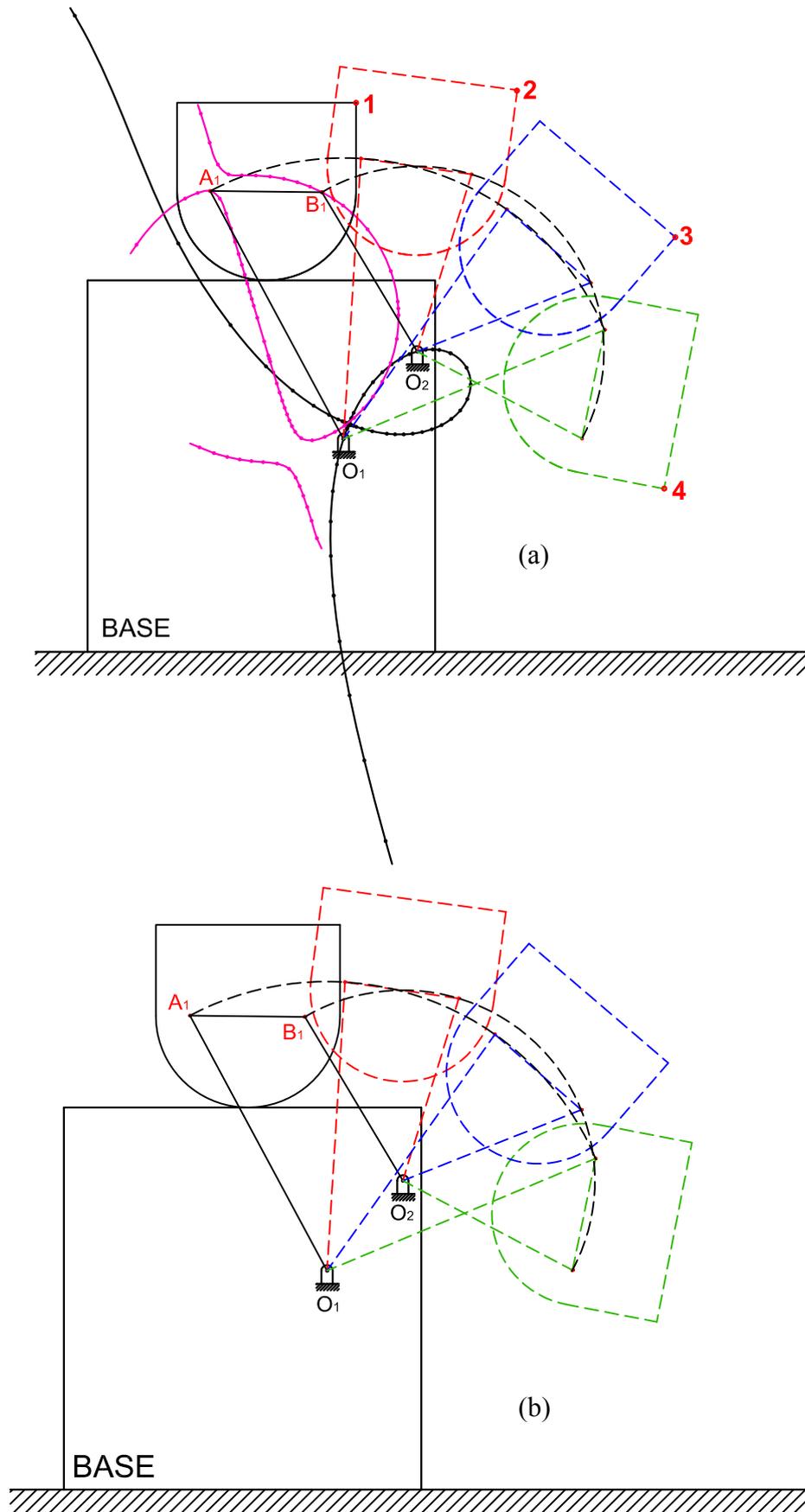
**Fig. 3.1-21:** Curvas de Burmester, posiciones del acoplador y base para el caso 2.

se eligen los puntos circulares (pivotes móviles)  $A_1$  y  $B_1$  dentro del objeto y se determina la ubicación de los correspondientes puntos centrales (pivotes fijos)  $O_1$  y  $O_2$  como se muestra con la construcción siguiente:



**Fig. 3.1-22:** Elección de pivotes móviles y fijos para el caso 2.

finalmente se grafica el diseño definitivo, con y sin curvas de Burmester



**Fig. 3.1-23:** Mecanismo sintetizado (a) mostrando las curvas de Burmester, y (b) sin mostrarlas.

### 3.3 SÍNTESIS ANALÍTICA DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO PARA CUATRO POSICIONES PRESCRITAS

Con el empleo de números complejos y el concepto de diada introducidos anteriormente se puede desarrollar un procedimiento analítico. Se considera la fig. 2.1.2-1, a partir de la cual se puede escribir para la diada  $\mathbf{Z}_1\mathbf{Z}_2$ :

$$\mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{1j}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{2j}} - 1) = \delta_j \quad [3.3-1]$$

y para las posiciones 2, 3 y 4 entonces se tiene:

$$\mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{12}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{22}} - 1) = \delta_2 \quad [3.3-2]$$

$$\mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{13}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{23}} - 1) = \delta_3 \quad [3.3-3]$$

$$\mathbf{Z}_1(e^{i\beta_{14}} - 1) + \mathbf{Z}_2(e^{i\alpha_{24}} - 1) = \delta_4 \quad [3.3-4]$$

las incógnitas para el sistema formado por las ecs. [3.3-2] a [3.3-4] son  $\mathbf{Z}_1$ ,  $\mathbf{Z}_2$ ,  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$  y  $\beta_{14}$  con lo que es necesario para que se pueda resolver el mismo asignar un valor a  $\beta_{12}$  (variable de elección libre). Si se selecciona un rango de valores para  $\beta_{12}$ , el lugar geométrico de los puntos  $\mathbf{K} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_2$  representa la curva de puntos circulares, mientras que el lugar geométrico de los puntos  $\mathbf{M} = \mathbf{K} - \mathbf{Z}_1$  grafica la curva de puntos centrales.

Para poder hallar las curvas de Burmester es necesario resolver  $\mathbf{Z}_1$  y  $\mathbf{Z}_2$ , para lo cual el sistema [3.3-2] - [3.3-4] se representa en forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \\ e^{i\beta_{14}} - 1 & e^{i\alpha_{24}} - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_1 \\ \mathbf{Z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} \quad [3.3-5]$$

la solución al sistema existirá únicamente si el rango de la matriz aumentada es 2, o sea si el determinante de la matriz aumentada es nulo:

$$\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\beta_{14}} - 1 & e^{i\alpha_{24}} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix} = 0 \quad [3.3-6]$$

desarrollando el determinante anterior en base a la primera columna se tiene:

$$\Delta_1 + e^{i\beta_{12}} \Delta_2 + e^{i\beta_{13}} \Delta_3 + e^{i\beta_{14}} \Delta_4 = 0 \quad (3.3-7)$$

con

$$\Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_{23}} - 1 & \delta_3 \\ e^{i\alpha_{24}} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

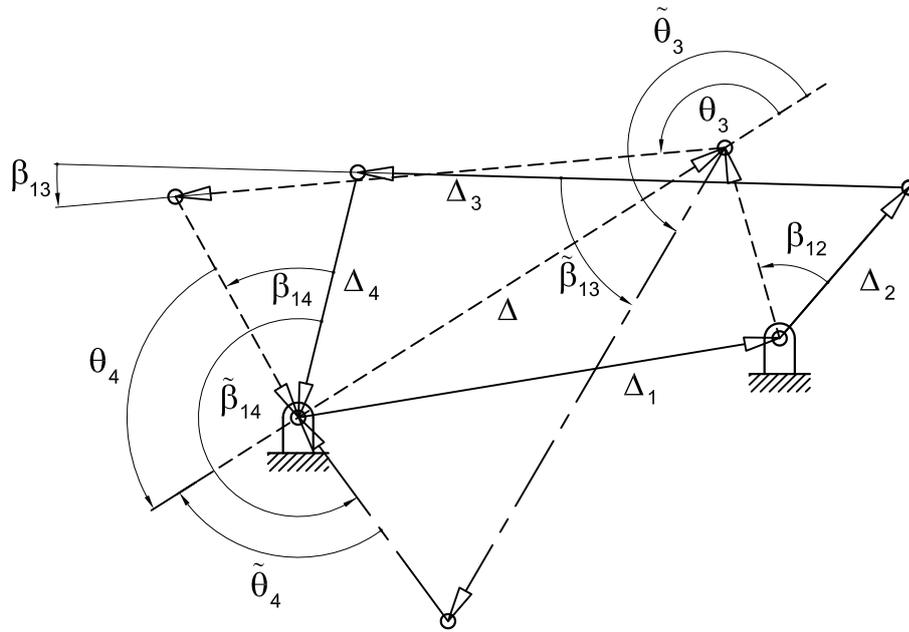
$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_{22}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_{24}} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_{22}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_{23}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}$$

En la ecuación [3.3-7], llamada *ecuación de compatibilidad*, las variables desconocidas son los exponentes  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$  y  $\beta_{14}$ . Para un rango de valores dado de  $\beta_{12}$  se pueden determinar también un rango de soluciones para  $\beta_{13}$  y  $\beta_{14}$ , las cuales se pueden determinar gráfica o analíticamente.

La ecuación [3.3-7] puede considerarse como la ecuación de lazo cerrado de un mecanismo de cuatro barras, denominado *mecanismo de compatibilidad*, con un eslabon fijo  $\Delta_1$  y tres eslabones móviles  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$ , así como tres rotaciones de

dichos eslabones  $\beta_{12}$ ,  $\beta_{13}$  y  $\beta_{14}$  medidos con respecto a la posición inicial del eslabonamiento de compatibilidad. Dicha conceptualización se representa en la figura 3.3-1:



**Fig. 3.3-1:** Solución geométrica de la ecuación de compatibilidad.

definida la rotación  $\beta_{12}$  en dicho esquema es sencillo obtener dos parejas de valores  $\tilde{\beta}_{13}$  y  $\tilde{\beta}_{14}$  así como  $\beta_{13}$  y  $\beta_{14}$  como soluciones, con las construcciones en líneas entrecortadas mostradas en el gráfico anterior.

De forma analítica se pueden obtener también dichas parejas de valores a partir del siguiente esquema de cálculo:

$$\Delta = \Delta_1 + \Delta_2 e^{i\beta_{12}}$$

$$\cos \theta_3 = \frac{|\Delta_4|^2 - |\Delta_3|^2 - |\Delta|^2}{2|\Delta_3||\Delta|}$$

$$\text{sen} \theta_3 = \left| \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} \right| \geq 0$$

$$\theta_3 = \text{atan2}(\text{sen}\theta_3, \text{cos}\theta_3) \quad \text{ó} \quad \theta_3 = \text{atan2}(\text{cos}\theta_3, \text{sen}\theta_3)^{3)}$$

$$\text{donde} \quad 0 \leq \theta_3 \leq \pi$$

$$\beta_{13} = \arg(\Delta) + \theta_3 - \arg(\Delta_3)$$

$$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3$$

$$\tilde{\beta}_{13} = \arg(\Delta) + \tilde{\theta}_3 - \arg(\Delta_3)$$

$$\cos\theta_4 = \frac{|\Delta_3|^2 - |\Delta_4|^2 - |\Delta|^2}{2|\Delta_4||\Delta|}$$

$$\text{sen}\theta_4 = \left| \sqrt{1 - \cos^2\theta_4} \right| \geq 0$$

$$\theta_4 = \text{atan2}(\text{sen}\theta_4, \text{cos}\theta_4) \quad \text{ó} \quad \theta_4 = \text{atan2}(\text{cos}\theta_4, \text{sen}\theta_4)^{3)}$$

$$\text{donde} \quad 0 \leq \theta_4 \leq \pi \quad \text{y} \quad \tilde{\theta}_4 = -\theta_4$$

$$\beta_{14} = \arg(\Delta) - \theta_4 - \arg(\Delta_4)$$

$$\tilde{\beta}_{13} = \arg(\Delta) + \tilde{\theta}_4 - \arg(\Delta_4) + \pi$$

<sup>3</sup> Esta formulación corresponde a la función aplicada en MathCAD

Una vez calculados los valores o rangos de  $\beta_{13}$ ,  $\beta_{14}$ ,  $\tilde{\beta}_{13}$  y  $\tilde{\beta}_{14}$  entonces se toman las ecuaciones [3.3-2] y [3.3-3] y se resuelve el sistema por la regla de Cramer para obtener  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \tilde{\mathbf{Z}}_1$  y  $\tilde{\mathbf{Z}}_2$  cuyas expresiones se muestra seguidamente:

$$\mathbf{Z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\beta_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\tilde{\beta}_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}}_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\tilde{\beta}_{13}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{12}} - 1 & e^{i\alpha_{22}} - 1 \\ e^{i\tilde{\beta}_{13}} - 1 & e^{i\alpha_{23}} - 1 \end{vmatrix}}$$

A partir de estos valores se pueden escribir entonces las expresiones para las curvas de Burmester, como:

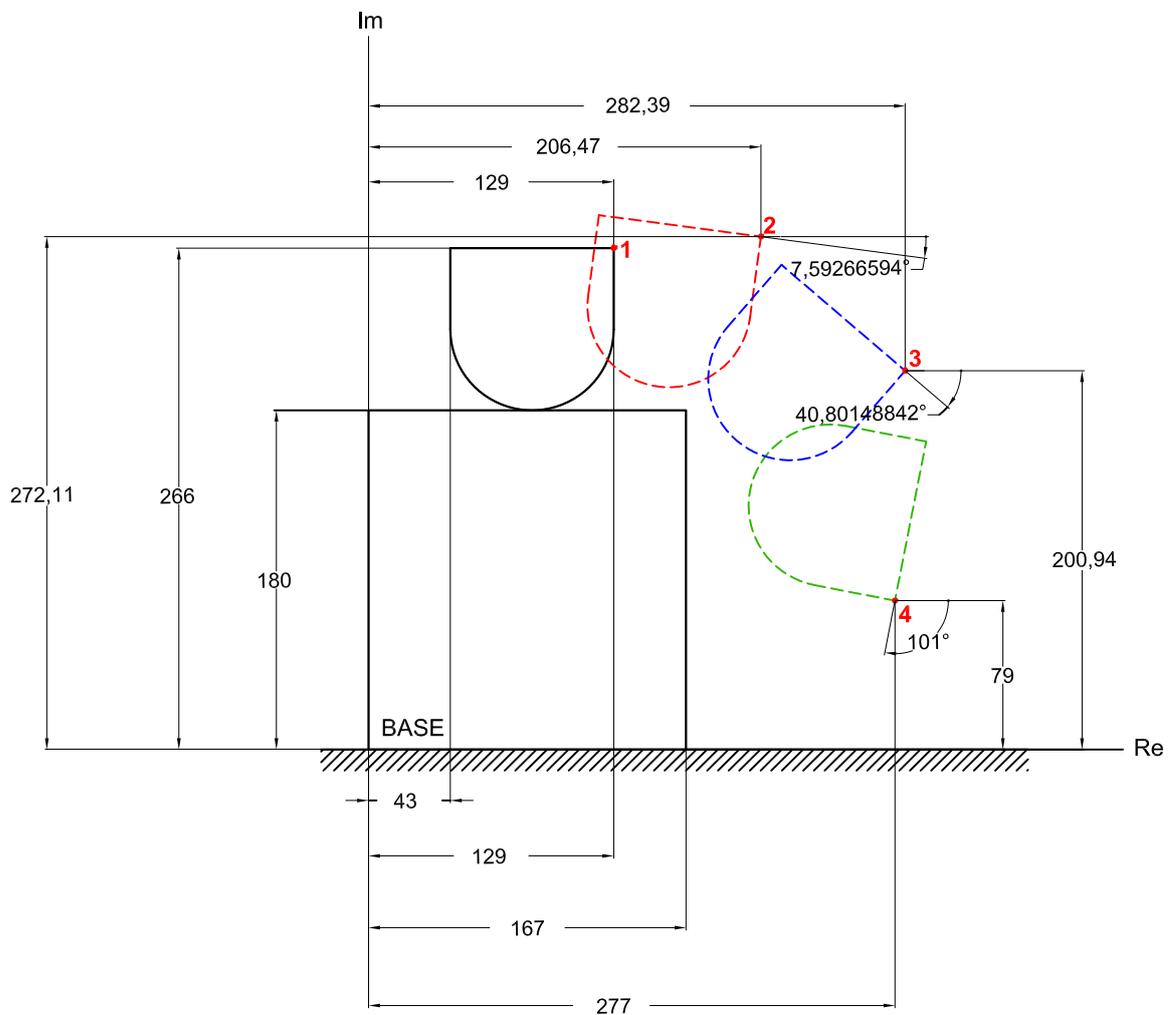
$$\mathbf{K} = \mathbf{R}_1 - \mathbf{Z}_2 \quad \text{y} \quad \mathbf{K} = \mathbf{R}_1 - \tilde{\mathbf{Z}}_2$$

$$\mathbf{M} = \mathbf{K} - \mathbf{Z}_1 \quad \text{y} \quad \mathbf{M} = \mathbf{K} - \tilde{\mathbf{Z}}_1$$

y de éstas se puede sintetizar el mecanismo de cuatro barras más adecuado.

### Caso 3:

Se sintetiza analíticamente mediante curvas de Burmester un mecanismo de cuatro barras para mover el objeto mostrado en la figura, a través de las cuatro posiciones indicadas en la misma. En el diseño los pivotes fijos deben hallarse dentro del área marcada como base.



**Fig. 3.3-2:** Posiciones del eslabón acoplador para síntesis por curvas de Burmester .

La siguiente implementación en MathCAD permite realizar las gráficas de Burmester, variando  $\beta_{12}$  de  $0^\circ$  a  $360^\circ$ :

$$\alpha_{22} := \frac{-7.59266594 \cdot \pi}{180} \quad \alpha_{23} := \frac{-40.80148842 \cdot \pi}{180} \quad \alpha_{24} := \frac{-101 \cdot \pi}{180} \quad i := \sqrt{-1}$$

$$\delta_2 := 77.47 + 6.11 \cdot i \quad \delta_3 := 153.39 - 65.06 \cdot i \quad \delta_4 := 148 - 187 \cdot i$$

$$\text{Base}_x := \begin{pmatrix} 0 \\ 167 \\ 167 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Base}_y := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 180 \\ 180 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{Objeto}_x := \begin{pmatrix} 43 \\ 43 \\ 129 \\ 129 \\ 43 \end{pmatrix} \quad \text{Objeto}_y := \begin{pmatrix} 180 \\ 266 \\ 266 \\ 180 \\ 180 \end{pmatrix}$$

### Curvas de Burmester...

$$R_1 := 129 + i \cdot 266$$

$$\Delta_2 := \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 & \delta_3 \\ e^{i \cdot \alpha_{24}} - 1 & \delta_4 \end{pmatrix} \quad \Delta_3 := - \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i \cdot \alpha_{24}} - 1 & \delta_4 \end{pmatrix} \quad \Delta_4 := \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_{22}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i \cdot \alpha_{23}} - 1 & \delta_3 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 := -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4$$

### Variación del ángulo $\beta_{12}$ ...

$$\beta_{12in} := \frac{0 \cdot \pi}{180} \quad \beta_{12fin} := \frac{360 \cdot \pi}{180} \quad p := \frac{1 \cdot \pi}{180}$$

$$\beta_{12} := \beta_{12in} + p \cdot \beta_{12fin}$$

$$\Delta(\beta_{12}) := \Delta_1 + \Delta_2 \cdot e^{i \cdot \beta_{12}}$$

$$\theta_3(\beta_{12}) := \text{atan2} \left[ \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta(\beta_{12})|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta(\beta_{12})|}, \sqrt{1 - \left[ \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta(\beta_{12})|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta(\beta_{12})|} \right]^2} \right]$$

$$\beta_{13}(\beta_{12}) := \arg(\Delta(\beta_{12})) + \theta_3(\beta_{12}) - \arg(\Delta_3) \quad \theta_{3-}(\beta_{12}) := 2 \cdot \pi - \theta_3(\beta_{12})$$

$$\beta_{13-}(\beta_{12}) := \arg(\Delta(\beta_{12})) + \theta_{3-}(\beta_{12}) - \arg(\Delta_3)$$

$$\theta_4(\beta_{12}) := \text{atan2} \left[ \frac{(|\Delta_3|)^2 - (|\Delta_4|)^2 - (|\Delta(\beta_{12})|)^2}{2 \cdot |\Delta_4| \cdot |\Delta(\beta_{12})|}, \sqrt{1 - \left[ \frac{(|\Delta_3|)^2 - (|\Delta_4|)^2 - (|\Delta(\beta_{12})|)^2}{2 \cdot |\Delta_4| \cdot |\Delta(\beta_{12})|} \right]^2} \right]$$

$$\beta_{14}(\beta_{12}) := \arg(\Delta(\beta_{12})) - \theta_4(\beta_{12}) - \arg(\Delta_4) \quad \theta_{4-}(\beta_{12}) := -\theta_4(\beta_{12})$$

$$\beta_{14-}(\beta_{12}) := \arg(\Delta(\beta_{12})) + \theta_{4-}(\beta_{12}) - \arg(\Delta_4) + \pi$$

$$Z_1(\beta_{12}) := \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i \cdot \alpha_{22} - 1} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \alpha_{23} - 1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12} - 1} & e^{i \cdot \alpha_{22} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{13}(\beta_{12}) - 1} & e^{i \cdot \alpha_{23} - 1} \end{vmatrix}}$$

$$Z_2(\beta_{12}) := \frac{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12} - 1} & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{13}(\beta_{12}) - 1} & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12} - 1} & e^{i \cdot \alpha_{22} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{13}(\beta_{12}) - 1} & e^{i \cdot \alpha_{23} - 1} \end{vmatrix}}$$

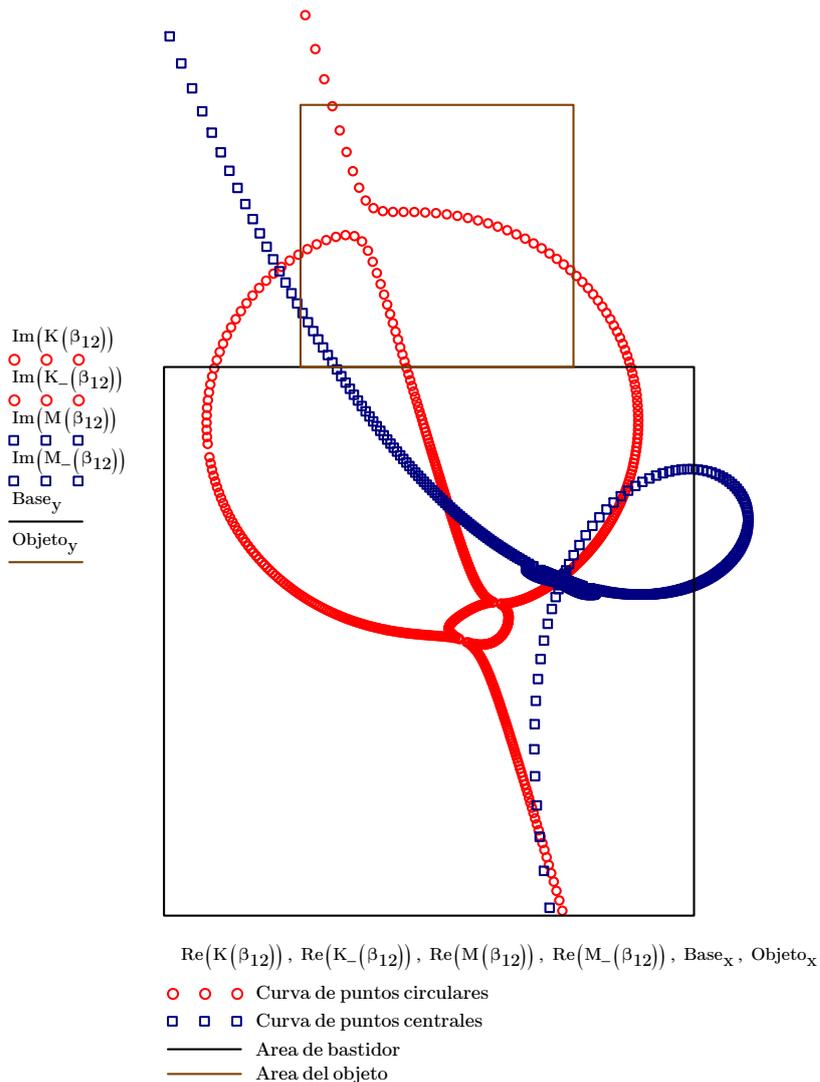
$$Z_{1-}(\beta_{12}) := \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i \cdot \alpha_{22} - 1} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \alpha_{23} - 1} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12} - 1} & e^{i \cdot \alpha_{22} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{13-}(\beta_{12}) - 1} & e^{i \cdot \alpha_{23} - 1} \end{vmatrix}}$$

$$Z_{2-}(\beta_{12}) := \frac{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12} - 1} & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{13-}(\beta_{12}) - 1} & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i \cdot \beta_{12} - 1} & e^{i \cdot \alpha_{22} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{13-}(\beta_{12}) - 1} & e^{i \cdot \alpha_{23} - 1} \end{vmatrix}}$$

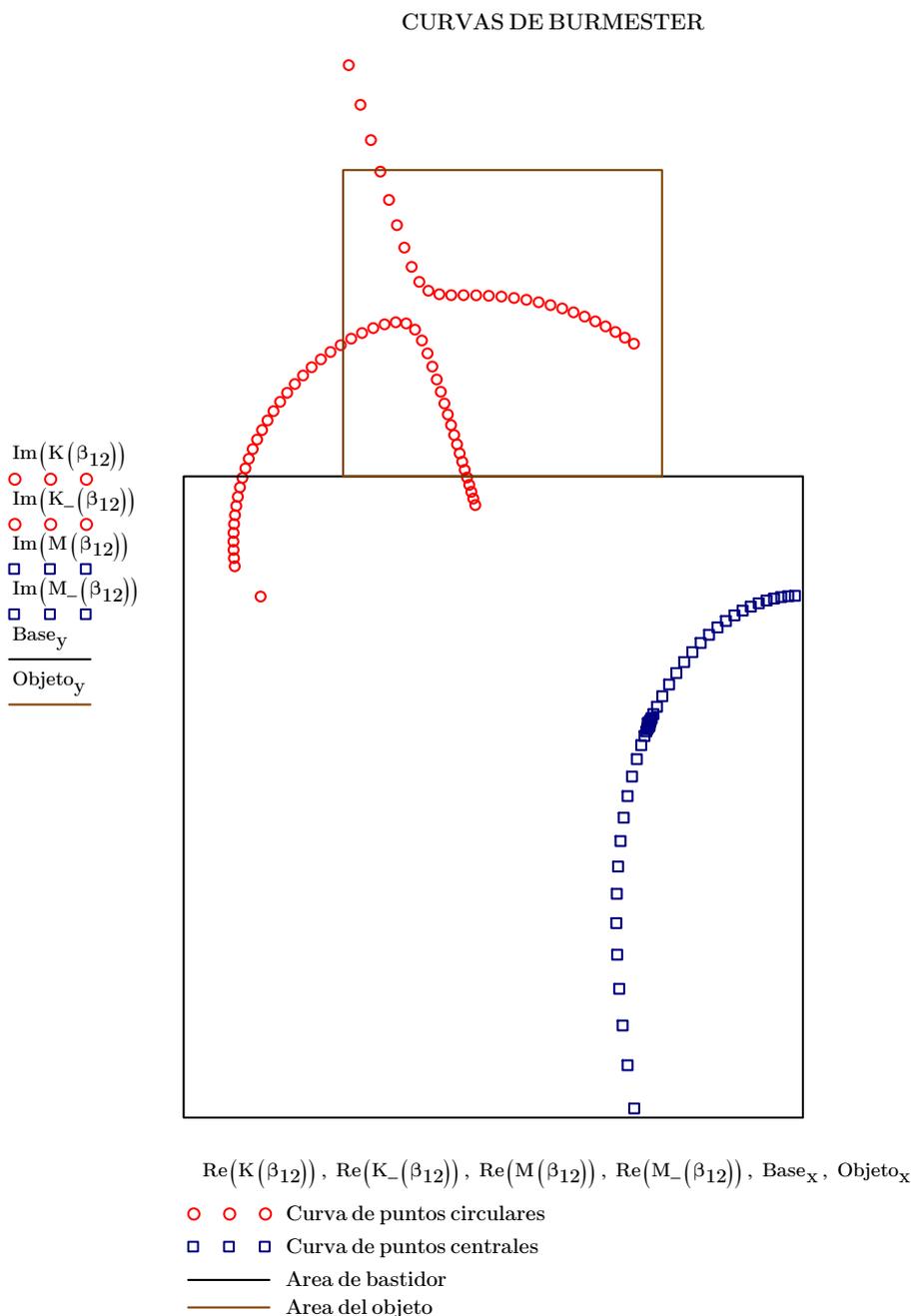
$$K(\beta_{12}) := R_1 - Z_2(\beta_{12}) \quad K_-(\beta_{12}) := R_1 - Z_{2-}(\beta_{12}) \quad M(\beta_{12}) := K(\beta_{12}) - Z_1(\beta_{12})$$

$$M_-(\beta_{12}) := K_-(\beta_{12}) - Z_{1-}(\beta_{12})$$

CURVAS DE BURMESTER



Si se reduce el rango del ángulo  $\beta_{12}$  de  $309^\circ$  a  $360^\circ$ , se observa que las curvas de Burmester en general se hallan dentro de las áreas de bastidor y de posición inicial del objeto por lo que dentro de este rango es posible ubicar los pivotes fijos y móviles del mecanismo de cuatro barras que se desea diseñar.



la siguiente implementación permite graficar las posibles ubicaciones de los pivotes fijos y móviles para  $\beta_{12} = 328^\circ$  y  $\beta_{12} = 312^\circ$ :

**Posición de pivotes fijos y móviles posibles...**

$$\beta_{12O1} := \frac{328 \cdot \pi}{180}$$

$$\beta_{12O2} := \frac{312 \cdot \pi}{180}$$

$$O_1 := M(\beta_{12O1})$$

$$O_{1\_} := M_-(\beta_{12O1})$$

$$O_2 := M(\beta_{12O2})$$

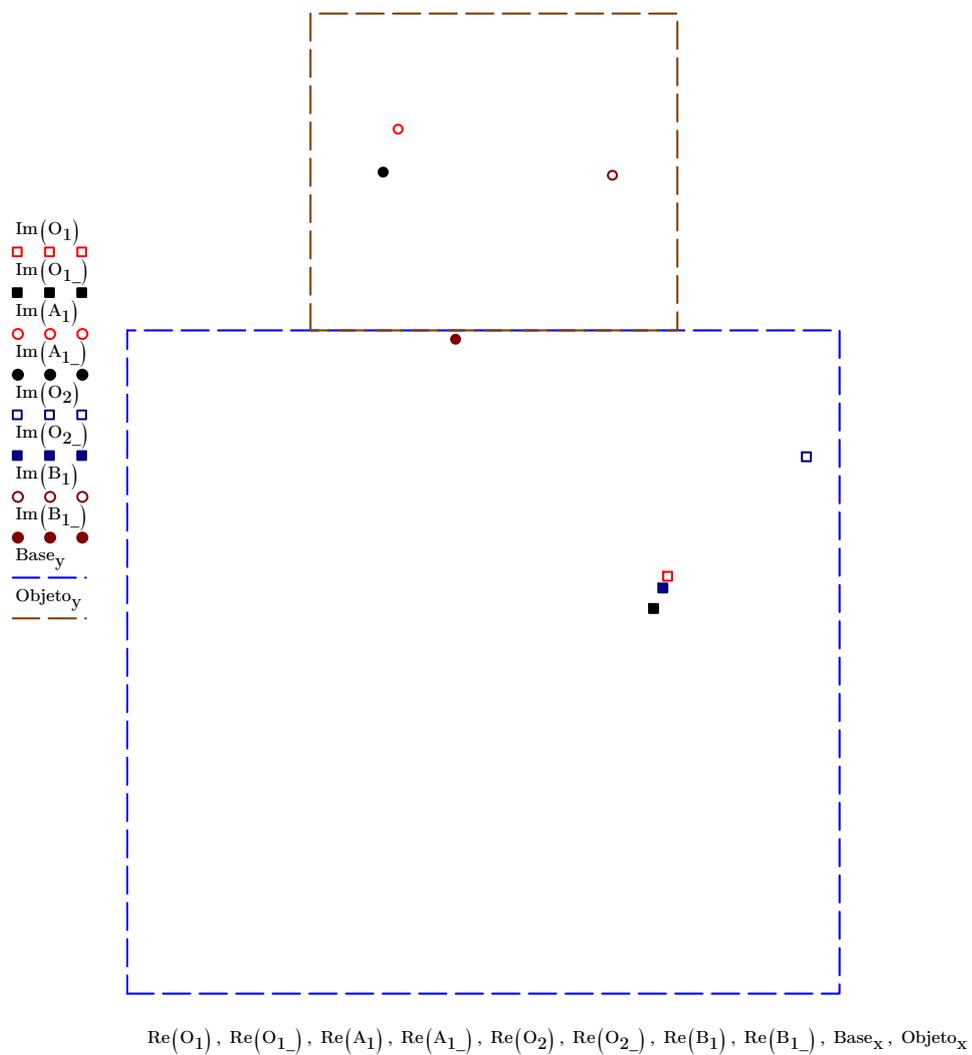
$$O_{2\_} := M_-(\beta_{12O2})$$

$$A_1 := K(\beta_{12O1})$$

$$A_{1\_} := K_-(\beta_{12O1})$$

$$B_1 := K(\beta_{12O2})$$

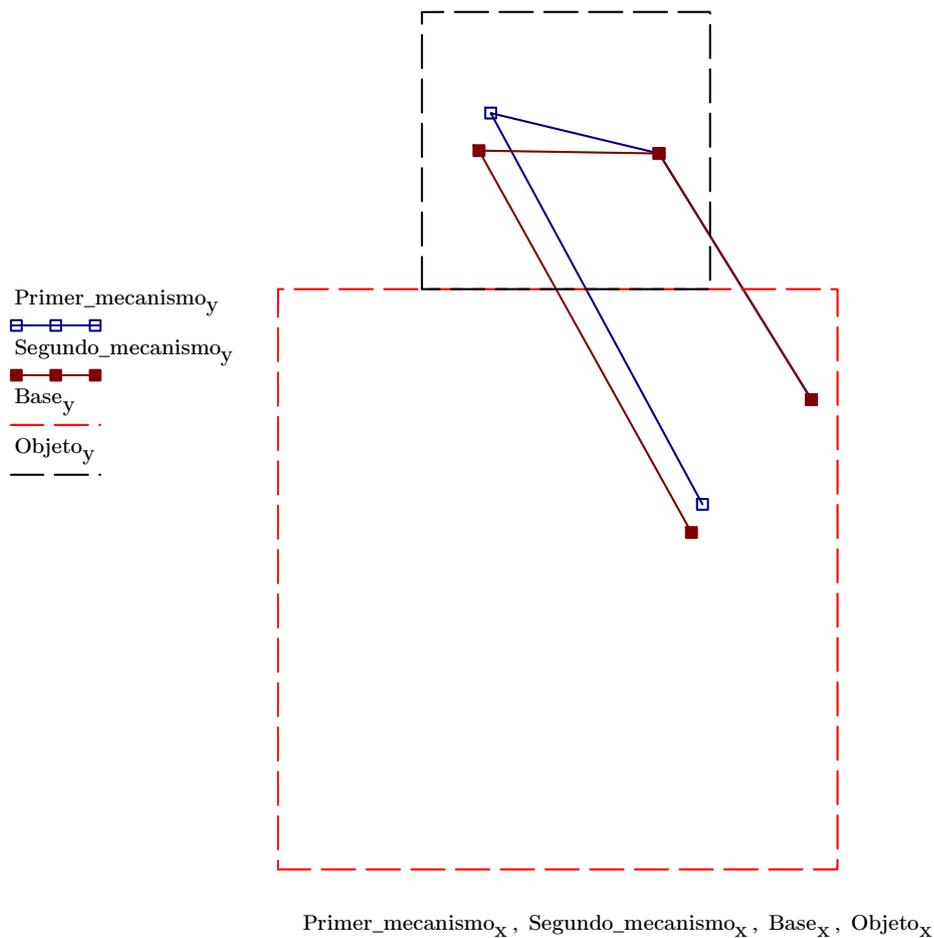
$$B_{1\_} := K_-(\beta_{12O2})$$



finalmente, los puntos mas adecuados para la síntesis son  $O_1$ ,  $O_{1\_}$ ,  $A_1$ ,  $A_{1\_}$ ,  $O_2$  y  $B_1$  para los cuales la simple implementación indicada a continuación grafica los dos mecanismos posibles.

$$\text{Primer\_mecanismo}_x := \begin{pmatrix} \text{Re}(O_1) \\ \text{Re}(A_1) \\ \text{Re}(B_1) \\ \text{Re}(O_2) \end{pmatrix} \qquad \text{Primer\_mecanismo}_y := \begin{pmatrix} \text{Im}(O_1) \\ \text{Im}(A_1) \\ \text{Im}(B_1) \\ \text{Im}(O_2) \end{pmatrix}$$

$$\text{Segundo\_mecanismo}_x := \begin{pmatrix} \text{Re}(O_{1\_}) \\ \text{Re}(A_{1\_}) \\ \text{Re}(B_1) \\ \text{Re}(O_2) \end{pmatrix} \qquad \text{Segundo\_mecanismo}_y := \begin{pmatrix} \text{Im}(O_{1\_}) \\ \text{Im}(A_{1\_}) \\ \text{Im}(B_1) \\ \text{Im}(O_2) \end{pmatrix}$$



### 3.4 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

- 1 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. (1ra Edición). New Jersey, Estados Unidos: Ed Prentice-Hall. Cap. 3.
- 2 Russell, K. Shen, Q. y Sodhi, R.S. (2014). *Mechanism Design: Visual and Programmable Approaches*. (1ra Edición). Boca Raton, Estados Unidos: CRC Press. Cap. 4.
- 3 Hartenberg, R. S. y Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages*. (1ra Edición). New York, Estados Unidos: Ed. McGraw-Hill. Cap. 9.
- 4 Chiang C. H. (2000). *Kinematics and Design of Planar Mechanisms*. (1ra Edición). Malabar, Estados Unidos: Ed. Krieger Publishing. Cap. 3.
- 5 McCarthy, M. J. y Song Soh, G. (2004) *Geometric Design of Linkages*. (2da Edición). Massachusetts, Estados Unidos: Ed. Springer. Cap. 3.
- 6 Martin, P.J. (2007). *Burmester Curve and Numerical Motion Generation of Grashof Mechanisms with Perimeter and Transmission Angle Optimization in Mathcad*. (Disertación de maestría). New Jersey Institute of Technology, Newark NJ, Estados Unidos. Cap. 2.
- 7 Torres, J. I. (2013). Sensibilidad de la solución en síntesis de conducción de cuerpo rígido. *Memorias del XIX Congreso Internacional Anual de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica*. (págs. 430-439). Pachuca, Hidalgo, México.
- 8 Manual del usuario MathCAD versión 15
- 9 Maxfield, B. (2006). *Engineering with MathCAD*. (1ra. Edición). New York, Estados Unidos: Ed. Butterworth-Heinemann. Caps: 9, 11, 14 y 15.

10 Maxfield, B. (2009). *Essential MathCAD for Engineering, Science and Math*. (2da Edición). Waltham, Estados Unidos: Ed. Academic Press. Caps: 5, 7, 9 y 12.

## CAPÍTULO 4

### IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL DE LA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO DEL MECANISMO DE CUATRO BARRAS PARA TRES Y CUATRO POSICIONES PRESCRITAS

El presente capítulo desarrollará los algoritmos y programación necesarios para diseñar un eslabonamiento de cuatro barras tanto con tres como con cuatro posiciones fijadas para su eslabón acoplador; se empleará el paquete MATHCAD versión 15 con tal propósito.

#### 4.1 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GUIADO DE CUERPO EN TRES POSICIONES DADAS(3P) SIN PIVOTES FIJOS PRESCRITOS

El siguiente esquema muestra los datos a obtenerse de la síntesis del mecanismo de cuatro barras, sin prescribir los pivotes fijos:

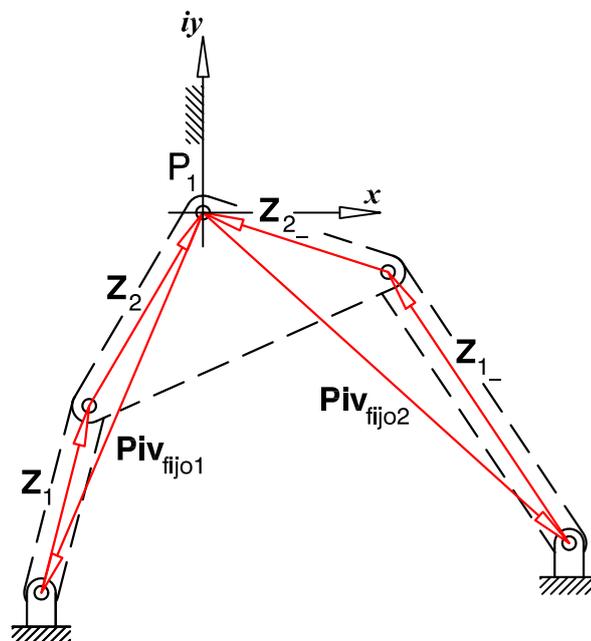


Fig. 4.1-1: Dimensiones geométricas obtenidas del diseño

El algoritmo correspondiente a la síntesis es<sup>1</sup>:

### ALGORITMO 4.1: SÍNTESIS DE 3P SIN PIVOTES FIJOS PRESCRITOS

Para hallar las dimensiones geométricas del mecanismo y las posiciones de los pivotes fijos, se debe ejecutar el siguiente algoritmo:

**Datos de diseño:** Ángulos de giro del acoplador en las tres posiciones:  $\text{Ang}_{ac1}$ ,  $\text{Ang}_{ac2}$ ,  $\text{Ang}_{ac3}$ ; Posiciones del punto de referencia del acoplador  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ; y variables de elección libre  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_{2-}$ ,  $\beta_{3-}$ .

**Resultados:** Vectores posición de los eslabones del mecanismo  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_{1-}$ ,  $Z_{2-}$ , y vectores posición de los pivotes fijos  $\text{Piv}_{fijo1}$ ,  $\text{Piv}_{fijo2}$  referidos a  $P_1$ .

**Paso 1:** Hacer  $\alpha_2 = \text{Ang}_{ac2} - \text{Ang}_{ac1}$  y  $\alpha_3 = \text{Ang}_{ac3} - \text{Ang}_{ac1}$

**Paso 2:** Hacer  $\delta_2 = P_2 - P_1$  y  $\delta_3 = P_3 - P_1$

**Paso 3:** Hacer  $Z_1 = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}$   $Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}$

**Paso 4:** Hacer  $Z_{1-} = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{2-} \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i\beta_{3-} \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}$   $Z_{2-} = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{2-} \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\beta_{3-} \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_{2-} \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i\beta_{3-} \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}$

**Paso 5:** Hacer  $\text{Piv}_{fijo1} = -Z_1 - Z_2$   $\text{Piv}_{fijo2} = -Z_{1-} - Z_{2-}$

**Paso 6:** Desplegar  $Z_1, Z_2, Z_{1-}, Z_{2-}, \text{Piv}_{fijo1}, \text{Piv}_{fijo2}$

Adicionalmente se presentan gráficamente las áreas de diseño donde se ubicarían los pivotes fijos y los pivotes móviles, al conectar mediante líneas los puntos

<sup>1</sup> La notación tanto de los ángulos del acoplador como de los primeros eslabones de las diadas relativos a  $P_1$  se han simplificado a  $\alpha_i$  y  $\beta_i$ ,  $i = 2, 3$  para la diada izquierda o primera diada o  $\beta_{i-}$ ,  $i = 2, 3$  para la diada derecha o segunda diada.

(Fij<sub>1x</sub>, Fij<sub>1y</sub>), (Fij<sub>2x</sub>, Fij<sub>2y</sub>), (Fij<sub>3x</sub>, Fij<sub>3y</sub>), (Fij<sub>4x</sub>, Fij<sub>4y</sub>) y (Fij<sub>1x</sub>, Fij<sub>1y</sub>) para la primera, así como (Mov<sub>1x</sub>, Mov<sub>1y</sub>), (Mov<sub>2x</sub>, Mov<sub>2y</sub>), (Mov<sub>3x</sub>, Mov<sub>3y</sub>), (Mov<sub>4x</sub>, Mov<sub>4y</sub>) y (Mov<sub>1x</sub>, Mov<sub>1y</sub>) para la segunda. También grafica el mecanismo diseñado conectando por líneas los puntos (Re(Piv<sub>fijo1</sub>), Im(Piv<sub>fijo1</sub>)), (Re(-Z<sub>2</sub>), Im(-Z<sub>2</sub>)), (Re(P<sub>1</sub>), Im(P<sub>1</sub>)), (Re(-Z<sub>2\_</sub>), Im(-Z<sub>2\_</sub>)), (Re(-Z<sub>2</sub>), Im(-Z<sub>2</sub>)), (Re(-Z<sub>2\_</sub>), Im(-Z<sub>2\_</sub>)), (Re(Piv<sub>fijo2</sub>), Im(Piv<sub>fijo2</sub>))

Seguidamente se muestra la implementación computacional en MathCAD 15, así como una ejecución de ejemplo.

### **SÍNTESIS DE 3 POSICIONES SIN PIVOTES FIJOS PRESCRITOS – IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**

$$i := \sqrt{-1}$$

#### **DATOS DE DISEÑO...**

**Ángulos del eslabón acoplador(ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$\text{Ang}_{ac1} := \quad \text{Ang}_{ac2} := \quad \text{Ang}_{ac3} :=$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador(ingresar como número complejo con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$P_1 :=$$

$$P_2 :=$$

$$P_3 :=$$

**Variables de elección libre—ángulos de giro relativo a P<sub>1</sub> del primer eslabón de las diadas izquierda y derecha(ingresar en grados sexagesimales)...**

$$\beta_2 := \quad \beta_3 := \quad \beta_{2_} := \quad \beta_{3_} :=$$

**Área para los pivotes fijos:**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos: (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)...**

$$\text{Fij}_{1x} := \quad \text{Fij}_{1y} := \quad \text{Fij}_{2x} := \quad \text{Fij}_{2y} := \quad \text{Fij}_{3x} := \quad \text{Fij}_{3y} :=$$

$$\text{Fij}_{4x} := \quad \text{Fij}_{4y} :=$$

$$\text{Fij}_x := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1x} \\ \text{Fij}_{2x} \\ \text{Fij}_{3x} \\ \text{Fij}_{4x} \\ \text{Fij}_{1x} \end{pmatrix} \quad \text{Fij}_y := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1y} \\ \text{Fij}_{2y} \\ \text{Fij}_{3y} \\ \text{Fij}_{4y} \\ \text{Fij}_{1y} \end{pmatrix}$$

**Área para los pivotes móviles...**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes móviles (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)...**

$$\text{Mov}_{1x} := \quad \text{Mov}_{1y} := \quad \text{Mov}_{2x} := \quad \text{Mov}_{2y} := \quad \text{Mov}_{3x} := \quad \text{Mov}_{3y} :=$$

$$\text{Mov}_{4x} := \quad \text{Mov}_{4y} :=$$

$$\text{Mov}_x := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1x} \\ \text{Mov}_{2x} \\ \text{Mov}_{3x} \\ \text{Mov}_{4x} \\ \text{Mov}_{1x} \end{pmatrix} \quad \text{Mov}_y := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1y} \\ \text{Mov}_{2y} \\ \text{Mov}_{3y} \\ \text{Mov}_{4y} \\ \text{Mov}_{1y} \end{pmatrix}$$

**IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL...****Ángulos de giro relativo del eslabón acoplador...**

$$\alpha_2 := \text{Ang}_{\text{ac}2} - \text{Ang}_{\text{ac}1}$$

$$\alpha_3 := \text{Ang}_{\text{ac}3} - \text{Ang}_{\text{ac}1}$$

**Desplazamientos relativos del punto referencial P del eslabón acoplador respecto a P<sub>1</sub>...**

$$\delta_2 := P_2 - P_1$$

$$\delta_3 := P_3 - P_1$$

**Cálculo de las diadas izquierda Z<sub>1</sub>Z<sub>2</sub> y derecha Z<sub>1</sub><sub>-</sub>Z<sub>2</sub><sub>-</sub>...**

$$Z_1 := \frac{\begin{pmatrix} \delta_2 & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}$$

$$Z_2 := \frac{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}$$

$$Z_{1\_} := \frac{\begin{pmatrix} \delta_2 & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_{2\_} \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{3\_} \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}$$

$$Z_{2\_} := \frac{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_{2\_} \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{3\_} \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_{2\_} \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{3\_} \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}$$

**Posiciones de los pivotes fijos (medidos desde el primer punto referencial P<sub>1</sub> del eslabón acoplador)...**

$$\text{Piv}_{\text{fijo}1} := -Z_1 - Z_2$$

$$\text{Piv}_{\text{fijo}2} := -Z_{1\_} - Z_{2\_}$$

**RESULTADOS ...**

$$Z_1 =$$

$$Z_2 =$$

$$Z_{1\_} =$$

$$Z_{2\_} =$$

$$\text{Piv}_{\text{fijo}1} =$$

$$\text{Piv}_{\text{fijo}2} =$$

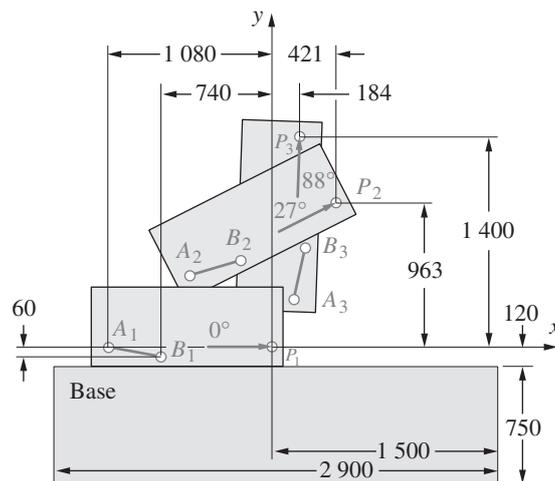
**MECANISMO DISEÑADO...**

$$\text{Mec}_x := \begin{pmatrix} \text{Re}(\text{Piv}_{\text{fijo}1}) \\ \text{Re}(-Z_2) \\ \text{Re}(P_1) \\ \text{Re}(-Z_{2\_}) \\ \text{Re}(-Z_2) \\ \text{Re}(-Z_{2\_}) \\ \text{Re}(\text{Piv}_{\text{fijo}2}) \end{pmatrix}$$

$$\text{Mec}_y := \begin{pmatrix} \text{Im}(\text{Piv}_{\text{fijo}1}) \\ \text{Im}(-Z_2) \\ \text{Im}(P_1) \\ \text{Im}(-Z_{2\_}) \\ \text{Im}(-Z_2) \\ \text{Im}(-Z_{2\_}) \\ \text{Im}(\text{Piv}_{\text{fijo}2}) \end{pmatrix}$$

**Caso 1:**

Se emplea la implementación anterior para sintetizar el mecanismo de cuatro barras que permita mover el objeto mostrado en la figura por las tres posiciones indicadas. Los pivotes fijos deberán estar contenidos en la base.



**Fig. 4.1-2:** Posiciones del acoplador para el caso 1.

Se ingresan los datos de los puntos de referencia del acoplador  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , así como los ángulos de giro del acoplador  $\text{Ang}_{ac1}$ ,  $\text{Ang}_{ac2}$  y  $\text{Ang}_{ac3}$ :

**DATOS DE DISEÑO...**

Ángulos del eslabón acoplador (ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...

$$\text{Ang}_{ac1} := 0 \quad \text{Ang}_{ac2} := 27 \quad \text{Ang}_{ac3} := 88$$

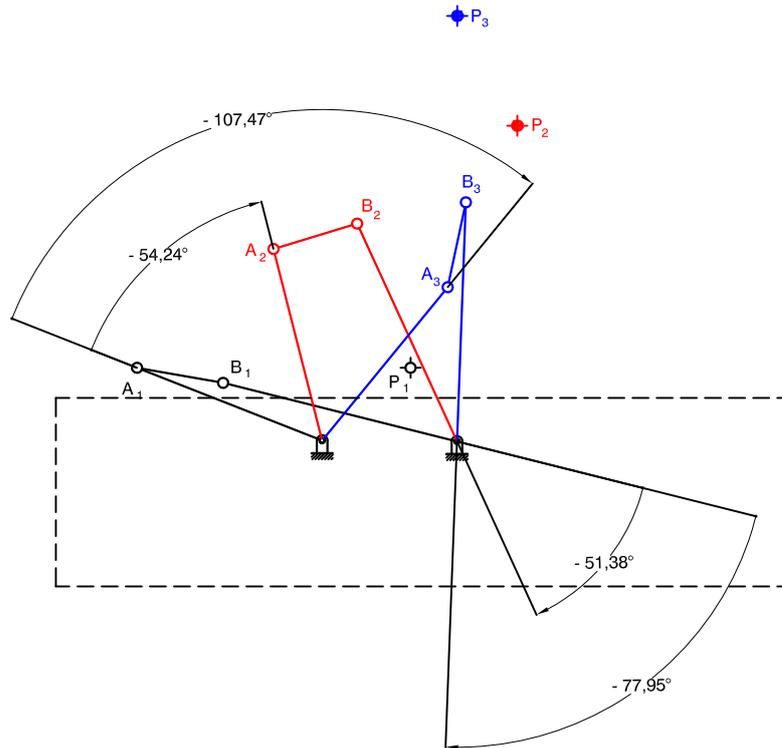
Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador (ingresar como número complejo con origen en  $P_1$ )...

$$P_1 := 0 + 0 \cdot i$$

$$P_2 := 421 + 963 \cdot i$$

$$P_3 := 184 + 1400 \cdot i$$

El ingreso de las variables de elección libre es un proceso de ensayo y error muy aleatorio dada las infinitas posibilidades para dichos valores, por lo que es necesario contar con valores referenciales, éstos se pueden obtener al solucionar gráficamente el problema con lo explicado en el apartado 2.1.1, tal como se muestra en la figura 4.1-3:



**Fig. 4.1-3:** Resolución gráfica para la obtención de valores iniciales para  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_{1\_}$  y  $\beta_{2\_}$ .

Se ingresan los valores hallados gráficamente para  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_{1\_}$  y  $\beta_{2\_}$ :

**Variables de elección libre—ángulos de giro relativo a  $P_1$  del primer eslabón de las diadas izquierda y derecha(ingresar en grados sexagesimales)...**

$$\beta_2 := -54.24 \quad \beta_3 := -107.47 \quad \beta_{2\_} := -51.38 \quad \beta_{3\_} := -77.95$$

se introducen además los valores para el área de pivotes fijos:

**Área para los pivotes fijos:**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos: (medidas desde  $P_1$ )**

$$\text{Fij}_{1x} := 1500 \quad \text{Fij}_{1y} := -870 \quad \text{Fij}_{2x} := 1500 \quad \text{Fij}_{2y} := -120 \quad \text{Fij}_{3x} := -1400 \quad \text{Fij}_{3y} := -120$$

$$\text{Fij}_{4x} := -1400 \quad \text{Fij}_{4y} := -870$$

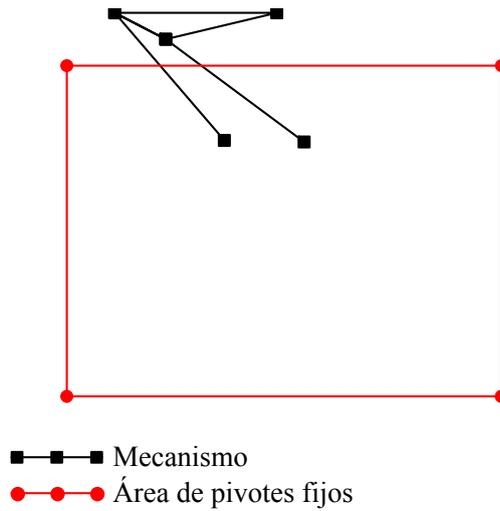
no es indispensable el área de pivotes móviles por lo que no se hará uso de ella, ni es necesario graficarla; una vez que MathCAD ejecuta la implementación entrega los siguientes resultados:

**RESULTADOS ...**

$$\begin{aligned} Z_1 &= -730.77 + 289.6i & Z_2 &= 1080.11 - 0.03i & Z_{1\_} &= -923 + 232.91i \\ Z_{2\_} &= 739.97 + 59.98i & \text{Piv}_{\text{fijo}1} &= -349.34 - 289.57i & \text{Piv}_{\text{fijo}2} &= 183.03 - 292.89i \end{aligned}$$

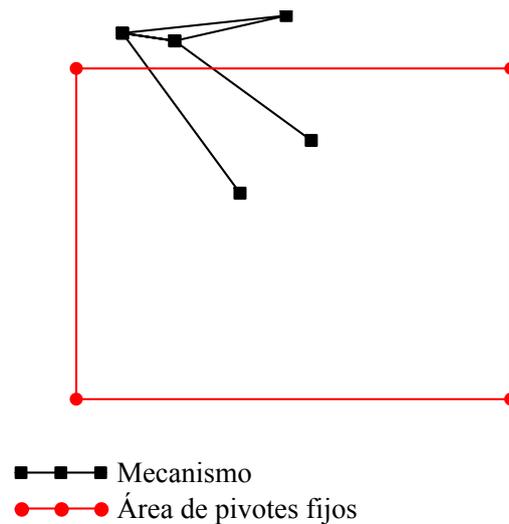
y la gráfica del mecanismo diseñado es:

## MECANISMO SINTETIZADO



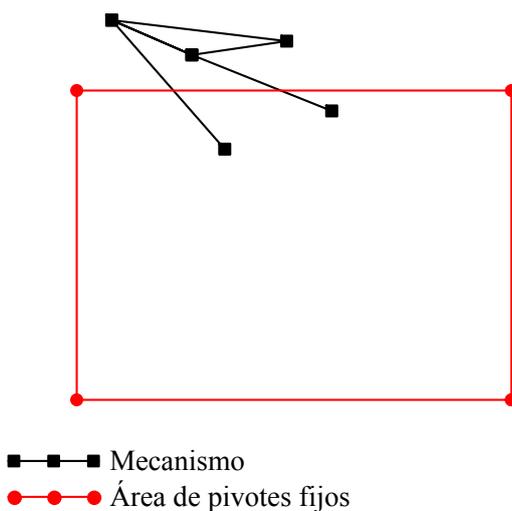
si sólo se obtuviera lo mismo que en el procedimiento gráfico del apartado 2.1.1, la implementación no tendría ninguna utilidad, pero a partir de los valores  $\beta_1$ ,  $\beta_2$ ,  $\beta_{1\_}$  y  $\beta_{2\_}$  ingresados, los mismos pueden ser modificados para obtener variantes del mecanismo anterior, incluso se pueden variar los ángulos de giro del acoplador y las posiciones de referencia para observar gráficamente la transformación que sufre el mecanismo; a continuación se presentan algunas de ellas:  
con  $\beta_2 = -50^\circ$ ,  $\beta_3 = -100^\circ$ ,  $\beta_{2\_} = -52$  y  $\beta_{3\_} = -79^\circ$ :

## MECANISMO SINTETIZADO



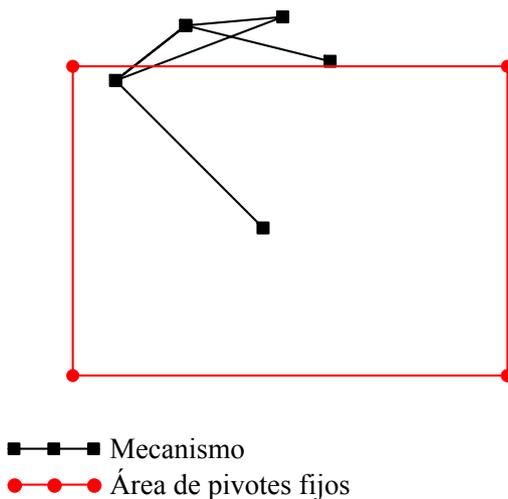
con  $\beta_2 = -50^\circ$ ,  $\beta_3 = -100^\circ$ ,  $\beta_{2\_} = -52^\circ$ ,  $\beta_{3\_} = -79^\circ$ ,  $\text{Ang}_{ac2} = 25^\circ$  y  $\text{Ang}_{ac3} = 95^\circ$ :

## MECANISMO SINTETIZADO



con  $\beta_2 = -45^\circ$ ,  $\beta_3 = -100^\circ$ ,  $\beta_{2\_} = -54^\circ$ ,  $\beta_{3\_} = -80^\circ$ ,  $\text{Ang}_{ac2} = 20^\circ$  y  $\text{Ang}_{ac3} = 93^\circ$ ,  
 $P_3 = 180 + 1500i$ :

## MECANISMO SINTETIZADO



Es indispensable, por supuesto, simular los mecanismos sintetizados para verificar la no existencia de defectos de orden o rama, sin embargo aquí no se ejecuta este procedimiento dado que únicamente se desea exponer la ejecución de las implementaciones y no discutir sus resultados, cosa que si es asunto del próximo capítulo.

#### 4.2 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO CON TRES POSICIONES DADAS Y PIVOTES FIJOS PRESCRITOS

El siguiente esquema muestra los datos a obtenerse de la síntesis del mecanismo de cuatro barras, con los pivotes fijos dados:

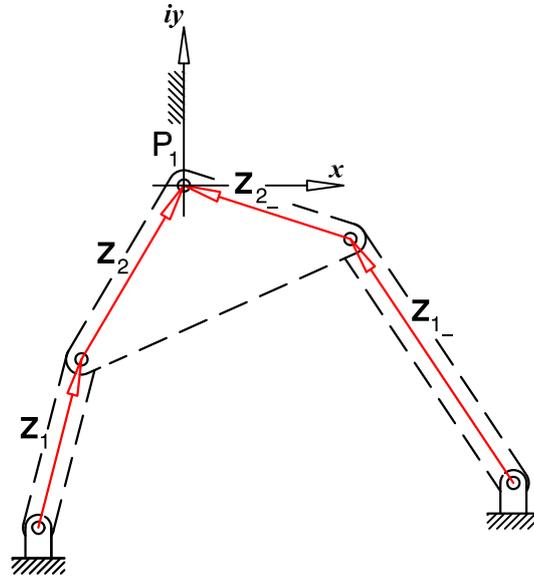


Fig. 4.2-1: Dimensiones geométricas obtenidas del diseño

El algoritmo correspondiente a la síntesis de este apartado es:

#### ALGORITMO 4.2: SÍNTESIS DE 3P CON PIVOTES FIJOS PRESCRITOS

Para hallar las dimensiones geométricas del mecanismo, se ejecuta el siguiente algoritmo:

**Datos de diseño:** Ángulos de giro del acoplador en las tres posiciones  $Ang_{ac1}$ ,  $Ang_{ac2}$ ,  $Ang_{ac3}$ , posiciones del punto de referencia del acoplador  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y posiciones de los pivotes fijos  $Piv_{fijo1}$ ,  $Piv_{fijo2}$ .

**Resultados:** Vectores posición  $Z_1$ ,  $Z_2$ ,  $Z_{1_}$ ,  $Z_{2_}$

**Paso 1:** Hacer  $\alpha_2 = Ang_{ac2} - Ang_{ac1}$  y  $\alpha_3 = Ang_{ac3} - Ang_{ac1}$

$$R_1 = P_1 - Piv_{fijo1} \quad R_{1_} = P_1 - Piv_{fijo2}$$

**Paso 2:** Hacer  $R_2 = P_2 - Piv_{fijo1}$  y  $R_{2_} = P_2 - Piv_{fijo2}$

$$R_3 = P_3 - Piv_{fijo1} \quad R_{3_} = P_3 - Piv_{fijo2}$$

**Paso 3:** Hacer  $\Delta_1 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} & R_2 \\ e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} & R_3 \end{vmatrix}$   $\Delta_2 = - \begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} & R_3 \end{vmatrix}$   $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} & R_2 \end{vmatrix}$

**Paso 4:** Hacer  $\beta_2 = 2 \cdot \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_2) - \arg\left(e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_2\right)$  y  $\beta_3 = 2 \cdot \arg(-\Delta_1)$

$$-\arg(\Delta_3) - \arg\left(e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_3\right)$$

$$\text{Paso 5: Hacer } \mathbf{Z}_1 = \frac{\begin{vmatrix} R_1 & 1 \\ R_2 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\beta_2} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \end{vmatrix}} \quad \mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i\beta_2} & R_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\beta_2} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \end{vmatrix}}$$

$$\text{Paso 6: Hacer } \Delta_{1-} = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} & R_{2-} \\ e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} & R_{3-} \end{vmatrix} \quad \Delta_{2-} = - \begin{vmatrix} 1 & R_{1-} \\ e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} & R_{3-} \end{vmatrix} \quad \Delta_{3-} = \begin{vmatrix} 1 & R_{1-} \\ e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} & R_{2-} \end{vmatrix}$$

$$\text{Paso 7: Hacer } \beta_{2-} = 2 \cdot \arg(-\Delta_{1-}) - \arg(\Delta_{2-}) - \arg\left(e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_{2-}\right) \quad \text{y}$$

$$\beta_{3-} = 2 \cdot \arg(-\Delta_{1-}) - \arg(\Delta_{3-}) - \arg\left(e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_{3-}\right)$$

$$\text{Paso 8: Hacer } \mathbf{Z}_{1-} = \frac{\begin{vmatrix} R_{1-} & 1 \\ R_{2-} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\beta_2} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \end{vmatrix}} \quad \mathbf{Z}_{2-} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & R_{1-} \\ e^{i\beta_{2-}} & R_{2-} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{i\beta_{2-}} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \end{vmatrix}}$$

**Paso 9:** Desplegar  $\mathbf{Z}_1, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_{1-}, \mathbf{Z}_{2-}$

Además se representa gráficamente el área de diseño donde se ubicarían los pivotes fijos y los pivotes móviles, al conectar mediante líneas los puntos  $(Fij_{1x}, Fij_{1y}), (Fij_{2x}, Fij_{2y}), (Fij_{3x}, Fij_{3y}), (Fij_{4x}, Fij_{4y})$  y  $(Fij_{1x}, Fij_{1y}),$  así como  $(Mov_{1x}, Mov_{1y}), (Mov_{2x}, Mov_{2y}), (Mov_{3x}, Mov_{3y}), (Mov_{4x}, Mov_{4y})$  y  $(Mov_{1x}, Mov_{1y})$  que delimitan dichas áreas. También se puede grafica, el mecanismo diseñado al conectar por líneas los puntos  $(\text{Re}(\text{Piv}_{fijo1}), \text{Im}(\text{Piv}_{fijo1})), (\text{Re}(-Z_2), \text{Im}(-Z_2)), (\text{Re}(P_1), \text{Im}(P_1)), (\text{Re}(-Z_{2-}), \text{Im}(-Z_{2-})), (\text{Re}(-Z_2), \text{Im}(-Z_2)), (\text{Re}(-Z_{2-}), \text{Im}(-Z_{2-})), (\text{Re}(\text{Piv}_{fijo2}), \text{Im}(\text{Piv}_{fijo2}))$

Seguidamente se muestra la implementación en MathCAD versión 15:

**SÍNTESIS DE 3 POSICIONES CON PIVOTES FIJOS PRESCRITOS – IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL**

$$i := \sqrt{-1}$$

**DATOS DE DISEÑO...**

**Ángulos del eslabón acoplador(ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$\text{Ang}_{ac1} := \quad \quad \quad \text{Ang}_{ac2} := \quad \quad \quad \text{Ang}_{ac3} :=$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador(ingresar como número complejo con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$P_1 :=$$

$$P_2 :=$$

$$P_3 :=$$

**Posiciones de los pivotes fijos(ingresar como número complejo con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$\text{Piv}_{fijo1} :=$$

$$\text{Piv}_{fijo2} :=$$

**Área para los pivotes fijos...**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos(medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)...**

$$\text{Fij}_{1x} := \quad \quad \text{Fij}_{1y} := \quad \quad \text{Fij}_{2x} := \quad \quad \text{Fij}_{2y} := \quad \quad \text{Fij}_{3x} := \quad \quad \text{Fij}_{3y} :=$$

$$\text{Fij}_{4x} := \quad \quad \text{Fij}_{4y} :=$$

$$\text{Fij}_x := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1x} \\ \text{Fij}_{2x} \\ \text{Fij}_{3x} \\ \text{Fij}_{4x} \\ \text{Fij}_{1x} \end{pmatrix} \quad \quad \text{Fij}_y := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1y} \\ \text{Fij}_{2y} \\ \text{Fij}_{3y} \\ \text{Fij}_{4y} \\ \text{Fij}_{1y} \end{pmatrix}$$

**Área para los pivotes móviles...**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes móviles (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)...**

$$\text{Mov}_{1x} := \quad \quad \text{Mov}_{1y} := \quad \quad \text{Mov}_{2x} := \quad \quad \text{Mov}_{2y} := \quad \quad \text{Mov}_{3x} := \quad \quad \text{Mov}_{3y} :=$$

$$\text{Mov}_{4x} := \quad \quad \text{Mov}_{4y} :=$$

$$\text{Mov}_x := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1x} \\ \text{Mov}_{2x} \\ \text{Mov}_{3x} \\ \text{Mov}_{4x} \\ \text{Mov}_{1x} \end{pmatrix} \quad \quad \text{Mov}_y := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1y} \\ \text{Mov}_{2y} \\ \text{Mov}_{3y} \\ \text{Mov}_{4y} \\ \text{Mov}_{1y} \end{pmatrix}$$

**IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL...**

**Ángulos de giro relativo del eslabón acoplador...**

$$\alpha_2 := \text{Ang}_{ac2} - \text{Ang}_{ac1} \quad \quad \alpha_3 := \text{Ang}_{ac3} - \text{Ang}_{ac1}$$

**Vectores de posición relativa de los puntos referenciales P<sub>1</sub>, P<sub>2</sub>, P<sub>3</sub> respecto a los pivotes fijos...**

$$\begin{aligned}
 R_1 &:= P_1 - \text{Piv}_{fijo1} & R_2 &:= P_2 - \text{Piv}_{fijo1} & R_3 &:= P_3 - \text{Piv}_{fijo1} \\
 R_{1\_} &:= P_1 - \text{Piv}_{fijo2} & R_{2\_} &:= P_2 - \text{Piv}_{fijo2} & R_{3\_} &:= P_3 - \text{Piv}_{fijo2}
 \end{aligned}$$

**Cálculo de las diadas izquierda  $Z_1Z_2$  y derecha  $Z_{1\_}Z_{2\_}$ ...**

$$\begin{aligned}
 \Delta_1 &:= \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & R_2 \\ 1 & R_1 \end{pmatrix} & \Delta_2 &:= - \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} & R_3 \end{pmatrix} & \Delta_3 &:= \begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & R_2 \end{pmatrix} \\
 \beta_2 &:= 2 \cdot \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_2) - \arg\left(e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_2\right) & \beta_3 &:= 2 \cdot \arg(-\Delta_1) - \arg(\Delta_3) - \arg\left(e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_3\right) \\
 Z_1 &:= \frac{\begin{pmatrix} R_1 & 1 \\ R_2 & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_2} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}} & Z_2 &:= \frac{\begin{pmatrix} 1 & R_1 \\ e^{i \cdot \beta_2} & R_2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_2} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}} \\
 \Delta_{1\_} &:= \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & R_{2\_} \\ 1 & R_{1\_} \end{pmatrix} & \Delta_{2\_} &:= - \begin{pmatrix} 1 & R_{1\_} \\ e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} & R_{3\_} \end{pmatrix} & \Delta_{3\_} &:= \begin{pmatrix} 1 & R_{1\_} \\ e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & R_{2\_} \end{pmatrix} \\
 \beta_{2\_} &:= 2 \cdot \arg(-\Delta_{1\_}) - \arg(\Delta_{2\_}) - \arg\left(e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_{2\_}\right) & \beta_{3\_} &:= 2 \cdot \arg(-\Delta_{1\_}) - \arg(\Delta_{3\_}) - \arg\left(e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} \cdot \Delta_{3\_}\right) \\
 Z_{1\_} &:= \frac{\begin{pmatrix} R_{1\_} & 1 \\ R_{2\_} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_{2\_}} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}} & Z_{2\_} &:= \frac{\begin{pmatrix} 1 & R_{1\_} \\ e^{i \cdot \beta_{2\_}} & R_{2\_} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ e^{i \cdot \beta_{2\_}} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}}
 \end{aligned}$$

**RESULTADOS...**

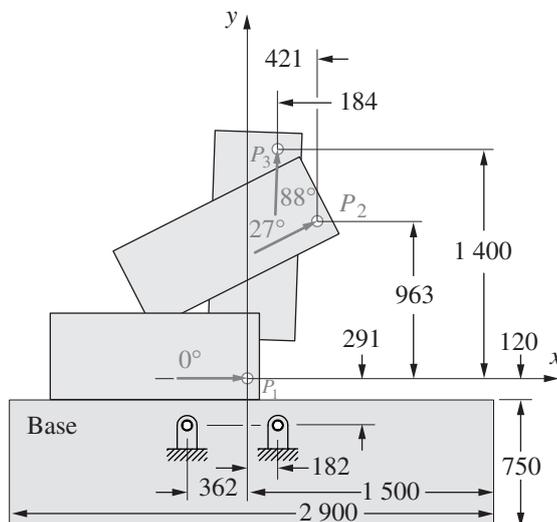
$$\begin{aligned}
 Z_1 &= & Z_2 &= \\
 Z_{1\_} &= & Z_{2\_} &=
 \end{aligned}$$

**MECANISMO DISEÑADO...**

$$\begin{aligned}
 \text{Mec}_y &:= \begin{pmatrix} \text{Im}(\text{Piv}_{fijo1}) \\ \text{Im}(-Z_2) \\ \text{Im}(P_1) \\ \text{Im}(-Z_{2\_}) \\ \text{Im}(-Z_2) \\ \text{Im}(-Z_{2\_}) \\ \text{Im}(\text{Piv}_{fijo2}) \end{pmatrix} & \text{Mec}_x &:= \begin{pmatrix} \text{Re}(\text{Piv}_{fijo1}) \\ \text{Re}(-Z_2) \\ \text{Re}(P_1) \\ \text{Re}(-Z_{2\_}) \\ \text{Re}(-Z_2) \\ \text{Re}(-Z_{2\_}) \\ \text{Re}(\text{Piv}_{fijo2}) \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

**Caso 2:**

Se utiliza la implementación con pivotes fijos dados para sintetizar el mecanismo de cuatro barras que permita mover el objeto mostrado en la figura por las tres posiciones indicadas, con la ubicación de los pivotes fijos mostrada.



**Fig. 4.2-2:** Posiciones del acoplador para el caso 2.

Se ingresan los datos de los puntos de referencia del acoplador  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ , así como los ángulos de giro relativo del acoplador  $Ang_{ac1}$ ,  $Ang_{ac2}$ ,  $Ang_{ac3}$  y las posiciones de los pivotes fijos  $Piv_{fijo1}$ ,  $Piv_{fijo2}$ :

**DATOS DE DISEÑO...**

**Ángulos del eslabón acoplador (ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$Ang_{ac1} := 0 \qquad Ang_{ac2} := 27 \qquad Ang_{ac3} := 88$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador (ingresar como número complejo con origen en  $P_1$ )...**

$$P_1 := 0 + 0 \cdot i$$

$$P_2 := 421 + 963 \cdot i$$

$$P_3 := 184 + 1400 \cdot i$$

**Posiciones de los pivotes fijos (ingresar como número complejo con origen en  $P_1$ )...**

$$Piv_{fijo1} := -362 - 291 \cdot i$$

$$Piv_{fijo2} := 182 - 291 \cdot i$$

se introducen los valores para el área de pivotes fijos:

**Área para los pivotes fijos:**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos: (medidas desde  $P_1$  y en orden secuencial)**

$$Fij_{1x} := 1500 \quad Fij_{1y} := -870 \quad Fij_{2x} := 1500 \quad Fij_{2y} := -120 \quad Fij_{3x} := -1400 \quad Fij_{3y} := -120$$

$$Fij_{4x} := -1400 \quad Fij_{4y} := -870$$

se ejecuta la implementación y se obtienen los siguientes resultados:

**RESULTADOS...**

$$Z_1 = -728.09 + 294.29i$$

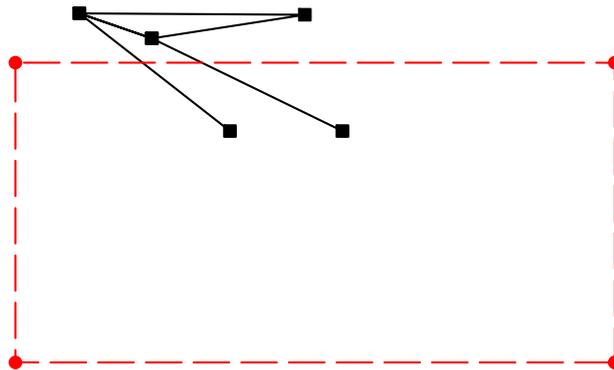
$$Z_2 = 1090.09 - 3.29i$$

$$Z_{1\_} = -921.7 + 231.57i$$

$$Z_{2\_} = 739.7 + 59.43i$$

mientras que la gráfica del mecanismo diseñado es:

**MECANISMO SINTETIZADO**

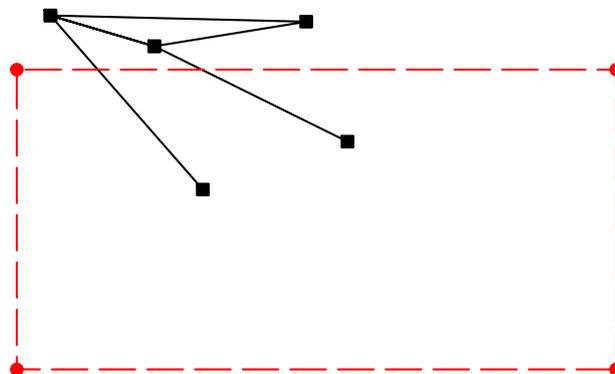


■—■—■ Mecanismo  
●—●—● Área de pivotes fijos

A diferencia de la metodología anterior, aquí se obtiene una sola solución sin mayores inconvenientes; además se pueden modificar los datos de diseño para obtener distintas alternativas para el mecanismo diseñado como se muestra a continuación:

con  $\text{Piv}_{\text{fijo1}} = -500 - 420i$  y  $\text{Piv}_{\text{fijo2}} = 200 - 300i$ :

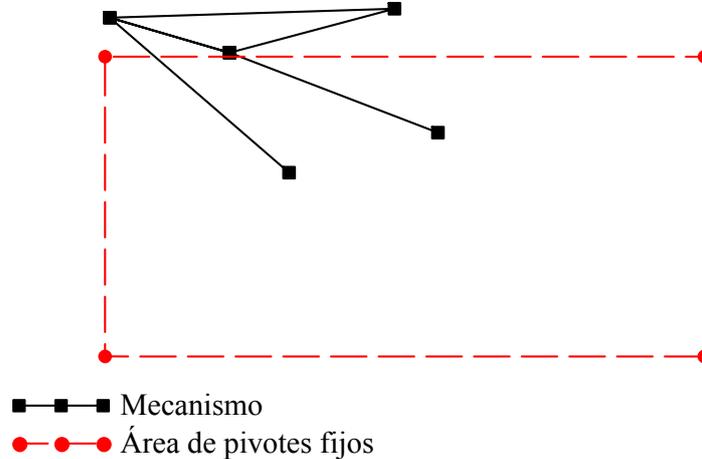
**MECANISMO SINTETIZADO**



■—■—■ Mecanismo  
●—●—● Área de pivotes fijos

con  $\text{Ang}_{ac2} = 20^\circ$  ,  $\text{Ang}_{ac3} = 93^\circ$  ,  $P_3 = 180 + 1500i$  ,  $\text{Piv}_{fijo1} = -510 - 410i$  y  $\text{Piv}_{fijo2} = 210 - 310i$ :

#### MECANISMO SINTETIZADO



Como antes, es importante simular los mecanismos sintetizados para verificar la no existencia de defectos de orden o rama.

### 4.3 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO CON TRES POSICIONES DADAS MEDIANTE EL EMPLEO DE CÍRCULOS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR

Con esta metodología se encuentra el lugar geométrico de los puntos ocupados por los pivotes fijos, que al ser un círculo como se demostró en el capítulo 2, lleva la denominación de círculo de puntos centrales así como el lugar geométrico de los puntos posibles ocupados por los pivotes móviles, también un círculo llamado círculo de puntos circulares. El algoritmo detallado a continuación permite generar los puntos de los círculos de puntos centrales y circulares y además dibujarlos; conociendo dichos puntos se puede seleccionar el mecanismo de cuatro barras más adecuado como solución de la síntesis.

#### **ALGORITMO 4.3: SÍNTESIS 3P CON EL USO DE CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y PUNTOS CIRCULARES**

Para hallar los círculos de los pivotes fijos y móviles, se ejecuta el siguiente algoritmo:

**Datos de diseño:** Ángulos de giro del acoplador en las tres posiciones:  $\text{Ang}_{ac1}$ ,  $\text{Ang}_{ac2}$ ,  $\text{Ang}_{ac3}$ ; Posiciones del punto de referencia del acoplador  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$ ;  $\beta_2$  y un rango para  $\beta_3$  ( $\beta_{3in} \leq \beta_3 \leq \beta_{3fin}$ ) y finalmente un paso  $p$  para el rango anterior.

**Resultados:** Puntos centrales (ubicaciones de los pivotes fijos)  $M$  y puntos circulares (ubicaciones de los pivotes móviles)  $K$ .

**Paso 1:** Hacer  $\alpha_2 = \text{Ang}_{ac2} - \text{Ang}_{ac1}$  y  $\alpha_3 = \text{Ang}_{ac3} - \text{Ang}_{ac1}$

**Paso 2:** Hacer  $\delta_2 = P_2 - P_1$  y  $\delta_3 = P_3 - P_1$

**Paso 3:** Hacer  $n = \frac{\beta_{3fin} - \beta_{3in}}{p}$

**Paso 4:** Hacer  $\beta_3 = \beta_{3in}$

**Paso 5:** For  $k = 1$  hasta  $n + 1$

**Paso 6:** Hacer  $R_k =$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \\ \delta_3 & e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \\ 1 & e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} \end{array} \right| \end{array}$$

**Paso 7:** Hacer  $(Z_2)_k =$

$$\begin{array}{c} \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} & \delta_3 \end{array} \right| \\ \hline \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} & -e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} \\ 1 & e^{i\beta_3 \frac{\pi}{180}} & -e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} \end{array} \right| \end{array}$$

**Paso 8:** Hacer  $\beta_3 = \beta_3 + p$

$$\text{Paso 9: Hacer PuntosCC} = \begin{bmatrix} R_1 & (Z_2)_1 \\ R_2 & (Z_2)_2 \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot \\ R_{n+1} & (Z_2)_{n+1} \end{bmatrix}$$

$$\text{Paso 10: Hacer } M = \text{PuntosCC}^{(1)} \quad K = \text{PuntosCC}^{(2)}$$

Una vez determinados los puntos centrales y los puntos circulares se añadió una implementación para la exploración de la probable diada solución, denominada diada exploratoria, así como implementaciones para la graficación de las diadas solución izquierda y derecha. Además, se introdujo una implementación para graficar el mecanismo diseñado.

Seguidamente se muestra la implementación computacional en MathCAD 15:

**IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL PARA EL DISEÑO DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS MEDIANTE CÍRCULOS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR**

$$i := \sqrt{-1}$$

**DATOS DE DISEÑO...**

**Ángulos del eslabón acoplador: (ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$\text{Ang}_{ac1} := \quad \text{Ang}_{ac2} := \quad \text{Ang}_{ac3} :=$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador(ingresar como números complejos con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$P_1 :=$$

$$P_2 :=$$

$$P_3 :=$$

**Área para los pivotes fijos...**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos(medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)...**

$$\text{Fij}_{1x} := \quad \text{Fij}_{1y} := \quad \text{Fij}_{2x} := \quad \text{Fij}_{2y} := \quad \text{Fij}_{3x} := \quad \text{Fij}_{3y} :=$$

$$\text{Fij}_{4x} := \quad \text{Fij}_{4y} :=$$

$$\text{Fij}_x := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1x} \\ \text{Fij}_{2x} \\ \text{Fij}_{3x} \\ \text{Fij}_{4x} \\ \text{Fij}_{1x} \end{pmatrix} \quad \text{Fij}_y := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1y} \\ \text{Fij}_{2y} \\ \text{Fij}_{3y} \\ \text{Fij}_{4y} \\ \text{Fij}_{1y} \end{pmatrix}$$

**Área para los pivotes móviles...**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes móviles (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)...**

$$\text{Mov}_{1x} := \quad \text{Mov}_{1y} := \quad \text{Mov}_{2x} := \quad \text{Mov}_{2y} := \quad \text{Mov}_{3x} := \quad \text{Mov}_{3y} :=$$

$$\text{Mov}_{4x} := \quad \text{Mov}_{4y} :=$$

$$\text{Mov}_x := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1x} \\ \text{Mov}_{2x} \\ \text{Mov}_{3x} \\ \text{Mov}_{4x} \\ \text{Mov}_{1x} \end{pmatrix} \quad \text{Mov}_y := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1y} \\ \text{Mov}_{2y} \\ \text{Mov}_{3y} \\ \text{Mov}_{4y} \\ \text{Mov}_{1y} \end{pmatrix}$$

**IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL...****Ángulos de giro relativo del eslabón acoplador...**

$$\alpha_2 := \text{Ang}_{ac2} - \text{Ang}_{ac1} \quad \alpha_3 := \text{Ang}_{ac3} - \text{Ang}_{ac1}$$

**Desplazamientos relativos del punto referencial P del eslabón acoplador...**

$$\delta_2 := P_2 - P_1 \quad \delta_3 := P_3 - P_1$$

**PROGRAMA PARA GRAFICAR LAS CURVAS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES...**

$$\begin{aligned} \text{PuntosCC}(\beta_2, \beta_{3in}, \beta_{3fin}, p) := & n \leftarrow \frac{\beta_{3fin} - \beta_{3in}}{p} \\ & \beta_3 \leftarrow \beta_{3in} \\ & \text{for } k \in 1 .. n + 1 \\ & \quad R_k \leftarrow \frac{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ \delta_2 & e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \\ \delta_3 & e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180}} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180}} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}} \\ & \quad Z_{2k} \leftarrow \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & \delta_2 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180}} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \\ 1 & e^{i \cdot \beta_3 \cdot \frac{\pi}{180}} & -e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} \end{pmatrix}} \\ & \quad \beta_3 \leftarrow (\beta_3 + p) \\ & \quad \text{augment}(R, Z_2) \end{aligned}$$

**RESULTADOS...****IMPLEMENTACIÓN EXPLORATORIA PARA LA DETERMINACIÓN DE UNA SOLUCIÓN ACEPTABLE...**

**DIADA EXPLORATORIA...**  $P_{exp} :=$

$$\beta_{2exp} := \quad \beta_{3inexp} := \quad \beta_{3finexp} :=$$

**Puntos centrales M...**

$$M_{exp} := \text{PuntosCC}(\beta_{2exp}, \beta_{3inexp}, \beta_{3finexp}, P_{exp})^{(1)}$$

**Puntos circulares K...**

$$K_{exp} := \text{PuntosCC}(\beta_{2exp}, \beta_{3inexp}, \beta_{3finexp}, P_{exp})^{(2)}$$

**DIADA IZQUIERDA...**  $P_{izq} :=$

$$\beta_{2izq} := \quad \beta_{3inizq} := \quad \beta_{3finizq} :=$$

**DIADA DERECHA...**  $P_{der} :=$

$$\beta_{2der} := \quad \beta_{3inder} := \quad \beta_{3finder} :=$$

**Puntos centrales M...**

$$M_{izq} := \text{PuntosCC}(\beta_{2izq}, \beta_{3inizq}, \beta_{3finizq}, P_{izq})^{(1)}$$

**Puntos centrales M...**

$$M_{der} := \text{PuntosCC}(\beta_{2der}, \beta_{3inder}, \beta_{3finder}, P_{der})^{(1)}$$

**Puntos circulares K...**

$$K_{izq} := \text{PuntosCC}(\beta_{2izq}, \beta_{3inizq}, \beta_{3finizq}, P_{izq})^{(2)}$$

**Puntos circulares K...**

$$K_{der} := \text{PuntosCC}(\beta_{2der}, \beta_{3inder}, \beta_{3finder}, P_{der})^{(2)}$$

**MECANISMO DISEÑADO...**

**Gráfica del mecanismo definitivo...**

**Puntos centrales M...**  $M_g(\beta_2, \beta_{3in}, \beta_{3fin}) := \text{PuntosCC}(\beta_2, \beta_{3in}, \beta_{3fin}, 1)^{(1)}$

**Puntos circulares K...**  $K_g(\beta_2, \beta_{3in}, \beta_{3fin}) := \text{PuntosCC}(\beta_2, \beta_{3in}, \beta_{3fin}, 1)^{(2)}$

$$\beta_{2izqd} := \quad \beta_{2derd} :=$$

$$\beta_{3izqd} := \quad \beta_{3derd} :=$$

$$Mec_y := \begin{pmatrix} \text{Im} \left( M_g(\beta_{2izqd}, \beta_{3izqd}, \beta_{3izqd})_{1, 1} \right) \\ \text{Im} \left( K_g(\beta_{2izqd}, \beta_{3izqd}, \beta_{3izqd})_{1, 1} \right) \\ \text{Im}(P_1) \\ \text{Im} \left( K_g(\beta_{2derd}, \beta_{3derd}, \beta_{3derd})_{1, 1} \right) \\ \text{Im} \left( K_g(\beta_{2izqd}, \beta_{3izqd}, \beta_{3izqd})_{1, 1} \right) \\ \text{Im} \left( K_g(\beta_{2derd}, \beta_{3derd}, \beta_{3derd})_{1, 1} \right) \\ \text{Im} \left( M_g(\beta_{2derd}, \beta_{3derd}, \beta_{3derd})_{1, 1} \right) \end{pmatrix}$$

$$Mec_x := \begin{pmatrix} \text{Re} \left( M_g(\beta_{2izqd}, \beta_{3izqd}, \beta_{3izqd})_{1, 1} \right) \\ \text{Re} \left( K_g(\beta_{2izqd}, \beta_{3izqd}, \beta_{3izqd})_{1, 1} \right) \\ \text{Re}(P_1) \\ \text{Re} \left( K_g(\beta_{2derd}, \beta_{3derd}, \beta_{3derd})_{1, 1} \right) \\ \text{Re} \left( K_g(\beta_{2izqd}, \beta_{3izqd}, \beta_{3izqd})_{1, 1} \right) \\ \text{Re} \left( K_g(\beta_{2derd}, \beta_{3derd}, \beta_{3derd})_{1, 1} \right) \\ \text{Re} \left( M_g(\beta_{2derd}, \beta_{3derd}, \beta_{3derd})_{1, 1} \right) \end{pmatrix}$$

### Caso 3:

Se utiliza la implementación con círculos de puntos centrales y puntos circulares para sintetizar el mecanismo de cuatro barras que permita mover el objeto mostrado en la figura por las tres posiciones indicadas.

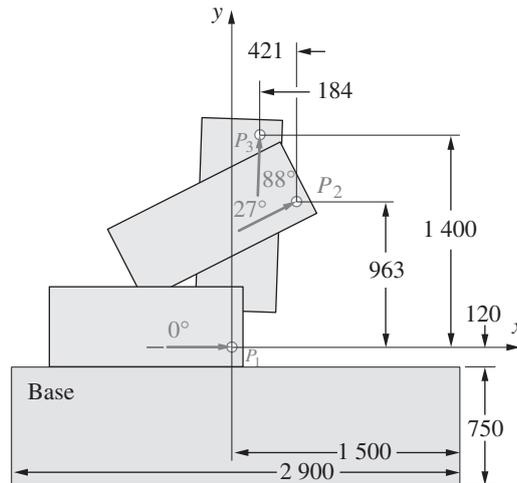


Fig. 4.3-1: Posiciones del acoplador para el caso 3.

Se introducen los datos de diseño conocidos:

**DATOS DE DISEÑO:**

**Ángulos del eslabón acoplador: (ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$\text{Ang}_{ac1} := 0 \quad \text{Ang}_{ac2} := 27 \quad \text{Ang}_{ac3} := 88$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador(ingresar como números complejos con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$P_1 := 0 + 0 \cdot i$$

$$P_2 := 421 + 963 \cdot i$$

$$P_3 := 184 + 1400 \cdot i$$

y el área para los pivotes fijos,

**Área para los pivotes fijos:**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)**

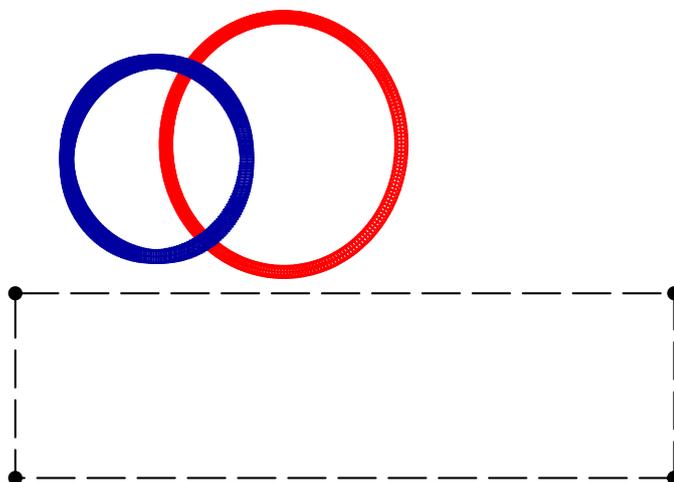
$$\text{Fij}_{1x} := 1500 \quad \text{Fij}_{1y} := -870 \quad \text{Fij}_{2x} := 1500 \quad \text{Fij}_{2y} := -120 \quad \text{Fij}_{3x} := -1400 \quad \text{Fij}_{3y} := -120$$

$$\text{Fij}_{4x} := -1400 \quad \text{Fij}_{4y} := -870$$

los valores para  $\beta_2$ ,  $\beta_{3in}$ ,  $\beta_{3fin}$  y  $p$ , deben ensayarse para obtener una pareja de círculos que convenga al diseño, he aquí las parejas de círculos para varios ensayos mediante el uso de la diada exploratoria:

con  $\beta_2 = 290^\circ$ ,  $\beta_{3in} = 0^\circ$ ,  $\beta_{3fin} = 360^\circ$ ,  $p = 1$ :

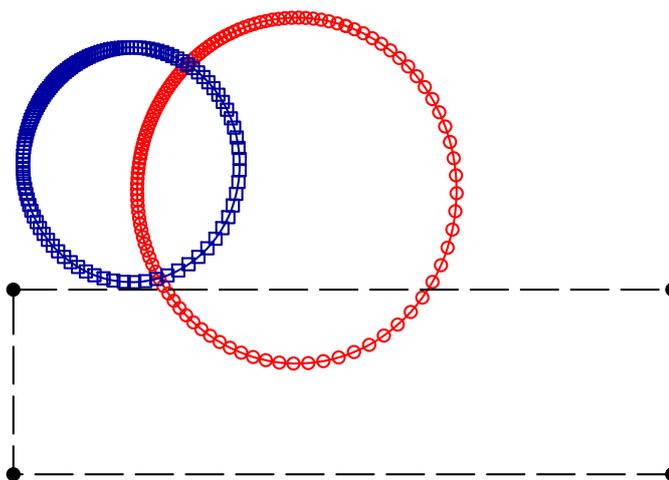
### CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



- Curva de puntos centrales M - diada exploratoria
- Curva de puntos circulares K - diada exploratoria
- Área de pivotes fijos

con  $\beta_2 = 310^\circ$ ,  $\beta_{3in} = 0^\circ$ ,  $\beta_{3fin} = 360^\circ$ ,  $p = 1$ :

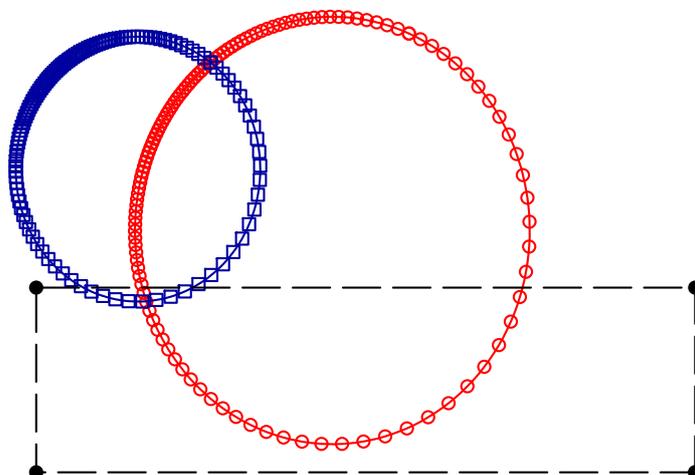
### CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



- Curva de puntos centrales M - pivotes fijos
- Curva de puntos circulares K - pivotes móviles
- Área de pivotes fijos

con  $\beta_2 = 320^\circ$ ,  $\beta_{3in} = 0^\circ$ ,  $\beta_{3fin} = 360^\circ$ ,  $p = 1$ :

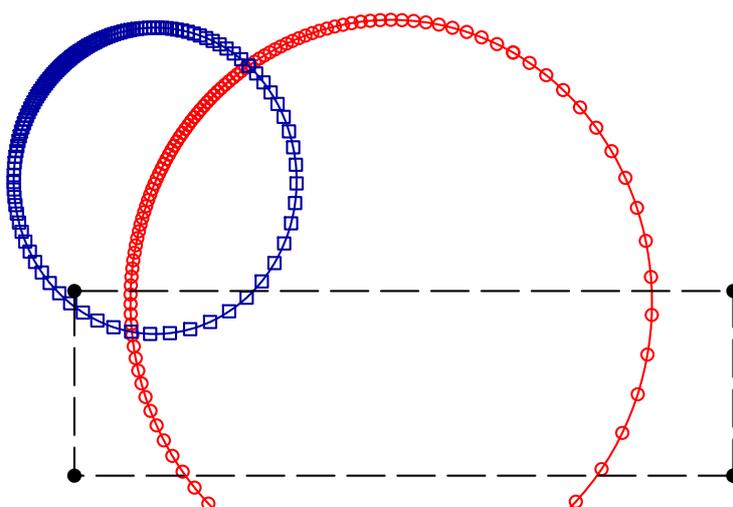
### CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



- Curva de puntos centrales M - pivotes fijos
- Curva de puntos circulares K - pivotes móviles
- Área de pivotes fijos

con  $\beta_2 = 330^\circ$ ,  $\beta_{3in} = 0^\circ$ ,  $\beta_{3fin} = 360^\circ$ ,  $p = 1$ :

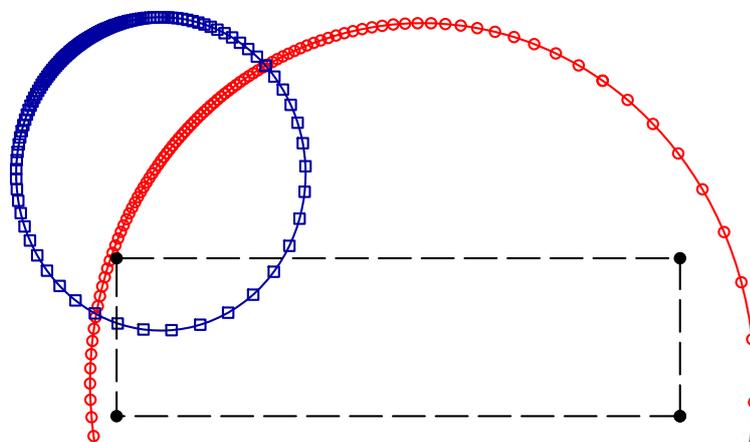
### CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



- Curva de puntos centrales M - pivotes fijos
- Curva de puntos circulares K - pivotes móviles
- Área de pivotes fijos

con  $\beta_2 = 340^\circ$ ,  $\beta_{3in} = 0^\circ$ ,  $\beta_{3fin} = 360^\circ$ ,  $p = 1$ :

### CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES

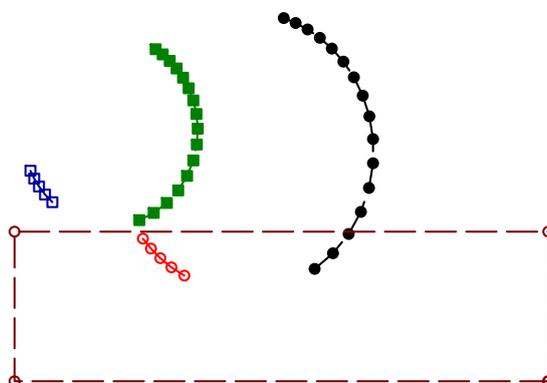


- Curva de puntos centrales M - pivotes fijos
- Curva de puntos circulares K - pivotes móviles
- Área de pivotes fijos

Como se observa, el diseño es conveniente para  $300^\circ \lesssim \beta_2 \lesssim 330^\circ$ . Con estas alternativas encontradas se pueden elegir una o más de ellas y determinar dos puntos convenientes para los pivotes fijo y móvil de las diadas derecha e izquierda y generar un mecanismo, por ejemplo:

Para la diada izquierda  $\beta_{2izq} = 310^\circ$ ,  $\beta_{3inizq} = 230^\circ$ ,  $\beta_{3finizq} = 250^\circ$ ,  $p_{izq} = 5$  y para la diada derecha  $\beta_{2der} = 310^\circ$ ,  $\beta_{3inder} = 285^\circ$ ,  $\beta_{3finder} = 360^\circ$ ,  $p_{der} = 5$ , se tiene las siguientes parejas de diadas:

### CÍRCULOS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



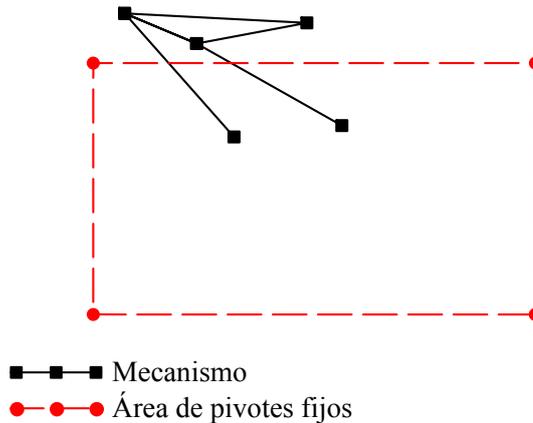
- Curva de puntos centrales M - diada izquierda
- Curva de puntos circulares K - diada derecha
- Curva de puntos centrales diada derecha
- Curva de puntos circulares - diada derecha
- Área de pivotes fijos

entonces el mecanismo diseñado se genera para:

Diada	$\beta_2$	$\beta_3$
izquierda	310°	250°
derecha	310°	285°

obteniéndose,

MECANISMO SINTETIZADO



Es de suma importancia simular el mecanismo obtenido para descartar defectos de orden o rama.

#### 4.4 IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL PARA SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE MOVIMIENTO CON CUATRO POSICIONES DADAS(4P) MEDIANTE EL EMPLEO DE CURVAS DE BURMESTER

Con la metodología de curvas de Burmester se encuentra el lugar geométrico de los puntos ocupados por los pivotes fijos y los pivotes móviles, llamados curvas de Burmester, cuando el acoplador ocupa cuatro posiciones sucesivas dadas; el algoritmo detallado a continuación permite generar los puntos de las curvas de Burmester. Entonces, es posible dibujar dichas curvas y seleccionar el mecanismo de cuatro barras más adecuado.

#### **ALGORITMO 4.4: SÍNTESIS DE 4P CON EL USO DE CURVAS DE BURMESTER**

Para hallar los puntos de los pivotes fijos y móviles, se ejecuta el siguiente algoritmo:

**Datos de diseño:** Ángulos de giro del acoplador en las cuatro posiciones  $Ang_{ac1}$ ,  $Ang_{ac2}$ ,  $Ang_{ac3}$  y  $Ang_{ac4}$ ; Posiciones del punto de referencia del acoplador  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$ .

**Resultados:** Puntos centrales (ubicaciones de los pivotes fijos)  $M$  y puntos circulares (ubicaciones de los pivotes móviles)  $K$ .

**Paso 1:** Hacer  $\alpha_2 = Ang_{ac2} - Ang_{ac1}$ ,  $\alpha_3 = Ang_{ac3} - Ang_{ac1}$  y  $\alpha_4 = Ang_{ac4} - Ang_{ac1}$

**Paso 2:** Hacer  $\delta_2 = P_2 - P_1$ ,  $\delta_3 = P_3 - P_1$  y  $\delta_4 = P_4 - P_1$

**Paso 3:** Hacer  $R_1 = P_1$

**Paso 4:** Hacer  $\Delta_2 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}$ ,  $\Delta_3 = - \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_4 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_4 \end{vmatrix}$  y  $\Delta_4 = \begin{vmatrix} e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}$

**Paso 5:** Hacer  $\Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4$

**Paso 6:** Hacer  $\beta_2 = \beta_{2in}$

**Paso 7:** Hacer  $n = \frac{\beta_{2fin} - \beta_{2in}}{p}$

**Paso 8:** For  $k = 1$  hasta  $n + 1$

**Paso 9:** Hacer  $\Delta_k = \Delta_1 + \Delta_2 \cdot e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}}$

**Paso 10:** Hacer

$$(\theta_3)_k = a \tan \left[ \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta_k|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta_k|}, \sqrt{1 - \left[ \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta_k|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta_k|} \right]^2} \right]$$

**Paso 11:** Hacer  $(\beta_3)_k = \arg(\Delta_k) + (\theta_3)_k - \arg(\Delta_3)$

**Paso 12:** Hacer  $(\theta_{3-})_k = 2\pi - (\theta_3)_k$

**Paso 13:** Hacer  $(\beta_{3-})_k = \arg(\Delta_k) + (\theta_{3-})_k - \arg(\Delta_3)$

**Paso 14:** Hacer

$$(Z_1)_k = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i(\beta_3)_k} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}} \quad (Z_2)_k = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i(\beta_3)_k} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i(\beta_3)_k} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}$$

**Paso 15:** Hacer

$$(Z_{1-})_k = \frac{\begin{vmatrix} \delta_2 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ \delta_3 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i(\beta_3)_k} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}} \quad (Z_{2-})_k = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i(\beta_3)_k} - 1 & \delta_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\beta_2 \frac{\pi}{180}} - 1 & e^{i\alpha_2 \frac{\pi}{180}} - 1 \\ e^{i(\beta_3)_k} - 1 & e^{i\alpha_3 \frac{\pi}{180}} - 1 \end{vmatrix}}$$

**Paso 16:** Hacer  $K_k = R_1 - (Z_2)_k$

**Paso 17:** Hacer  $(K_-)_k = R_1 - (Z_{2-})_k$

**Paso 18:** Hacer  $M_k = K_k - (Z_1)_k$

**Paso 19:** Hacer  $(M_-)_k = (K_-)_k - (Z_{1-})_k$

**Paso 20:** Hacer  $\beta_2 = \beta_2 + p$

**Paso 21:** Hacer PuntosBurm =

$$\begin{bmatrix} M_1 & K_1 & (M_-)_1 & (K_-)_1 \\ M_2 & K_2 & (M_-)_2 & (K_-)_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ M_{n+1} & K_{n+1} & (M_-)_{n+1} & (K_-)_{n+1} \end{bmatrix}$$

Como se recuerda del apartado 3.3 la solución de la ecuación de compatibilidad genera dos parejas de conjuntos de datos solución  $(M_k, K_k)$  y  $(M_{-k}, K_{-k})$  para  $k = 1, 2, \dots, n+1$ , que se las va a denominar primera y segunda solución.

Las diadas izquierda y derecha del mecanismo pueden hallarse en la primera solución, en la segunda o en ambas, generándose cuatro posibilidades de mecanismos que se grafican a continuación:

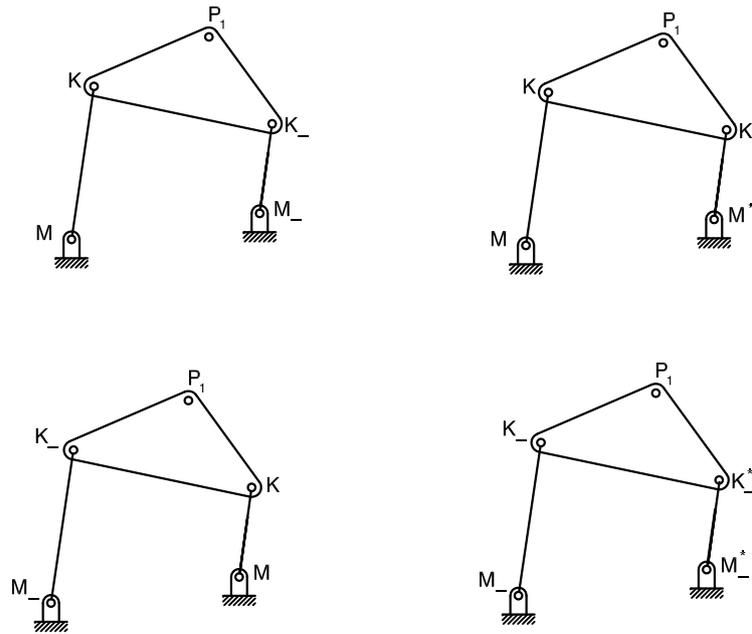


Fig. 4.4-1: Mecanismos solución por curvas de Burmester.

Seguidamente se muestra la implementación computacional en MathCAD 15:

**IMPLEMENTACION COMPUTACIONAL PARA EL DISEÑO DE UN MECANISMO DE CUATRO BARRAS MEDIANTE CURVAS DE BURMESTER**

**DATOS DE DISEÑO...**

$$i := \sqrt{-1}$$

**Ángulos del eslabón acoplador: (ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$\text{Ang}_{ac1} := \quad \text{Ang}_{ac2} := \quad \text{Ang}_{ac3} := \quad \text{Ang}_{ac4} :=$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador(ingresar como números complejos con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$P_1 :=$$

$$P_2 :=$$

$$P_3 :=$$

$$P_4 :=$$

**Área para los pivotes fijos:**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos: (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)**

$$\text{Fij}_{1x} := \quad \text{Fij}_{1y} := \quad \text{Fij}_{2x} := \quad \text{Fij}_{2y} := \quad \text{Fij}_{3x} := \quad \text{Fij}_{3y} :=$$

$$\text{Fij}_{4x} := \quad \text{Fij}_{4y} :=$$

$$\text{Fij}_x := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1x} \\ \text{Fij}_{2x} \\ \text{Fij}_{3x} \\ \text{Fij}_{4x} \\ \text{Fij}_{1x} \end{pmatrix}$$

$$\text{Fij}_y := \begin{pmatrix} \text{Fij}_{1y} \\ \text{Fij}_{2y} \\ \text{Fij}_{3y} \\ \text{Fij}_{4y} \\ \text{Fij}_{1y} \end{pmatrix}$$

**Área para los pivotes móviles...**

**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes móviles (medidas desde  $P_1$  y en orden secuencial)...**

$$\text{Mov}_{1x} := \quad \text{Mov}_{1y} := \quad \text{Mov}_{2x} := \quad \text{Mov}_{2y} := \quad \text{Mov}_{3x} := \quad \text{Mov}_{3y} :=$$

$$\text{Mov}_{4x} := \quad \text{Mov}_{4y} :=$$

$$\text{Mov}_x := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1x} \\ \text{Mov}_{2x} \\ \text{Mov}_{3x} \\ \text{Mov}_{4x} \\ \text{Mov}_{1x} \end{pmatrix} \quad \text{Mov}_y := \begin{pmatrix} \text{Mov}_{1y} \\ \text{Mov}_{2y} \\ \text{Mov}_{3y} \\ \text{Mov}_{4y} \\ \text{Mov}_{1y} \end{pmatrix}$$

**IMPLEMENTACIÓN COMPUTACIONAL:**

**Ángulos de giro relativo del eslabón acoplador:**

$$\alpha_2 := \text{Ang}_{ac2} - \text{Ang}_{ac1}$$

$$\alpha_3 := \text{Ang}_{ac3} - \text{Ang}_{ac1}$$

$$\alpha_4 := \text{Ang}_{ac4} - \text{Ang}_{ac1}$$

**Desplazamientos relativos del punto referencial del eslabón acoplador:**

$$\delta_2 := P_2 - P_1$$

$$\delta_3 := P_3 - P_1$$

$$\delta_4 := P_4 - P_1$$

**PROGRAMA PARA GRAFICAR LAS CURVAS DE BURMESTER:**

$$\text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, p) := \begin{array}{l} R_1 \leftarrow P_1 \\ \Delta_2 \leftarrow \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_3 \\ e^{i \cdot \alpha_4 \cdot \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_4 \end{pmatrix} \\ \Delta_3 \leftarrow \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i \cdot \alpha_4 \cdot \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_4 \end{pmatrix} \\ \Delta_4 \leftarrow \begin{pmatrix} e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_2 \\ e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180}} - 1 & \delta_3 \end{pmatrix} \\ \Delta_1 \leftarrow -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \\ \beta_2 \leftarrow \beta_{2in} \\ n \leftarrow \frac{\beta_{2fin} - \beta_{2in}}{p} \\ \text{for } k \in 1 .. n + 1 \\ \quad | \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Delta_k &\leftarrow \Delta_1 + \Delta_2 \cdot e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180}} \\
\theta_{3_k} &\leftarrow \operatorname{atan2} \left[ \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta_k|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta_k|}, \sqrt{1 - \left[ \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta_k|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta_k|} \right]^2} \right] \\
\beta_{3_k} &\leftarrow \arg(\Delta_k) + \theta_{3_k} - \arg(\Delta_3) \\
\theta_{3_{-k}} &\leftarrow 2 \cdot \pi - \theta_{3_k} \\
\beta_{3_{-k}} &\leftarrow \arg(\Delta_k) + \theta_{3_{-k}} - \arg(\Delta_3) \\
Z_{1_k} &\leftarrow \frac{\begin{pmatrix} \delta_2 e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ \delta_3 e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{3_k} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}} \\
Z_{2_k} &\leftarrow \frac{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{3_k} - 1} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{3_k} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}} \\
Z_{1_{-k}} &\leftarrow \frac{\begin{pmatrix} \delta_2 e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ \delta_3 e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{3_{-k}} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}} \\
Z_{2_{-k}} &\leftarrow \frac{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & \delta_2 \\ e^{i \cdot \beta_{3_{-k}} - 1} & \delta_3 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} e^{i \cdot \beta_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} & e^{i \cdot \alpha_2 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \\ e^{i \cdot \beta_{3_{-k}} - 1} & e^{i \cdot \alpha_3 \cdot \frac{\pi}{180} - 1} \end{pmatrix}} \\
K_k &\leftarrow R_1 - Z_{2_k} \\
K_{-k} &\leftarrow R_1 - Z_{2_{-k}} \\
M_k &\leftarrow K_k - Z_{1_k} \\
M_{-k} &\leftarrow K_{-k} - Z_{1_{-k}} \\
\beta_2 &\leftarrow \beta_2 + p \\
\operatorname{augment}(M, K, M_{-}, K_{-})
\end{aligned}$$

RESULTADOS...

IMPLEMENTACIÓN EXPLORATORIA PARA LA DETERMINACIÓN DE UNA SOLUCIÓN ACEPTABLE...

PRIMERA SOLUCIÓN...

SEGUNDA SOLUCIÓN...

$P_{s1} :=$        $\beta_{2s1in} :=$        $\beta_{2s1fin} :=$

$P_{s2} :=$        $\beta_{2s2in} :=$        $\beta_{2s2fin} :=$

**Puntos centrales M:**

$$M_{s1} := \text{PuntosBurm}(\beta_{2s1in}, \beta_{2s1fin}, P_{s1})^{(1)}$$

**Puntos circulares K:**

$$K_{s1} := \text{PuntosBurm}(\beta_{2s1in}, \beta_{2s1fin}, P_{s1})^{(2)}$$

**Puntos centrales M:**

$$M_{s2} := \text{PuntosBurm}(\beta_{2s2in}, \beta_{2s2fin}, P_{s2})^{(3)}$$

**Puntos circulares K:**

$$K_{s2} := \text{PuntosBurm}(\beta_{2s2in}, \beta_{2s2fin}, P_{s2})^{(4)}$$

**MECANISMO DISEÑADO (UTILIZANDO AMBAS SOLUCIONES)...****Gráfica del mecanismo definitivo...**

$$\text{Puntos centrales M... } M_{g12}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(1)}$$

$$M_{g12\_}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(3)}$$

$$\text{Puntos circulares K... } K_{g12}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(2)}$$

$$K_{g12\_}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(4)}$$

$$\beta_{2izq1} := \quad \dots \text{ ángulo de diseño para la diada izquierda}$$

$$\beta_{2der1} := \quad \dots \text{ ángulo de diseño para la diada derecha}$$

$$\text{Mec}_{1y} := \begin{pmatrix} \text{Im}(M_{g12}(\beta_{2izq1}, \beta_{2izq1})_{1,1}) \\ \text{Im}(K_{g12}(\beta_{2izq1}, \beta_{2izq1})_{1,1}) \\ \text{Im}(P_1) \\ \text{Im}(K_{g12\_}(\beta_{2der1}, \beta_{2der1})_{1,1}) \\ \text{Im}(K_{g12}(\beta_{2izq1}, \beta_{2izq1})_{1,1}) \\ \text{Im}(K_{g12\_}(\beta_{2der1}, \beta_{2der1})_{1,1}) \\ \text{Im}(M_{g12\_}(\beta_{2der1}, \beta_{2der1})_{1,1}) \end{pmatrix} \quad \text{Mec}_{1x} := \begin{pmatrix} \text{Re}(M_{g12}(\beta_{2izq1}, \beta_{2izq1})_{1,1}) \\ \text{Re}(K_{g12}(\beta_{2izq1}, \beta_{2izq1})_{1,1}) \\ \text{Re}(P_1) \\ \text{Re}(K_{g12\_}(\beta_{2der1}, \beta_{2der1})_{1,1}) \\ \text{Re}(K_{g12}(\beta_{2izq1}, \beta_{2izq1})_{1,1}) \\ \text{Re}(K_{g12\_}(\beta_{2der1}, \beta_{2der1})_{1,1}) \\ \text{Re}(M_{g12\_}(\beta_{2der1}, \beta_{2der1})_{1,1}) \end{pmatrix}$$

**MECANISMO DISEÑADO(EMPLEANDO LA PRIMERA SOLUCIÓN)...****Gráfica del mecanismo definitivo...**

$$\text{Puntos centrales M... } M_{g3}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(1)}$$

$$\text{Puntos circulares K... } K_{g3}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(2)}$$

$$\beta_{2izq3} := \quad \dots \text{ ángulo de diseño para la diada izquierda}$$

$$\beta_{2der3} := \quad \dots \text{ ángulo de diseño para la diada derecha}$$

$$\text{Mec}_{3y} := \begin{pmatrix} \text{Im}(M_{g3}(\beta_{2izq3}, \beta_{2izq3})_{1,1}) \\ \text{Im}(K_{g3}(\beta_{2izq3}, \beta_{2izq3})_{1,1}) \\ \text{Im}(P_1) \\ \text{Im}(K_{g3}(\beta_{2der3}, \beta_{2der3})_{1,1}) \\ \text{Im}(K_{g3}(\beta_{2izq3}, \beta_{2izq3})_{1,1}) \\ \text{Im}(K_{g3}(\beta_{2der3}, \beta_{2der3})_{1,1}) \\ \text{Im}(M_{g3}(\beta_{2der3}, \beta_{2der3})_{1,1}) \end{pmatrix} \quad \text{Mec}_{3x} := \begin{pmatrix} \text{Re}(M_{g3}(\beta_{2izq3}, \beta_{2izq3})_{1,1}) \\ \text{Re}(K_{g3}(\beta_{2izq3}, \beta_{2izq3})_{1,1}) \\ \text{Re}(P_1) \\ \text{Re}(K_{g3}(\beta_{2der3}, \beta_{2der3})_{1,1}) \\ \text{Re}(K_{g3}(\beta_{2izq3}, \beta_{2izq3})_{1,1}) \\ \text{Re}(K_{g3}(\beta_{2der3}, \beta_{2der3})_{1,1}) \\ \text{Re}(M_{g3}(\beta_{2der3}, \beta_{2der3})_{1,1}) \end{pmatrix}$$

MECANISMO DISEÑADO (UTILIZANDO LA SEGUNDA SOLUCIÓN)...

Gráfica del mecanismo definitivo...

Puntos centrales M...  $M_{g4}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(3)}$

Puntos circulares K...  $K_{g4}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}) := \text{PuntosBurm}(\beta_{2in}, \beta_{2fin}, 1)^{(4)}$

$\beta_{2izq4} :=$  ... ángulo de diseño para la diada izquierda

$\beta_{2der4} :=$  ... ángulo de diseño para la diada derecha

$$Mec_{4y} := \begin{pmatrix} \text{Im}(M_{g4}(\beta_{2izq4}, \beta_{2izq4})_{1, 1}) \\ \text{Im}(K_{g4}(\beta_{2izq4}, \beta_{2izq4})_{1, 1}) \\ \text{Im}(P_1) \\ \text{Im}(K_{g4}(\beta_{2der4}, \beta_{2der4})_{1, 1}) \\ \text{Im}(K_{g4}(\beta_{2izq4}, \beta_{2izq4})_{1, 1}) \\ \text{Im}(K_{g4}(\beta_{2der4}, \beta_{2der4})_{1, 1}) \\ \text{Im}(M_{g4}(\beta_{2der4}, \beta_{2der4})_{1, 1}) \end{pmatrix}$$

$$Mec_{4x} := \begin{pmatrix} \text{Re}(M_{g4}(\beta_{2izq4}, \beta_{2izq4})_{1, 1}) \\ \text{Re}(K_{g4}(\beta_{2izq4}, \beta_{2izq4})_{1, 1}) \\ \text{Re}(P_1) \\ \text{Re}(K_{g4}(\beta_{2der4}, \beta_{2der4})_{1, 1}) \\ \text{Re}(K_{g4}(\beta_{2izq4}, \beta_{2izq4})_{1, 1}) \\ \text{Re}(K_{g4}(\beta_{2der4}, \beta_{2der4})_{1, 1}) \\ \text{Re}(M_{g4}(\beta_{2der4}, \beta_{2der4})_{1, 1}) \end{pmatrix}$$

Este desarrollo contiene en la presentación de resultados una implementación para la exploración de factibilidad de las soluciones 1 y 2, así como una implementación para graficar cada uno de los posibles mecanismos solución del diseño.

**Caso 4:**

Se utiliza la implementación por curvas de Burmester para sintetizar el mecanismo de cuatro barras que permita mover el objeto mostrado en la figura por las cuatro posiciones indicadas.

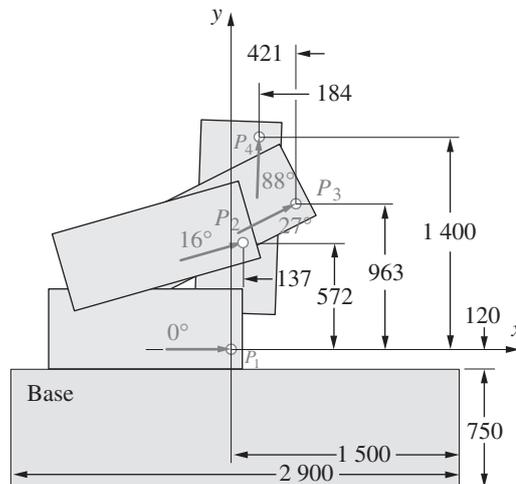


Fig. 4.4-2: Posiciones del acoplador para el caso 4.

Primeramente se ingresan los datos de diseño conocidos a la implementación correspondiente:

**DATOS DE DISEÑO:**

$$i := \sqrt{-1}$$

**Ángulos del eslabón acoplador: (ingresar en grados sexagesimales, giro antihorario del acoplador +)...**

$$\text{Ang}_{ac1} := 0 \quad \text{Ang}_{ac2} := 16 \quad \text{Ang}_{ac3} := 27 \quad \text{Ang}_{ac4} := 88$$

**Posiciones del punto referencial P del eslabón acoplador(ingresar como números complejos con origen en P<sub>1</sub>)...**

$$P_1 := 0 + 0 \cdot i$$

$$P_2 := 137 + 572 \cdot i$$

$$P_3 := 421 + 963 \cdot i$$

$$P_4 := 184 + 1400 \cdot i$$

y a continuación el área para los pivotes fijos,

**Área para los pivotes fijos:**

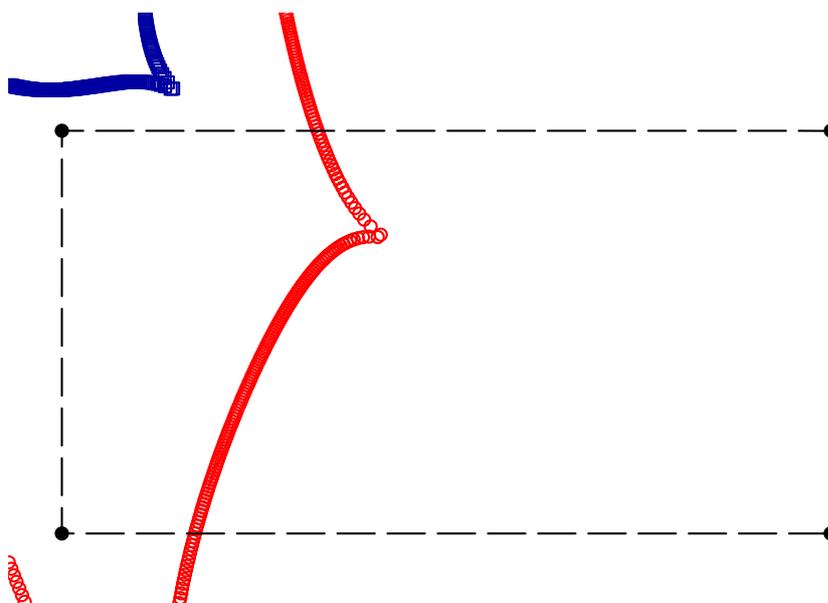
**Coordenadas de los puntos que conforman el área de los pivotes fijos: (medidas desde P<sub>1</sub> y en orden secuencial)**

$$\text{Fij}_{1x} := 1500 \quad \text{Fij}_{1y} := -870 \quad \text{Fij}_{2x} := 1500 \quad \text{Fij}_{2y} := -120 \quad \text{Fij}_{3x} := -1400 \quad \text{Fij}_{3y} := -120$$

$$\text{Fij}_{4x} := -1400 \quad \text{Fij}_{4y} := -870$$

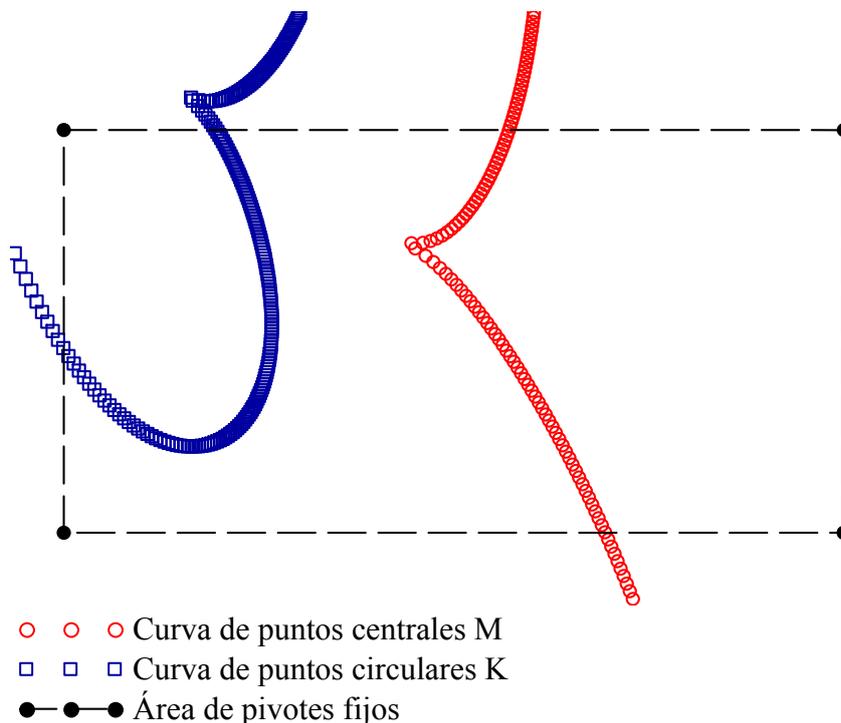
Un primera exploración para las curvas de Burmester de ambas soluciones producen las siguientes gráficas:

**CURVAS DE BURMESTER - PRIMERA SOLUCIÓN**



- ○ ○ Curva de puntos centrales M
- □ □ Curva de puntos circulares K
- ● ● Área de pivotes fijos

## CURVAS DE BURMESTER - SEGUNDA SOLUCIÓN



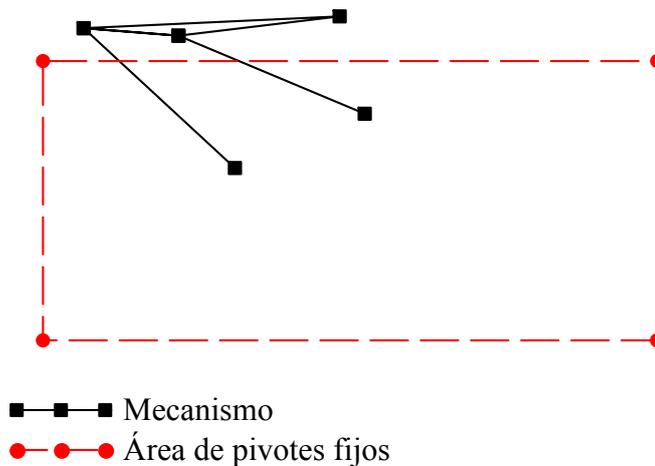
A partir de estos resultados se pueden ensayar algunas posibles soluciones restringiendo el intervalo de  $\beta_2$  para ambas diadas ; a continuación se muestran tres ensayos con sus valores correspondientes de  $\beta_2$  y los gráficos del mecanismo producidos por la implementación:

*Primer ensayo:*

En este ensayo el diseño de la diada izquierda proviene de la primera solución, mientras que el diseño de la diada derecha se calcula a partir de la segunda solución.

Diada	$\beta_2$
izquierda	338°
derecha	334°

## MECANISMO SINTETIZADO

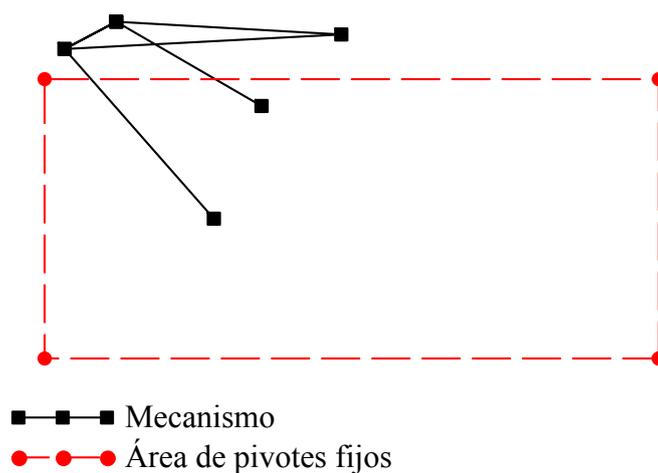


*Segundo ensayo:*

En este ensayo el diseño de ambas diadas proviene de la primera solución.

Diada	$\beta_2$
izquierda	340°
derecha	334°

## MECANISMO SINTETIZADO

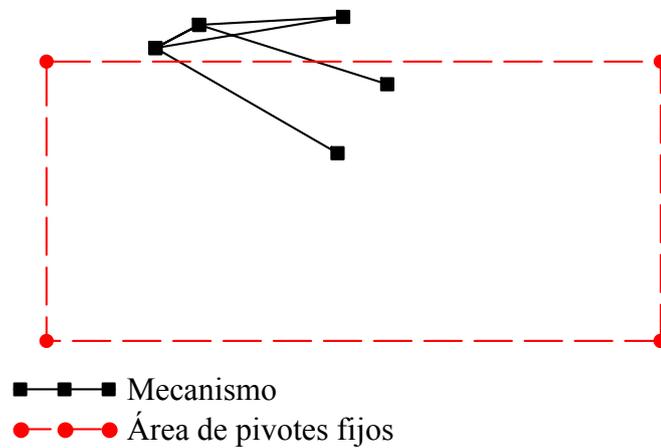


*Tercer ensayo:*

Finalmente, en este último ensayo la síntesis de ambas diadas se calcula a partir de la segunda solución.

Diada	$\beta_2$
izquierda	335.5°
derecha	333°

### MECANISMO SINTETIZADO



Otra vez el mecanismo deberá ser simulado para la verificación de existencia de defectos de orden y rama.

#### 4.5 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

- 1 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. (1ra Edición). New Jersey, Estados Unidos: Ed Prentice-Hall. Cap. 3.
- 2 Norton, R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria: Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos*. (5ta Edición) México, México: Ed. McGraw-Hill. Cap. 5.

- 3 Russell, K. Shen, Q. y Sodhi, R.S. (2014). *Mechanism Design: Visual and Programmable Approaches*. (1ra Edición). Boca Raton, Estados Unidos: CRC Press. Cap. 4.
- 4 Hartenberg, R. S. y Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages*. (1ra Edición). New York, Estados Unidos: Ed. McGraw-Hill. Caps: 8 y 9.
- 5 Chiang C. H. (2000). *Kinematics and Design of Planar Mechanisms*. (1ra Edición). Malabar, Estados Unidos: Ed. Krieger Publishing. Cap. 3.
- 6 McCarthy, M. J. y Song Soh, G. (2004) *Geometric Design of Linkages*. (2da Edición). Massachusetts, Estados Unidos: Ed. Springer. Cap. 3.
- 7 Manual del usuario MathCAD versión 15
- 8 Maxfield B., *ENGINEERING WITH MATHCAD*, Ed. Butterworth-Heinemann, 1ra Ed, 2006, Caps: 9, 11, 14 y 15.
- 9 Maxfield B., *ESSENTIAL MATHCAD FOR ENGINEERING, SCIENCE AND MATH*, Ed. Academic Press, 2da Ed, 2009, Caps: 5, 7, 9 y 12.

## CAPÍTULO 5

### DISEÑO Y SIMULACIÓN DE MECANISMOS DE CUATRO BARRAS DE APLICACIÓN INDUSTRIAL

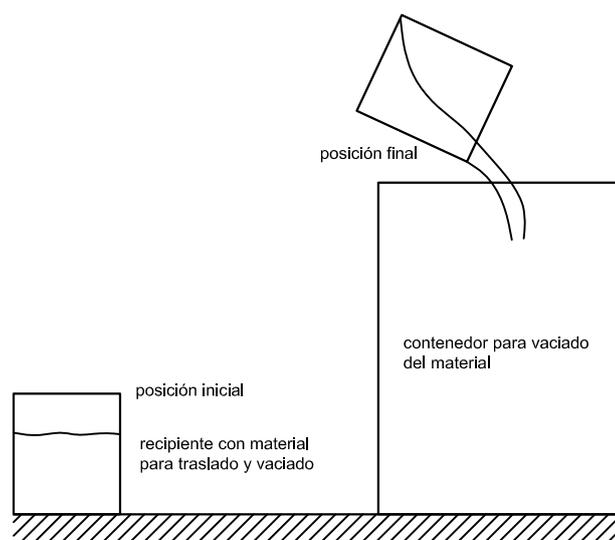
El presente capítulo presenta la síntesis cinemática con tres y cuatro posiciones dadas de mecanismos industriales de cuatro barras con el uso de las metodologías estudiadas en los capítulos anteriores y la simulación de los mecanismos diseñados con la ayuda del software Artas SAM.

#### 5.1 MECANISMO PARA TRANSPORTAR Y DEPOSITAR MATERIAL EN UN PROCESO INDUSTRIAL

##### 5.1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo es sintetizar cinemáticamente un mecanismo de cuatro barras que tome material de un determinado proceso industrial contenido en un recipiente y lo transporte y descargue en otro ya sea para procesarlo en otra fase o para almacenarlo.

El siguiente esquema muestra un esquema básico del proceso deseado:

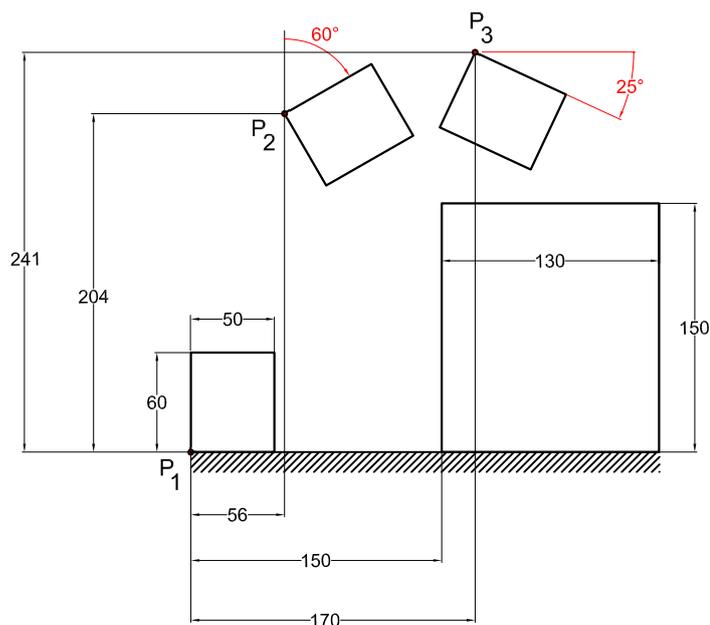


**Fig. 5.1-1:** Transporte y vaciado de material en un proceso industrial.

En este procedimiento de síntesis se van a utilizar como alternativas de diseño la metodología de 3 posiciones prescritas con el uso de círculos de punto central y punto circular, dada su capacidad de permitir seleccionar el mecanismo más adecuado.

### 5.1.2 SÍNTESIS DEL MECANISMO CON TRES POSICIONES DADAS Y UBICACIÓN DE PIVOTES FIJOS Y MÓVILES MEDIANTE EL EMPLEO DE CÍRCULOS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR

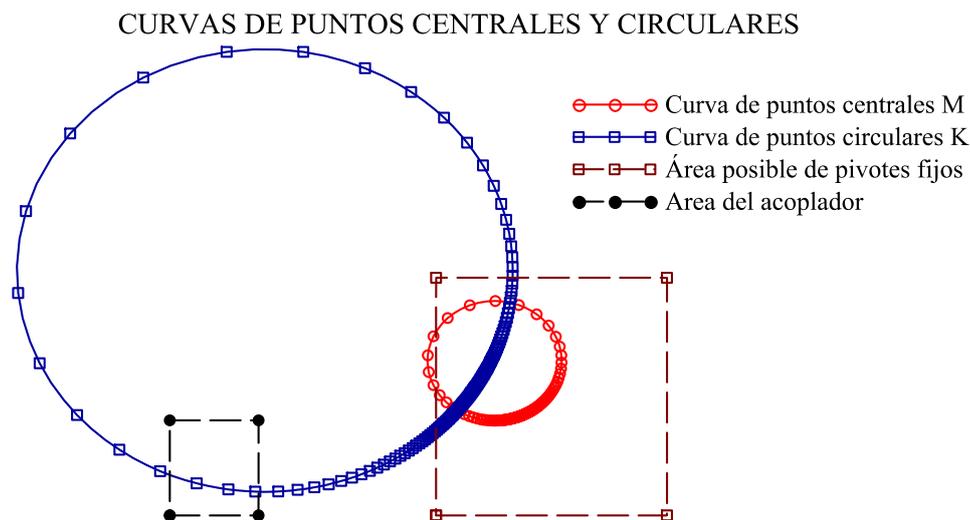
El esquema anterior se especifica mejor en la siguiente gráfica donde se dan las medidas iniciales de diseño, y se ha elegido un posición intermedia para el recipiente de traslado del material:



**Fig. 5.1-2:** Datos iniciales de diseño.

Utilizando la implementación desarrollada en el capítulo anterior se explora las ubicaciones de los pivotes fijos y móviles de los posibles mecanismos de cuatro barras.

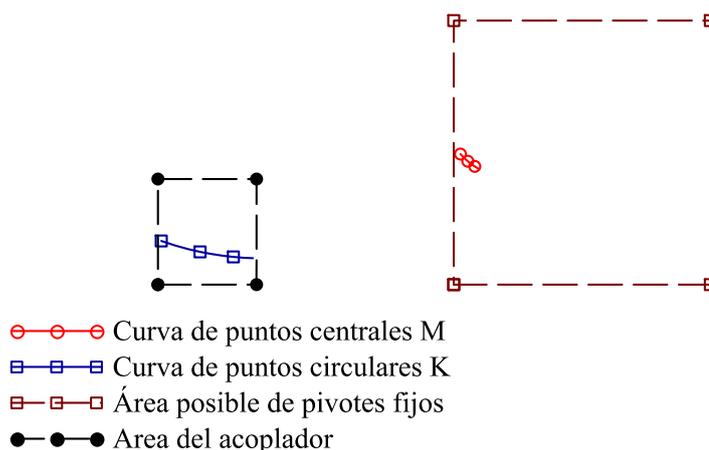
En la primera alternativa de solución, considerando  $\beta_2 = 280^\circ$ , se tiene el siguiente esquema de los círculos de punto central y punto circular:



**Fig. 5.1-3:** Círculos de punto central y punto circular primera alternativa<sup>1</sup>.

Del gráfico anterior se puede observar que la solución es viable dado que el círculo de puntos centrales está contenido casi íntegramente en el área de pivotes fijos mientras que hay una zona del círculo de puntos circulares contenida dentro del área del acoplador. Las mencionadas zonas se pueden aislar al variar en la implementación el rango de  $\beta_3$  que determina a dichos puntos, siendo para esta alternativa  $238^\circ \leq \beta_3 \leq 246^\circ$ ; las zonas aisladas de puntos centrales y circulares se muestran a continuación:

CURVAS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



**Fig. 5.1-4:** Zona de soluciones de los círculos de punto central y punto circular para la primera alternativa.

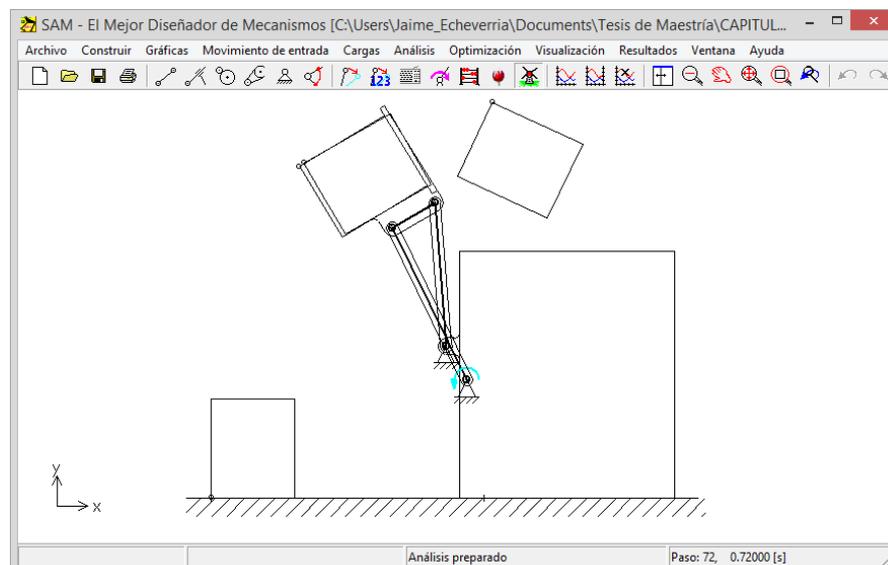
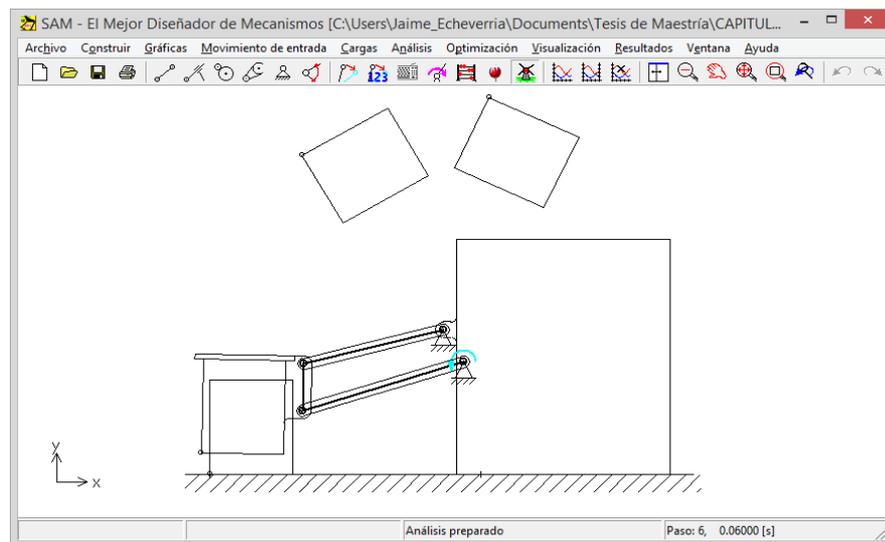
<sup>1</sup> A la implementación de círculos de punto central y punto circular se le añadió instrucciones para graficar el área de pivotes móviles.

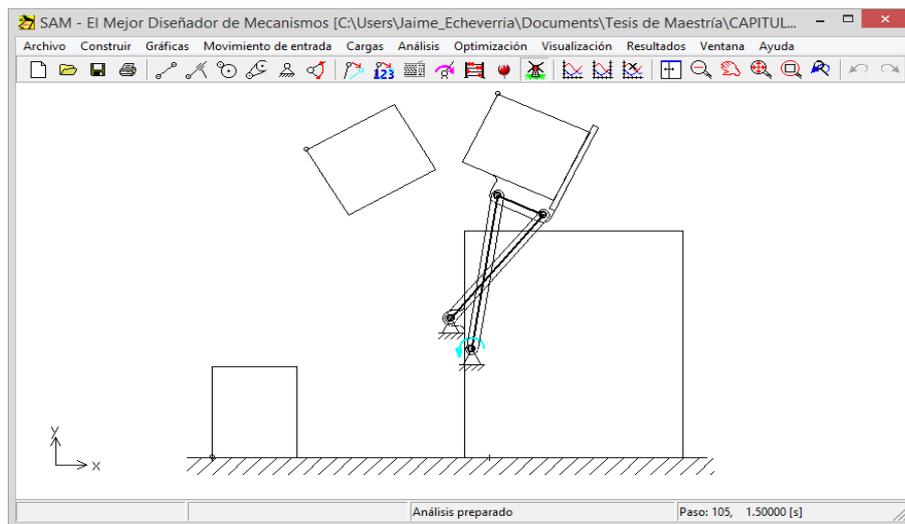
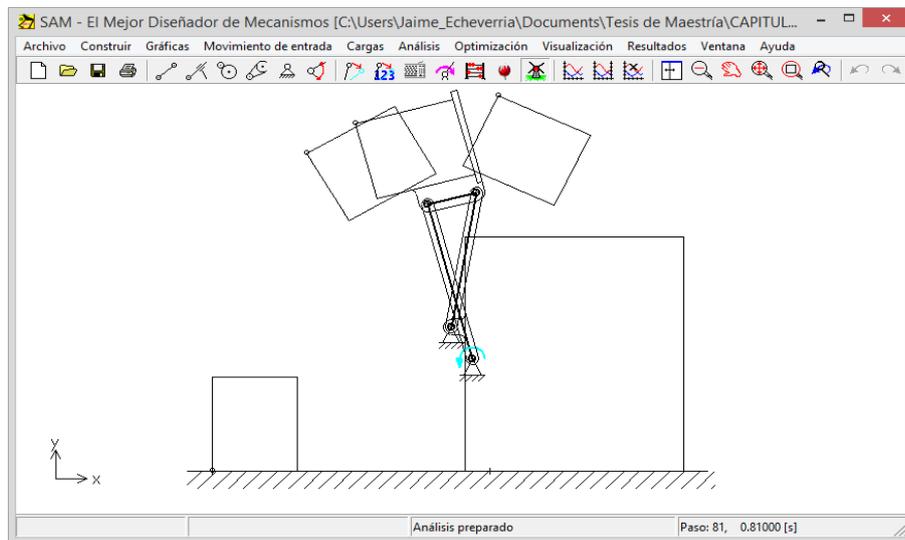
Por ende se puede elegir cualquier pareja de valores de M y K, dentro de la zona aislada, para las diadas 1 y 2 del mecanismo; si se elige los valores extremos se tiene entonces que:

Diada	Pivote fijo(M)	Pivote móvil(K)
1	(1533.2 , 742.1) mm	(17.3 , 248.7) mm
2	(1628.5 , 656.4) mm	(481.5 , 150.1) mm

Nota: En la implementación se manejan las unidades en centímetros

A continuación, con esta información obtenida de la síntesis se simula el mecanismo en Artas SAM para verificar que no existan defectos de rama ni orden y comprobar que el mecanismo pase por las posiciones prescritas, las siguientes capturas de pantalla muestran la simulación en el software:





**Fig. 5.1-5:** Simulación de la primera alternativa de solución en Artas SAM

En esta primera alternativa se utilizó una sola pareja de círculos para el diseño, sin embargo se pueden utilizar parejas diferentes para cada diada tal como se ejemplifica en la segunda alternativa.

La primera diada se trabaja con  $\beta_2 = 270^\circ$ , obteniéndose la siguiente pareja de círculos:

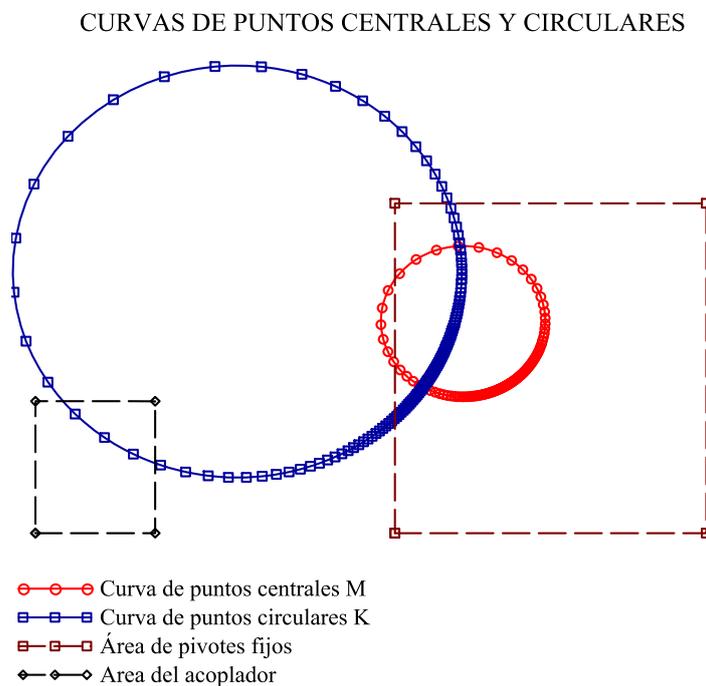


Fig. 5.1-6: Círculos de punto central y circular para la primera diada

La segunda diada se trabaja con  $\beta_2 = 250^\circ$  y se obtiene la siguiente pareja de círculos M y K:

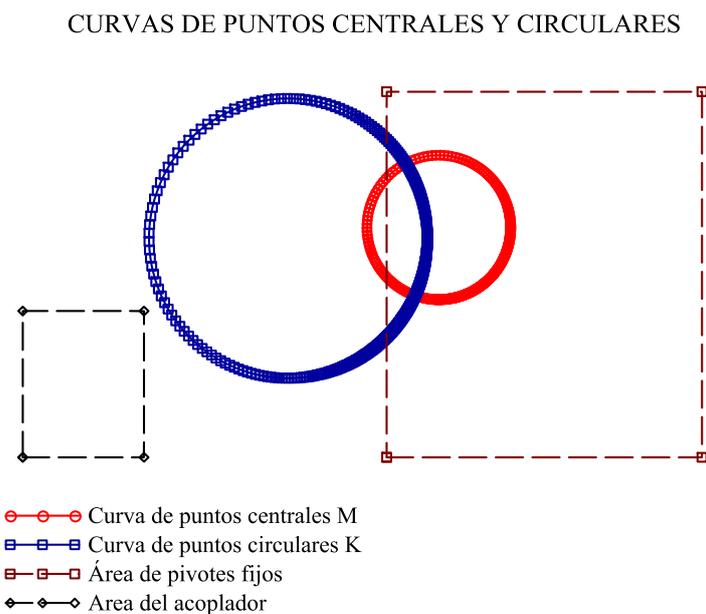


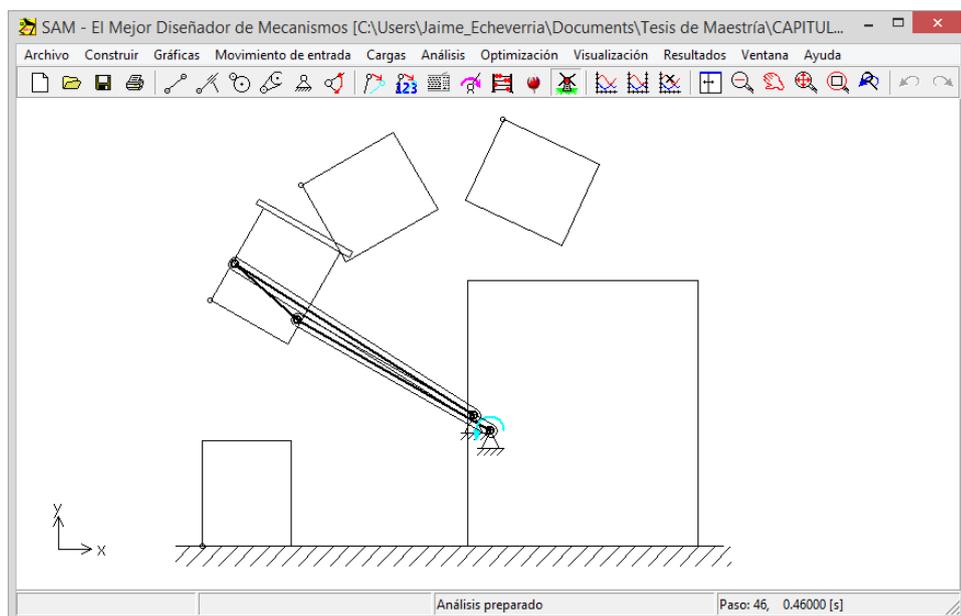
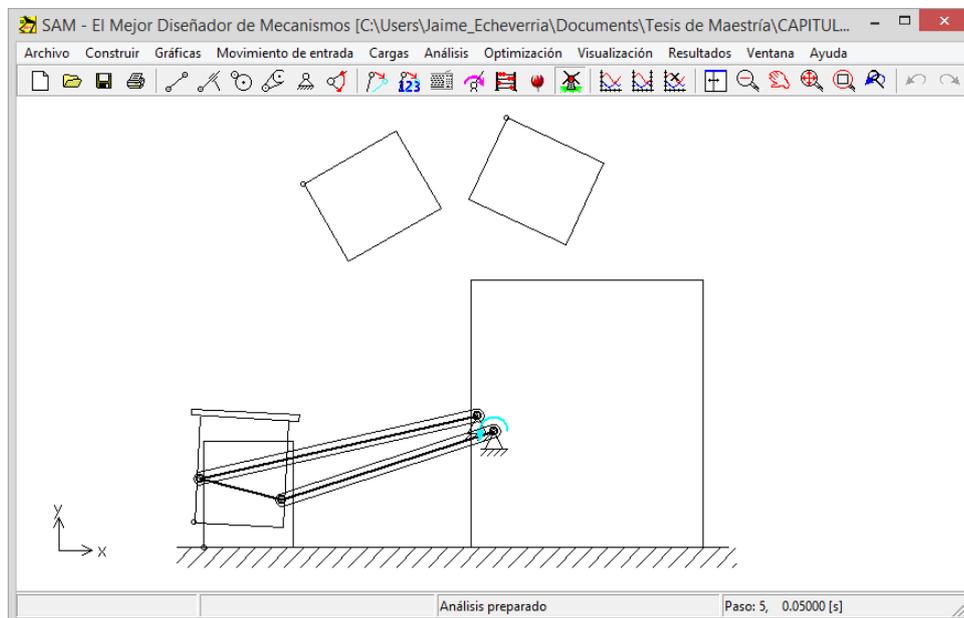
Fig. 5.1-7: Círculos de punto central y circular para la segunda diada

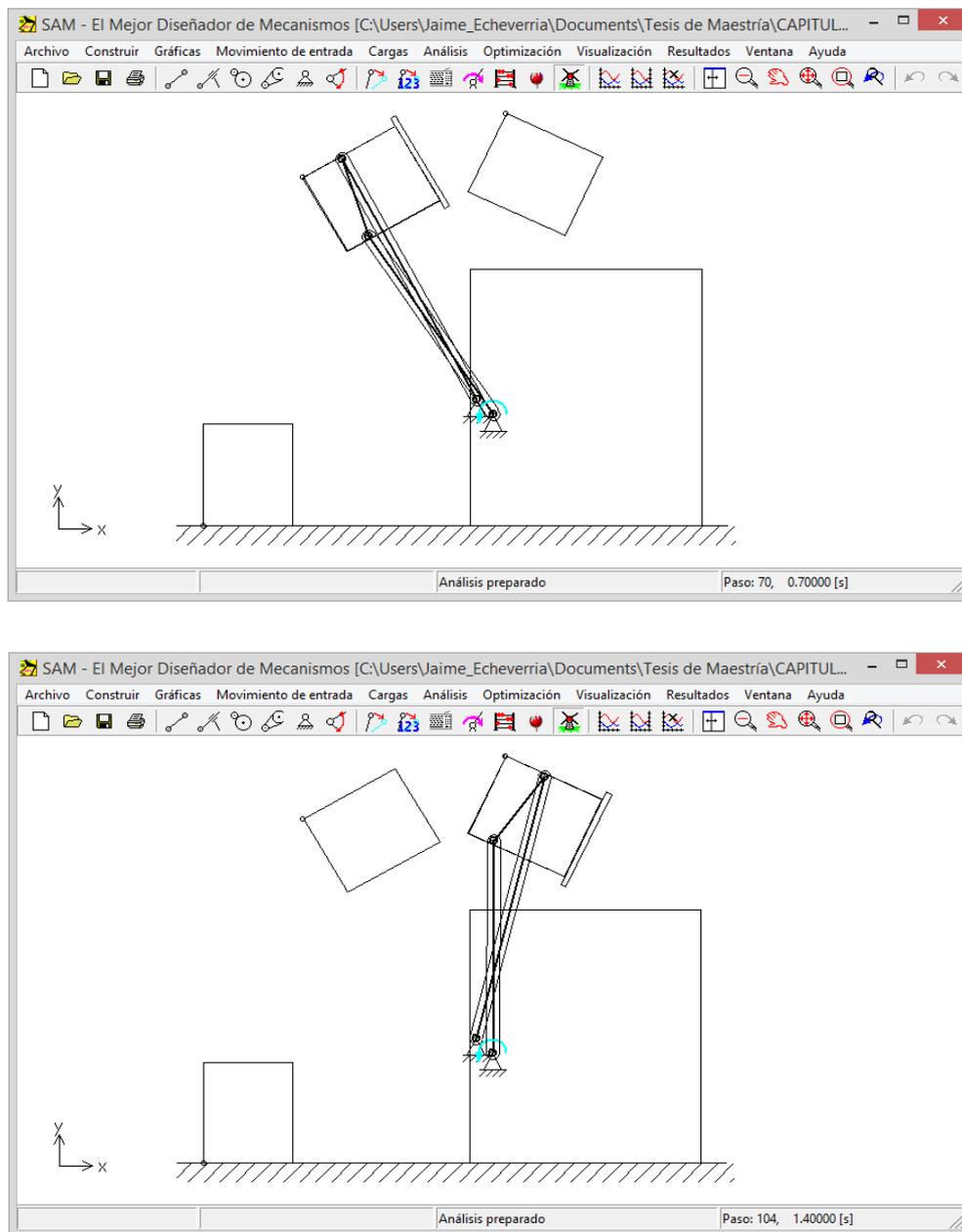
Aislando dos intervalos de conveniencia para la síntesis del mecanismo, se obtienen los siguientes resultados:

Diada	Pivote fijo(M)	Pivote móvil(K)
1	(1545.1 , 717.7) mm	(610.3 , 282.1) mm
2	(1419.4 , 926) mm	(614.7 , 583.4) mm

Nota: En la implementación se manejan las unidades en centímetros

Seguidamente se construye el mecanismo en Artas SAM y se simula su operación; las siguientes capturas de pantalla muestran este proceso:





**Fig. 5.1-8:** Simulación de la segunda alternativa de solución en ArtasSAM

Con el procedimiento mostrado en este apartado se podrían obtener muchas otras soluciones factibles, pues como se menciona en el capítulo 2 es posible conseguir  $\infty^2$  soluciones válidas. Sin embargo cada solución tiene sus particularidades, por ejemplo la segunda alternativa posee eslabones de menor tamaño en el mecanismo, dado que los pivotes móviles se han diseñado por fuera del recipiente que transporta el material.

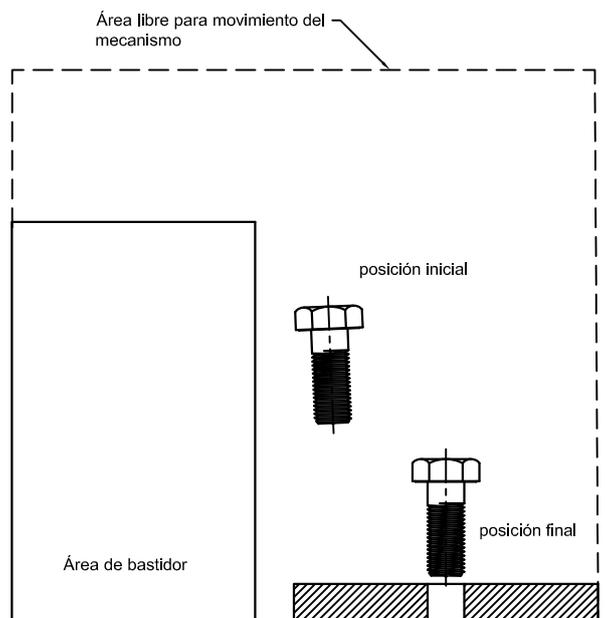
La metodología analizada es muy flexible dado que si se cambian las tres posiciones prescritas, por ejemplo, se puede obtener un mecanismo con características distintas. Por ejemplo si se quisiera transportar material líquido habría que pensar que las tres posiciones del recipiente se mantengan lo más vertical posible hasta hallarse encima del contenedor pudiendo añadirse un mecanismo con cilindro neumático en el recipiente para que en dicha posición rote al recipiente para desalojar su contenido; ésta característica se usa en el caso de la minicargadora vertical.

## 5.2 MECANISMO PICK AND PLACE(COGER Y COLOCAR) PARA ENSAMBLAJE DE PIEZAS EN PROCESOS DE MONTAJE

### 5.2.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El objetivo es diseñar cinemáticamente un mecanismo de cuatro barras que tome o coja una pieza de un proceso industrial automatizado y lo coloque en un montaje como parte de un proceso de ensamblaje.

El siguiente esquema muestra un esquema del proceso deseado:

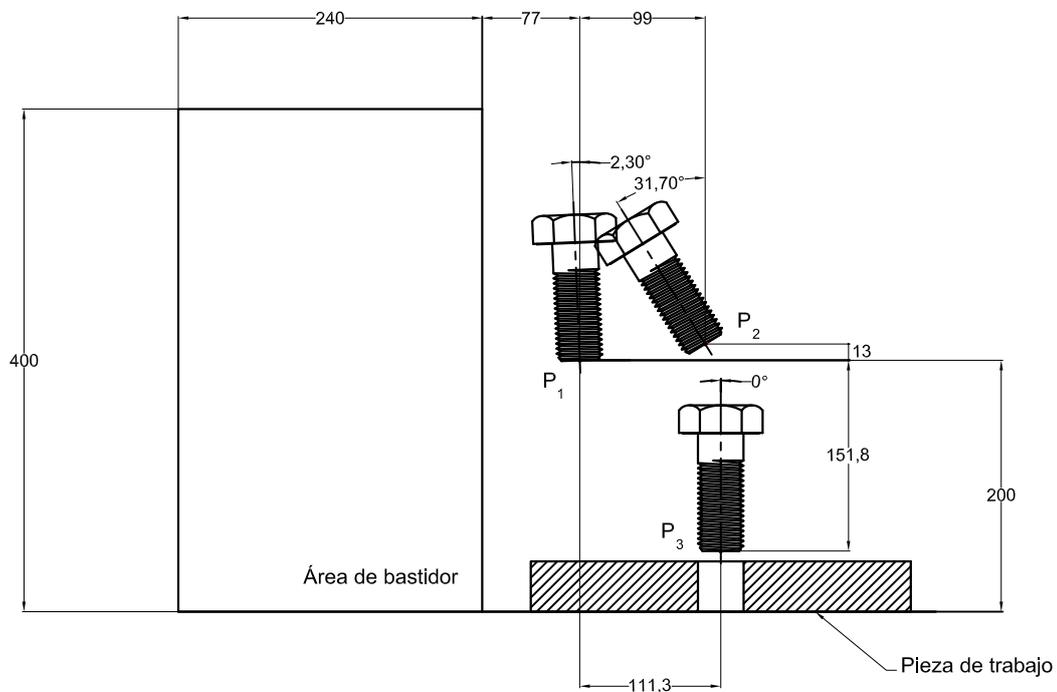


**Fig. 5.2-1:** Proceso pick and place en un montaje industrial.

En el diseño del presente mecanismo se va a emplear la metodología de 3 posiciones prescritas del acoplador con círculos de punto central y punto circular.

### 5.2.2 SÍNTESIS DEL MECANISMO CON TRES POSICIONES DADAS Y UBICACIÓN DE PIVOTES FIJOS Y MÓVILES MEDIANTE EL EMPLEO DE CÍRCULOS DE PUNTO CENTRAL Y PUNTO CIRCULAR

El esquema anterior se especifica mejor en la siguiente gráfica donde se dan las medidas iniciales del diseño:

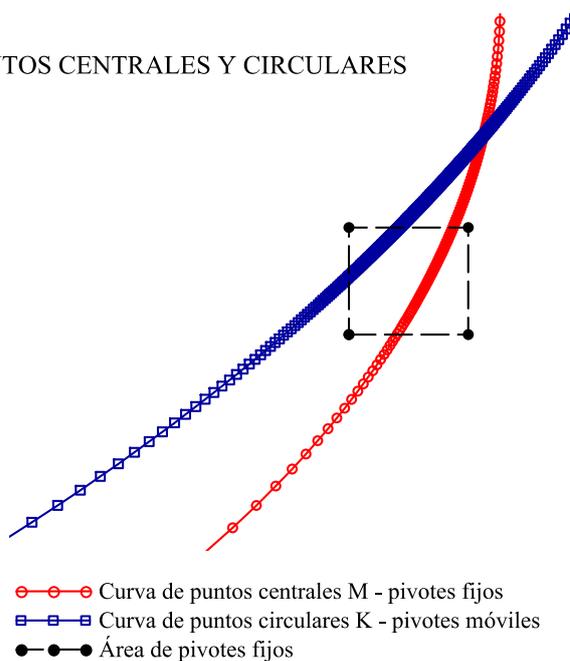


**Fig. 5.2-2:** Datos iniciales de diseño.

mediante la implementación desarrollada para el diseño por círculos M y K se generan dichos círculos ingresando los datos de diseño. Se busca entonces las parejas de círculos más adecuadas al diseño al variar el ángulo  $\beta_2$ , encontrándose las siguientes parejas:

para la diada 1:

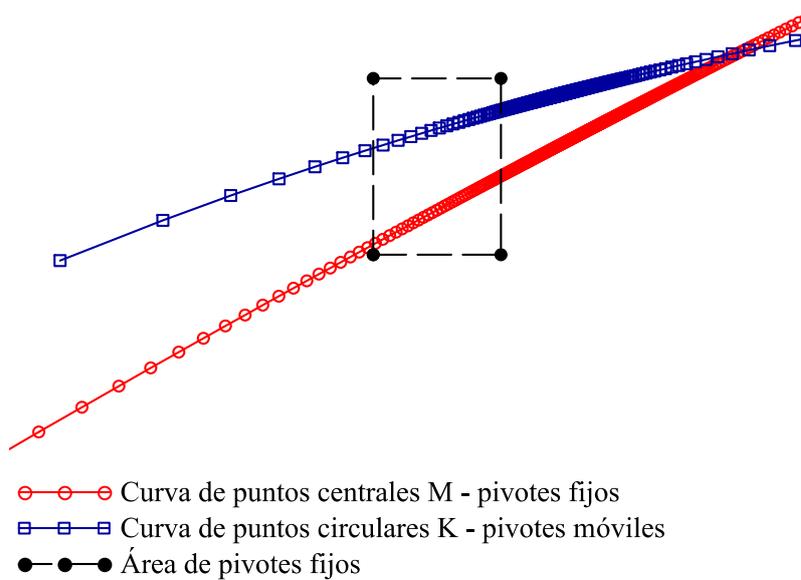
## CURVAS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



**Fig. 5.2-3:** Círculos de punto central y circular para la primera diada

y para la diada 2:

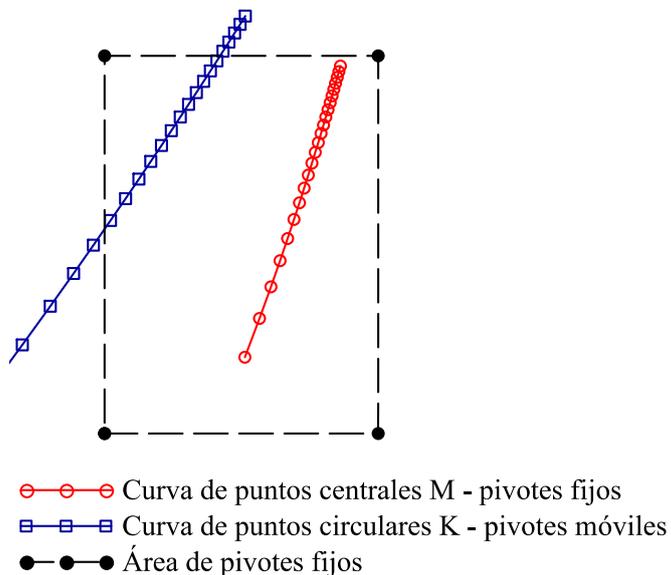
## CURVAS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



**Fig. 5.2-4:** Círculos de punto central y circular para la segunda diada

Reducidas las gráficas a las zonas donde se cubra el área para los pivotes fijos, se tienen los siguientes gráficos para los círculos de punto central y punto circular para la primera diada:

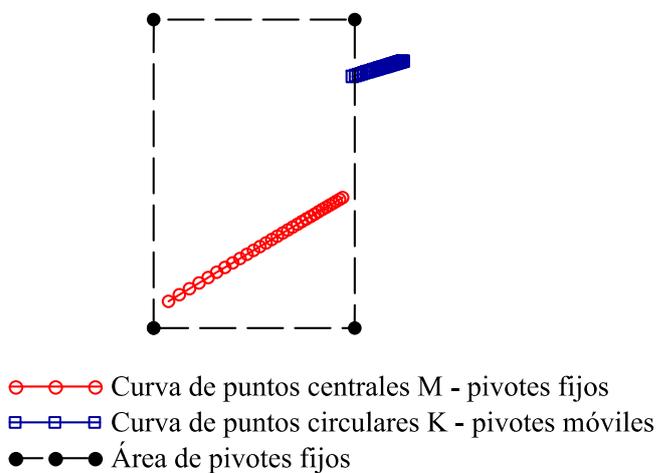
#### CURVAS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES



**Fig. 5.2-5:** Círculos reducidos de punto central y circular para la primera diada

para la segunda diada:

#### CURVAS DE PUNTOS CENTRALES Y CIRCULARES

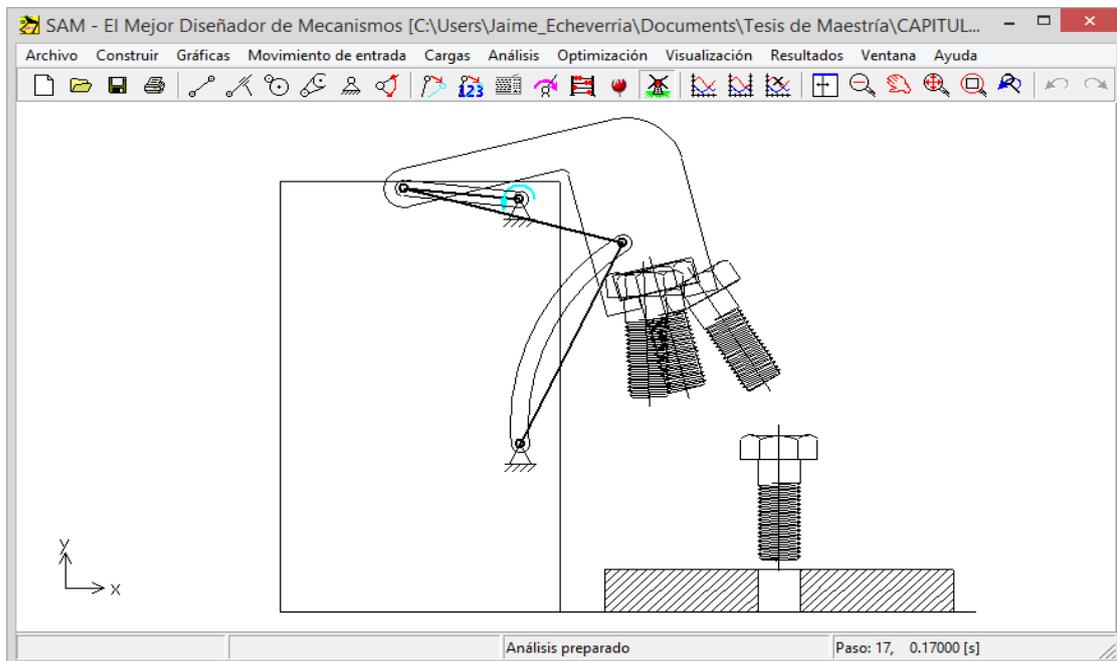


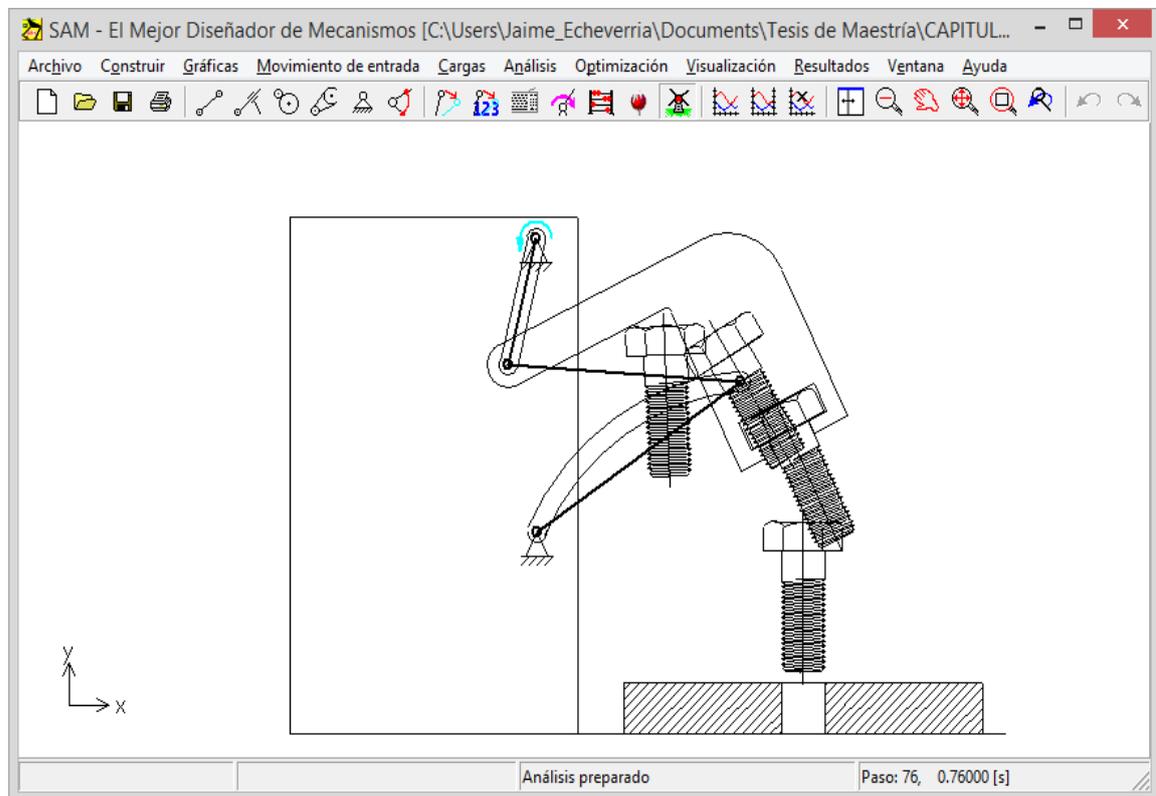
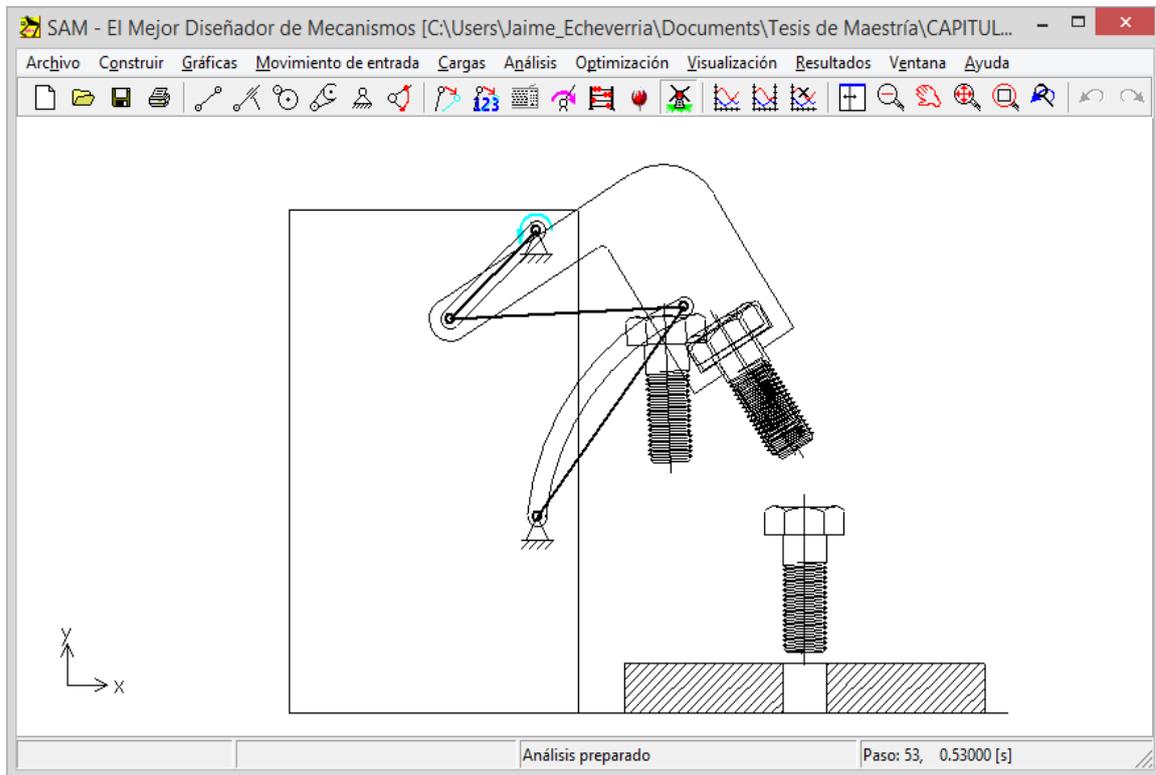
**Fig. 5.2-6:** Círculos reducidos de punto central y circular para la segunda diada

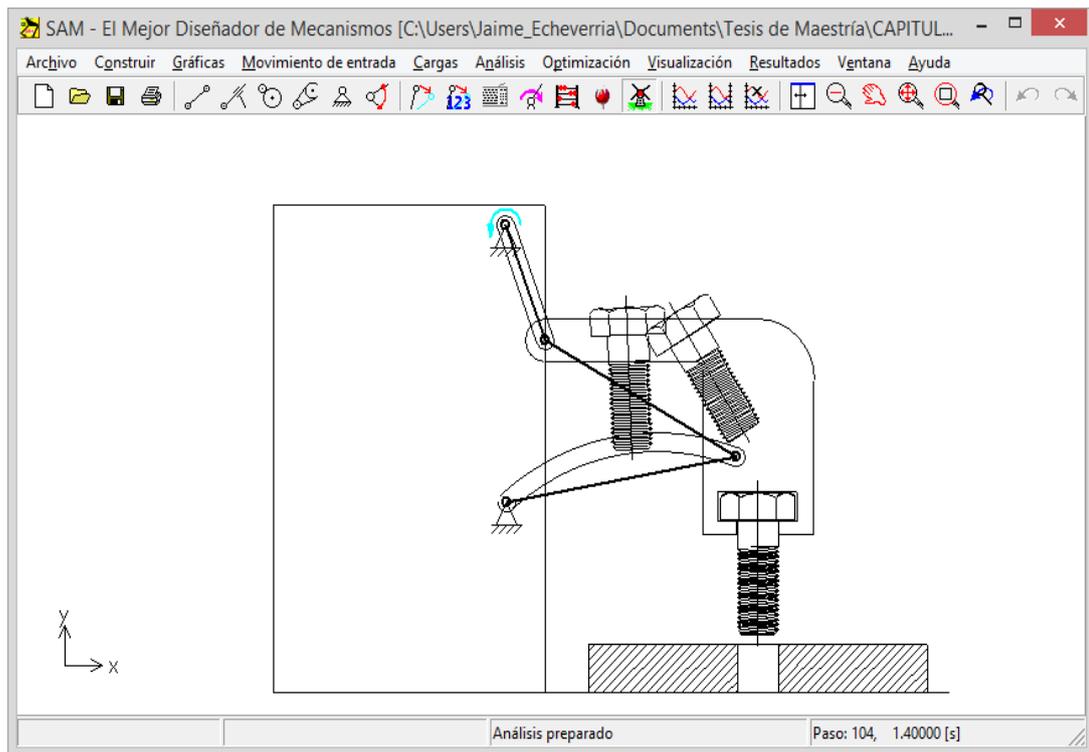
Se seleccionan las parejas más adecuada de pivotes fijos y móviles para cada diada que se resumen en la tabla siguiente:

Diada	Pivote fijo(M)	Pivote móvil(K)
1	(-111.52 , 183.28) mm	(-198.147 , 233.314) mm
2	(-111.37 , -43.53) mm	(-24.973 , 144.412) mm

Con estos valores de la síntesis se construye el mecanismo en Artas SAM y se simula para verificar que no existan defectos de orden, ni rama. Las capturas de pantalla siguiente muestran la simulación del mecanismo:







**Fig. 5.2-7:** Simulación del mecanismo pick and place en ArtasSAM

En este caso era imposible utilizar una sola pareja de círculos M y K como en la primera aplicación por lo que obligadamente se requería elegir dos parejas de círculos para cada diada.

### 5.3 MECANISMOS DE ELEVACIÓN PARA UNA MINICARGADORA FRONTAL (SKID STEER LOADERS)

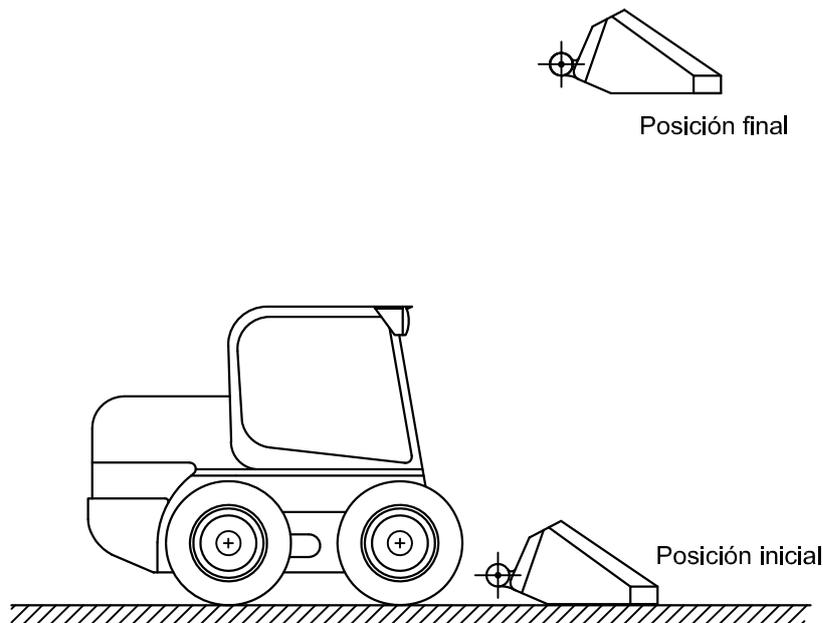
#### 5.3.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Las minicargadoras frontales (skid steer loaders) de uso en la industria de la construcción deben poseer un mecanismo que permita al cucharón elevar el material desde el nivel del suelo hasta el contenedor del camión que transporte dicho material, el objetivo aquí es sintetizar cinemáticamente dicho mecanismo de cuatro barras.

Es evidente que el cucharón debe tener un movimiento independiente de su ángulo con el objeto de no permitir que el mecanismo de elevación riegue el material, dicho mecanismo es usualmente también un mecanismo de cuatro barras pero

dimensionado mediante síntesis de generación de función, y no es materia del presente análisis.

El siguiente esquema resume el objetivo del diseño:

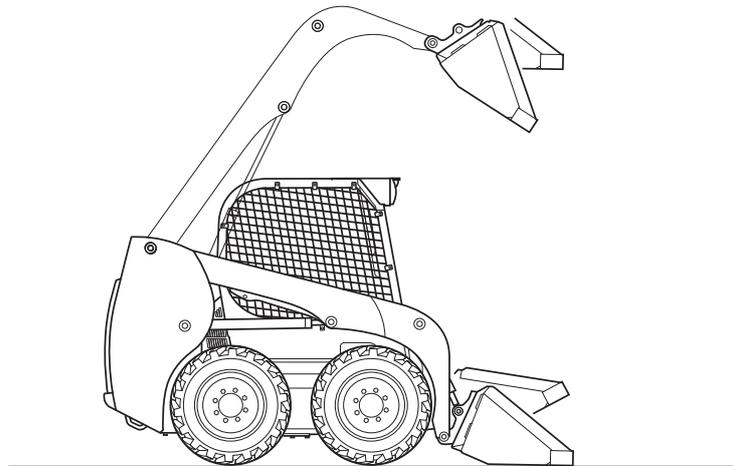


**Fig. 5.3-1:** Elevación y descarga de material en un minicargadora frontal.

En el diseño del presente mecanismo se va a emplear la metodología de 4 posiciones prescritas del acoplador con el uso de curvas de Burmester.

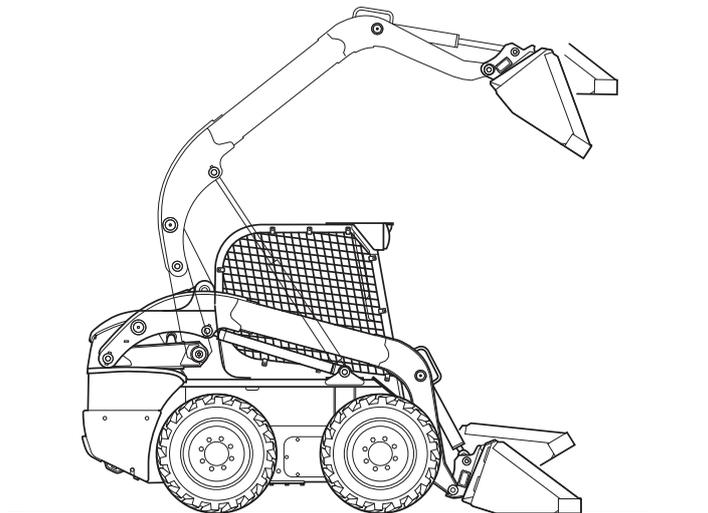
### **5.3.2 SÍNTESIS DEL MECANISMO CON CUATRO POSICIONES DADAS Y UBICACIÓN DE PIVOTES FIJOS Y MÓVILES MEDIANTE EL EMPLEO DE CURVAS DE BURMESTER**

Las minicargadoras frontales pueden poseer dos alternativas distintas de mecanismos para su propósito de elevar la carga contenida en el cucharón; la primera de ellas denominada mecanismo de elevación radial se muestra en la figura siguiente:



**Fig. 5.3-2:** Minicargadora frontal con mecanismo de elevación radial.

La segunda alternativa corresponde al denominado mecanismo de elevación vertical, que es simplemente un mecanismo de cuatro barras que permite a la maquinaria elevar lo más verticalmente posible la carga; en la siguiente figura se muestra esta alternativa de un fabricante de minicargadoras:

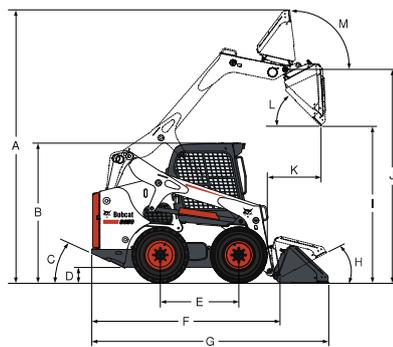


**Fig. 5.3-3:** Minicargadora frontal con mecanismo de elevación vertical.

El objetivo es entonces dimensionar esta segunda alternativa, para lo cual se parte de dos fuentes de información: la primera son las dimensiones generales de la

minicargadora basadas en información tomada de un fabricante y a partir de esta se dimensionan las zonas posibles para pivotes fijos y móviles. La información a este respecto del fabricante y las áreas de pivotes fijos y móviles se muestran en las siguientes figuras:

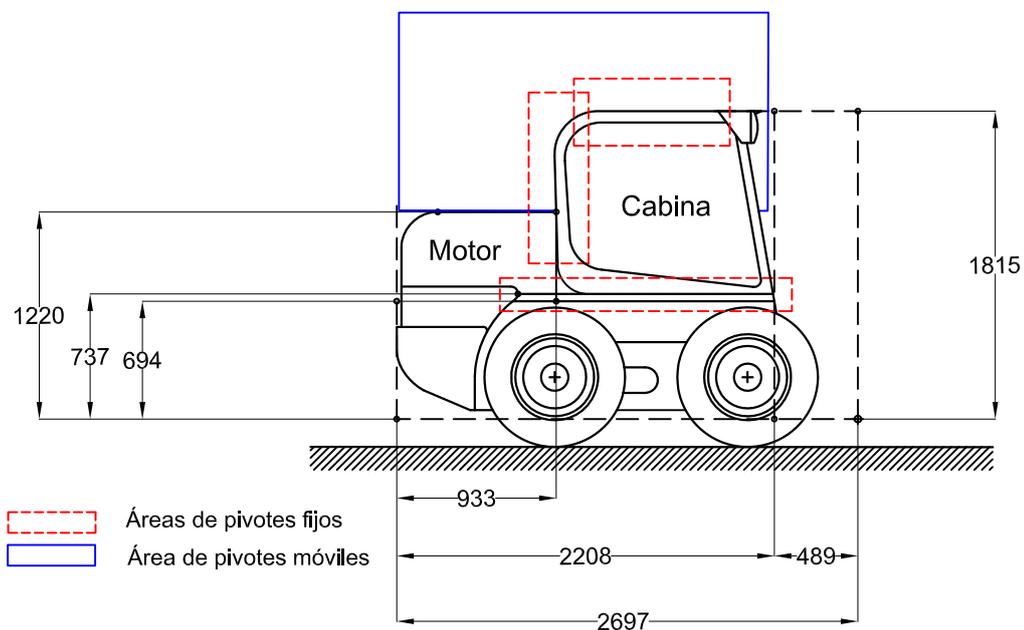
### Dimensions



(A)	4026.0 mm	(H)	30°
(B)	1979.0 mm	(I)	2447.0 mm
(C)	25°	(J)	3149.0 mm
(D)	164.0 mm	(K)	800.0 mm
(E)	1150.0 mm	(L)	42°
(F)	2697.0 mm	(M)	97°
(G)	3474.0 mm		



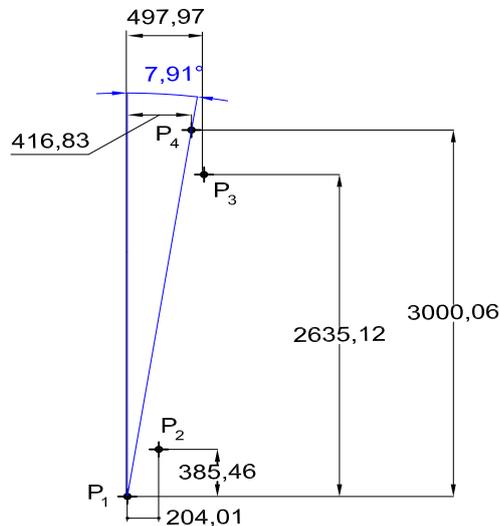
**Fig. 5.3-4:** Dimensiones generales de una minicargadora proporcionadas por un fabricante.



**Fig. 5.3-5:** Áreas posibles de pivotes móviles y fijos para la información del fabricante.

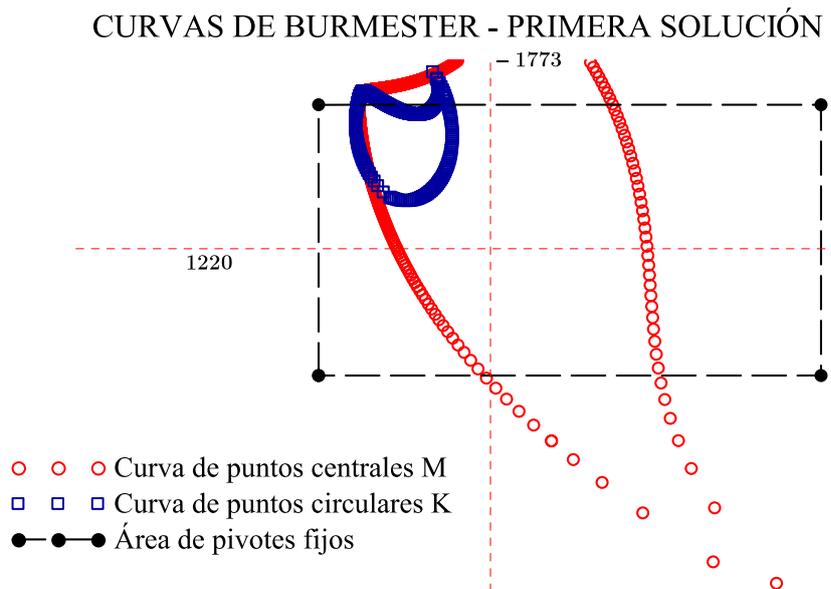
La segunda fuente de información es el objetivo del tipo de mecanismo a diseñarse, pues se espera que el mecanismo eleve la carga lo más vertical posible por lo

que se presupone un ángulo de elevación entre posición final e inicial del mecanismo de elevación muy reducido, ésta información de diseño se muestra en la figura 5.3-6:



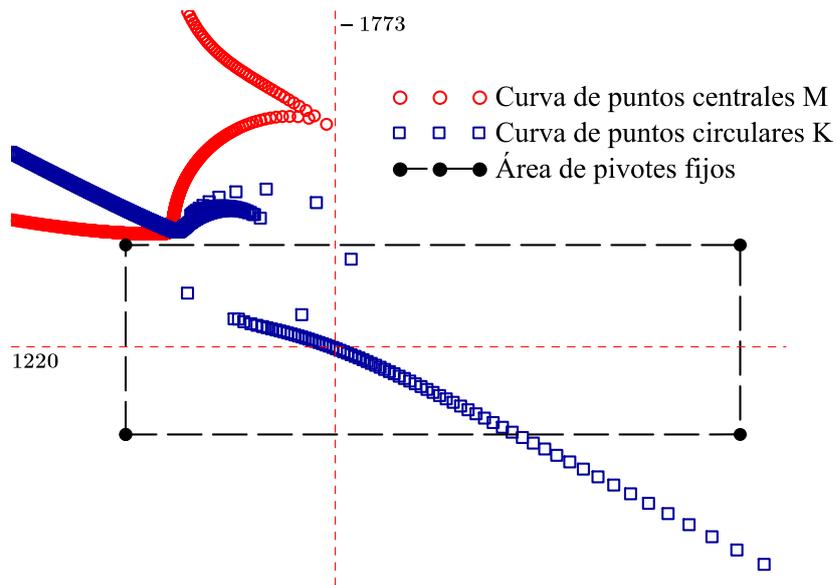
**Fig. 5.3-6:** Datos de diseño para la trayectoria de elevación con las cuatro posiciones prescritas para el cucharón del mecanismo - primer diseño.

Con la información de diseño lista se introduce a la implementación de curvas de Burmester y se obtiene de una primera exploración las siguientes curvas de Burmester para la primera y segunda solución:



**Fig. 5.3-7:** Curvas de Burmester para la primera solución de la minicargadora - primer diseño.

### CURVAS DE BURMESTER - SEGUNDA SOLUCIÓN



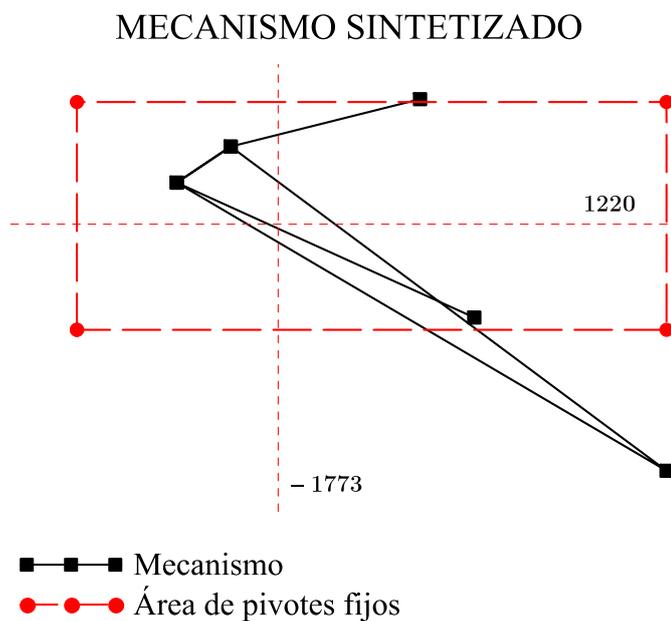
**Fig. 5.3-8:** Curvas de Burmester para la segunda solución de la minicargadora - primer diseño.

Como se observa de las gráficas un diseño factible solo puede provenir de la primera solución dado que esta contiene puntos centrales en sitios del bastidor de la minicargadora donde es posible ubicar los pivotes fijos e igualmente los puntos circulares se hallan en una ubicación aceptable (detrás de la cabina y encima del motor).

Una solución viable del mecanismo es:

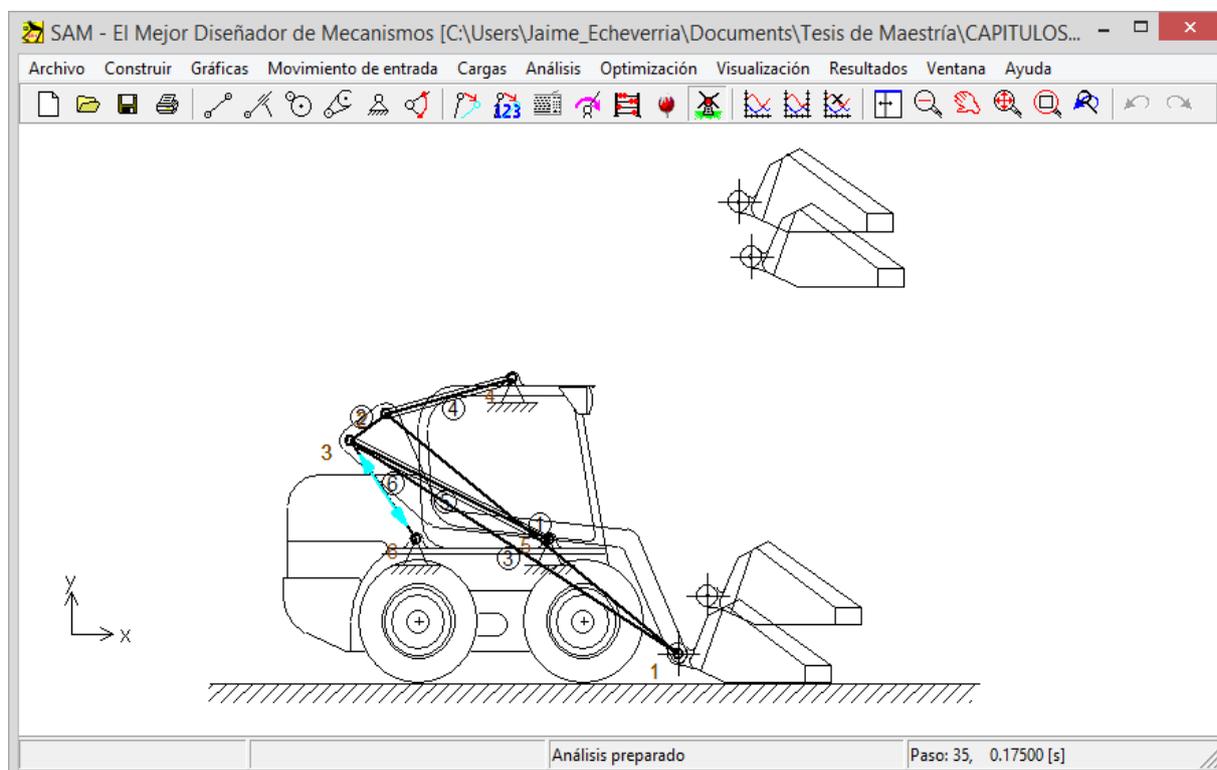
Diada	$\beta_2$
izquierda	358.75°
derecha	355.75°

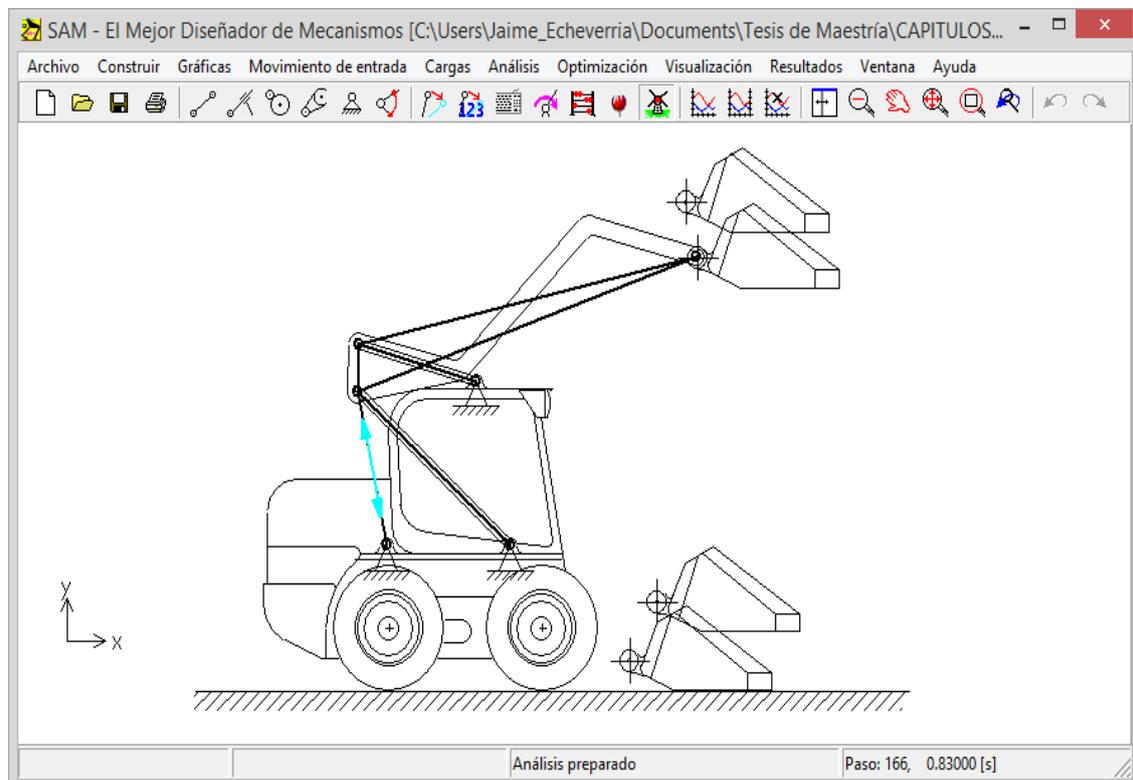
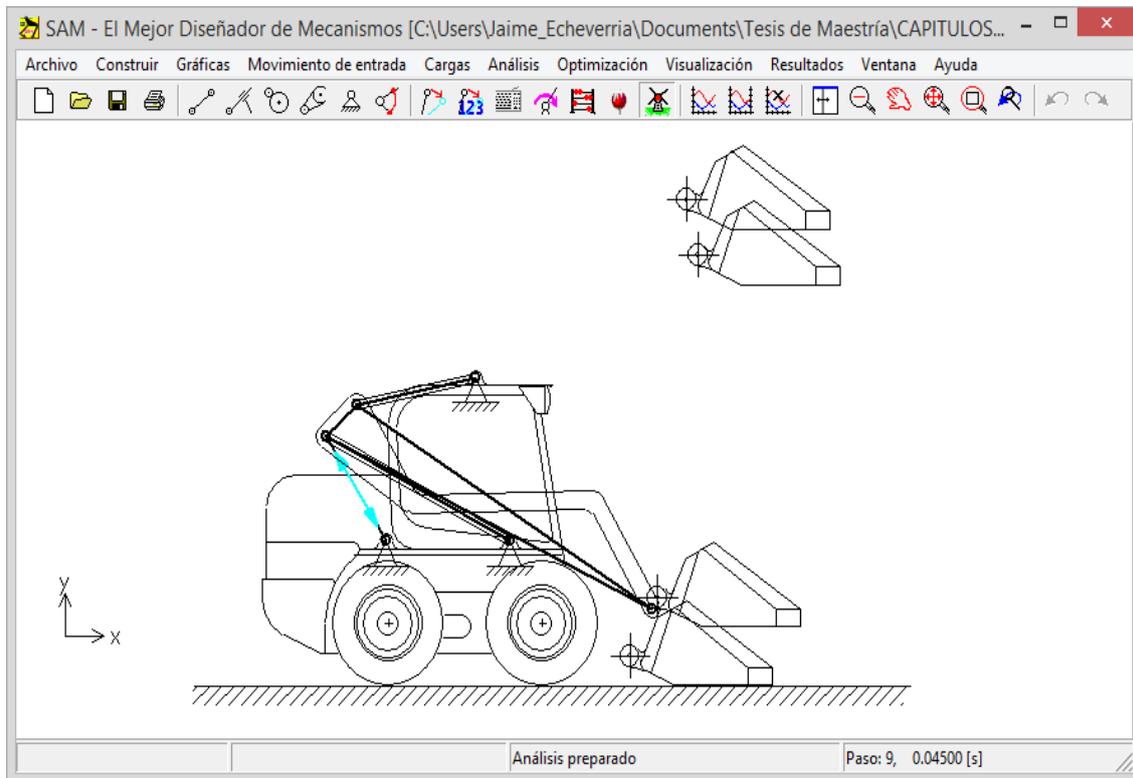
cuya estructura es:

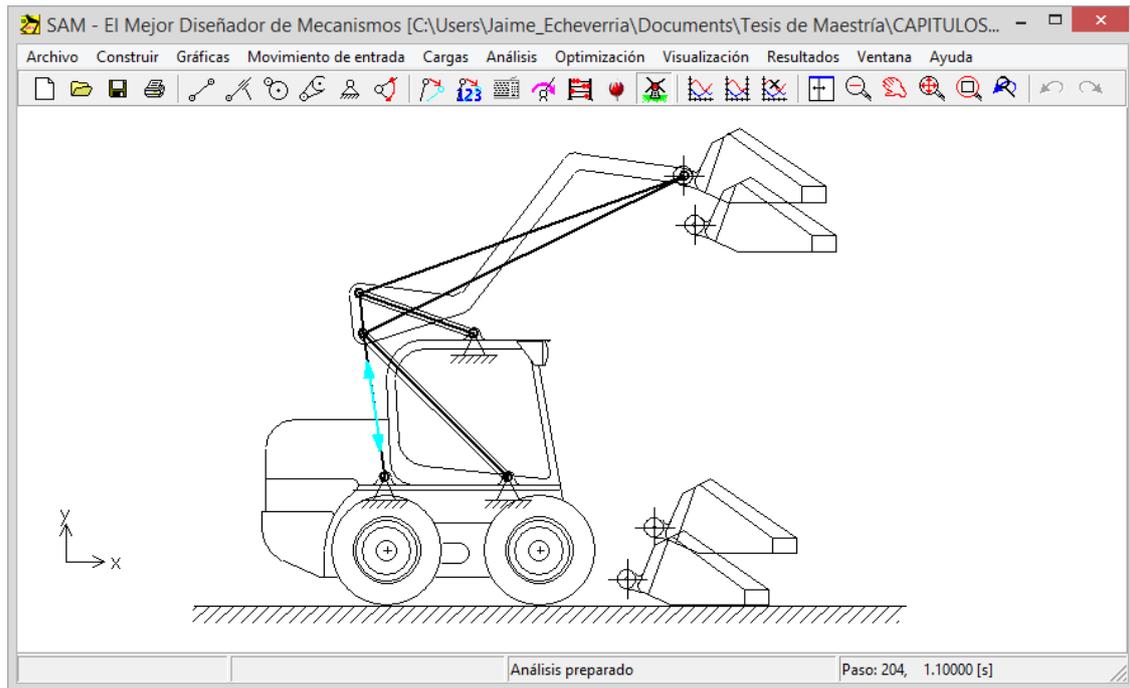


**Fig. 5.3-9:** Mecanismo sintetizado para la minicargadora - primer diseño.

simulado en Artas SAM este primer diseño se obtiene lo siguiente:

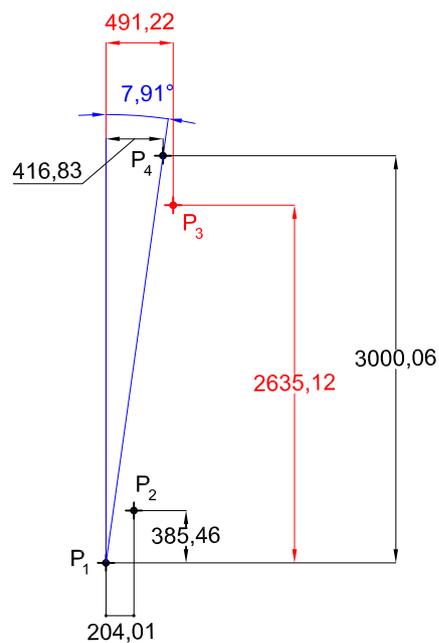






**Fig. 5.3-10:** Simulación en ArtasSAM del primer diseño de la minicargadora.

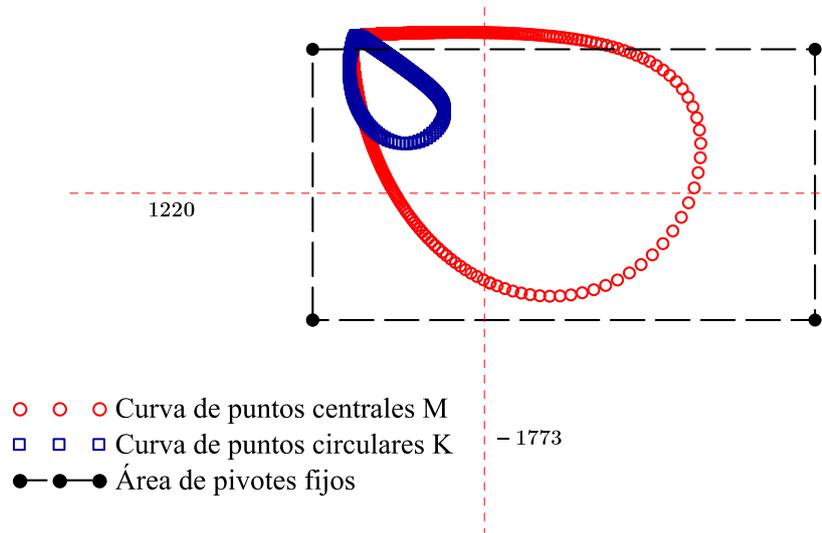
El método de diseño de curvas de Burmester es muy sensible a la variación de los parámetros de diseño porque con una pequeña modificación de los puntos de referencia o de los ángulos del acoplador el mecanismo se modifica considerablemente; a continuación se varía la posición  $P_3$  tal como se muestra en la figura 5.3-11:



**Fig. 5.3-11:** Datos de diseño para la trayectoria de elevación con las cuatro posiciones prescritas para el cucharón del mecanismo - segundo diseño.

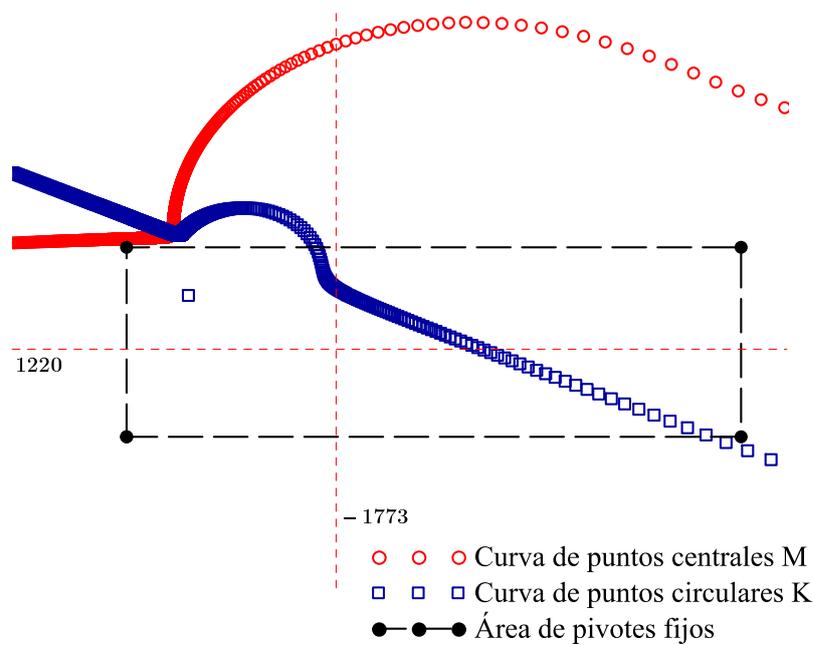
y se obtiene las siguientes curvas de Burmester exploratorias para ambas soluciones:

### CURVAS DE BURMESTER - PRIMERA SOLUCIÓN



**Fig. 5.3-12:** Curvas de Burmester para la primera solución de la minicargadora - segundo diseño.

### CURVAS DE BURMESTER - SEGUNDA SOLUCIÓN

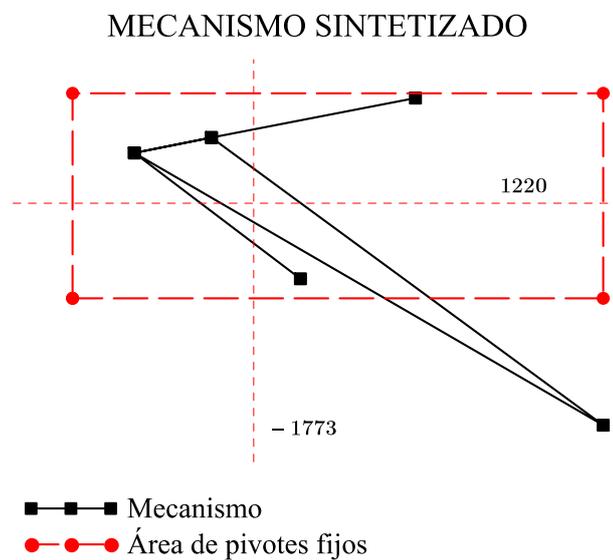


**Fig. 5.3-13:** Curvas de Burmester para la segunda solución de la minicargadora - segundo diseño.

nuevamente la primera solución permite diseñar el mecanismo, así entonces considerando:

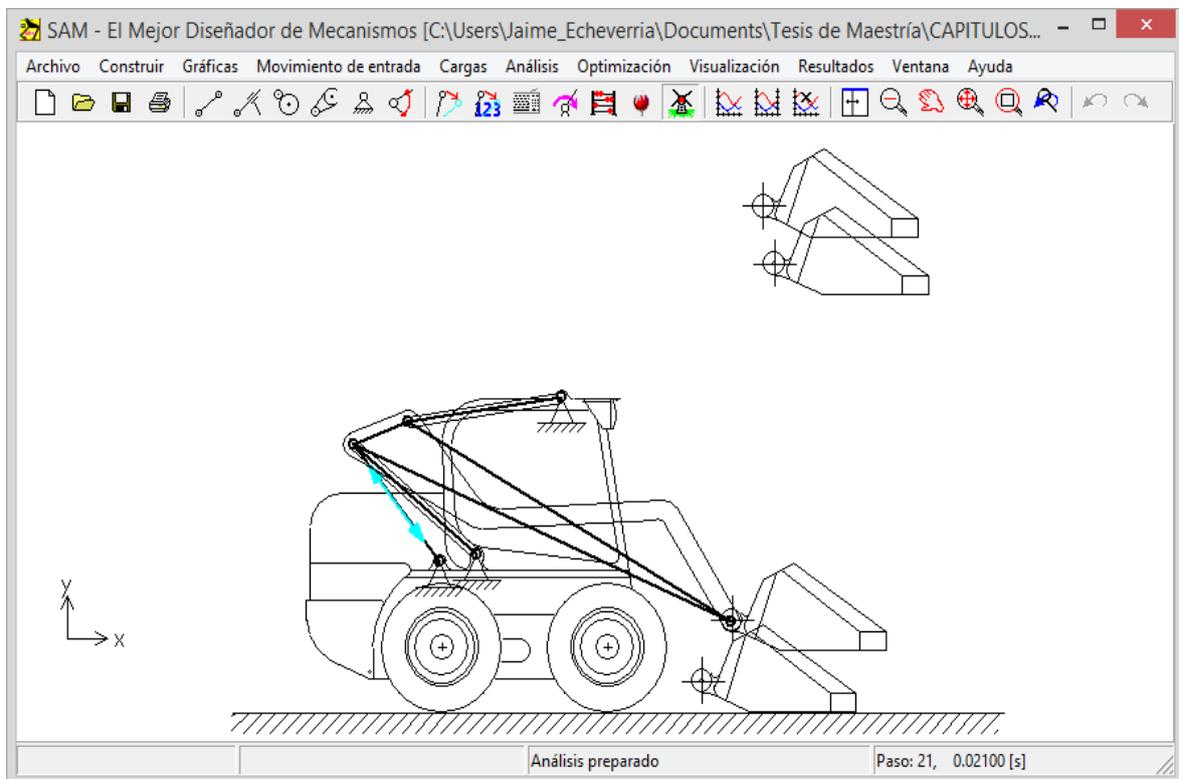
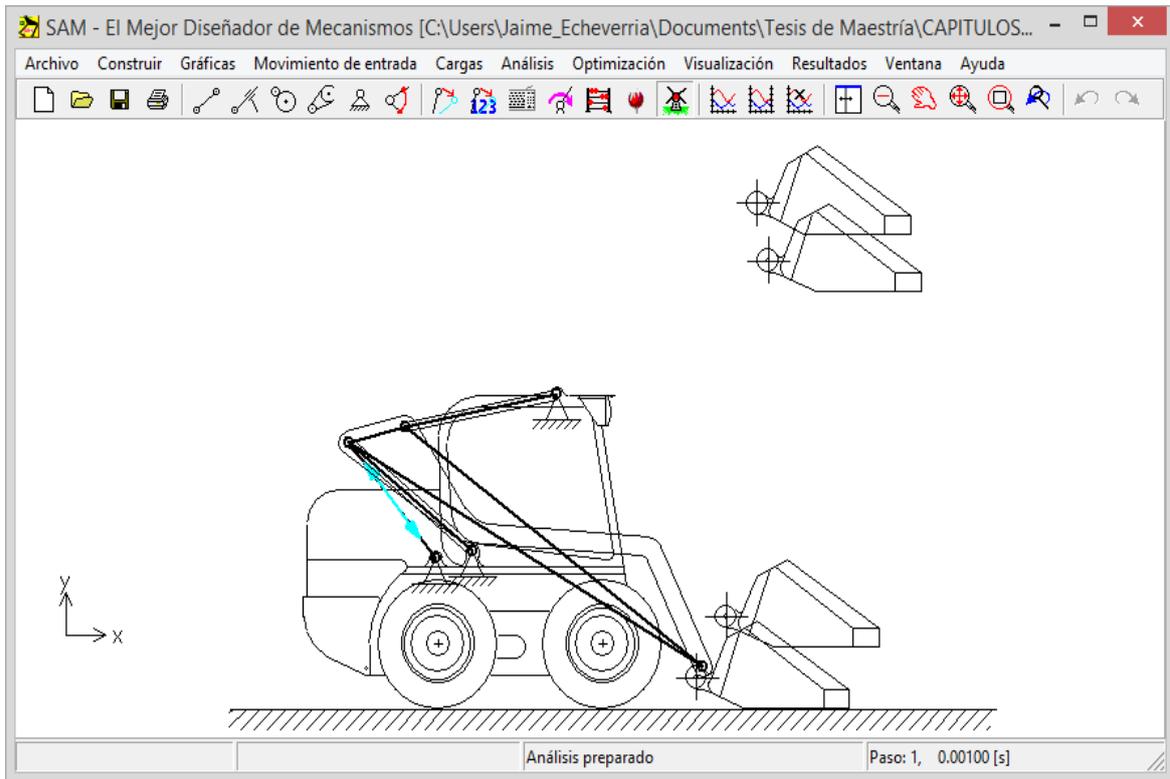
Diada	$\beta_2$
izquierda	359.52°
derecha	356.41°

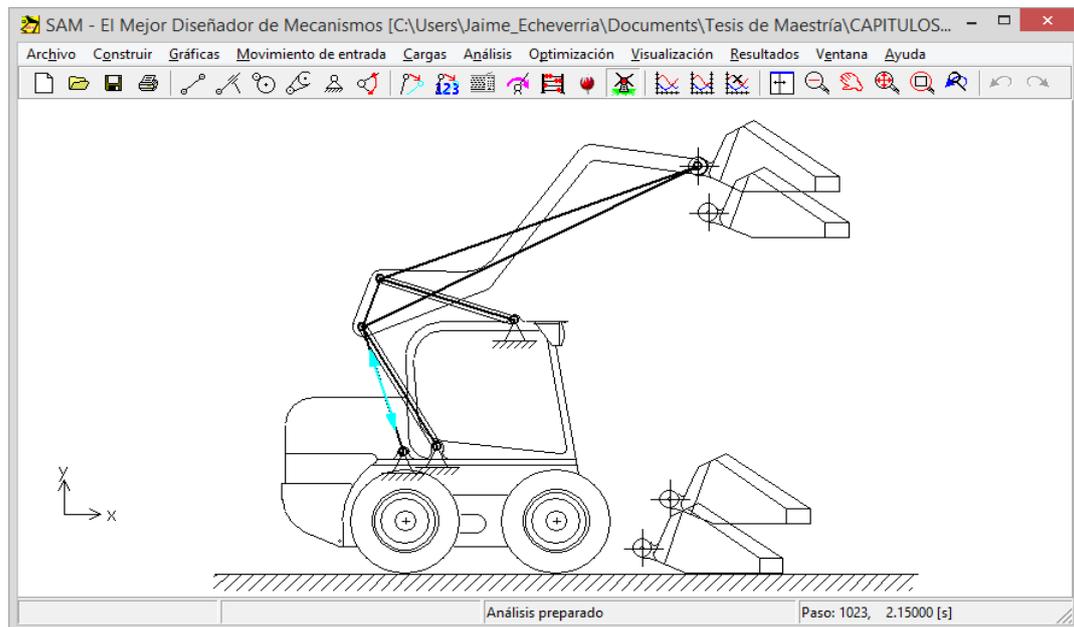
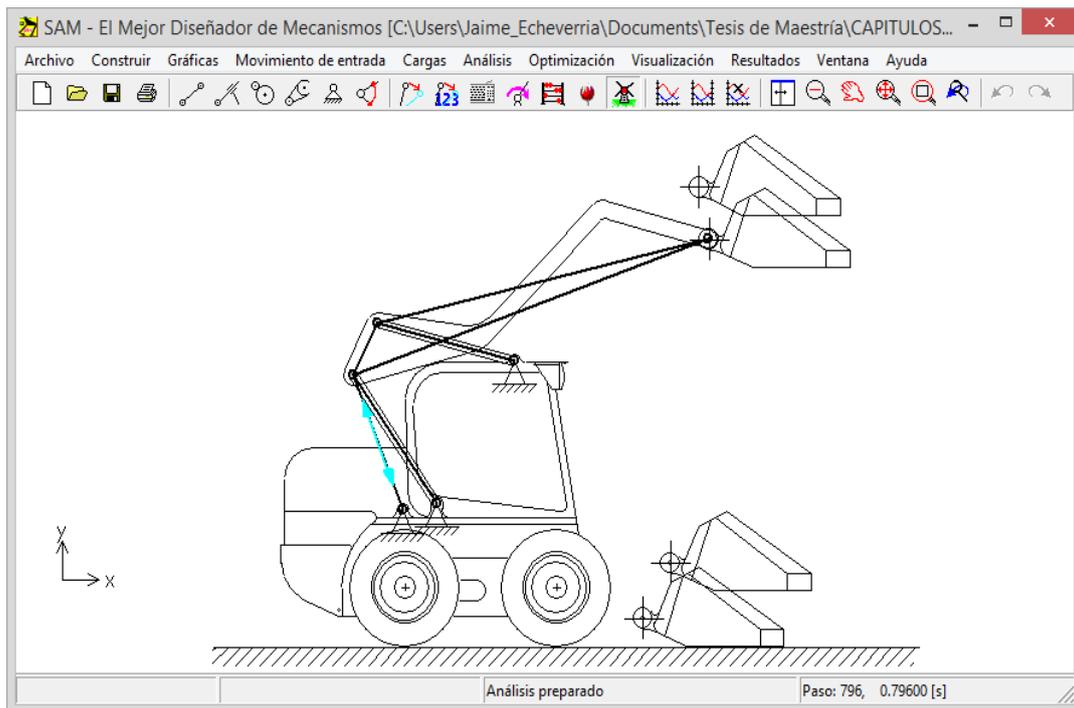
se obtiene el mecanismo siguiente:



**Fig. 5.3-14:** Mecanismo sintetizado para la minicargadora - segundo diseño.

cuya simulación en Artas SAM, se muestra seguidamente:





**Fig. 5.3-15:** Simulación en Artas SAM del segundo diseño de la minicargadora.

La metodología de Burmester permite entonces ensayar con los parámetros de diseño para conseguir el mecanismo más adecuado a las necesidades de diseño.

## 5.4 BIBLIOGRAFÍA DEL CAPÍTULO

- 1 Sandor, G.N. y Erdman, A. G. (1984). *Advanced Mechanism Design: Analysis and Synthesis*. (1ra Edición). New Jersey, Estados Unidos: Ed Prentice-Hall. Cap. 3.
- 2 Russell, K. Shen, Q. y Sodhi, R.S. (2014). *Mechanism Design: Visual and Programmable Approaches*. (1ra Edición). Boca Raton, Estados Unidos: CRC Press. Cap. 4.
- 3 Hartenberg, R. S. y Denavit, J. (1964). *Kinematic Synthesis of Linkages*. (1ra Edición). New York, Estados Unidos: Ed. McGraw-Hill. Caps: 8, 9.
- 4 Chiang C. H. (2000). *Kinematics and Design of Planar Mechanisms*. (1ra Edición). Malabar, Estados Unidos: Ed. Krieger Publishing. Cap. 3.
- 5 McCarthy, M. J. y Song Soh, G. (2004) *Geometric Design of Linkages*. (2da Edición). Massachusetts, Estados Unidos: Ed. Springer. Cap. 3.
- 6 Norton, R. L. (2013). *Diseño de Maquinaria: Síntesis y Análisis de Máquinas y Mecanismos*. (5ta Edición) México, México: Ed. McGraw-Hill. Caps: 3 y 5.
- 7 Torres, J. I. (2013). Sensibilidad de la solución en síntesis de conducción de cuerpo rígido. *Memorias del XIX Congreso Internacional Anual de la Sociedad Mexicana de Ingeniería Mecánica*. (págs. 430-439). Pachuca, Hidalgo, México.
- 8 Yalçin, T. (2012). *Design of a Skid Steer Loader*. (Disertación de Maestría). Middle East Technical University, Ankara, Turquía. Cap. 4.
- 9 Manual del usuario Artas SAM 6.1
- 10 Manual del usuario MathCAD versión 15

11 Maxfield B., ENGINEERING WITH MATHCAD, Ed. Butterworth-Heinemann, 1ra Ed, 2006, Caps: 9, 11, 14 y 15.

12 Maxfield B., ESSENTIAL MATHCAD FOR ENGINEERING, SCIENCE AND MATH, Ed. Academic Press, 2da Ed, 2009, Caps: 5, 7, 9 y 12.

## CAPÍTULO 6

### CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

#### 6.1 CONCLUSIONES

1. Todas las metodologías revisadas requieren del conocimiento de los ángulos subtendidos por el acoplador con respecto a un eje referencial, llamados ángulos de acoplador y de las posiciones ocupadas por un punto referencial P del acoplador como datos definidos en el diseño, normalmente las posiciones ocupadas por el punto referencial se definen respecto a la primera posición del mismo establecida como la posición (0, 0). Aparte de ello, para cada método se puede concluir lo siguiente:

*Síntesis de guiado de cuerpo para 3 posiciones sin pivotes fijos prescritos:*

2. A priori esta metodología resulta la más elaborada de aplicar porque es necesario conocer los ángulos de rotación relativa del eslabón motriz y conducido de cada posición respecto a la inicial,  $\beta_2$ ,  $\beta_3$ ,  $\beta_{2_}$  y  $\beta_{3_}$  los cuales son difíciles de presuponer sin previamente efectuar una síntesis gráfica del mecanismo; sin embargo una vez determinados gráficamente dichos valores como datos previos de diseño se pueden variar los mismos para lograr diversas posibilidades de diseño del mecanismo.

*Síntesis de guiado de cuerpo para 3 posiciones con pivotes fijos prescritos:*

3. Esta metodología es más eficaz que la anterior porque solamente se requiere conocer la posición de ambos puntos de bastidor para dimensionar el mecanismo. Usualmente en las aplicaciones industriales prácticas el conocimiento de la zona donde estará fijado el mecanismo es un dato de diseño establecido por lo que este procedimiento es adecuado a tal situación.

*Síntesis de guiado de cuerpo para 3 posiciones con la ayuda de círculos de punto central y punto circular:*

4. Esta técnica es la que permite explorar de forma muy flexible y amplía las posibilidades de diseño de un mecanismo pues permite visualizar las posibles zonas de ubicación de los pivotes fijos y de los pivotes móviles del mecanismo lo cual da al diseñador un vasto campo de posibilidades en el diseño.

*Síntesis de guiado de cuerpo para 4 posiciones con la ayuda de curvas de Burmester:*

5. Se puede obtener similar conclusión a la del caso anterior pues esta metodología también genera una amplia visualización de la zona de pivotes fijos y móviles del mecanismo para obtener muchas posibilidades en el diseño, sin embargo un posible inconveniente de esta técnica es la sensibilidad que la misma posee a la variación de los datos de diseño, pues al modificarse los mismos las curvas de Burmester pueden cambiar drásticamente a una configuración inaplicable en el diseño lo que puede frustrar al diseñador; por este motivo este procedimiento puede requerir muchas pruebas de ensayo y error antes de que permita establecer el diseño definitivo.

*Síntesis de orden superior*

6. Esta técnica tiene aplicación algo restringida ya que el conocimiento de variables cinemáticas como velocidad y aceleración en una o más posiciones aparte de ser un dato muy específico requeriría del uso de muchos puntos de precisión y por ende la aplicación de técnicas de optimización; sin embargo en algunos problemas industriales esta metodología puede ser muy útil y necesaria y en el presente estudio solo es analizada introductoriamente.

7. En todas las técnicas es indispensable la simulación para descartar defectos de rama u orden que se pueden presentar como posibilidad del diseño, por ello es imprescindible el uso de un software especializado como Artas SAM.

Como conclusión general se puede establecer que la síntesis dimensional de mecanismos es una actividad de la ingeniería mecánica compleja pero muy gratificante porque permite explorar la creatividad en el diseño de mecanismos.

## **6.2 RECOMENDACIONES**

1. Se recomienda incentivar en las carreras de ingeniería mecánica y afines la síntesis de mecanismos como una asignatura optativa o de posgrado, porque pone al estudiante en contacto con una actividad muy creativa de la ingeniería.

2. Se recomienda desarrollar temáticas afines de síntesis en proyectos de titulación, como síntesis de mecanismos de cadenas de 6 eslabones, optimización entre otras.

## ANEXOS

## A. MANUAL ESENCIAL DE USO DE MATHCAD

**El espacio de trabajo de Mathcad**

Al iniciar Mathcad, se abre una ventana como la que se muestra en la Figura A-1.

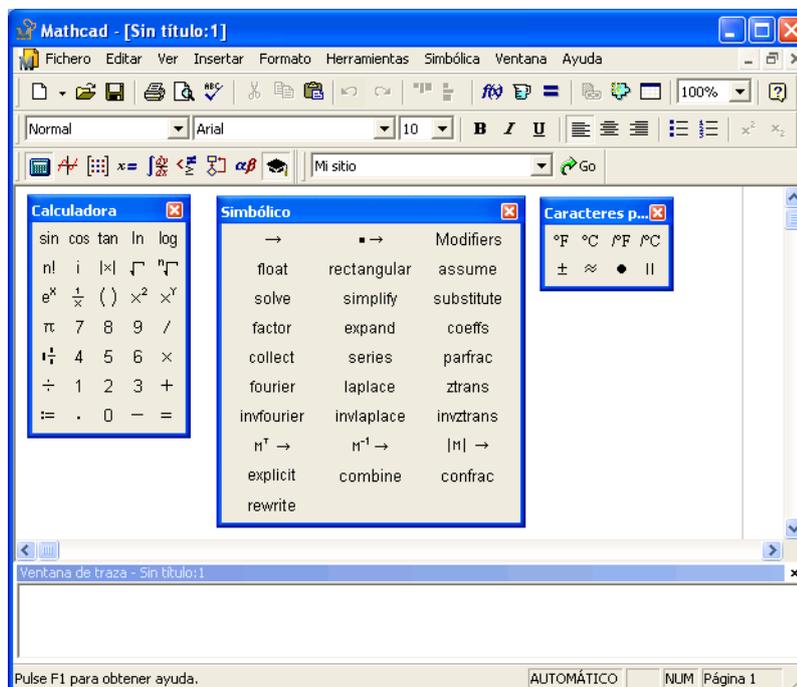


Figura A-1: Mathcad con distintas barras de herramientas en pantalla.

Cada botón de la barra de herramientas **Matemáticas** abre otra barra de herramientas de operadores o símbolos. Se pueden insertar numerosos operadores, caracteres griegos y gráficos con estos botones.

Botón	Barra de herramientas
	<b>Calculadora:</b> operadores aritméticos.
	<b>Gráfico:</b> herramientas de gráficos y tipos de gráficos en dos y tres dimensiones.
	<b>Matriz:</b> operadores de matrices y vectores.
	<b>Evaluación:</b> signos de igual para la definición y la evaluación.
	<b>Cálculo:</b> derivadas, integrales, límites y productos y sumas iteradas.
	<b>Booleano:</b> operadores lógicos y comparativos de una expresión booleana.
	<b>Programación:</b> elementos de programación.
	<b>Griego:</b> caracteres griegos.
	<b>Simbólica:</b> modificadores y palabras clave simbólicos.

La barra de herramientas **Estándar** permite el acceso rápido a numerosos comandos de menús.



La barra de herramientas **Formato** contiene botones y listas de desplazamiento para especificar las características de fuente de las ecuaciones y del texto.



## Trabajo con hojas de trabajo

Al iniciar Mathcad, se abre una *hoja de trabajo* de Mathcad. Puede abrir tantas hojas de trabajo como permitan los recursos del sistema disponibles.

Si tiene abierta una hoja de trabajo de gran tamaño, utilice la opción **Ir a página** del menú **Editar** para desplazarse con mayor rapidez por la hoja de trabajo.

## Regiones

Mathcad le permite introducir ecuaciones, texto y gráficos en toda la hoja. Cada ecuación, parte de texto o elemento se considera una *región*. Una hoja de trabajo de Mathcad es una colección de todas esas regiones. Para comenzar una nueva región en Mathcad, realice lo siguiente:

1. Pulse en una zona en blanco de la hoja de trabajo. Verá una cruz pequeña.  Todo lo que escriba aparecerá en la cruz.
2. Si la región que desea crear es una región matemática, puede comenzar a escribir donde coloque la cruz. De forma predeterminada, Mathcad entiende que escribe en lenguaje matemático. Consulte el apartado “Cálculos sencillos” que aparece a continuación para ver un ejemplo.
3. Para crear una región de texto, seleccione **Región de texto** en el menú **Insertar** o simplemente pulse [“] y comience a escribir. Consulte el Capítulo 6, “Trabajo con texto,” para obtener una descripción completa.

## Cálculos sencillos

Aunque Mathcad puede efectuar cálculos matemáticos complejos, también puede utilizarse como una simple calculadora. Para efectuar el primer cálculo, siga estos pasos:

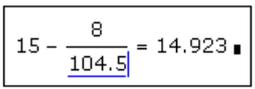
1. Pulse sobre la hoja de trabajo. Verá una cruz pequeña.	
2. Escriba $15 - 8/104.5 =$ . Cuando escriba el signo igual o pulse  en la barra de herramientas <b>Calculadora</b> , Mathcad calculará el resultado.	

Figura A-2:

Este cálculo demuestra cómo funciona Mathcad:

- Mathcad ajusta el tamaño de las barras de fracción, paréntesis y otros símbolos para mostrar las ecuaciones como si las viera en un libro.
- Mathcad comprende qué operación debe efectuar primero. Mathcad supo que debía realizar la división antes que la resta y mostró la ecuación correspondiente.
- Tan pronto como se introduce el signo igual, Mathcad ofrece el resultado. Mathcad procesa cada ecuación a medida que las especifica.
- A medida que escribe cada operador (en este caso,  $-$  y  $/$ ), Mathcad muestra un pequeño rectángulo negro denominado *marcador de posición*. Los marcadores de posición mantienen los espacios abiertos para los números y las expresiones que no se hayan introducido aún. Si pulsa en el final de la ecuación, verá un marcador de posición para las unidades y las conversiones de unidades.

Una vez que la ecuación aparece en pantalla, puede editarla pulsando en ella e introduciendo nuevos caracteres, números y operadores. Las barras de herramientas de matemáticas le permiten introducir numerosos operadores y caracteres griegos.

## Definiciones y variables

La versatilidad y eficacia de Mathcad se ponen rápidamente de manifiesto cuando se empiezan a utilizar *variables* y *funciones*. Gracias a la definición de variables y funciones, se pueden vincular las ecuaciones y utilizar resultados intermedios en cálculos posteriores.

### Definición de variables

Estos pasos le muestran cómo definir una variable:

1. Escriba el nombre de la variable.
2. Escriba dos puntos con la tecla correspondiente [ : ] o pulse  en la barra de herramientas **Calculadora** para insertar un símbolo de definición.
3. Escriba el valor que se va a asignar a la variable. El valor puede ser un número simple o una combinación compleja de números y variables previamente definidas.

Si comete un error, pulse en la ecuación y la tecla [**Espacio**] hasta que la expresión completa se sitúe entre las dos líneas de edición azules. A continuación, elimínela seleccionando **Cortar** en el menú **Editar** ([**Ctrl**] **X**). También puede utilizar el comando **Deshacer** de Mathcad, [**Ctrl**] **Z**, situado en el menú **Editar** para volver de nuevo a la ecuación.

Las variables de las hojas de trabajo de Mathcad están definidas de arriba abajo y de izquierda a derecha en una página. Una vez que se ha definido una variable como  $t$ , puede efectuar cálculos con ella en cualquier lugar *por debajo y a la derecha* de la definición.

Escriba ahora otra definición:

1. Pulse [**Intro**]. La cruz se desplaza debajo de la primera definición.  $t := 10$
2. Para definir  $acc$  como  $-9,8$ , escriba:  $acc := -9.8$ .  $acc := -9.8$

+

### Cálculo de resultados

Ahora que se han definido las variables  $acc$  y  $t$ , podrá utilizarlas en otras expresiones:

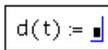
1. Pulse con el ratón debajo de las dos definiciones.  $t := 10$
2. Escriba  $acc/2[\text{Espacio}] \cdot t^2$ .  $acc := -9.8$
3. Pulse el signo igual [=].  $\frac{acc}{2} \cdot t^2 = -490$

Esta ecuación calcula la distancia que recorre un cuerpo al caer al vacío en un tiempo  $t$  con un valor de aceleración  $acc$ . Cuando pulse el signo igual [=], Mathcad ofrece el resultado.

Mathcad actualiza los resultados al aplicarse cambios. Por ejemplo, si pulsa en el 10 de la pantalla y lo cambia a otro número, Mathcad cambiará el resultado cuando pulse [**Intro**] o cuando pulse fuera de la ecuación.

### Definición de funciones

Para añadir la definición de una función a la hoja de trabajo, realice lo siguiente:

1. En primer lugar, defina la función  $d(t)$  escribiendo  $d(t) :$  
2. Complete la definición con la expresión:  $1600+acc/2[\text{Espacio}] \cdot t^2[\text{Intro}]$   $d(t) := 1600 + \frac{acc}{2} \cdot t^2$

La definición que acaba de introducir define una función. El nombre de la función es  $d$ , mientras que su argumento es  $t$ .

Puede utilizar esta función para evaluar la expresión con valores diferentes de  $t$ . Para ello, basta con sustituir el valor  $t$  con el número correspondiente. Por ejemplo:

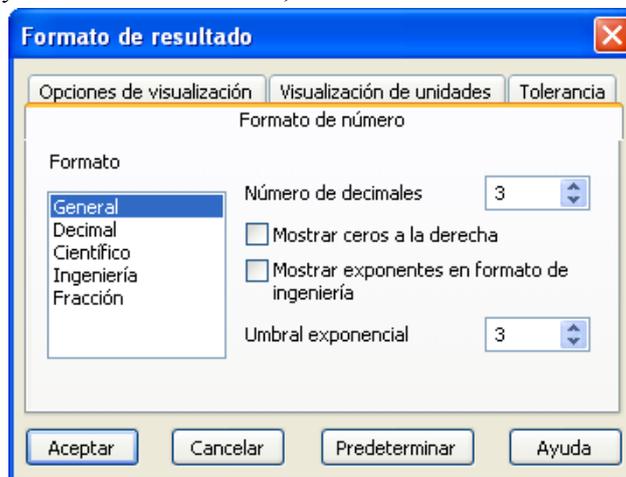
Para evaluar la función en un valor específico, como 3,5, escriba  $d(3.5) =$ . Tal y como se muestra, Mathcad devuelve el valor correcto.  $d(3.5) = 1.54 \times 10^3$

### Formato de resultados

Puede definir el formato de visualización de todos los números que Mathcad calcula y muestra en pantalla.

En el ejemplo anterior, el resultado se muestra en notación exponencial. Observe a continuación cómo se modifica el aspecto del resultado:

1. Pulse en el resultado.
2. Seleccione **Resultado** en el menú **Formato** para abrir el cuadro de diálogo Formato de resultado. La configuración de este cuadro de diálogo afecta al aspecto de los resultados, incluidos el número de decimales y el empleo de la notación exponencial y de los ceros a la derecha, entre otros.



3. El esquema de formato predeterminado es “General”, con el “Umbral exponencial” definido en 3. Sólo los números mayores o iguales que  $10^3$  se muestran en notación exponencial. Pulse las flechas situadas a la derecha de 3 para aumentar el Umbral exponencial a 6.
4. Tras pulsar “Aceptar”, el número cambia para reflejar el nuevo formato de resultados.  $d(3.5) = 1539.975$

## Gráficos

Mathcad proporciona una gran variedad de gráficos polares y gráficos X-Y bidimensionales, además de gráficos de superficie, de dispersión y de contorno tridimensionales. Este apartado describe los procedimientos para crear un gráfico bidimensional sencillo que recoja los puntos calculados en el apartado anterior.

Elimine primero el valor de  $t$  en la hoja de trabajo. Puesto que ha definido  $t$  como un número simple, no es posible utilizarlo como intervalo de números en un gráfico. Puede definir  $t$  como intervalo de valores.

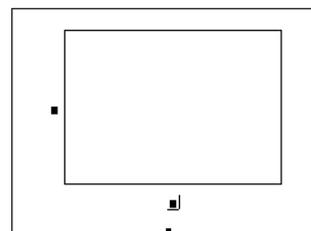
### Creación de gráficos básicos

Para crear un gráfico X-Y, realice lo siguiente:

1. Pulse en una zona en blanco de la hoja de trabajo.
2. Seleccione **Gráfico > Gráfico X-Y** en el menú

**Insertar** o pulse  en la barra de herramientas **Gráfico**. También puede escribir [G]. Mathcad inserta un gráfico X-Y en blanco.

3. Complete los marcadores de posición del eje  $x$  (parte central) con  $t$  y el marcador de posición del eje  $y$  (parte central izquierda) con  $d(t)$ . Estos marcadores de posición pueden contener una función, una expresión o el nombre de una variable.
4. Pulse fuera del gráfico o [Intro].

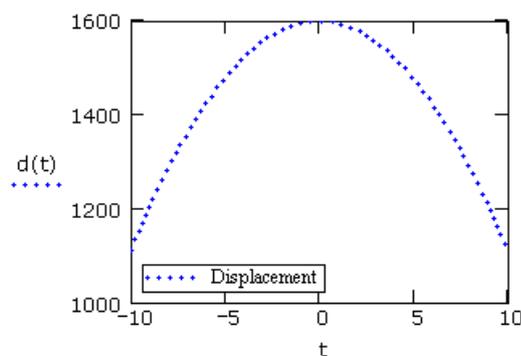


Mathcad selecciona automáticamente los límites de los ejes. Para especificar los límites de los ejes usted mismo, pulse en el gráfico y escriba sobre los números de los marcadores de posición de los extremos de los ejes.

### Formato de gráficos

Las características *predeterminadas* de un gráfico de Mathcad son los ejes lineales numerados, la ausencia de líneas de cuadrícula y los puntos conectados a las líneas continuas. Estas características pueden modificarse si se *da formato* al gráfico. Para dar formato al gráfico que acaba de crear, realice lo siguiente:

1. Pulse dos veces en el gráfico para abrir el
2. Pulse la ficha Traza.
3. Pulse dos veces “traza 1” en la celda que aparece bajo “Etiqueta de la leyenda” en la tabla. Escriba un nombre para la traza; por ejemplo **Displacement**.
4. Pulse en la celda de la columna “Línea” de la tabla para seleccionar una línea punteada. Seleccione un grosor de línea de 3 desde la columna siguiente y el color azul en la columna “Color”.
5. Desactive la casilla de verificación “Ocultar leyenda” y seleccione la posición “Inferior izquierda” para la leyenda.
6. Pulse “Aceptar”.
7. Mathcad muestra el gráfico como una línea punteada. Observe que la línea de muestra de debajo de  $d(t)$  refleja ahora el formato nuevo, como la leyenda.
8. Pulse fuera del gráfico para cancelar la selección.



## Creación de matrices

Este apartado describe la creación de matrices de números y expresiones matemáticas y el trabajo con ellas.

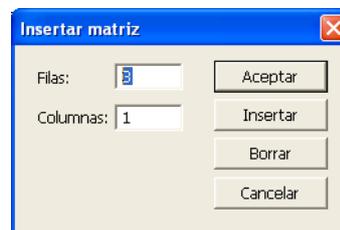
### Vectores y matrices

En Mathcad una columna de números es un *vector* y un array rectangular de números se denomina *matriz*. El término general para un vector o matriz es un *array*. El término *vector* se refiere a un *vector de columna*. Un vector de columna es sencillamente una matriz con una columna. Asimismo, puede crear un *vector de fila* si crea una matriz con un fila y varias columnas. Es posible que desee distinguir entre los nombres de matrices, vectores y escalares (números únicos) por la fuente. Los nombres de vectores se podrían definir en negrita y los escalares, en cursiva.

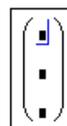
### comando Insertar matriz

Para insertar un vector o una matriz, realice lo siguiente:

1. Pulse en un espacio en blanco o en un marcador de posición matemático.
2. Seleccione **Matriz** en el menú **Insertar**, o bien pulse  en la barra de herramientas **Matriz** para abrir el cuadro de diálogo Insertar matriz.
3. Introduzca el número de elementos para “Filas” y “Columnas”. Por ejemplo, para crear un vector de tres elementos, introduzca **3** y **1**.



4. Aparecerá un array con marcadores de posición en blanco en la hoja de trabajo.



A continuación, rellene los elementos del array. En los marcadores de posición de un array puede introducir cualquier expresión matemática. Sólo tiene que pulsar en un marcador de posición y escribir un número o una expresión. Utilice la tecla **[Tab]** para desplazarse de un marcador de posición a otro.

### Cambio del tamaño de un vector o matriz

Puede cambiar el tamaño de una matriz mediante la inserción o el borrado de filas y columnas, realice lo siguiente:

1. Pulse en uno de los elementos de la matriz para colocarlo entre las líneas de edición. Mathcad comenzará insertando o borrando ese elemento.
2. Seleccione **Matriz** en el menú **Insertar**. Escriba el número de filas o de columnas que desea insertar o borrar. A continuación, pulse “Insertar” o “Eliminar”. Por ejemplo, para borrar la columna que incluye el elemento seleccionado en este ejemplo, escriba **1** en el cuadro que se encuentra junto a “Columnas”, **0** en el cuadro que se encuentra junto a “Filas” y pulse “Eliminar”.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 17 \\ 3.5 & 3.9 & -12.9 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 17 \\ 3.9 & -12.9 \end{pmatrix}$$

## Cálculos iterativos

Mathcad puede realizar cálculos iterativos y repetidos de forma tan sencilla como realiza cálculos individuales mediante una variable especial denominada *variable de rango*.

Las variables de rango adoptan un rango de valores como, por ejemplo, todos los enteros de 0 a 10. Siempre que en una ecuación de Mathcad aparezca una variable de rango, Mathcad calculará la ecuación no una vez sólo, sino una vez por cada valor de la variable de rango.

### Creación de variables de rango

Para calcular ecuaciones de un rango de valores, cree, en primer lugar, una variable de rango. En el problema que se muestra a continuación, puede calcular los resultados para un rango de valores de  $t$  del 10 al 20, de uno en uno.

Para ello, realice lo siguiente:

1. En primer lugar, escriba  $t := 10$ . Pulse sobre **10** en la ecuación  $t := 10$ .
2. Escriba **, 11**. El siguiente número en el rango será 11 y el tamaño del paso, 1.
3. Escriba **[ ; ]** para el operador de la variable de rango o pulse  en la barra de herramientas **Matriz** y, a continuación, escriba el último número, **20**. El último número del rango será 20. Mathcad muestra el operador de la variable de rango como un par de puntos.

$$t := 10$$

$$t := 10, 11$$

$$t := 10, 11 .. 20$$

4. A continuación, pulse fuera de la ecuación para  $t$ . Mathcad comienza a calcular con  $t$  definida como una variable de rango. Puesto que  $t$  adopta once valores diferentes, debe haber once resultados diferentes; estos se muestran en una *tabla de salida* como la indicada.

$$\frac{\text{acc}}{2} \cdot t^2 =$$

-490
-592.9
-705.6
-828.1
-960.4
-1.103·10 <sup>3</sup>
-1.254·10 <sup>3</sup>
-1.416·10 <sup>3</sup>
-1.588·10 <sup>3</sup>
-1.769·10 <sup>3</sup>
-1.96·10 <sup>3</sup>

## Acceso a los elementos de un array

Puede acceder a todos los elementos de un array sólo con el nombre de la variable, o bien acceder a ellos tanto de forma individual como por grupos.

### Subíndices

A los elementos individuales de un vector o de una matriz se accede mediante el operador de subíndice. Para insertar el operador de subíndice, pulse  en la barra de herramientas **Matriz** o escriba **[ ]**. Si desea acceder a un elemento de un vector, introduzca un número en el subíndice. Para acceder a un elemento de una matriz, introduzca dos números separados por una coma. Para hacer referencia al elemento  $i$  de un vector, escriba  $\mathbf{v}[i]$ . En general, si desea hacer referencia al elemento de la fila  $i$ , de la columna  $j$ , de la matriz  $\mathbf{M}$ , escriba  $\mathbf{M}[i, j]$ .

Figura A-3 muestra ejemplos del modo de definir elementos individuales de una matriz y cómo verlos.

$$M_{0,0} := 1 \quad M_{0,1} := 3 \quad M_{0,2} := 5$$

$$M_{1,0} := 2 \quad M_{1,2} := 6$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,2} = 6 \quad M_{1,1} = 0$$

$M_{2,2} = \blacksquare$

This array index is invalid for this array.

Figura A-3: Definición y visualización de elementos de la matriz. Puesto que el array ORIGEN es cero, hay una fila de orden cero y una primera fila, pero no hay una segunda.

### Acceso a filas y columnas

Aunque puede utilizar una variable de rango para acceder a todos los elementos de una fila o de una columna de un array, Mathcad proporciona un operador de columna para acceder con rapidez a todos los elementos de una columna. Pulse  $M^{<2>}$  en la barra de herramientas **Matriz** del operador de columna. La Figura A-4 muestra el método para extraer la tercera columna de la matriz **M**.

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad M^{<2>} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$$

$$M^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \quad w := (M^T)^{<1>} \quad w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Figura A-4: Extracción de una columna de una matriz. Observe que ORIGEN es 0. Por lo tanto, el superíndice 2 se refiere a la tercera columna de la matriz M.

Para extraer una única fila de una matriz, transponga la matriz mediante el operador de transposición (pulse  $M^T$  en la barra de herramientas **Matriz**) y, a continuación, extraiga una columna mediante el operador de columna. Esta operación se muestra en la parte inferior de la Figura A-4.

### Cambio del origen del array

Cuando se utilizan subíndices para hacer referencia a elementos de un array, Mathcad asume que el array comienza en el valor actual de la variable integrada ORIGEN. De forma predeterminada, ORIGEN

La Figura A-5 muestra unahoja de trabajo con el ORIGEN definido en 1. Si intenta hacer referencia al elemento cero de un array en este caso, Mathcad mostrará un mensaje de error.

ORIGEN = 1

$$M := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$M_{1,1} = 1 \quad M_{3,3} = 9 \quad M_{1,3} = 7$$

$M_{0,0} = \blacksquare$

This array index is invalid for this array.

$$v_1 := 1 \quad v_2 := 3 \quad v_3 := 5$$

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$v_0 = \blacksquare$

This array index is invalid for this array.

Figura A-5: Arrays que comienzan en el elemento uno en lugar de en el elemento cero. Puesto que ORIGEN está definido como 1, ya no habrá una fila o una columna cero en la matriz o en el vector.

## Visualización de arrays

Mathcad muestra de forma automática las matrices y los vectores que tengan más de nueve filas o columnas como tablas de salida en lugar de como matrices o vectores. Los arrays más pequeños se visualizan por defecto en la notación de matriz tradicional. La Figura A-6 muestra un ejemplo.

$$i := 0..2 \quad j := 0..2 \quad A_{i,j} := \sin(i) + \frac{\pi}{2} - j$$

$$A = \begin{pmatrix} 1.571 & 0.571 & -0.429 \\ 2.412 & 1.412 & 0.412 \\ 2.48 & 1.48 & 0.48 \end{pmatrix}$$

$$A =$$

	0	1	2
0	1.571	0.571	-0.429
1	2.412	1.412	0.412
2	2.48	1.48	0.48

Figura A-6: Los resultados superiores se muestran como una matriz, mientras que los inferiores lo hacen como una tabla de salida.

Para cambiar el tamaño de una tabla de salida, realice lo siguiente:

1. Pulse en la tabla de salida. Aparecerán puntos de control en los laterales de la tabla.
2. Desplace el puntero del ratón a uno de estos puntos de control de modo que pase a ser una flecha de dos puntas.
3. Mantenga pulsado el botón del ratón y arrastre la tabla en la dirección que desee que cambien las dimensiones.

### Cambio de la visualización de arrays: Tabla o matriz

Puede evitar que Mathcad muestre como tablas de salida matrices grandes. Asimismo, puede convertir las matrices en tablas de salida. Para ello, realice lo siguiente:

1. Pulse en la tabla de salida o matriz.
2. Seleccione **Resultado** del menú **Formato**.
3. Pulse en la ficha **Mostrar opciones**.
4. Seleccione **Matriz** o **Tabla** en el cuadro desplegable "Estilo de visualización de matriz".

Para visualizar todos los resultados en la hoja de trabajo como matrices o como tablas independientemente de su tamaño, realice los pasos del 2 al 4 y, a continuación, pulse en "Aceptar".

### Representación gráfica de vectores de datos

Es posible trazar un vector de datos con un gráfico X-Y o con un gráfico polar. Es necesario utilizar el subíndice del vector para especificar los elementos que se van a trazar. Algunos gráficos de vectores de datos se muestran en la Figura A-7.

### Representación gráfica de un único vector de datos

Para crear un gráfico X-Y de un único vector de datos, realice lo siguiente:

1. Defina una variable de rango, por ejemplo  $i$ , que hace referencia al subíndice de cada uno de los elementos del vector que desea trazar. Por ejemplo, para un vector con 10 elementos, la variable de rango del subíndice es  $i := 0..9$ .
2. Seleccione **Gráfico > Gráfico X-Y** en el menú **Insertar**.
3. Introduzca  $i$  en el marcador de posición inferior y el nombre del vector con el subíndice ( $y_i$  por ejemplo) en el marcador de posición de la izquierda. Escriba  $[ ]$  para crear el subíndice.

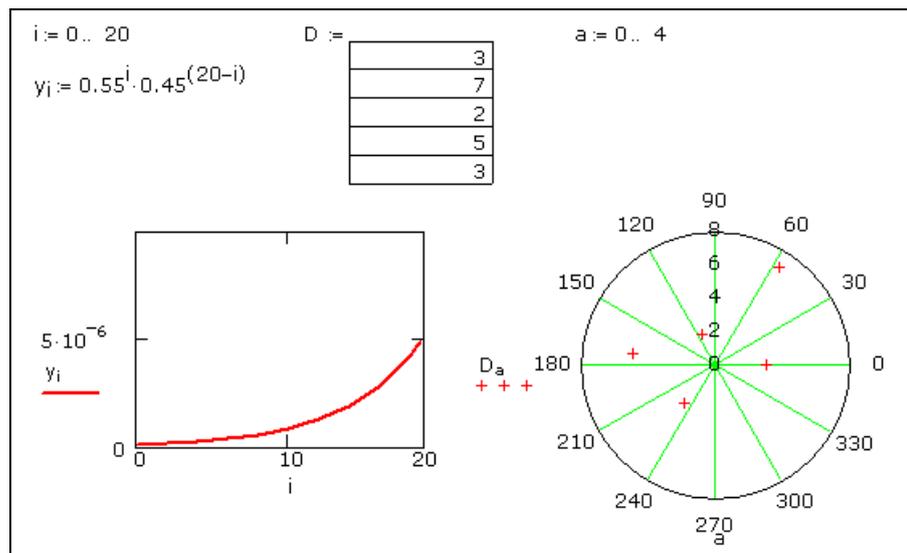


Figura A-7: Creación de un gráfico de un vector.

### Representación gráfica de un vector de datos en comparación con otro

Para trazar todos los elementos de un vector de datos en comparación con todos los elementos de otro, introduzca los nombres de los vectores en los marcadores de posición del eje:

1. Defina los vectores  $x$  e  $y$ .
2. Seleccione **Gráfico > Gráfico X-Y** en el menú **Insertar**.
3. Introduzca  $y$  en el marcador de posición del eje  $y$  y  $x$  en el marcador de posición del eje  $x$ . (Consulte la Figura A-8).

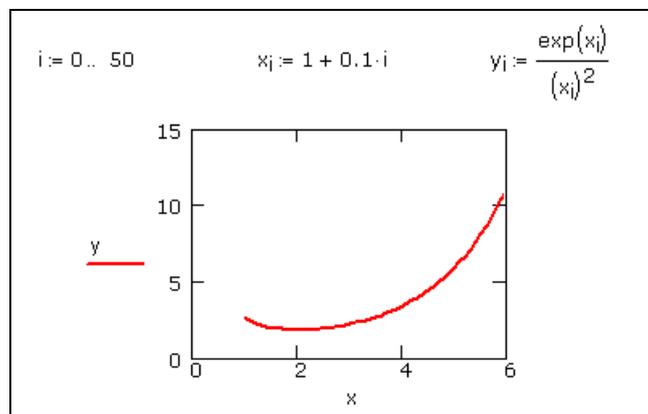


Figura A-8: Creación de gráfico de dos vectores.

Si sólo desea trazar determinados elementos de vectores, defina una variable de rango y utilícela como subíndice en los nombres de vectores. En el ejemplo que se muestra anteriormente, para trazar del quinto al décimo elemento de  $x$  e  $y$  en comparación con su correspondiente, realice lo siguiente:

1. Defina una variable de rango, por ejemplo  $k$ , que va de 4 a 9 en aumentos de 1. (Tenga en cuenta que los primeros elemento de los vectores  $x$  e  $y$  son  $x_0$  e  $y_0$  de forma predeterminada.)
2. Introduzca  $y_k$  y  $x_k$  en los marcadores de posición del eje.

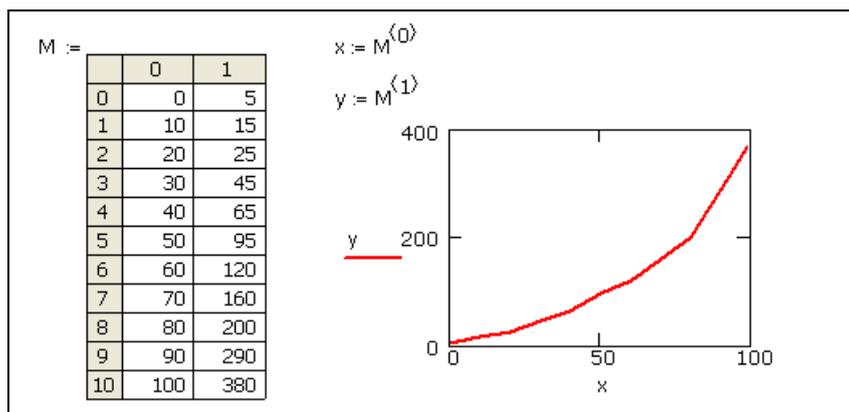


Figura A-9: Representación gráfica de vectores de una tabla de datos. Asigne la columna 0 al vector  $x$ . Asigne la columna 1 al vector  $y$ . Utilice [Ctrl] 6 para crear el subíndice.

### Obtención de lectura de coordenadas de gráfico

Para obtener una lectura de coordenadas de puntos específicos que realizan un rastreo, realice lo siguiente:

1. Pulse en el gráfico y seleccione **Gráfico >**

**Rastrear** del menú **Formato** o pulse  en la barra de herramientas **Gráfico** para abrir el cuadro de diálogo **Traza X-Y**. Compruebe que la opción “Trazar puntos de datos” se encuentra activada.

2. Pulse y arrastre el ratón por la traza cuyas coordenadas desea ver. Una cruz discontinua salta de un punto al siguiente cuando desplaza el puntero por la traza.
3. Si suelta el botón del ratón, puede utilizar las flechas izquierda y derecha para desplazar los puntos de datos anteriores y siguientes. Utilice las flechas de arriba y abajo para seleccionar otras trazas.
4. Cuando el puntero alcanza cada punto de la traza, Mathcad muestra los valores de dicho punto en los cuadros “Valor X” y “Valor Y” (o los cuadros “Radio” y “Ángulo” del cuadro de diálogo Traza polar).
5. Los valores del último punto seleccionado se muestran en los cuadros. La cruz

La Figura A-10 muestra un ejemplo de un gráfico cuyas coordenadas se están leyendo.

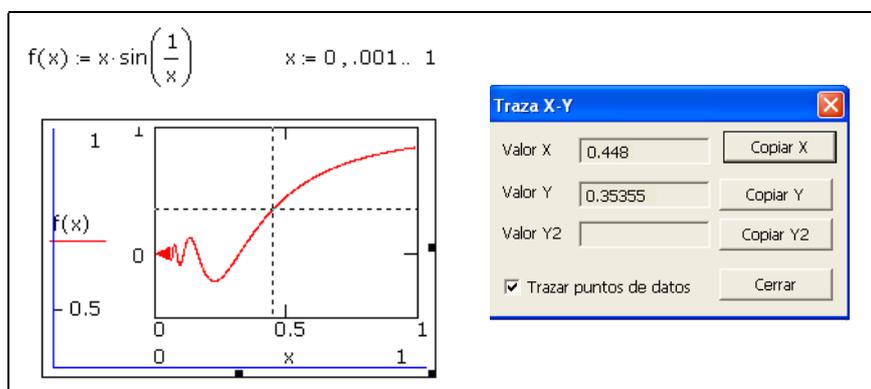


Figura A-10: Lectura de coordenadas de un gráfico.

Para copiar y pegar una coordenada, realice lo siguiente:

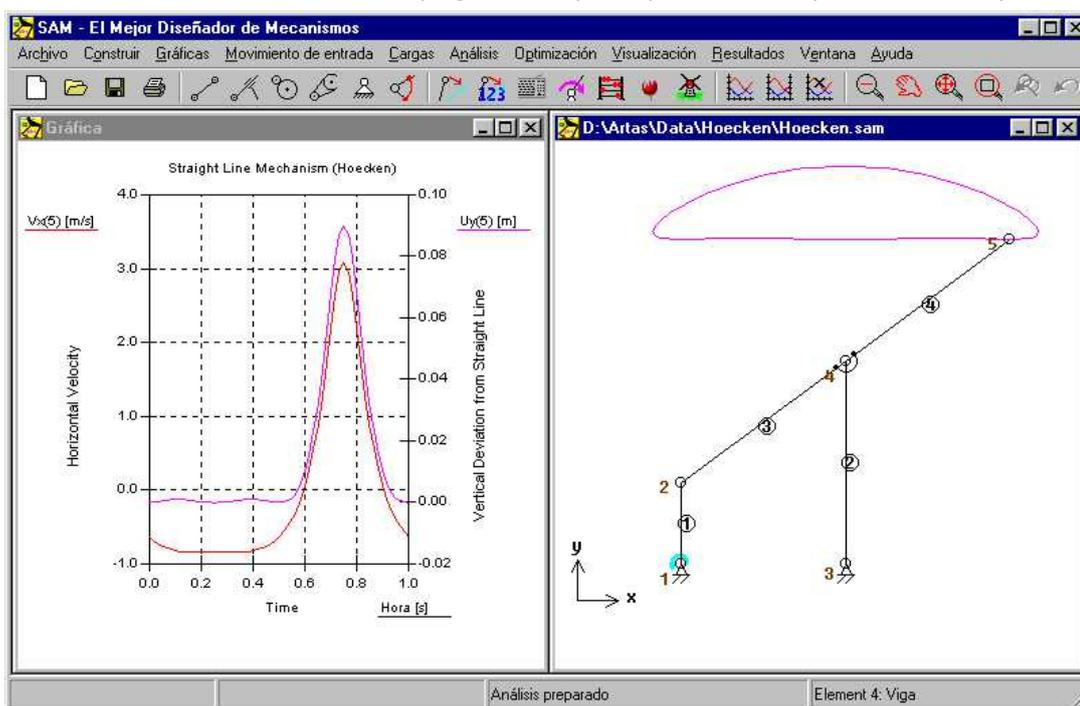
1. Pulse en “Copiar X” o “Copiar Y” (o “Copiar radio” o “Copiar ángulo” de un gráfico polar).
2. Pegue el valor de la hoja de trabajo en cualquier otra aplicación.

Para una consulta más detallada léase el Manual del Usuario que se instala con la aplicación.

## B. MANUAL ESENCIAL DE USO DE ARTAS SAM 6

### ¿Qué es SAM?

SAM (Síntesis y Análisis de Mecanismos) es un paquete interactivo de software para PC, para el diseño, análisis (movimiento y fuerza) y optimización de mecanismos planares arbitrarios. Los Mecanismos pueden generarse ya sea a través de los asistentes de diseño o a partir de los componentes básicos como vigas, deslizadores, engranajes, correas, muelles, amortiguadores y elementos de fricción. SAM integra análisis numérico de pre-procesamiento y pos-procesamiento, como animación y diagramas x-y, con un entorno fácil de usar ofreciendo menús desplegables, soporte para el ratón y recursos de ayuda.



Captura de una pantalla típica de una sesión de diseño de un mecanismo

La fundamentación matemática del núcleo de análisis, la cual fue inspirada por el bien conocido método de elementos finitos, ofrece un gran número de características y elimina muchos de los problemas de los programas tradicionales sobre mecanismo. Bucles abiertos, bucles cerrados, bucles múltiples e incluso mecanismo planetarios complejos, incluyendo los trenes planetarios de engranajes pueden modelarse en pocos minutos.

### Ejecución de un proyecto de prueba

Para abrir y ejecutar un proyecto de prueba, simplemente siga los siguientes pasos:

#### 1. Abra un proyecto de mecanismos existente

Escoja abrir desde el menú Archivo o haga clic en el ícono correspondiente de la barra de herramientas. Seleccione uno de los archivos de ejemplo usando el cuadro de diálogo abrir que aparecerá. Luego haga clic en el botón Aceptar.

#### 2. Mecanismo de Animación

Escoja Animación desde el menú Visualización o clic en el ícono Molino de la barra de herramientas para empezar la visualización animada.

### 3. Ver los resultados del análisis

Escoja Seleccionar desde el menú Resultados para seleccionar los resultados del análisis para pos-procesamiento seguido por Exportar o Graficar. La opción Exportar llamará el editor de su opción y mostrará los datos seleccionados en formato tabular, mientras que la Opción Graficar representará los datos seleccionados en un diagrama x-y como una función de tiempo. Seleccione más de un elemento para una gráfica y observe los cambios de la gráfica cuando haga clic en una de las etiquetas "y" de la gráfica. Además, Visualización simultánea de una gráfica y el mecanismo animado pueden ejecutarse al seleccionar Mosaico desde el menú Ventana.

## Ejemplo de un mecanismo de 4 barras (análisis de movimiento)

Desde el menú Archivo, seleccione Nuevo

Aparece un cuadro de diálogo del Área de Trabajo, en la cual puede entrar las dimensiones del Área de trabajo. Los números que ve en el cuadro de diálogo, son valores por defecto. Estos pueden diferir de los números usados durante la preparación de este manual.



Cuadro de diálogo del Área de Trabajo

Haga clic en Aceptar para usar los valores por defecto del Área de Trabajo.

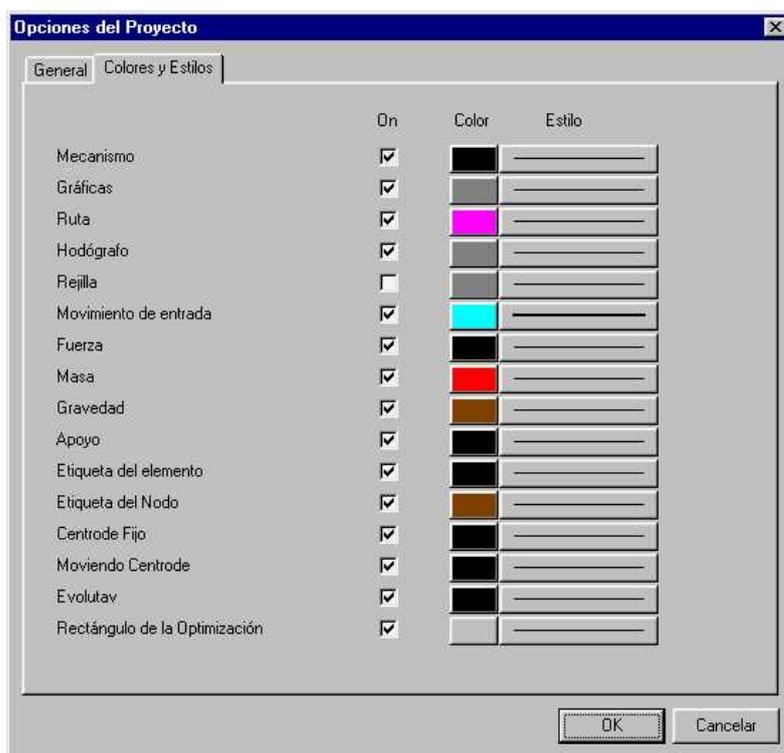
Ahora verá un Área de Trabajo vacía con una ventana para la gráfica y otra para el mecanismo.

Maximice la ventana del mecanismo presionando el botón correspondiente.

Usar una ventana de mecanismo maximizada, es muy práctico mientras construye el mecanismo.

Escoja Opciones desde el menú Visualización y seleccione las pestañas Colores y Estilos.

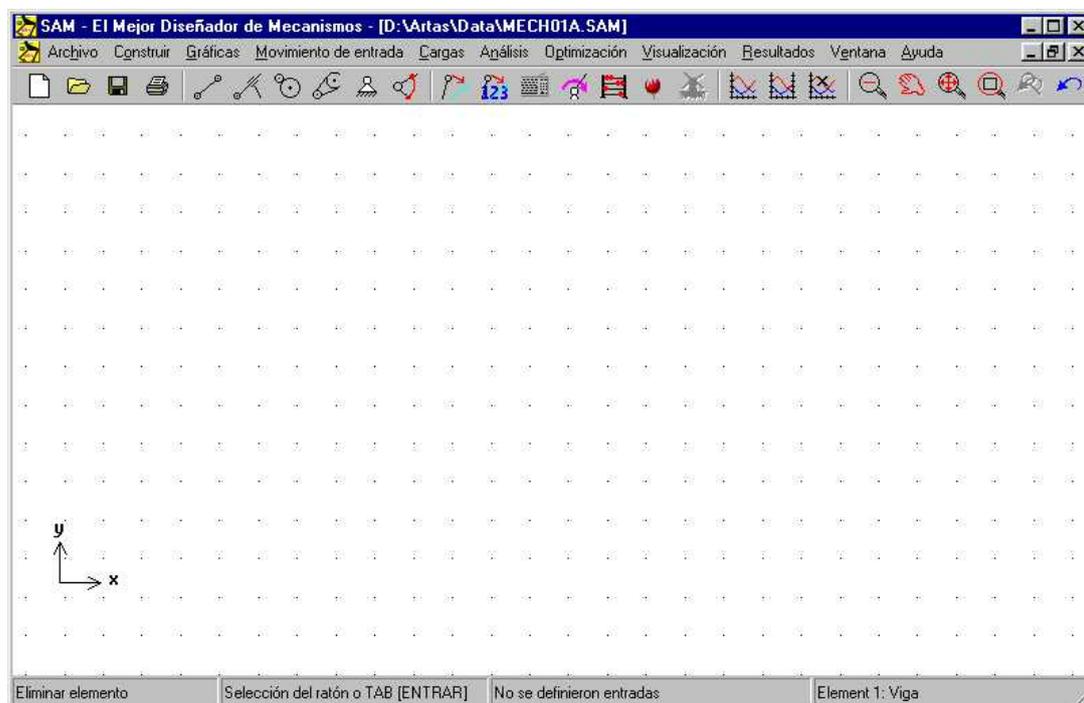
En el cuadro de diálogo que aparecerá, puede personalizar la visualización de los diversos elementos. Como puede ver, la cuadrícula esta inactiva.



Cuadro de Diálogo Opciones de Visualización

Active la opción "Mostrar Cuadrícula" y haga clic en el botón Aceptar

Esto mostrará la cuadrícula, usando las dimensiones por defecto relacionadas con el área de trabajo. Su pantalla lucirá como esta:



Área de Trabajo con la cuadrícula por defecto

**Seleccione la Viga desde el menú Construir o haga clic en **

*Ahora puede empezar a crea un elemento Viga.*

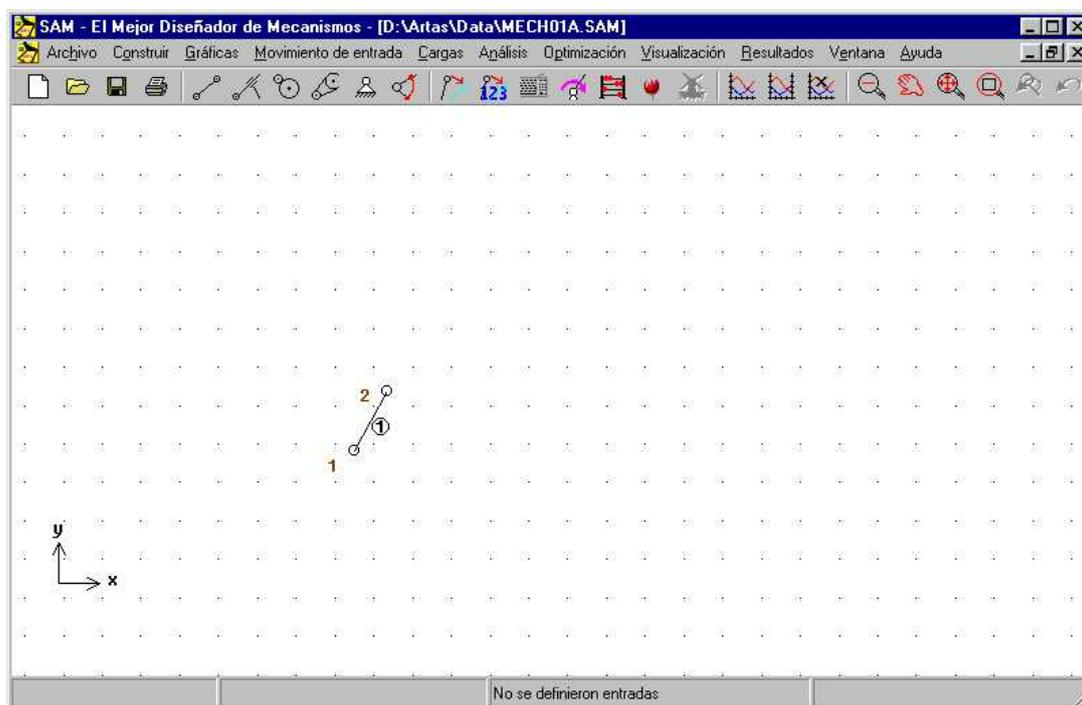
**Mueva el ratón al punto inicial del elemento y presione el botón izquierdo para crear el primer nodo.**

*Mientras mueve el ratón, usted puede ver las coordenadas actuales del ratón en la barra de estado, parte inferior de la ventana.*

**Mueva el ratón al punto final del elemento y presione el botón izquierdo para terminar la creación de un elemento Viga.**

*Mientras mueve el ratón, se mostrará la forma actual del elemento. Si desea cancelar el proceso de creación a mitad de camino (se ha seleccionado el primer nodo pero no el segundo) presione el botón derecho del ratón una vez que haya creado un elemento y si desea borrarlo, puede escoger Eliminar desde el menú construir y clic en el elemento que desea eliminar.*

*Su pantalla lucirá parecida a esta:*

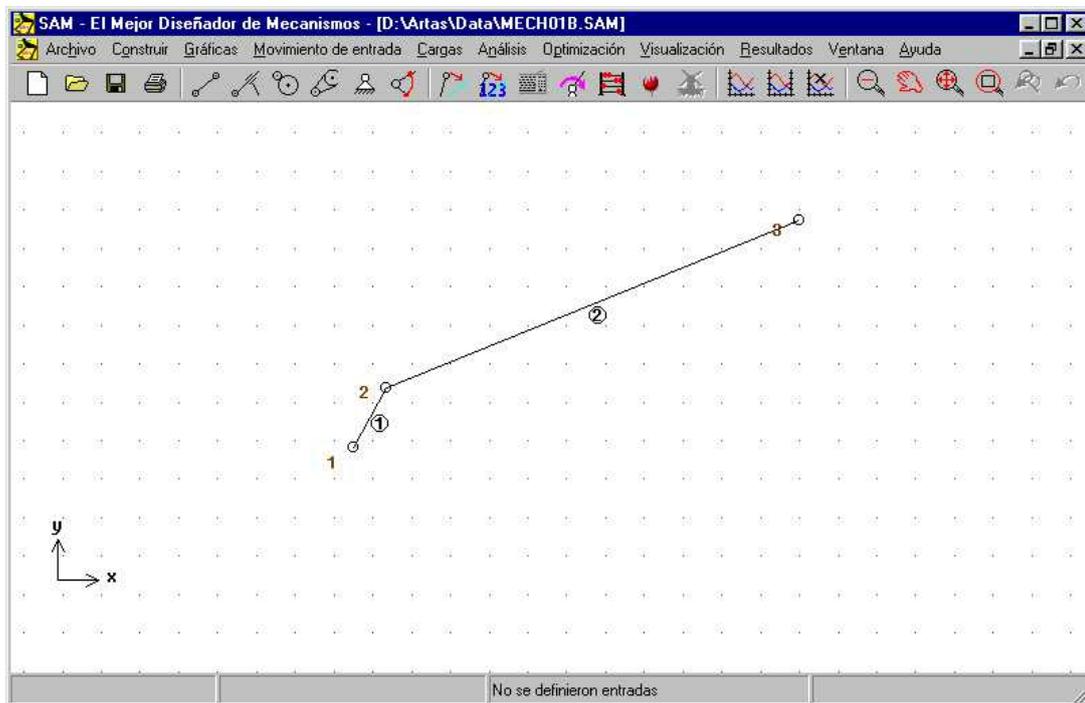


*El área de trabajo después de la creación del primer elemento.*

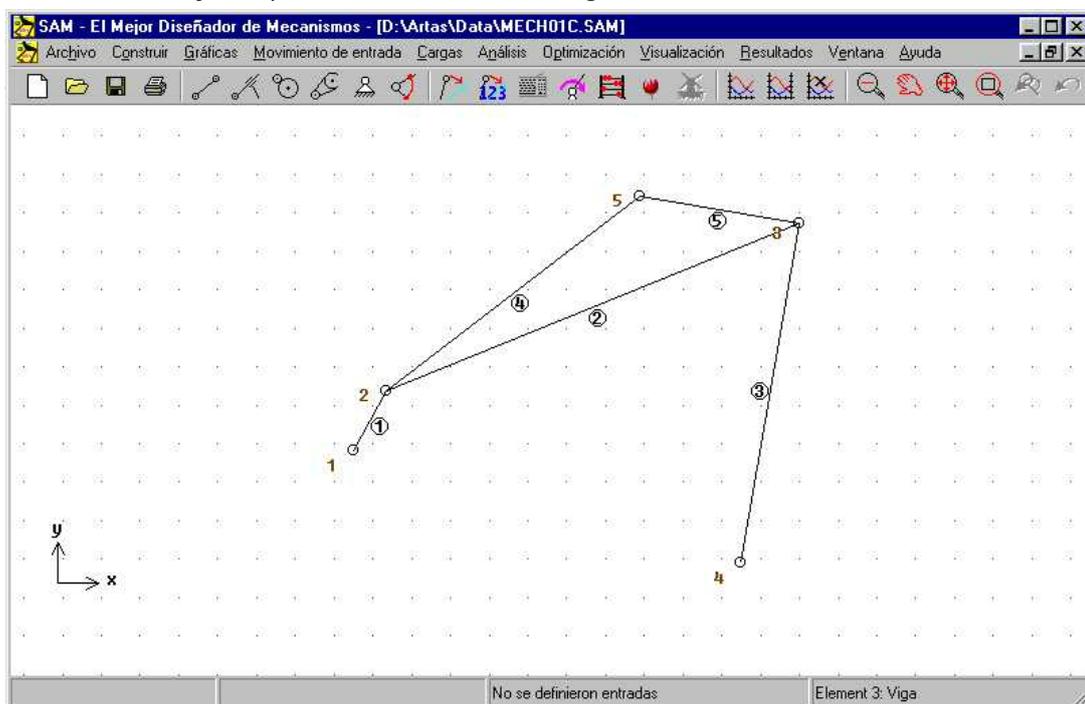
**Cree el segundo enlace. Mueva el ratón al nodo del primer elemento y haga clic una vez, luego mueva el ratón a una posición nueva y clic nuevamente.**

*El segundo enlace se crea de la misma forma, excepto que uno de los nodos del elemento nuevo tiene que coincidir con el nodo ya existente del primer elemento para crear una conexión.*

A medida que el ratón se acerca a un nodo existente, la forma del cursor cambia para indicar que se ha encajado a ese nodo. Cuando se hace clic, se usará el nodo existente en vez de crear uno nuevo.



El área de trabajo después de la creación del segundo enlace.

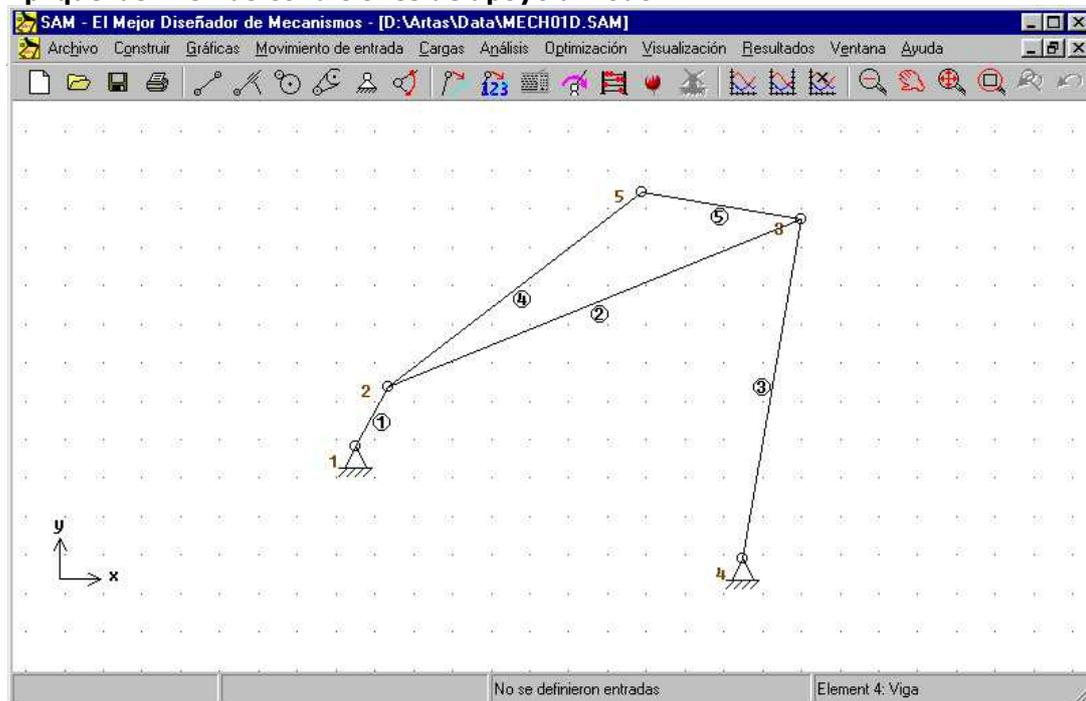


Todos los elementos de un mecanismo de 4 barras se han ensamblado.

Seleccione Fijar Nodo ("x" y/o "y") desde el menú Construir o haga clic en , luego clic el Nodo 1 y mueva el ratón alrededor del nodo hasta que se muestre la condición de apoyo. Luego presione el botón izquierdo del ratón nuevamente.

Como verá, la condición de apoyo cambia desde el apoyo "x" hasta el apoyo "y" dependiendo de la posición del cursor con respecto al nodo que usted ha seleccionado. Esta es una forma muy práctica de aplicar las condiciones de apoyo.

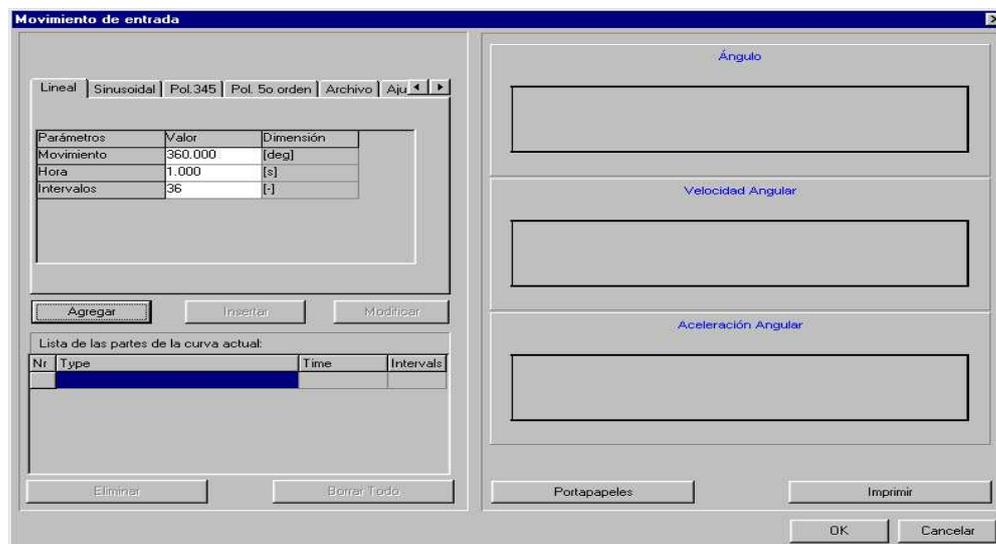
#### Aplique las mismas condiciones de apoyo al nodo 4.



Mecanismo de 4 barras incluyendo las condiciones de apoyo

Seleccione el **Ángulo** desde el menú **Movimiento de Entrada** o haga clic  y luego clic en el nodo 1.

Aparecerá el cuadro de diálogo **Movimiento de Entrada**. La parte central del cuadro de diálogo de entrada está formada por un cuadro de lista, el cual contiene una lista secuencial de bloques de movimientos básicos (la gráfica muestra la equivalencia de estos datos). Inicialmente, esta lista está vacía.



cuadro de diálogo *Movimiento de Entrada*

### Haga clic en el botón "Agregar"

Este agregará la ley de movimiento actualmente activo y los datos actuales de movimiento (movimiento, duración, y número de pasos) a la lista de movimiento. Además, la representación gráfica se actualizará. Repitiendo este proceso, es muy fácil definir toda clase de movimientos de entrada combinando las leyes básicas del movimiento. Si desea eliminar un elemento de la lista, simplemente actívelo haciendo clic una vez y presione el botón "Eliminar". Para modificar una entrada, tiene que activarla y presionar el botón "Modificar".

cuadro de diálogo *Movimiento de Entrada*, después que se ha agregado a la lista de movimiento una ley estándar de movimiento

**Presione Aceptar para usar el movimiento de entrada actual.**

**Desde el menú *Visualización*, seleccione *Animación* o haga clic en **

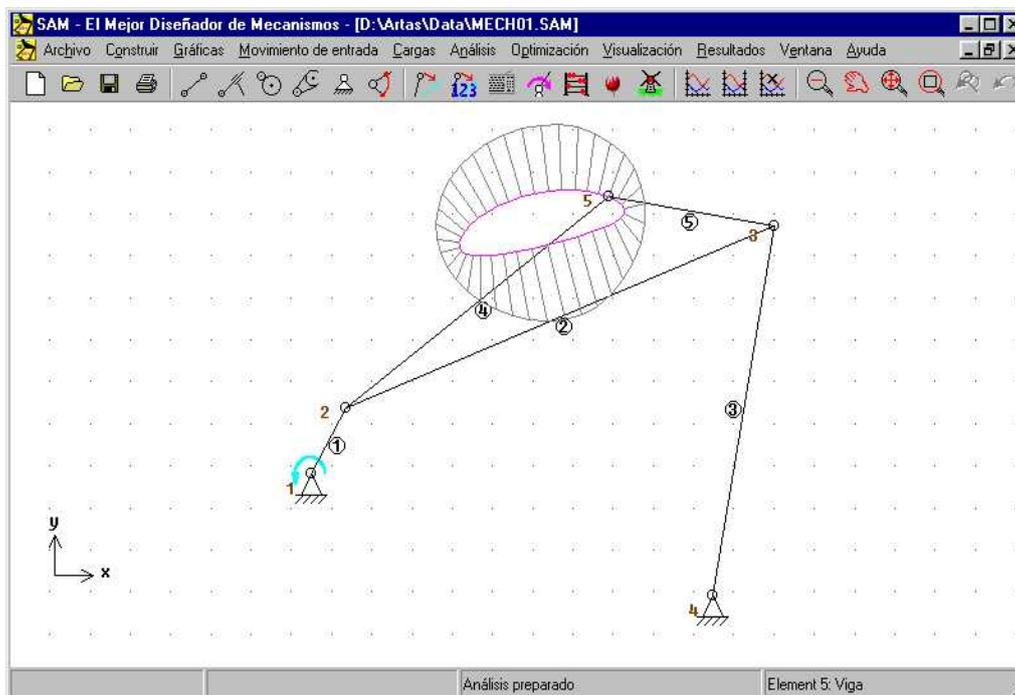
Ahora verá una animación del mecanismo.

**Seleccione *Ruta* desde el menú *Visualización* y clic en el punto acoplador (nodo 5)**

Ahora verá la ruta de ese punto.

**Seleccione el *Hodógrafo* desde el menú *Visualización* y haga clic en el punto acoplador.**

Además de la ruta del nodo, verá el hodógrafo de velocidad.



La ruta del hodógrafo de velocidad del punto acoplador

## Consideraciones de Modelamiento

### Unidades

El uso correcto de las unidades de Ingeniería en programas de análisis siempre es un aspecto muy importante. Para facilitar las cosas, hemos suministrado gran flexibilidad, es decir que usted puede cambiar el sistema de unidades en cualquier momento desde el menú Archivo/Preferencias/Unidades y SAM automáticamente re-escalará todos los datos disponibles y mostrará las unidades escogidas.

---

Nota : Los datos siempre se almacenan e interpretan de acuerdo con el sistema de unidades SI(rad). Mientras abra un archivo (Archivo de proyecto de SAM, archivo de movimiento o archivo de referencia de optimización) los datos de ese archivo se interpretan de acuerdo con el sistema de unidades SI(rad) y se convierten al sistema de unidades actualmente activo.

---

En el menú Archivo/Preferencias/Números, puede seleccionar la forma en la cual se representan los números reales. En el cuadro de diálogo Resultados/Exportar, puede definir diferentes especificaciones que solamente afectan a los datos exportados.

---

Nota: El número de dígitos que seleccione solamente afecta la forma en que se muestra el número. La precisión interna es igual al procesador de punto flotante, de tal forma que cualquier cantidad de dígitos entrada, se preserva. (pero tal vez no se muestre, si usted ha seleccionado un número de dígitos menor).

---

## Coordenadas Nodales Exactas

En el proceso de construcción de un mecanismo, usualmente usará el ratón para posicionar un nodo. Sin embargo, en cierto momento definitivamente necesitará entrar coordenadas nodales exactas. Simplemente sostenga la barra espaciadora mientras arrastra un nodo y aparecerá un cuadro de diálogo con varias opciones para la "construcción" de coordenadas nodales exactas. También puede usar el botón  para modificar las coordenadas del nodo.

---

En general el botón  del teclado le permite entrar manualmente o seleccionar en cualquier etapa.

---



Cuadro de diálogo para la "Construcción" de coordenadas nodales exactas

La opción de coordenadas polares y cartesianas (relativas) no necesita explicación adicional. La última opción "intersección" puede localizar la intersección de dos círculos con nodos centrales N1 y N2 y radii L1 y L2, respectivamente. Puede seleccionar entre las dos intersecciones a través de la casilla de verificación. Los datos CAD pueden importarse en el formato DXF y el ratón puede moverse rápidamente a todos los puntos DXF. Esta función también facilita la creación de coordenadas nodales exactas.

Para información más detallada consúltese el manual del usuario que se puede descargar desde [www.artas.nl](http://www.artas.nl)

## C. SÍNTESIS DE GENERACIÓN DE FUNCIÓN CON CUATRO PUNTOS DE PRECISIÓN

### C.1. PIVOTES FIJOS NO ESPECIFICADOS

Se considera el mecanismo de cuatro barras mostrado en la figura C-1, en el que se identifican el eslabón de entrada, motriz o conductor 2, el eslabón de salida, seguidor o conducido 4 y el eslabón acoplador 3.

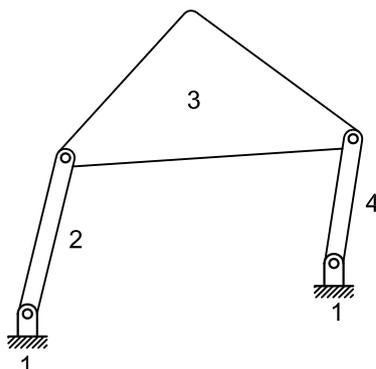


Fig. C-1: Mecanismo de cuatro barras

Supóngase que el mecanismo cambia de posición al girar el eslabón 2 desde la posición inicial a una posición cualquiera, con lo que los eslabones 3 y 4 adquieren las nuevas posiciones mostradas en la figura C-2.

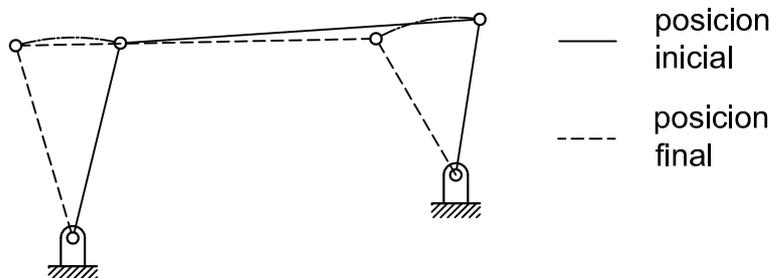
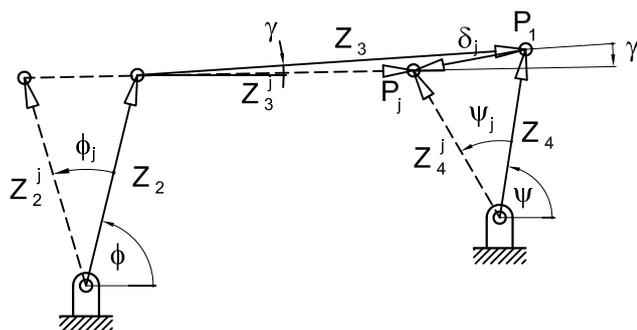


Fig. C-2: Posiciones del eslabonamiento debido a un giro del motriz

El mecanismo se descompone en una diada constituida por los eslabones motriz y acoplador y una cadena abierta auxiliar de eslabón único formada por el conducido. Las longitudes significativas de los eslabones están dadas por los vectores posición de los pares cinemáticos<sup>1</sup> del mecanismo y se representan vectorialmente en la figura C-3.

<sup>1</sup> Par cinemático – Unión rotatoria eslabón-eslabón.

Fig. C-3: Representación vectorial<sup>2</sup>

Los puntos de precisión para el caso de la generación de función en el mecanismo de cuatro barras están especificados por el par cinemático de rotación  $P$  entre el eslabón acoplador y el conducido y se denotan en la figura 3 como  $P_1$  y  $P_j$  para la posición inicial y la  $j$ -ésima respectivamente; adicionalmente se muestra el vector desplazamiento  $\delta_j$  entre ambas posiciones. La primera ecuación vectorial de lazo cerrado que se puede establecer para la diada  $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3$  es:

$$\mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 + \delta_j - \mathbf{Z}_2^j - \mathbf{Z}_3^j = 0 \quad (\text{C.1})$$

Si se utiliza los números complejos para identificar a los vectores mediante su forma polar, entonces:

$$\mathbf{Z} = ze^{i\theta} \quad (\text{C.2})$$

donde la nomenclatura de la ecuación (C.2) está asociada a la figura C-4:

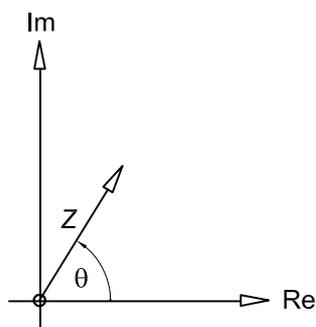


Fig. C-4: Forma polar de un número complejo

La ecuación (C.1) se puede reescribir como:

$$\mathbf{Z}_2^j - \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3^j - \mathbf{Z}_3 = \delta_j$$

y aplicando la forma polar:

$$z_2 e^{i(\phi_j + \phi)} - z_2 e^{i\phi} + z_3 e^{i(\gamma_j + \gamma)} - z_3 e^{i\gamma} = \delta_j$$

que finalmente se simplifica a:

<sup>2</sup> La notación vectorial en el presente anexo se expresará con letras en negrilla, tanto en gráficos como ecuaciones.

$$\mathbf{Z}_2 \left( e^{i\phi_j} - 1 \right) + \mathbf{Z}_3 \left( e^{i\gamma_j} - 1 \right) = \delta_j \quad (\text{C.3})$$

conocida como la “ecuación estándar de una diada”, además se puede escribir, para el eslabón 4:

$$\mathbf{Z}_4^j - \mathbf{Z}_4 = \delta_j$$

por lo que:

$$\mathbf{Z}_4 \left( e^{i\psi_j} - 1 \right) = \delta_j \quad (\text{C.4})$$

igualando las expresiones (C.3) y (C.4) se tiene:

$$\mathbf{Z}_2 \left( e^{i\phi_j} - 1 \right) + \mathbf{Z}_3 \left( e^{i\gamma_j} - 1 \right) = \delta_j = \mathbf{Z}_4 \left( e^{i\psi_j} - 1 \right) \quad (\text{C.5})$$

La ecuación (C.5) se aplica cuando el mecanismo se ha movido desde la posición inicial hasta la posición j-ésima. Si el mecanismo se mueve a través de de cuatro puntos de precisión entonces  $j = 2, 3, 4$  cuyos índices aplicados a la ecuación (C.5) generan el sistema de ecuaciones siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 \left( e^{i\phi_2} - 1 \right) + \mathbf{Z}_3 \left( e^{i\gamma_2} - 1 \right) &= \mathbf{Z}_4 \left( e^{i\psi_2} - 1 \right) \\ \mathbf{Z}_2 \left( e^{i\phi_3} - 1 \right) + \mathbf{Z}_3 \left( e^{i\gamma_3} - 1 \right) &= \mathbf{Z}_4 \left( e^{i\psi_3} - 1 \right) \\ \mathbf{Z}_2 \left( e^{i\phi_4} - 1 \right) + \mathbf{Z}_3 \left( e^{i\gamma_4} - 1 \right) &= \mathbf{Z}_4 \left( e^{i\psi_4} - 1 \right) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

La siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el sistema (C.6):

Variables prescritas	Incógnitas	Variables de elección libre
$\phi_2, \phi_3, \phi_4$ $\psi_2, \psi_3, \psi_4$	$\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$	$\mathbf{Z}_4, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

Una vez dimensionados los eslabones 2 y 3 a partir del sistema (C.6) con el procedimiento que se explicará a continuación, se puede calcular la dimensión del bastidor, como:

$$\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 \quad (\text{C.7})$$

En el sistema de ecuaciones (C.6) los términos de la derecha son conocidos, dado que  $\mathbf{Z}_4$  así como  $\psi_2, \psi_3$  y  $\psi_4$  están prescritos; sin embargo el sistema tiene tres

ecuaciones y apenas dos incógnitas  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$ , por lo que para que dicho sistema tenga solución la matriz ampliada del sistema debe tener rango 2, es decir:

$$\begin{vmatrix} e^{i\phi_2} - 1 & e^{i\gamma_2} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_2} - 1 \right) \\ e^{i\phi_3} - 1 & e^{i\gamma_3} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_3} - 1 \right) \\ e^{i\phi_4} - 1 & e^{i\gamma_4} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_4} - 1 \right) \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.8})$$

Si se desarrolla este determinante en base a la segunda columna que contiene a las variables de elección libre se tiene:

$$\Delta_1 + e^{i\gamma_2} \Delta_2 + e^{i\gamma_3} \Delta_3 + e^{i\gamma_4} \Delta_4 = 0 \quad (\text{C.9})$$

donde,

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4 \\ \Delta_2 &= - \begin{vmatrix} e^{i\phi_3} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_3} - 1 \right) \\ e^{i\phi_4} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_4} - 1 \right) \end{vmatrix} \\ \Delta_3 &= \begin{vmatrix} e^{i\phi_2} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_2} - 1 \right) \\ e^{i\phi_4} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_4} - 1 \right) \end{vmatrix} \\ \Delta_4 &= - \begin{vmatrix} e^{i\phi_2} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_2} - 1 \right) \\ e^{i\phi_3} - 1 & \mathbf{z}_4 \left( e^{i\psi_3} - 1 \right) \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Dado que  $\psi_2, \psi_3, \psi_4, \phi_2, \phi_3$  y  $\phi_4$  son valores prescritos, entonces  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  y  $\Delta_4$  son conocidos. La ecuación (C.9) se denomina “ecuación de compatibilidad” debido a que el conjunto de variables de elección libre  $\gamma_2, \gamma_3$  y  $\gamma_4$  que satisfacen dicha ecuación harán que el sistema (C.9) sea compatible, lo que significa que se puedan hallar soluciones para  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$ .

Es de notar que la ecuación de compatibilidad requiere únicamente la selección de una variables de elección libre digamos  $\gamma_2$ , las otras dos variables,  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$ , se calculan de dicha ecuación.

El cálculo de  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  puede desarrollarse convirtiendo la expresión (C.9) en dos ecuaciones escalares, pero este procedimiento conlleva a un sistema no lineal de resolución simple pero tediosa. Erdman y Sandor desarrollaron un esquema de solución analítica basado en la construcción geométrica mostrada en la figura C-5,

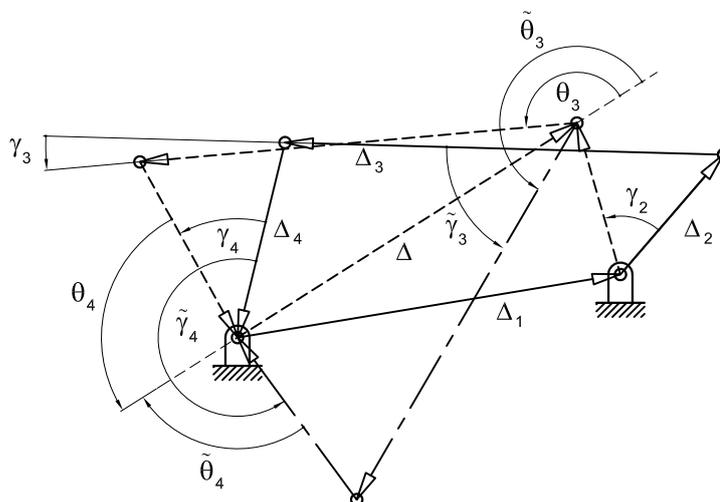


Fig. C-5: Solución geométrica de la ecuación de compatibilidad

La ecuación (C.9) puede ser vista como la ecuación de lazo cerrado de un eslabonamiento de cuatro barras denominado “eslabonamiento de compatibilidad” con “eslabón fijo”  $\Delta_1$  y “eslabones móviles”  $\Delta_2$ ,  $\Delta_3$  y  $\Delta_4$  y “rotaciones eslabonarias”  $\gamma_3$  y  $\gamma_4$  medidas desde la “posición inicial” del eslabonamiento de compatibilidad definido por  $\Delta_1 = -\Delta_2 - \Delta_3 - \Delta_4$ .

La expresión (C.9) se puede simplificar a:

$$e^{i\gamma_3} \Delta_3 + e^{i\gamma_4} \Delta_4 = -\Delta \quad (\text{C.11})$$

donde,

$$\Delta = \Delta_1 + e^{i\gamma_2} \Delta_2 \quad (\text{C.12})$$

De la construcción geométrica de la figura C5, se observa que existen dos soluciones posibles para  $\gamma_3$  y otras dos para  $\gamma_4$ , así como dos rotaciones para  $\theta_3$  y  $\theta_4$ .

Estas parejas de soluciones se denotan como  $\theta_3, \tilde{\theta}_3$ ;  $\theta_4, \tilde{\theta}_4$ ;  $\gamma_3, \tilde{\gamma}_3$  y  $\gamma_4, \tilde{\gamma}_4$ .

Se tiene que:

$$\cos \theta_3 = \frac{|\Delta_4|^2 - |\Delta_3|^2 - |\Delta|^2}{2|\Delta_3||\Delta|}$$

y,

$$\text{sen} \theta_3 = \left| \sqrt{1 - \cos^2 \theta_3} \right| \geq 0$$

Sea  $x = \cos \theta_3$ ,  $y = \text{sen} \theta_3 > 0$ , entonces,

$$\theta_3 = \text{atan2}(x, y) \text{ para hallar } 0 \leq \theta_3 \leq \pi \quad (\text{C.13})$$

por lo cual,

$$\tilde{\theta}_3 = 2\pi - \theta_3 \quad (\text{C.14})$$

$$\gamma_3 = \arg(\Delta) + \theta_3 - \arg(\Delta_3) \quad (\text{C.15})$$

$$\tilde{\gamma}_3 = \arg(\Delta) + \tilde{\theta}_3 - \arg(\Delta_3) \quad (\text{C.16})$$

de la misma forma se puede determinar  $\gamma_4, \tilde{\gamma}_4$  y  $\theta_4, \tilde{\theta}_4$ , que están dadas por:

$$\theta_4 = \text{atan2}(x, y) \text{ para hallar } 0 \leq \theta_4 \leq \pi$$

$$x = \cos \theta_4 = \frac{|\Delta_3|^2 - |\Delta_4|^2 - |\Delta|^2}{2|\Delta_4||\Delta|} \quad (\text{C.17})$$

$$y = \text{sen} \theta_4 = \left| \sqrt{1 - \cos^2 \theta_4} \right| \geq 0$$

$$\tilde{\theta}_4 = -\theta_4 \quad (\text{C.18})$$

$$\gamma_4 = \arg(\Delta) + \theta_4 - \arg(\Delta_4) \quad (\text{C.19})$$

$$\tilde{\gamma}_4 = \arg(\Delta) + \theta_4 - \arg(\Delta_4) + \pi \quad (\text{C.20})$$

Cualquier conjunto de valores  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  o  $\gamma_2, \tilde{\gamma}_3, \tilde{\gamma}_4$  sustituidas en dos de las ecuaciones del sistema (C.6) permite hallar  $\mathbf{Z}_2$  y  $\mathbf{Z}_3$ . Para el conjunto  $\gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$  y tomando las dos primeras ecuaciones del sistema (C.6) las soluciones son:

$$\mathbf{Z}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_2} - 1) & e^{i\gamma_2} - 1 \\ \mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_3} - 1) & e^{i\gamma_3} - 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\phi_2} - 1 & e^{i\gamma_2} - 1 \\ e^{i\phi_3} - 1 & e^{i\gamma_3} - 1 \end{vmatrix}} \quad (\text{C.21})$$

$$\mathbf{Z}_3 = \frac{\begin{vmatrix} e^{i\phi_2} - 1 & \mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_2} - 1) \\ e^{i\phi_3} - 1 & \mathbf{Z}_4 (e^{i\psi_3} - 1) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} e^{i\phi_2} - 1 & e^{i\gamma_2} - 1 \\ e^{i\phi_3} - 1 & e^{i\gamma_3} - 1 \end{vmatrix}}$$

y  $\mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4$  con  $\mathbf{Z}_4$  prescrito.

## C.2. PIVOTES FIJOS ESPECIFICADOS

En este caso se considera dada la ubicación de los pivotes fijos del mecanismo, es decir está prescrito  $\mathbf{Z}_1$ . Considérese la figura C-6:

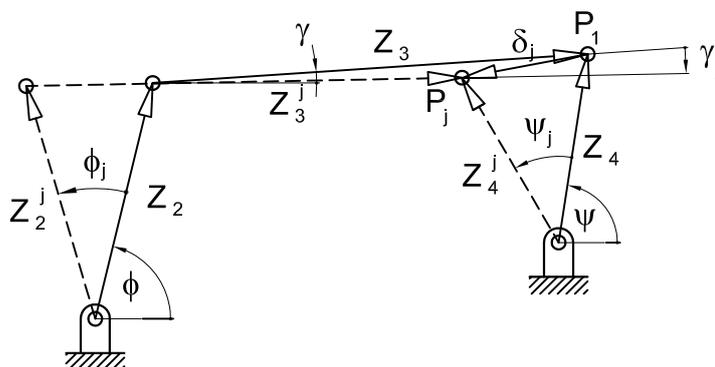


Fig. C-6: Representación vectorial

A partir de dicha gráfica se puede establecer para el bastidor y el eslabón conducido que:

$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{Z}_4 - \mathbf{Z}_1 \quad (\text{C.22})$$

y,

$$\mathbf{R}_j = \mathbf{Z}_4^j - \mathbf{Z}_1 = \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_j} - \mathbf{Z}_1 \quad (\text{C.23})$$

mientras que para la diada  $\mathbf{Z}_2\mathbf{Z}_3$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 &= \mathbf{R}_1 \\ \mathbf{Z}_2^j + \mathbf{Z}_3^j &= \mathbf{R}_j \end{aligned} \quad (\text{C.24})$$

A partir de las expresiones anteriores, se desarrolla el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 &= \mathbf{R}_1 \\
 \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_2} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_2} &= \mathbf{R}_2 \\
 \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_3} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_3} &= \mathbf{R}_3 \\
 \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_4} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_4} &= \mathbf{R}_4
 \end{aligned} \quad (\text{C.25})$$

Si se sustituye las expresiones que se derivan para cada posición de (C.23) en (C.25) y se reacomodan las expresiones, el sistema resultante es:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Z}_2 + \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Z}_4 &= -\mathbf{Z}_1 \\
 \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_2} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_2} - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_2} &= -\mathbf{Z}_1 \\
 \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_3} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_3} - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_3} &= -\mathbf{Z}_1 \\
 \mathbf{Z}_2 e^{i\phi_4} + \mathbf{Z}_3 e^{i\gamma_4} - \mathbf{Z}_4 e^{i\psi_4} &= -\mathbf{Z}_1
 \end{aligned} \quad (\text{C.26})$$

y la siguiente tabla muestra la secuencia de resolución en base a las variables prescritas, de elección libre y las incógnitas para el sistema (C.26):

Variables prescritas	Incógnitas	Variables de elección libre
$\phi_2, \phi_3, \phi_4$ $\psi_2, \psi_3, \psi_4$	$\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3, \mathbf{Z}_4$	$\mathbf{Z}_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$

En el sistema de ecuaciones (C.26) los términos de la derecha son conocidos, dado que  $\mathbf{Z}_1$  está prescrito; sin embargo el sistema tiene cuatro ecuaciones y apenas tres incógnitas  $\mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$  y  $\mathbf{Z}_4$ , por lo que para que dicho sistema tenga solución la matriz ampliada del sistema debe tener rango 3, es decir:

$$\begin{vmatrix}
 1 & 1 & 1 & -\mathbf{Z}_1 \\
 e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2} & -\mathbf{Z}_1 \\
 e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3} & -\mathbf{Z}_1 \\
 e^{i\phi_4} & e^{i\gamma_4} & -e^{i\psi_4} & -\mathbf{Z}_1
 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{C.27})$$

Si se desarrolla este determinante en base a la segunda columna que contiene a las variables de elección libre se tiene:

$$\Delta_1 + e^{i\gamma_2} \Delta_2 + e^{i\gamma_3} \Delta_3 + e^{i\gamma_4} \Delta_4 = 0 \quad (\text{C.28})$$

donde,

$$\Delta_1 = - \begin{vmatrix} e^{i\phi_2} & -e^{i\psi_2} & -Z_1 \\ e^{i\phi_3} & -e^{i\psi_3} & -Z_1 \\ e^{i\phi_4} & -e^{i\psi_4} & -Z_1 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\phi_3} & -e^{i\psi_3} & -Z_1 \\ e^{i\phi_4} & -e^{i\psi_4} & -Z_1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta_3 = - \begin{vmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\phi_2} & -e^{i\psi_2} & -Z_1 \\ e^{i\phi_4} & -e^{i\psi_4} & -Z_1 \end{vmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\phi_2} & -e^{i\psi_2} & -Z_1 \\ e^{i\phi_3} & -e^{i\psi_3} & -Z_1 \end{vmatrix}$$

Dado que  $\phi_2, \phi_3, \phi_4, \psi_2, \psi_3$  y  $\psi_4$  son valores prescritos, entonces  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  y  $\Delta_4$  son conocidos, y nuevamente como en el caso de pivotes fijos no especificados la ecuación (C.28) es una “ecuación de compatibilidad”, repitiéndose el mismo proceso del caso anterior en su tratamiento. Para el conjunto  $\gamma_2, \gamma_3$  y tomando las tres primeras ecuaciones del sistema (C.26) las soluciones son:

$$Z_2 = \frac{\begin{vmatrix} -Z_1 & 1 & -1 \\ -Z_1 & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2} \\ -Z_1 & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2} \\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3} \end{vmatrix}} \quad Z_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -Z_1 & -1 \\ e^{i\phi_2} & -Z_1 & -e^{i\psi_2} \\ e^{i\phi_3} & -Z_1 & -e^{i\psi_3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2} \\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3} \end{vmatrix}}$$

$$Z_4 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -Z_1 \\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -Z_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i\phi_2} & e^{i\gamma_2} & -e^{i\psi_2} \\ e^{i\phi_3} & e^{i\gamma_3} & -e^{i\psi_3} \end{vmatrix}} \quad (C.29)$$

### C.3. CASO DE APLICACIÓN.

Se desea sintetizar un mecanismo de cuatro barras cuyo objetivo es elevar el conenedor de un volquete desde una posición horizontal  $0^\circ$ , hasta una posición máxima de  $48^\circ$ ; se espera que el cajón pase por las posiciones intermedias de  $15^\circ$  y  $30^\circ$ . Adicionalmente se prevé que los pivotes de bastidor estén fijos al chasis del volquete en los puntos O y A indicados en la figura C-7,

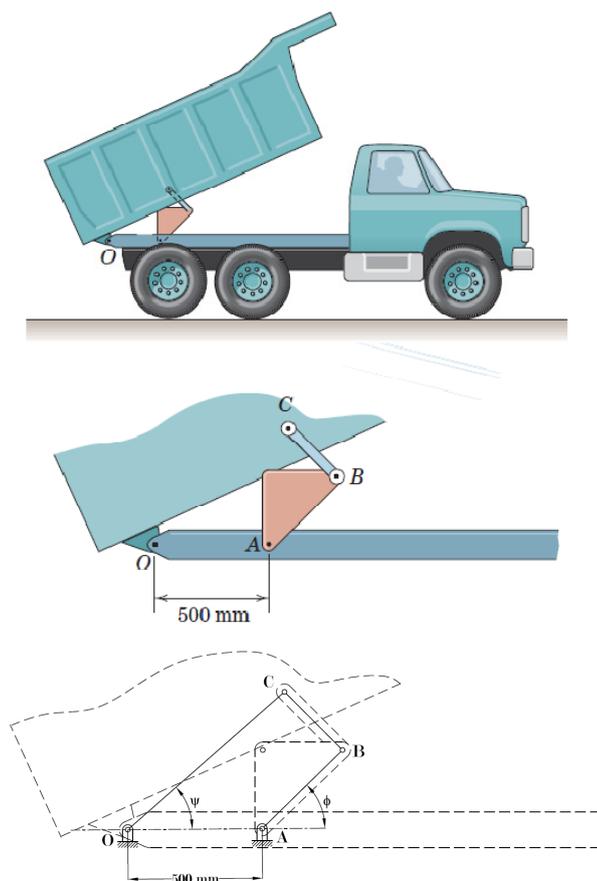


Fig. C7: Condiciones del mecanismo de elevación de un volquete – Representación esquemática de variables

La implementación computacional de cálculo generada en MathCAD 15 es:

$$i := \sqrt{-1}$$

Ángulos de rotación del eslabón conductor...

$$\phi_2 := \quad \phi_3 := \quad \phi_4 :=$$

Ángulos de rotación del eslabón conducido...

$$\psi_2 := \quad \psi_3 := \quad \psi_4 :=$$

Ángulos del acoplador elegido...

$$\gamma_2 :=$$

Dimensiones del eslabón de bastidor...

$$Z_1 :=$$

Cálculo de  $\gamma_3$ ...

$$\Delta_1 := - \left| \begin{array}{ccc} i \cdot \phi_2 & -e^{i \cdot \psi_2} & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_3} & -e^{i \cdot \psi_3} & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_4} & -e^{i \cdot \psi_4} & -Z_1 \end{array} \right| \quad \Delta_2 := \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_3} & -e^{i \cdot \psi_3} & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_4} & -e^{i \cdot \psi_4} & -Z_1 \end{array} \right|$$

$$\Delta_3 := - \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & -e^{i \cdot \psi_2} & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_4} & -e^{i \cdot \psi_4} & -Z_1 \end{array} \right| \quad \Delta_4 := \left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & -e^{i \cdot \psi_2} & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_3} & -e^{i \cdot \psi_3} & -Z_1 \end{array} \right|$$

$$\Delta := \Delta_1 + e^{i \cdot \gamma_2} \cdot \Delta_2$$

$$x := \frac{(|\Delta_4|)^2 - (|\Delta_3|)^2 - (|\Delta|)^2}{2 \cdot |\Delta_3| \cdot |\Delta|}$$

$$y := \left| \sqrt{1 - x^2} \right|$$

$$\theta_3 := \text{atan2}(x, y)$$

$$\gamma_3 := \arg(\Delta) + \theta_3 - \arg(\Delta_3)$$

Cálculo de  $Z_2, Z_3$  y  $Z_4 \dots$

$$Z_2 := \frac{\left| \begin{array}{ccc} -Z_1 & 1 & -1 \\ -Z_1 & e^{i \cdot \gamma_2} & -e^{i \cdot \psi_2} \\ -Z_1 & e^{i \cdot \gamma_3} & -e^{i \cdot \psi_3} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & e^{i \cdot \gamma_2} & -e^{i \cdot \psi_2} \\ e^{i \cdot \phi_3} & e^{i \cdot \gamma_3} & -e^{i \cdot \psi_3} \end{array} \right|} \quad Z_3 := \frac{\left| \begin{array}{ccc} 1 & -Z_1 & -1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & -Z_1 & -e^{i \cdot \psi_2} \\ e^{i \cdot \phi_3} & -Z_1 & -e^{i \cdot \psi_3} \end{array} \right|}{\left| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & -1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & e^{i \cdot \gamma_2} & -e^{i \cdot \psi_2} \\ e^{i \cdot \phi_3} & e^{i \cdot \gamma_3} & -e^{i \cdot \psi_3} \end{array} \right|}$$

$$Z_4 := \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & e^{i \cdot \gamma_2} & -Z_1 \\ e^{i \cdot \phi_3} & e^{i \cdot \gamma_3} & -Z_1 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ e^{i \cdot \phi_2} & e^{i \cdot \gamma_2} & e^{i \cdot \psi_2} \\ e^{i \cdot \phi_3} & e^{i \cdot \gamma_3} & e^{i \cdot \psi_3} \end{pmatrix}}$$

Resultados...

$Z_2 =$

$Z_3 =$

$Z_4 =$

Con esta implementación escrita en MathCAD para valores prescritos de:

$$\phi_2 = 30^\circ; \quad \phi_3 = 55^\circ; \quad \phi_4 = 100^\circ$$

$$\psi_2 = 15^\circ; \quad \psi_3 = 30^\circ; \quad \psi_4 = 48^\circ$$

$$\gamma_2 = 9^\circ$$

$$Z_1 = 500$$

se obtiene los siguientes resultados,

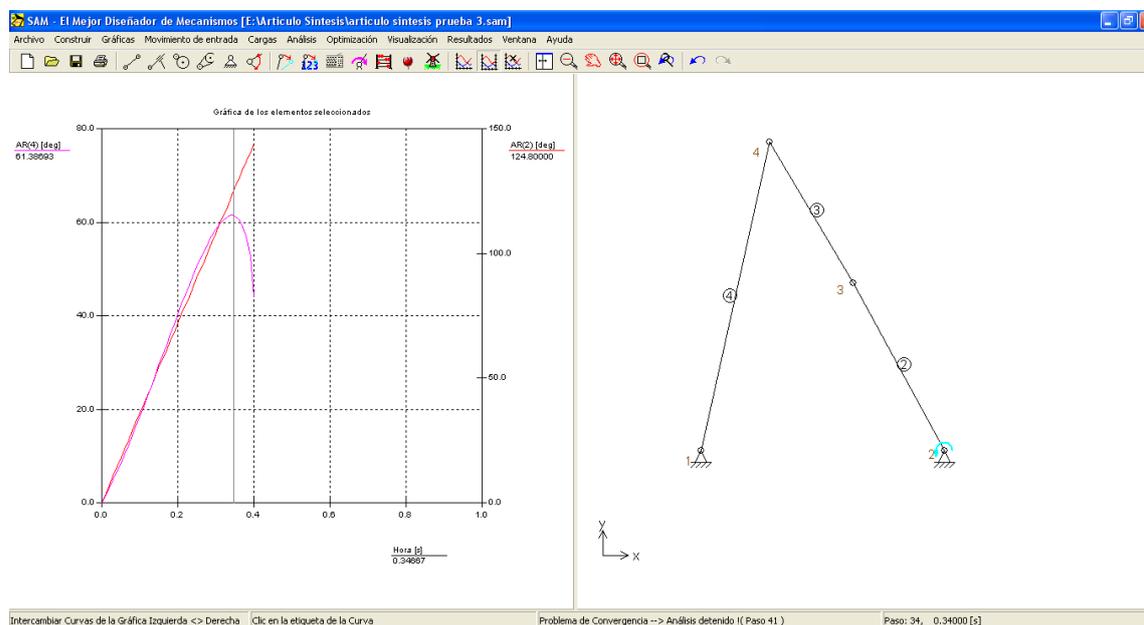
$$Z_2 = 393.465 - 27.571i$$

$$Z_3 = -265.755 + 209.058i$$

$$Z_4 = 627.71 + 181.487i$$

Se configura el mecanismo con las dimensiones sintetizadas en Artas SAM y se obtiene el rango de ángulos del eslabón conducido entre  $0^\circ$  y  $61^\circ$ . Evidentemente el mecanismo podría tener problemas de defectos de circuito e incluso podría desarmarse en determinada posición, para ello la simulación anterior es fundamental con el objeto de analizar defectos en la síntesis. La pantalla capturada del

mecanismo y la gráfica del ángulo relativo del movimiento del seguidor(eslabón 4) y del motriz(eslabón 2) se muestra a continuación:



La gráfica de ángulos relativos proporcionada por Artas SAM confirma que aproximadamente  $61.46^\circ$  de desplazamiento angular del eslabón de salida correspondiente a  $122.4^\circ$  del eslabón conductor en el mecanismo es el máximo desplazamiento angular posible; se puede verificar igualmente que más allá de los  $144^\circ$  de desplazamiento angular del eslabón motriz se desarma el mecanismo lo que es fácil confirmar con una simple construcción geométrica en AutoCAD.

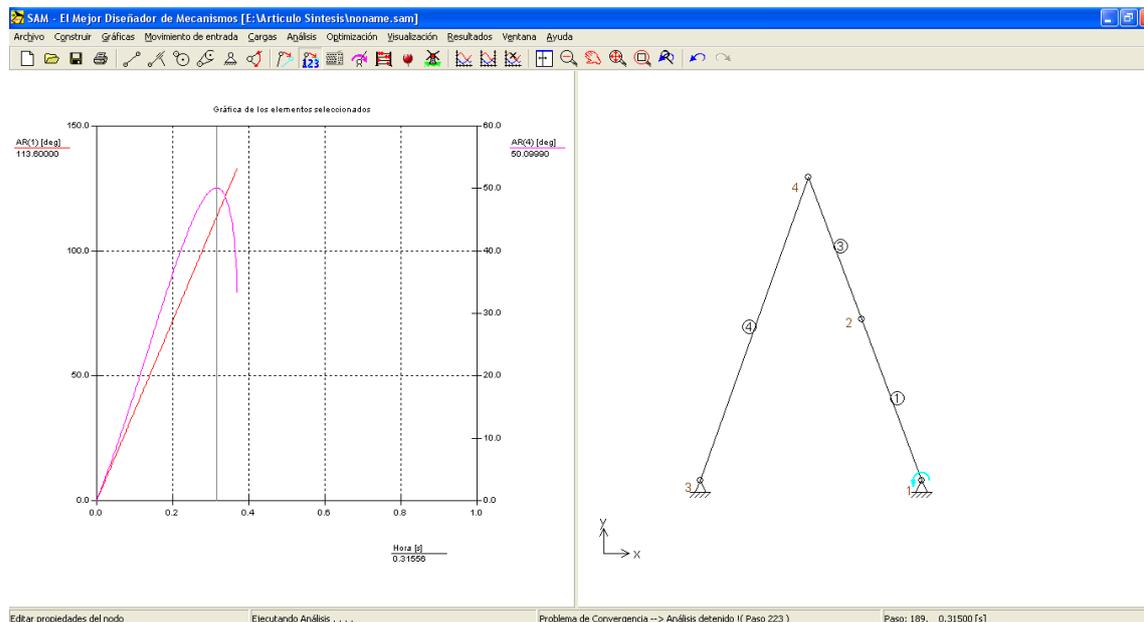
Aunque cumple con el rango del eslabón de salida, se podría mejorar el diseño probando por ensayo y error con nuevos valores para las variables prescritas y de elección libre; así para:

$$\begin{aligned}\phi_2 &= 32.8^\circ; & \phi_3 &= 60.8^\circ; & \phi_4 &= 110.4^\circ \\ \psi_2 &= 15.72969^\circ; & \psi_3 &= 30.60642^\circ; & \psi_4 &= 48.36473^\circ \\ \gamma_2 &= 9.77101^\circ \\ \mathbf{Z}_1 &= 500\end{aligned}$$

se obtiene,

$$\begin{aligned}\mathbf{Z}_2 &= 391.059 - 20.708i \\ \mathbf{Z}_3 &= -205.574 + 277.068i \\ \mathbf{Z}_4 &= 685.485 + 256.36i\end{aligned}$$

Simulado este mecanismo en Artas SAM produce el siguiente gráfico:



Este mecanismo tiene un máximo desplazamiento angular de  $50.0999^\circ$  (más cercano a los  $48^\circ$  requeridos) con un ángulo del eslabón motriz de  $113.6^\circ$ , desarmándose el mecanismo si el eslabón motriz supera los  $133.2^\circ$ .

Con cálculos adicionales se puede refinar aún más los valores deseados y con un proceso de optimización se podría controlar el ángulo de transmisión.

#### C.4. CONCLUSIONES.

La tarea de síntesis cinemática es fundamental en el diseño de mecanismos y máquinas pues le permiten al ingeniero de diseño tener una visión clara del funcionamiento del mecanismo, sus defectos y potencialidades.

A partir de esta síntesis el ingeniero de diseño podría mejorar el mecanismo y tomar algunas decisiones respecto a la forma de los eslabones y maneras de aplicar movimientos de entrada, por ejemplo en el caso brevemente analizado se podría construir un eslabón ternario de entrada para conectarlo a un cilindro hidráulico que actúe sobre el mecanismo dentro del rango de desplazamiento angular simulado para el eslabón motriz.

Respecto del método se puede concluir que dada la no linealidad de las ecuaciones involucradas en la metodología, usualmente se requiere de cierta práctica y

experiencia en la selección de valores de las variables de libre elección y las variables prescritas que no se definen en el diseño del mecanismo, adicionalmente hay que simular el mecanismo para descartar la presencia de defectos de circuito en el mecanismo dado que el método no advierte de su presencia durante los cálculos.

En posteriores trabajos se analizará metodologías que permiten elegir posicionamientos de los pivotes fijos y móviles mediante la teoría de Burmester de círculos de punto central y de punto circular, además se ampliará el estudio a más puntos de precisión finitos y a puntos de precisión infinitesimales, así como a eslabonamientos de más de cuatro barras. Adicionalmente se tratará con la síntesis de generación de trayectoria y de generación de movimiento o guiado de cuerpo rígido.