

*Estudio Teórico Experimental de
un Arreglo Rectangular en el Rango
de U.H.F*

*Tesis Previa a la Obtención del Título
de Ingeniero en la Especialización de
Electrónica y Telecomunicaciones de la
Escuela Politécnica Nacional*

Nelson O Pancho Yanza

Quito Junio 1974

Certifico:

*Que este trabajo ha sido
realizado en su totalidad
por el Sr. Nelson Pancho.*



Ing. Hugo Ruiz C.

Consultor de Tesis.

Quito, Junio de 1974.

A mis Padres
y Hermanos.

INDICE GENERAL

	Pág.
<i>Prólogo.</i>	
<i>Introducción.</i>	1
<u>Capítulo Primero:</u>	
<i>Exposición del Tema</i>	6
1-1 <i>Método del factor arreglo</i>	9
<u>Capítulo Segundo:</u>	
<i>Arreglos Lineales.</i>	12
2-1 <i>Antena dipolo</i>	12
2-1-1 <i>Dipolo de media longitud de onda.</i>	16
2-2 <i>Arreglos lineales.</i>	19
2-2-1 <i>Arreglo de dos elementos</i>	23
2-2-2 <i>Caso General de arreglo lineal y el factor arreglo.</i>	29
2-2-3 <i>Arreglos Broadside y Endfire.</i>	36
2-3 <i>Intensidad de radiación.</i>	41
2-4 <i>Arreglos en dos dimensiones</i>	43
<u>Capítulo Tercero:</u>	
<i>Estudio de las características de un arreglo rectangular.</i>	53

3-1	Configuración de campo.	53
3-2	Impedancia	58
	Resistencia mutua y Reactancia mutua	60
3-3	Directividad	68
3-3-1	Ganancia	70
3-4	Consideraciones para el diseño y aplicación a un caso práctico.	74
3-4-1	Diseño Mejorado.	78
3-4-2	Configuración de radiación de un arreglo rectangular en presencia de un reflector metálico plano.	80
3-4-3	Impedancia de un arreglo rectangular con reflector plano.	84
3-4-4	Ganancia directiva del arreglo rectangular en presencia de un reflector plano	86

Capítulo Cuarto:

4-	Comprobación experimental	91
4-1	Construcción	91
4-2	Obtención del diagrama de radiación.	93
4-3	Medida de impedancia	98
4-3-1	Consideración de la pérdida en el cable de alimentación	107
4-4	Medida de ganancia	108

Capítulo Quinto:

	<i>Conclusiones.</i>	111
5-1	<i>Conclusiones del estudio teórico efectuado.</i>	111
5-2	<i>Conclusiones de la comparación entre la parte teórica y la experimental correspondiente.</i>	112
5-3	<i>Recomendaciones útiles.</i>	114
	<i>Referencias</i>	116
	<i>Bibliografía</i>	117

INDICE DE DIAGRAMAS.

	PAG.
2-14 El factor arreglo como función del ángulo polar	33
2-15 Configuración de radiación para un arreglo Broad-side de cinco elementos en el que $s = \frac{\lambda}{4}$	38
2-17 Configuración de radiación de un arreglo Endfire de cinco elementos	40
2-19 Configuración de radiación de un arreglo plano	47
3-5 Curvas de resistencia mutua y reactancia mutua de dos antenas paralelas, colineales como una función del espaciamiento S entre ellas	64
3-11 Arreglo rectangular de dipolos, con las distancias a las que es aconsejable colocar los dipolos.	76
3-14 Diagrama de radiación de un arreglo rectangular 2×2 en el cual $A_y = \frac{5}{8} \lambda$, $A_z = \frac{\lambda}{2}$	83
4-2 Diagramas de radiación (experimental y teórico) en el plano horizontal de un arreglo rectangular 2×2 , en el cual $A_y = \frac{5}{8} \lambda$, $A_z = \frac{\lambda}{2}$	96
4-7 Diagrama de Smith empleado en el cálculo de la impedancia de entrada del arreglo rectangular.	107

INDICE DE TABLAS.

	PAG.
2-1 <i>Valores de campo eléctrico relativo para un arreglo broadside de dos elementos</i>	26
2-2 <i>Valores de campo eléctrico relativo para un arreglo broadside de cinco elementos.</i>	37
2-3 <i>Valores del factor arreglo de un arreglo plano formado de dos arreglos lineales broadside paralelos entre si.</i>	46
3-1 <i>Resistencia mutua como función de d y h para dos antenas delgadas de media longitud de onda.</i>	62
3-2 <i>Factor arreglo de un arreglo rectangular de dipolos en presencia de un reflector plano.</i>	82
4-1 <i>Valores de campo eléctrico en el plano horizontal para un arreglo rectangular 2 x 2.</i>	95

PROLOGO.

Con bastante frecuencia se subestima una parte importante en equipos electrónicos: la antena.

Lo anterior y mi afición por este tema me ha llevado a efectuar un estudio sobre los arreglos rectangulares de antenas.

La realización de este trabajo se justifica plenamente debido a la importancia de estos arreglos y a que no se cuenta con mucha bibliografía sobre este tema.

El presente trabajo ha sido posible gracias a la valiosa ayuda que gentilmente me han brindado el Dr. Kanti Hore, Ings. Nelson y Hugo Ruiz, así como también de todos y cada uno de los Sres. Profesores del departamento de Electrónica, quienes día a día imparten sus valiosos conocimientos, cumpliendo con ese sagrado ideal cual es el de contribuir al engrandecimiento de la Patria frente a ese gran reto económico, científico, técnico y cultural que tiene el Ecuador respecto a los otros países que conforman el Pacto Andino y a las grandes Potencias mundiales.

A todos Uds. Sres. Profesores del Departamento de Electrónica. les presento mi gratitud y este trabajo que estoy seguro pagará en algo sus anhelos y sacrificios.

Nelson O. Pancho y.

I N T R O D U C C I O N

Las antenas como parte constitutiva de los sistemas de telecomunicaciones tienen una enorme importancia, debido a esto se ha estimado conveniente realizar un estudio sobre los arreglos rectangulares de antenas en el rango de UHF, pues dichos arreglos por sus características de directividad tienen un gran valor en la ingeniería de antenas.

Este trabajo consta de dos partes: una teórica y una complementaria de ésta, la parte experimental.

En la parte teórica se trata especialmente del factor arreglo y se establecen los aspectos fundamentales sobre los cuales debe basarse el diseño de un arreglo rectangular.

La parte experimental contiene las diferentes mediciones para comprobar los resultados teóricos, y fue realizada en los laboratorios de Ingeniería Eléctrica de la Escuela Politécnica Nacional.

La secuencia de este trabajo de tesis es la siguiente:

En el capítulo primero se efectúa una exposición del problema; se describen los métodos con los cuales se puede realizar el estudio de los arreglos de antenas y se revisa en que consiste

el método del factor arreglo que es el utilizado en este trabajo.

En el capítulo segundo y teniendo en cuenta que un estudio de los arreglos rectangulares solamente es posible si se tiene un conocimiento de los arreglos lineales, se realiza un estudio de los arreglos lineales y del elemento básico de éstos : el di polo.

Se pone énfasis en la obtención del factor arreglo F_a , el cual es un escalar sin dimensión que no depende del elemento por si mismo.

Se desarrolla también aquello que se denomina rango visible de un arreglo como una función de la variable de espaciamiento " s " entre elementos.

En el capítulo tercero se estudian los arreglos rectangulares y sus diferentes características como son: configuración de radiación , directividad e impedancia.

Se exponen los aspectos que hay que tomar en cuenta para el diseño de un arreglo rectangular.

Y se estudia también un arreglo rectangular mejorado y su repercusión en las características de configuración de radiación, impedancia y directividad.

En los capítulos mencionados se ha expuesto la parte teórica y gracias a ella se ha podido diseñar un arreglo rectangular de antenas; a continuación es conveniente realizar la comprobación experimental, para lo cual es necesario efectuar diferentes mediciones como son : configuración de campo, impedancia y directividad.

Por último en el capítulo quinto se exponen las conclusiones obtenidas en la realización de este trabajo.

Es necesario mencionar que en la experimentación se empleó una señal de 600 MHz.

Al final de esta tesis se puede encontrar la bibliografía consultada.

C A P I T U L O

P R I M E R O

EXPOSICION DEL TEMA.

Es notoria la importancia que tienen las antenas, por ser parte fundamental de los equipos de telecomunicaciones.

Cada vez se hace más ineludible la necesidad de perfeccionar los equipos de telecomunicaciones; y esto ha obligado a mejorar cada una de las etapas de dichos sistemas, incluyéndose esa etapa que se denomina antena.

Existen muchas clases diferentes de antenas, que por sus características específicas tienen diferentes aplicaciones. En muchas ocasiones con elementos" simples, no es posible alcanzar las características de configuración y de directividad deseables; esto dió lugar a que se estudien los arreglos formados por estos " elementos" simples.

Un arreglo es un ordenamiento geométrico y eléctrico de antenas de la misma clase. Se pueden clasificar en tres grandes grupos según la disposición de elementos en el arreglo:

1. Arreglos lineales.
2. Arreglos rectangulares o planos.
3. Arreglos en tres dimensiones.

Los arreglos lineales a su vez se dividen en dos clases: arreglos lineales "Broadside" y arreglos lineales "Endfire". Los primeramente nombrados son aquellos en los cuales las corrientes en los elementos tienen la misma fase; se caracterizan por tener un lóbulo de radiación en una dirección perpendicular a la línea del arreglo. Como se verá en el desarrollo de este trabajo, son los más utilizados para la formación de los arreglos rectangulares.

En cambio los arreglos lineales "Endfire", tienen un defasamiento que es igual a $-\beta s$, siendo s el espaciamiento entre elementos.

Los arreglos rectangulares surgieron debido a la necesidad de contar con arreglos más directivos, y es debido a esto que los arreglos rectangulares tienen gran importancia en la ingeniería de antenas, y allí se encuentra una justificación para realizar su estudio.

Los arreglos rectangulares están formados de varios arreglos lineales; por eso conviene efectuar un estudio de estos arreglos lineales, lo cual permitirá una mejor comprensión de los arreglos rectangulares.

El diseño de un arreglo rectangular debe basarse sobre

tres características principales, a saber: configuración de radiación, impedancia y directividad.

La configuración de radiación, se puede obtener gráficamente utilizando el principio de multiplicación de configuraciones: " La configuración de radiación de un arreglo de fuentes no isotrópicas es igual al producto de la configuración individual por la configuración del arreglo de elementos isotrópicos con las mismas localizaciones y fases como en el arreglo original".

Se hace también necesario conocer las expresiones matemáticas que gobiernan tales configuraciones; el método a seguir es el de hallar el factor arreglo; pues éste da la configuración unitaria del arreglo de elementos isotrópicos.

En el caso de los arreglos rectangulares, se hace necesario conocer el factor arreglo para deducir la configuración de radiación de tales arreglos.

En lo referente al estudio de la impedancia, se empleó el método de Carter para el cálculo de la impedancia entre dos elementos lineales, y se aplicó este método para la obtención de la impedancia del arreglo rectangular.

Para el estudio de la ganancia, se empleó el método de encontrar el campo eléctrico del arreglo en función de la potencia

cia cedida al arreglo; y esto se divide para el campo eléctrico de un dipolo de media longitud de onda que recibe igual potencia que el arreglo.

También en este trabajo, se enfoca el estudio del arreglo rectangular en presencia de un reflector metálico, lo que constituye un caso real. Este reflector tiene la virtud de dirigir la radiación en una sola dirección, y produce variaciones en las diferentes características; debido a lo cual se ha efectuado un estudio de estas características para un arreglo rectangular en presencia del reflector metálico plano. Para esto fue necesario basarse en el método de imágenes.

A continuación conviene detallar el método del factor arreglo empleado en este estudio.

1-1 Método del factor arreglo.

Es sumamente útil encontrar el factor arreglo, por que las características de un arreglo de elementos isotrópicos dependen exclusivamente de este factor; así por ejemplo: la configuración de radiación unitaria está dada únicamente por este factor. También se requiere el factor arreglo para el cálculo de la ganancia y de la directividad; como se notará en el desarrollo de es

te trabajo.

La obtención del factor arreglo, se basa en la aplicación del teorema de la superposición : "El campo que produce un arreglo de fuentes es igual a la suma de los campos de las fuentes individuales".

El objetivo de los arreglos es reforzar la radiación en determinadas direcciones, y en otras direcciones anular la radiación. Todo este comportamiento se puede deducir estudiando el factor arreglo.

Es más difícil encontrar el factor arreglo para los arreglos en dos dimensiones; pero este problema queda solucionado, tratando al arreglo en dos dimensiones como un arreglo de arreglo; es decir se encuentra primeramente el factor arreglo del arreglo lineal en una dirección , y este factor encontrado se lo multiplica por el factor arreglo que se tiene en la otra dirección.

Cuando se tiene un reflector plano ante el arreglo, varía la configuración de radiación; entonces empleando el método de imágenes se tiene la idea de tener un arreglo en las tres dimensiones; por lo cual el mismo método desarrollado en este trabajo podría ser empleado cuando se tenga un arreglo real en las tres dimensiones.

CAPITULO

SEGUNDO

2. ARREGLOS LINEALES.

Antes de empezar el estudio de los arreglos rectangulares, es necesario estudiar los arreglos lineales; porque siendo estos últimos parte constitutiva de los arreglos rectangulares facilitan su comprensión y estudio. A su vez el conocimiento de los arreglos lineales supone un cabal conocimiento de ese elemento básico que es el dipolo, lo cual se va a efectuar de inmediato.

2-1 Antena Dipolo.

Conviene iniciar este estudio considerando el dipolo corto, que se lo denomina así porque es muy pequeño comparado a una longitud de onda. En general se considera un dipolo corto a aquel que es menor que 0.1λ .

Al dipolo corto que lleva una corriente uniforme se lo denomina dipolo elemental. Un dipolo extremadamente corto o Hertziano no es útil en la teoría de antenas; por ejemplo: las antenas dipolo se pueden considerar formadas por muchos dipolos elementales o Hertzianos.

La corriente en cada "dipolo elemental" puede variar en amplitud y fase, de tal manera que una corriente no uniforme en

una antena larga puede ser aproximada por un conjunto de dipolos elementales.

Cuando un dipolo está en una condición neutra y luego se hace fluir una corriente a través de él, se da lugar a que un extremo del dipolo adquiera cierta carga eléctrica y el otro, una carga eléctrica contraria. Si se invierte la dirección de la corriente, la carga desbalanceada en el dipolo, es primeramente neutralizada y luego invertida. Conclúyese entonces que una corriente que oscila da lugar a una carga variable y consecuentemente se produce un voltaje oscilante.

La corriente a lo largo del dipolo elemental es constante, pero puede tener una variación con respecto al tiempo.

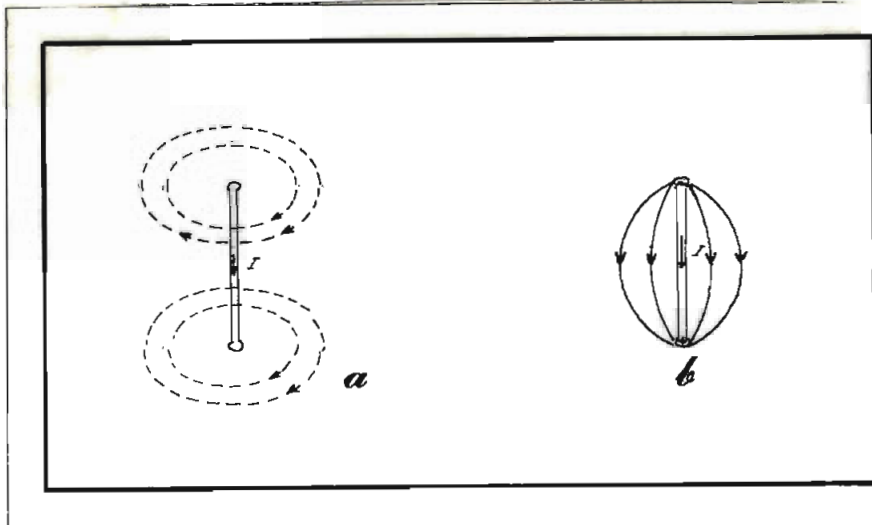


Fig. 2-1 a) Campo magnético en la cercanía de un dipolo Hertziano.
b) Campo eléctrico en la cercanía de un dipolo Hertziano.

Como se puede observar en la Fig. 2-1 y de acuerdo a la regla de la mano derecha, una corriente produce un campo magnético alrededor del elemento. A su vez una diferencia de potencial origina un campo eléctrico.

Los campos dibujados en la Fig. 2-1, corresponden a campos en la inmediata cercanía del dipolo, cuando se invierte la dirección del flujo de corriente, los campos también invierten su dirección de flujo.

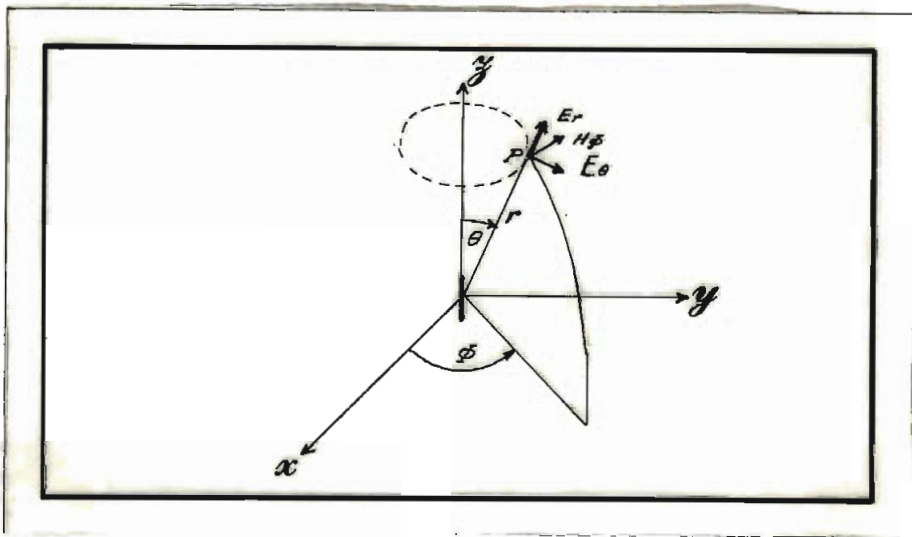


Fig. 2-2 Componentes de campo eléctrico y magnético de un elemento de corriente.

Considerando un elemento de corriente tal como el que se observa en la Fig. 2-2, las componentes de campo eléctrico y magnético son las que se dan a continuación: * [1]

* Los números entre corchetes significan las referencias las que se pueden consultar al final de esta tesis.

$$E_{\theta} = \frac{I d \sin \theta}{4\pi \epsilon} \left[\frac{-\omega \sin \omega t'}{r^2 v} + \frac{\cos \omega t'}{r^2 v} + \frac{\sin \omega t'}{\omega r^3} \right] \quad (2-1)$$

$$E_r = \frac{2 I d \cos \theta}{4\pi \epsilon} \left[\frac{\cos \omega t'}{r^2 v} + \frac{\sin \omega t'}{\omega r^3} \right] \quad (2-2)$$

$$H_{\phi} = \frac{I d \sin \theta}{4\pi} \left[\frac{-\omega \sin \omega t'}{r v} + \frac{\cos \omega t'}{r^2} \right] \quad (2-3)$$

En las expresiones anteriores de campo eléctrico y magnético se tiene que:

I = Corriente en el elemento.

d = longitud del elemento.

ω = frecuencia angular.

r = distancia entre el elemento y el punto en el cual se está calculando la componente de campo.

v = velocidad de la onda electromagnética.

ϵ = constante de permitividad del medio

$t' = t - \frac{r}{v}$

Como se puede notar, a grandes distancias del elemento de corriente influyen solamente los términos que varían con el inverso del radio, Estos son los campos distantes o de radiación.

La potencia total radiada por el elemento de corriente se puede obtener integrando el vector Poynting radial sobre la superficie esférica de radio r y centro en el elemento de corriente.

$$\text{Potencia} = P = 80 \pi^2 \left(\frac{d}{\lambda} \right)^2 I_{ef}^2 \quad [2] \quad (2-4)$$

Además:

$$P = R_{rad} \cdot I_{ef}^2$$

De donde:

$$R_{rad} = 80\pi^2 \left(\frac{d}{\lambda}\right)^2 \quad (2-5)$$

La expresión (2-5) es válida para un elemento hipotético de corriente, si se considera un "dipolo corto" práctico, se llegará a la conclusión de que éste radia 1/4 de la potencia que radiaría el elemento hipotético, pues la distribución de corriente varía linealmente de un máximo en el centro a un mínimo en los extremos; por lo tanto, la resistencia de radiación de un dipolo corto será la cuarta parte de la resistencia de radiación del elemento de corriente hipotético.

Para el dipolo corto: $R_{rad} = \pi^2 \left(\frac{l}{\lambda}\right)^2 \quad (2-6)$

2-1-1 Dipolo de Media longitud de Onda.

Cuando se consideran antenas reales, es decir antenas de mayores dimensiones que las antenas elementales, se necesita saber cual es su distribución de corriente, para poder calcular los campos electromagnéticos. La consideración de que la corriente es de tipo sinusoidal es la más cercana a la realidad lo cual se ha comprobado mediante datos experimentales.

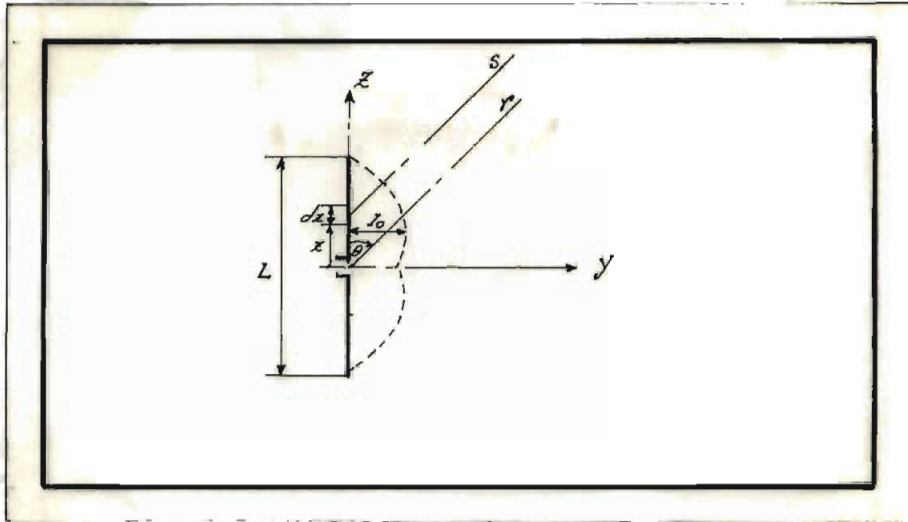


Fig. 2-3 Distribución de corriente en un dipolo de media longitud de onda.

Considerando una antena de longitud L y alimentada en el centro como en la Fig. 2-3 se tiene que: ^[3]

$$I = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} - z \right) \right] \quad \text{Para } z > 0 \quad (2-7)$$

$$I = I_0 \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} + z \right) \right] \quad \text{" } z < 0 \quad (2-8)$$

Donde: I_0 = valor máximo de la corriente
 λ = longitud de onda.

Como una antena puede ser considerada, formada por muchos dipolos elementales, en consecuencia sus campos eléctrico y magnético, pueden obtenerse integrando los campos producidos por cada dipolo elemental.

El campo magnético producido por un dipolo infinitesimal de longitud dz está dado por la siguiente expresión: [4]

$$dH_{\phi} = j \frac{I \sin \theta}{2 s \lambda} dz \quad (2-9)$$

Donde s es la distancia entre el dipolo elemental y el punto donde se está calculando el campo magnético.

Por lo tanto:

$$H_{\phi} = \int_{-L/2}^{L/2} dH_{\phi} \quad (2-10)$$

$$= j \frac{I_0}{2 \lambda} \sin \theta \left[\int_{-L/2}^0 \frac{1}{s} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} + z \right) \right] e^{-\beta s} dz + \int_0^{L/2} \frac{1}{s} \sin \left[\frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{L}{2} - z \right) \right] e^{-\beta s} dz \right] \quad (2-11)$$

Cuando s está en el denominador, se puede hacer la aproximación $s \approx r$, pero cuando s está en el numerador (como exponencial) se tendrá: $s = r - z \cos \theta$

La magnitud de la intensidad de campo magnético será:

$$H_{\phi} = \frac{I_0}{2 \pi r} \left[\frac{\cos \left[\frac{\beta L \cos \theta}{2} \right] - \cos \left[\frac{\beta L}{2} \right]}{\sin \theta} \right] \quad (2-12)$$

Como se sabe que:

$$E_{\theta} = \eta H_{\phi} \quad (2-13)$$

En donde: E_{θ} = intensidad de campo eléctrico en la dirección

η = impedancia intrínseca del medio.

H_{ϕ} = componente de campo magnético en la dirección

Por tanto:

$$E_{\theta} = \frac{60 I_0}{r} \left[\frac{\cos(\beta L \cos \theta) - \cos(\beta L)}{\sin \theta} \right] \quad (2-13)$$

Y para un dipolo de media longitud de onda:

$$H_{\phi} = \frac{I_0}{2\pi r} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right] \quad (2-14)$$

$$E_{\theta} = \frac{60 I_0}{r} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos \theta)}{\sin \theta} \right] \quad (2-15)$$

Como se verá posteriormente la expresión (2-15) es muy importante en la obtención del campo eléctrico total de un arreglo.

2-2 Arreglos Lineales.

En muchas aplicaciones no es posible con una simple antena conseguir las características de directividad o ancho de lóbulo requeridos, entonces es necesario emplear sistemas de antenas similares, con el objeto de superar estas dificultades; a éstos sistemas se los denomina arreglos.

El objeto de los arreglos lineales es producir un reforzamiento de radiación en determinadas direcciones mientras que en otras se anula la radiación.

Se demostrará que el campo eléctrico lejano de un arreglo

es igual al producto de dos factores: un factor correspondiente al elemento y un factor correspondiente al arreglo; el primero de estos factores es esencialmente el campo de un solo elemento; el segundo factor será un escalar, e independiente del elemento y se lo conoce con el nombre de factor arreglo.

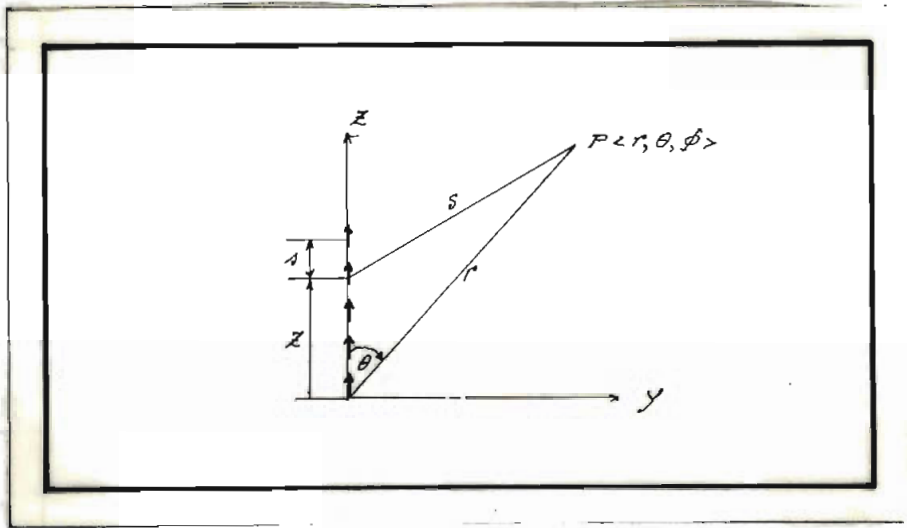


Fig. 2-4 Arreglo colineal de corrientes elementales.

Considerando la Fig. 2-4 en donde está representado un arreglo colineal de corrientes elementales, la componente \underline{z} de la distribución de corriente es: [5]

$$J_z = \delta(x) \delta(y) \sum_{n=0}^{N-1} I_n \delta(z - ns) \quad (2-16)$$

En donde s es la separación entre elementos e I_n es la corriente en el elemento n ésimo.

Conviene recordar que, por el principio de superposición, el campo producido por varias fuentes de corriente es igual a la

suma de los campos producidos por las corrientes individuales.

El potencial vectorial para esta distribución de corriente es: [6]

$$A_x = \iiint \frac{e^{-j\beta s}}{4\pi s} \delta(x) \delta(y) \sum_{n=0}^{N-1} I_n \delta(z - n\lambda) dx dy dz. \quad (2-17)$$

Realizando las simplificaciones anotadas anteriormente; esto es, $s \approx r$ para el denominador y $s = r - z \cos \theta$ en el exponencial:

$$\begin{aligned} A_x &= \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \int e^{j\beta z \cos \theta} \sum_{n=0}^{N-1} I_n \delta(z - n\lambda) dz. \\ &= \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n\lambda \cos \theta} \end{aligned} \quad (2-18)$$

Tomando en cuenta que: [7]

$E_\theta = j\omega\mu A_z \sin\theta$, entonces:

$$E_\theta = j\omega\mu \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n\lambda \cos \theta}. \quad (2-19)$$

Al sumatorio obtenido en la expresión anterior se lo denomina factor arreglo (FA) esto es:

$$FA = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n\lambda \cos \theta}. \quad (2-20)$$

Considerando el arreglo de corrientes elementales de la Fig. 2-5 la distribución de fuentes de corriente puede expresarse así:

$$J_x = \delta(x) \delta(z) \sum_{n=0}^{N-1} I_n \delta(y - n\lambda) \quad (2-21)$$

En donde s es el espaciamiento entre las corrientes elementales a lo largo del eje de coordenadas y , y α es el ángulo entre el eje del arreglo y la línea que une el punto en el que se requiere el campo y el origen.

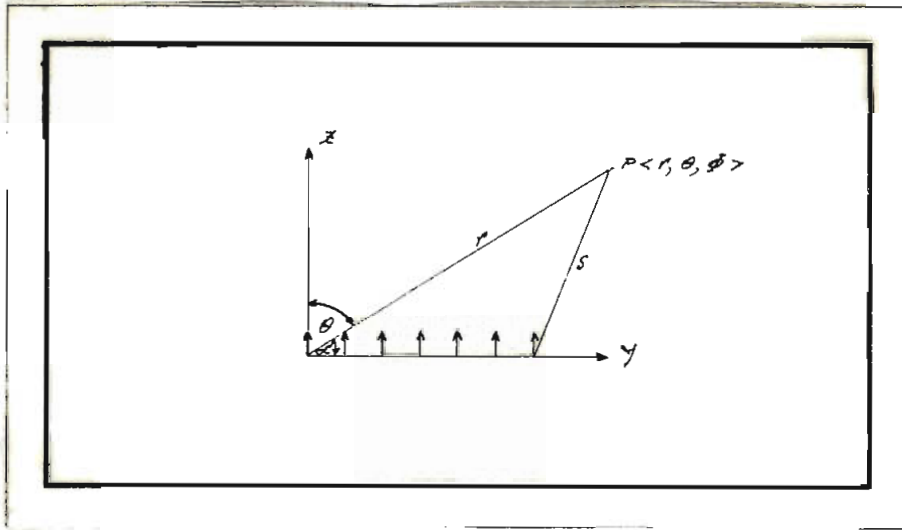


Fig. 2-5 Arreglo lineal de elementos de corriente paralelos.

Razonando en una manera similar que en el caso anterior el campo eléctrico para el arreglo de la Fig. 2-5 será:

$$E_{\theta} = j\omega\mu \frac{e^{-j\beta r}}{4\pi r} \sin\theta \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n s \cos\alpha} \quad (2-22)$$

También en este caso el campo eléctrico será igual al producto del campo eléctrico individual por el factor arreglo (FA).

Es notorio que el factor arreglo, en este caso es similar que en el caso anterior, con la única variante de que el ángulo θ ha sido cambiado por el ángulo α ; pero hay que observar que

Los ángulos θ y α , son ángulos comprendidos entre el eje del arreglo respectivo y la línea que une el punto donde se está calculando el campo con el origen de coordenadas.

De esta manera, se ha obtenido una conclusión muy valiosa [8] que el campo eléctrico de un arreglo es igual al campo eléctrico de un elemento por el factor arreglo. El método puede ser extendido a arreglos más complicados.

2-2-1 Arreglo de dos Elementos.

Un caso importante de arreglo es aquel de dos fuentes puntuales isotrópicas, pues su estudio constituye el fundamento de los arreglos con un mayor número de elementos. Se va a tratar el caso en que ambas fuentes tienen las mismas amplitud y fase.

Considerese el arreglo de dos fuentes isotrópicas como el de la Fig. 2-6

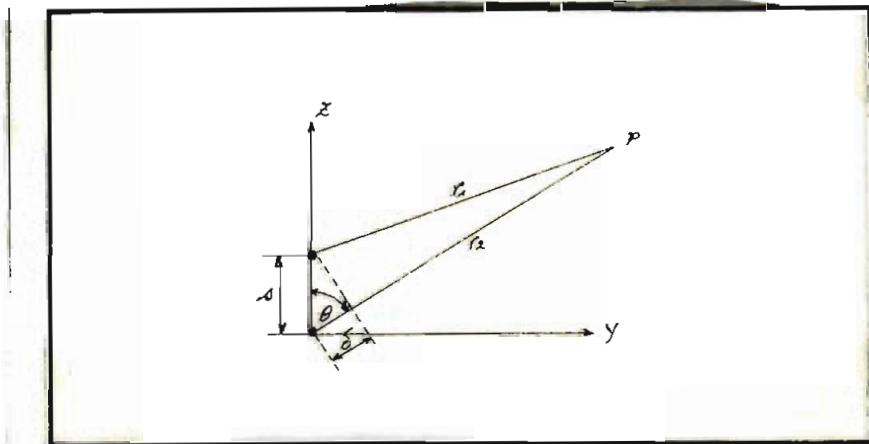


Fig. 2-6 Arreglo de dos fuentes isotrópicas.

Debido a que el punto P es un punto distante del arreglo se tiene que tanto r_1 como r_2 serán mucho mayores que la distancia s .

Puede deducirse fácilmente que: $r_1 = r_2 - s \cos \theta$

Como P es un punto cualquiera en el espacio, entonces una expresión de campo calculada para el punto P es una expresión general de la intensidad de campo.

Debido a que: $r_1 = r_2 - s$, el máximo valor de s será s y esto ocurriría cuando el punto P se encuentra sobre el eje de coordenadas Z , es decir cuando el ángulo θ es igual a cero grados. Y puesto que $r_1 \gg s$ y $r_2 \gg s$, entonces $s \ll r_1$ y $s \ll r_2$, de ahí que la radiación proveniente de las fuentes 1 y 2 sufrirá la misma atenuación. En cambio las fases relativas de los dos campos provenientes de las fuentes isotrópicas 1 y 2, tendrán una diferencia de fase dependiente de la distancia s .

La diferencia de fase debida a s , será $\frac{2\pi}{\lambda} s$ (radianes)

Si se considera que α es la diferencia de fase inicial entre las dos fuentes, entonces la diferencia de fase total será:

$$\psi = \alpha + \frac{2\pi}{\lambda} s \cos \theta = \alpha + \beta s \cos \theta \quad (\text{radianes}) \quad (2-23)$$

El campo total E_T en el punto P debido a las fuentes isotrópicas 1 y 2 será:

$$E_T = E_1 + E_2$$

En donde: $E_2 = KE_1 e^{j\psi}$

Por lo tanto:

$$E_T = E_1 (1 + Ke^{j\psi})$$

La magnitud del campo total será: $|E_T| = E_1 \sqrt{(1 + K \cos \psi)^2 + K^2 \sin^2 \psi}$

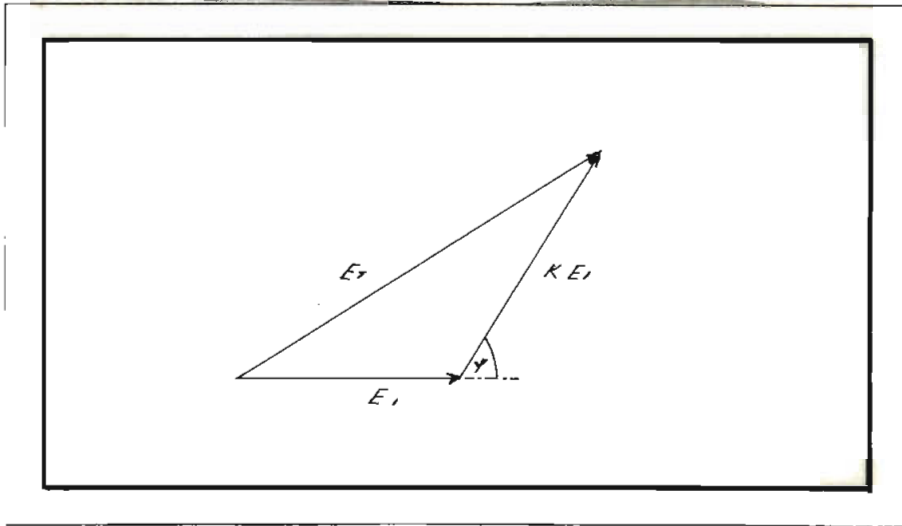


Fig. 2-7 El campo eléctrico total es igual a la suma vectorial de las componentes de campo.

Observando la Fig. 2-7 para $K = 1$ o sea cuando ambas antenas tienen la misma corriente se obtiene que:

$$E_T = 2E_1 \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) = 2E_1 \cos\left[\frac{d \sin \theta}{\lambda} + \frac{\alpha}{2}\right] \quad (2-24)$$

Si en la expresión anterior se establece que el máximo valor $2E_1$ sea igual a 1 (normalizando) y que $d = \frac{\lambda}{2}$ o sea que existe un espaciamiento de media longitud de onda entre las fuentes

de radiación, entonces , se tendrá:

$$E_T = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos\theta\right) \quad (2-25)$$

Para la obtención de la expresión anterior se ha establecido que $\alpha = 0^\circ$ o sea que no existe ningún defasamiento entre las fuentes(caso Broadside).

La expresión (2-25) puede ser representada asumiendo diferentes valores para el ángulo θ , en esta forma se puede calcular la tabla 2-1.

θ (GRADOS)	$\cos \theta$	E_T
0	1	0
10	.984	.253
20	.939	.958
30	.866	.209
40	.766	.359
50	.642	.533
60	.500	.707
70	.342	.859
80	.173	.968
90	0	1

TABLA 2-1 Valores de campo eléctrico relativo para un arreglo Broadside de dos elementos.

La configuración de campo eléctrico puede observarse en la Fig. 2-8.

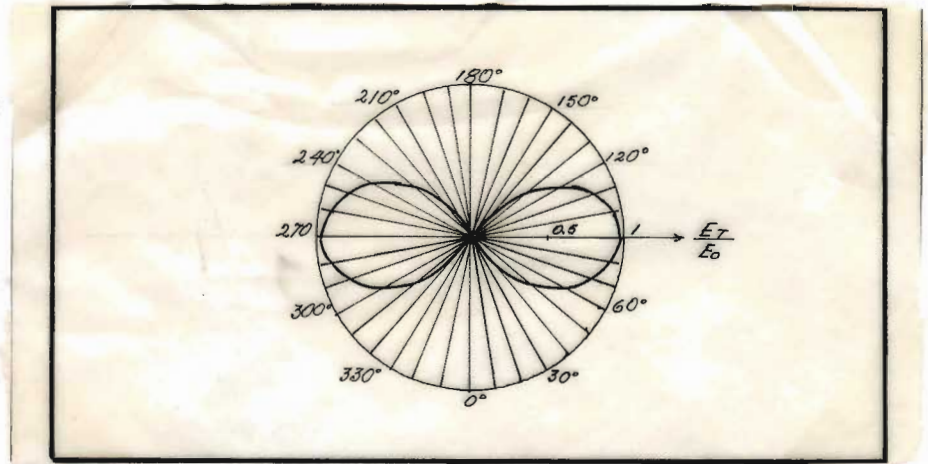


Fig. 2-8 Configuración de campo eléctrico para un arreglo Broad side de dos elementos.

En un sentido tridimensional la configuración será aquella que resulta de girar la configuración de la Fig. 2-8 alrededor del eje Z o línea del arreglo.

Cuando las fuentes de radiación 1 y 2 se encuentran equidistantes del origen de coordenadas, como se observa en la Fig. 2-9 se encuentra que:

$$E_T = E_1 \left(e^{j\frac{\pi}{2}} + e^{-j\frac{\pi}{2}} \right) \text{ o sea que: } E_T = 2E_1 \cos\left(\frac{\pi d}{\lambda} \cos\theta\right) \quad (2-26)$$

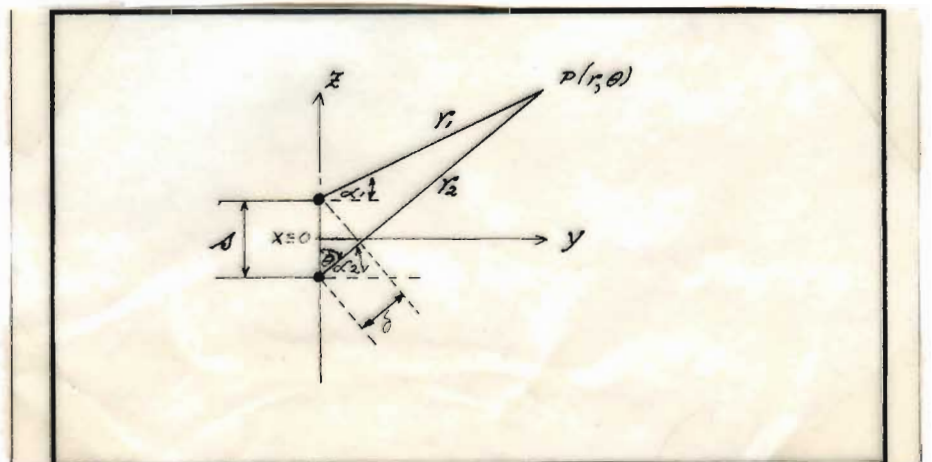


Fig. 2-9 Arreglo de dos elementos situados equidistantemente del origen.

Si se establece que $s = \frac{\lambda}{2}$ en la expresión (2-26) entonces:

$$E = 2E_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \quad (2-27)$$

Normalizando esta expresión o sea cuando $2E_1 = 1$ se obtiene:

$$E = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right) \quad (2-28)$$

Cabe anotar con relación a la magnitud del campo eléctrico, que en ambos casos es igual. En cuanto a la fase en este caso es constante; pero en el caso anterior habrá una variación de fase dada por el exponencial $e^{j\phi}$ y se puede observar que la variación de fase es una función cosenoidal del ángulo θ como se muestra en la Fig. 2-10.

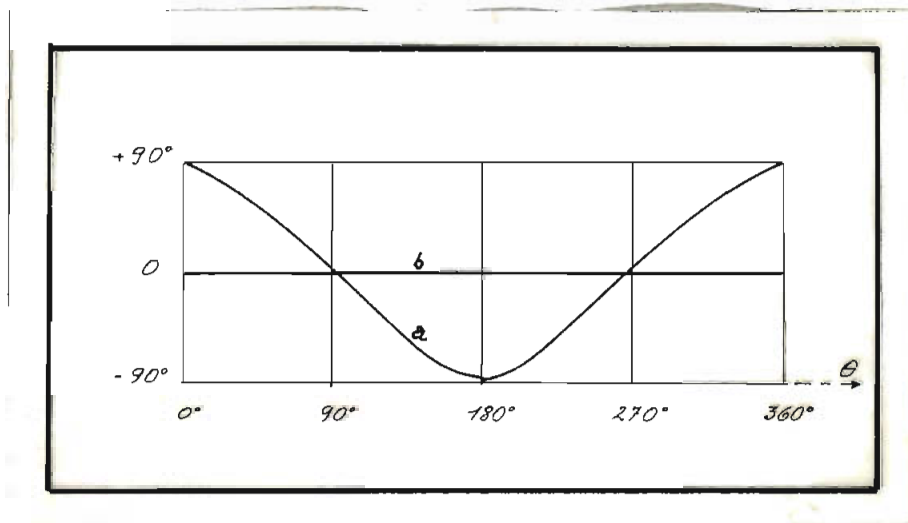


Fig. 2-10. a) Variación de fase con respecto al ángulo cuando el arreglo es el de la Fig. 2-6

b) Fase constante cuando el arreglo es el de la Fig. 2-8

2-2-2 Caso General de Arreglo Lineal y el Factor Arreglo.

El factor arreglo es muy importante en el estudio de los arreglos de antenas, pues facilita enormemente la representación del campo eléctrico de cualquier arreglo, conforme se verá a continuación.

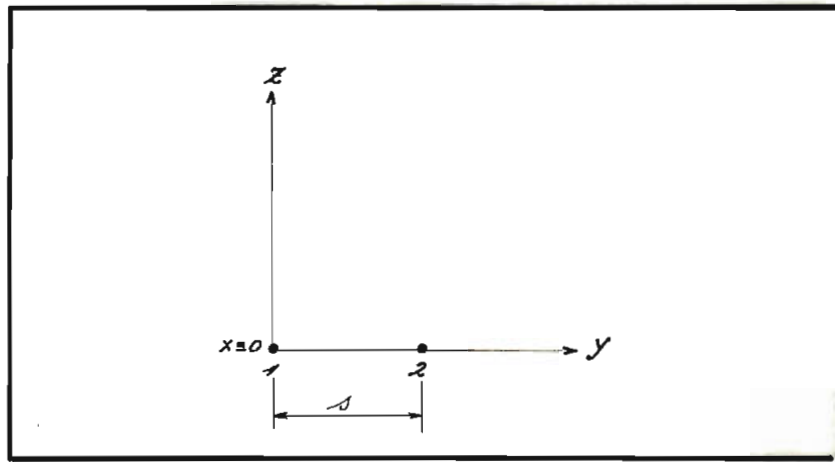


Fig. 2-11 Dos fuentes puntuales de diferentes amplitud y fase.

En la Fig. 2-11 se observan las fuentes puntuales 1 y 2 separadas una distancia s . El campo producido por la fuente 1 a una distancia r será E_1 , y el campo producido por la fuente 2 será KE_1 , donde K tendrá valores comprendidos entre 0 y 1; o sea: $0 \leq K \leq 1$.

Si la diferencia de fase entre los campos es ϕ , en la Fig. 2-12 se puede observar que el campo total es igual a la suma vectorial de los campos E_1 y E_2 .

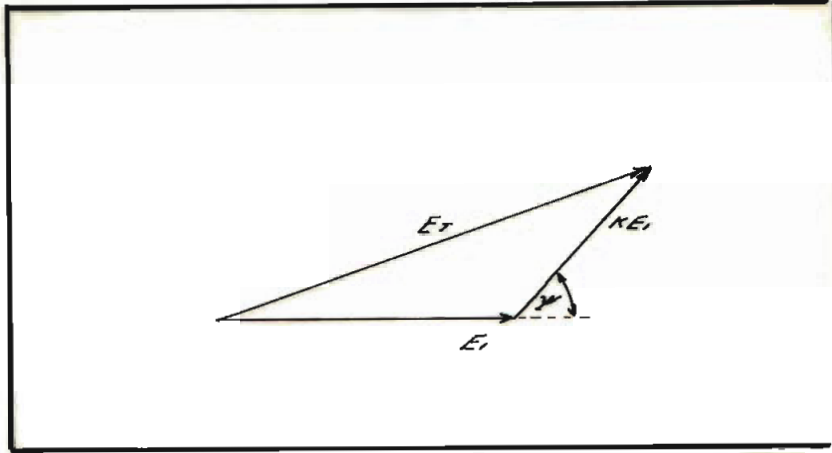


Fig. 2-12 Campo resultante de dos fuentes puntuales isotrópicas

El campo E_T puede expresarse como:

$$\begin{aligned}
 E_T &= E_1 + E_2 = E_1 + K \cos \gamma \cdot E_1 + j K \operatorname{sen} \gamma \cdot E_1 \\
 &= E_1 \sqrt{(1 + K \cos \gamma)^2 + K^2 \operatorname{sen}^2 \gamma} \quad \left[\operatorname{Tg}^{-1} \frac{K \operatorname{sen} \gamma}{1 + K \cos \gamma} \right] \quad (2-29)
 \end{aligned}$$

Este principio estudiado para dos fuentes puede ser generalizado, cuando se tienen más fuentes isotrópicas de radiación, o sea que: el campo resultante de varias fuentes de radiación es igual a la suma vectorial de los campos producidos por cada fuente.

Encontrar el campo resultante para cada punto como una suma de vectores sería sumamente laborioso e inútil; por lo que conviene estudiar en más detalle el método del factor arreglo. Es conveniente recordar que el factor arreglo para corrientes elementales como en la Fig. 2-4 es:

$$FA = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n A \cos \theta} \quad (2-30)$$

En donde: θ es el ángulo formado por el eje Z , y la línea que une el punto donde se está calculando el campo con el origen de coordenadas.

Hay que recordar también que cuando los elementos están colocados a lo largo del eje y , el factor arreglo es:

$$FA = \sum_{n=0}^{N-1} I_n e^{j\beta n A \cos \alpha} \quad (2-31)$$

En donde α es el ángulo entre el eje y , y la línea que une el punto donde se calcula el campo con el origen.

La corriente I_n es la corriente en cada elemento, y puesto que para cada elemento puede tener amplitud y fase diferentes, I_n sería un número complejo. En la práctica interesan aquellos arreglos en los cuales la fase varía en la misma proporción de un elemento al siguiente; este caso se puede simplificar introduciendo una variable:

$$I_n = a_n e^{jn\alpha} \quad (2-32)$$

De manera que:

$$FA = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn(\beta A \cos \nu + \alpha)} \quad (2-33)$$

Aquí se ha reemplazado los ángulos θ y α por un ángulo general ν .

Si a_n es una cantidad compleja, significa que el arreglo no tiene un desplazamiento constante de fase de elemento a elemento.

Si en la expresión anterior se efectúa el reemplazo $\psi = \beta d \cos \theta + \alpha$ se obtiene:

$$FA = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi} \quad (2-34)$$

Esta expresión facilita enormemente la representación del factor arreglo, para un valor especificado del ángulo θ . Por ejemplo: Si se tiene un arreglo formado por tres elementos con amplitudes $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 1$, y se quiere encontrar el factor arreglo para el caso en el cual $\psi = 30^\circ$

El factor arreglo se puede obtener como una suma vectorial como se indica en la Fig. 2-13.

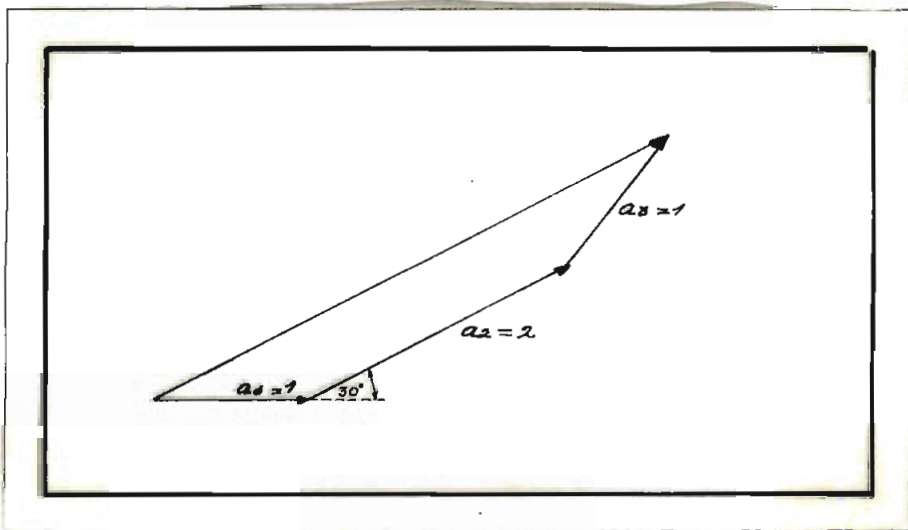


Fig. 2-13 Obtención del factor arreglo (FA) por suma vectorial.

Se observa que el factor arreglo es una función del ángulo ψ puesto que: $\psi = \beta s \cos u + \alpha$, ψ :

$$FA = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi}$$

Además el factor arreglo es una función periódica de 2π puesto que:

$$FA(\psi + 2\pi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn(\psi + 2\pi)} = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi} e^{jn2\pi}$$

Pero $e^{jn2\pi} = 1$; para $n = \text{entero}$.

$$\text{Por lo tanto: } FA(\psi + 2\pi) = \sum_{n=0}^{N-1} a_n e^{jn\psi} = FA(\psi) \quad (2-35)$$

Con el objeto de visualizar el factor arreglo FA como una función del ángulo u se ha dibujado la Fig. 2-14.

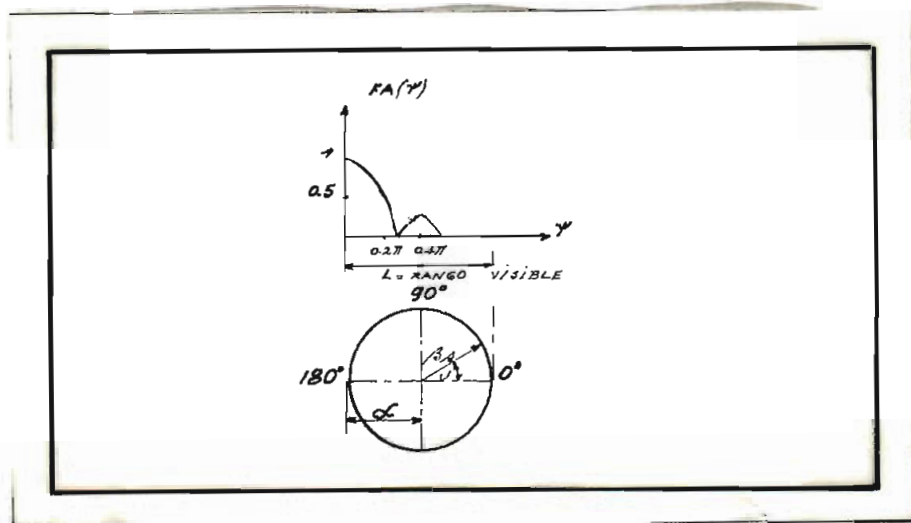


Fig. 2-14 El factor arreglo como una función del ángulo polar.

Se ve claramente que el ángulo u puede variar entre 0 y π por dos razones: a) el ángulo u es un ángulo polar.

b) para un ángulo u entre 0 y π , $\cos u$ cubre toda la variación entre -1 y +1.

El círculo dibujado tiene un radio $=\beta s$ y su centro está a una distancia α desde la línea $\psi = 0$. A partir de un valor dado de ψ se puede encontrar el valor ψ y desde allí el valor correspondiente de $FA(\psi)$.

Se observa en la Fig. 2-14 que para valores de ψ comprendidos entre 0 y π ; ψ puede variar entre los valores: $\alpha + \beta s$ y $\alpha - \beta s$, a este rango de variación se lo conoce con el nombre de RANGO VISIBLE. Es decir el rango visible tiene una extensión igual a $2\beta s$, y está simétricamente situado con respecto al punto $\psi = \alpha$.

La longitud del rango visible depende entonces del espaciamiento s , y su localización depende de la fase α .

Se demostró anteriormente que el factor arreglo, para el caso de un arreglo lineal con corrientes de igual amplitud es:

$$FA(\psi) = a_0 \sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\psi} \quad (2-36)$$

Pero:

$$\sum_{n=0}^{N-1} e^{jn\psi} = \frac{e^{jN\psi} - 1}{e^{j\psi} - 1} = e^{j\frac{\psi}{2}(N-1)} \frac{\text{sen}\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{\text{sen}(\psi/2)} \quad (2-37)$$

Si el número de elementos es impar y si se escoge el elemento de la mitad como el elemento de referencia, se tendrá que:

$$\sum_{n=-\frac{1}{2}(N-1)}^{n=\frac{1}{2}(N-1)} e^{jn\psi} = e^{-j\frac{\psi}{2}(N-1)} \frac{[e^{jN\psi} - 1]}{[e^{j\psi} - 1]} = \frac{\text{sen}\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)}$$

Por lo tanto: $FA(\psi) = a_0 \frac{\text{sen}\left(\frac{n\psi}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{\psi}{2}\right)}$. (2-38)

Es interesante obtener las configuraciones de arreglos de dos elementos para varios valores de los parámetros β y α .

Se encontró que el factor arreglo para un arreglo lineal uniforme está dado por la expresión (2-38); si en esta expresión se establece que:

$$a_0 = \frac{1}{n}$$

Para $n = 2$ se tiene: $FA(\psi) = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right)$ (2-39)

Recordando que cuando no hay defasamiento entre elementos,

$$\psi = \beta s \cos \theta$$
 (2-40)

Donde: $\beta = \frac{2\pi}{\lambda}$, $s = \frac{\lambda}{2}$

Reemplazando (2-40) en (2-39), se tendrá:

$$FA = \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$$
 (2-41)

Se encontró anteriormente, expresión (2-25) que para un arreglo de dos elementos el campo eléctrico total está dado por:

$$E_T = E_0 \cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \theta\right)$$
 (2-42)

Se mencionó anteriormente (Véase referencia 8) que el campo eléctrico de un arreglo está dado por el producto del campo

eléctrico individual por el factor arreglo (FA). Por lo tanto en la expresión (2-42) el factor arreglo (FA) = $\cos \left(\frac{\beta}{2} \cos \theta \right)$; lo cual es igual a la expresión (2-41), en esta forma se demuestra la validez del método del factor arreglo.

2-2-3 Arreglos Broadside y Endfire

a) Arreglos Broadside.

Considerando la expresión (2-39), se obtiene que cuando los elementos están en fase, esto es cuando $\alpha = 0$:

$$FA = \cos \left[\frac{\beta}{2} \cos \theta \right] \quad (2-43)$$

La cual tendrá un valor máximo cuando $\theta = \pi/2$; es decir, el valor máximo es perpendicular a la línea del arreglo. Este tipo de arreglo es el que se denomina "Broadside".

Si además de tener un máximo en la dirección perpendicular al eje del arreglo, se quiere obtener un nulo en la dirección del eje del arreglo, se tiene que:

$$\cos \left[\frac{\beta}{2} \cos 0^\circ \right] = 0$$

$$0 \text{ sea: } s = (2p + 1) \frac{\lambda}{2}, \text{ donde } p = \text{número entero} \quad (2-44)$$

Para ilustrar mejor la explicación anterior, supóngase que

se tiene un arreglo Broadside de 5 elementos espaciados $s = \frac{\lambda}{4}$

Recordando que el factor arreglo está dado por:

$$FA = \frac{\text{sen} \left(\frac{n\psi}{2} \right)}{n \text{sen} \left(\frac{\psi}{2} \right)}$$

Donde: $\psi = \beta s \cos \theta + \alpha$

Reemplazando los valores: $n = 5$, $s = \frac{\lambda}{4}$, $\alpha = 0^\circ$; se tiene que el factor arreglo es:

$$FA = \frac{\text{sen} \left(\frac{5}{4} \pi \cos \theta \right)}{5 \text{sen} \left(\frac{\pi}{4} \cos \theta \right)}$$

Asumiendo diferentes valores para el ángulo θ se puede obtener la siguiente tabla:

θ°	$\text{sen} \left(\frac{n\psi}{2} \right)$	$n \text{sen} \left(\frac{\psi}{2} \right)$	$FA(\psi)$
0	0.7	3.5	0.2
15	0.603	3.436	0.1754
30	0.256	3.644	0.0814
45	0.357	2.634	0.1356
60	0.923	1.913	0.4829
75	0.850	1.008	0.8433
90	0	0	1

Tabla 2-2 Valores del factor arreglo para un arreglo Broadside de cinco elementos.

Con los valores proporcionados por la tabla anterior se puede dibujar la configuración de radiación como una función del ángulo θ ; como se muestra en la Fig. 2-15

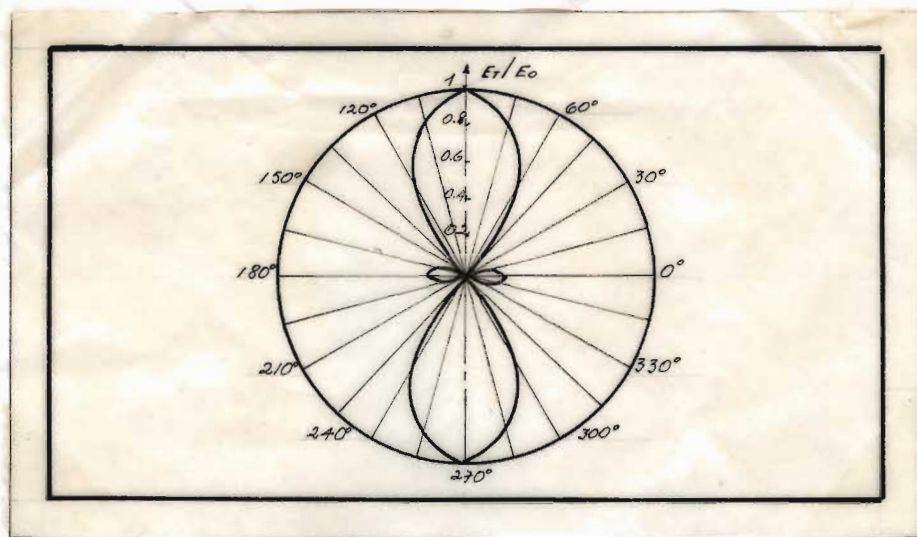
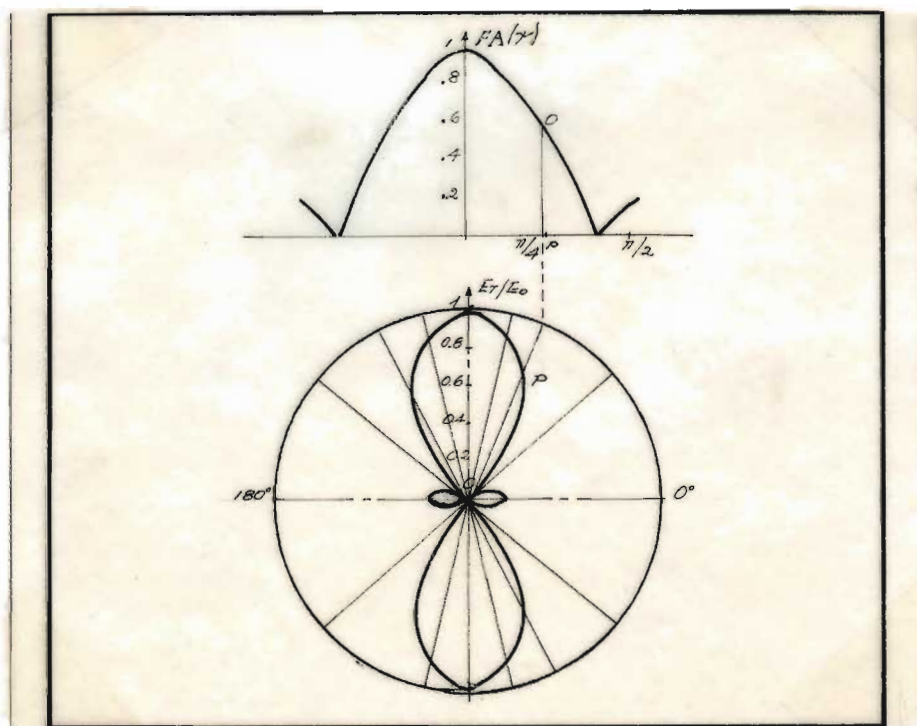


Fig. 2-15 Configuración de radiación para un arreglo Broadside de 5 elementos en el que $s = \frac{\lambda}{4}$

A menudo se obtiene primero el factor arreglo FA como una función de ν y desde ese gráfico se puede obtener la configuración del arreglo como una función de θ , esto se ilustra en la Fig. 2-16.



b) Arreglos Endfire.

Cuando se quiere un máximo en la dirección de la línea del arreglo, se tiene el caso " Endfire".

$$\text{Por lo tanto: } \cos \left[\frac{1}{2} (\alpha + \beta s \cos \theta) \right] = 1$$

$$\text{Desde lo cual: } \alpha + \beta s \cos \theta = 2q\pi \quad (2-46)$$

donde: $q = 0, \pm 1, \pm 2 \dots$

$$\text{Cuando } q = 0 \text{ se obtiene: } \alpha = -\beta s \cos \theta, \text{ pero en este caso } \theta = 0^\circ, \text{ de manera que: } \alpha = -\beta s \quad (2-47)$$

Un caso interesante se tiene cuando se alimenta los elementos con una diferencia de fase igual a $-\pi$

$$\cos \left[\frac{1}{2} (-\pi + \beta s \cos \theta) \right] = 1 \quad (2-48)$$

$$\text{Por lo tanto; } s = (2q + 1) \frac{\lambda}{2} \quad \text{Siendo } q = 0, \pm 1, \dots$$

Se ve claramente que para tener un arreglo Endfire cuando hay una diferencia de fase $\alpha = -\pi$, el espaciado entre elementos debería ser un número impar de semilongitudes de onda.

Si se tiene un arreglo Endfire de cinco elementos en el cual $\alpha = -\frac{\pi}{2}$, se obtiene una configuración de radiación como la que se indica en la Fig. 2-17.

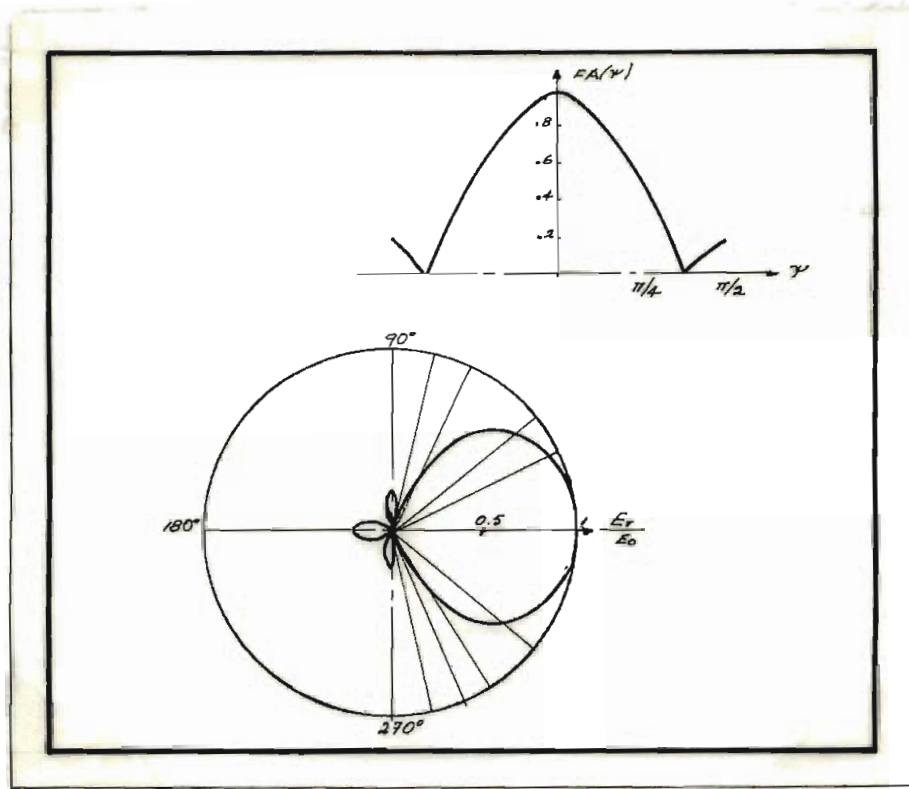


Fig. 2-17 Configuración de radiación de un arreglo endfire de cinco elementos.

Comparando las figuras 2-15 y 2-17, que corresponden a las configuraciones de radiación de un arreglo de cinco elementos casos Broadside y Endfire respectivamente, se concluye que: el lóbulo principal en el caso Broadside es menos ancho que el lóbulo principal en el caso Endfire; además el arreglo Broadside tiene menos lóbulos secundarios.

La longitud de un arreglo es: $\lambda/(n-1)$, y el número de lóbulos laterales incrementa con la longitud del arreglo. Esta es una de las razones principales por la que los arreglos lineales tienen un límite en cuanto al número de elementos, y también

es causa para que se utilicen los arreglos en dos dimensiones.

2-3 INTENSIDAD DE RADIAACION.

Debido a la importancia que tiene para el conocimiento de ciertas características como la directividad y la ganancia de potencia de las antenas, se va a introducir un nuevo concepto que se denomina intensidad de radiación y que se lo representa como

$$\Phi(\theta, \phi). \quad [8]$$

$$\Phi(\theta, \phi) = \frac{\text{Potencia radiada}}{\text{ángulo sólido}} = (\text{Wattios/ Unidad de ángulo sólido}). \quad (2-49)$$

Si se considera un radiador isotrópico que recibe la misma potencia que en el caso anterior, se notará que este radiador isotrópico tiene una intensidad de radiación promedia, asumiendo que radia uniformemente a lo largo de todas las direcciones, o sea si el ángulo sólido es igual a 4π .

$$\text{Intensidad de radiación promedia} = \Phi_{pr} = \frac{(\text{Prad.})}{4\pi} \quad \left(\frac{\text{Watts}}{\text{Unidad}} \right) \quad (2-50)$$

Comparando la intensidad de radiación de una antena cualquiera o de un arreglo con relación a la intensidad de radiación de la antena isotrópica, se obtiene el concepto que se denomina:

Ganancia directiva de la antena o del arreglo de antenas.

Ganancia Directiva de la antena

o del arreglo de antenas

$$= g_d = \frac{\Phi(\theta, \phi)}{\frac{1}{4\pi} \text{ Prad.}} \quad (2-51)$$

También se puede definir la Ganancia de Potencia, si en la expresión anterior se reemplaza la potencia radiada P_{rad} con la potencia total P_{tot} .

$$\text{Ganancia de Potencia} = \frac{4 \pi \phi}{P_{tot}} = g_p. \quad (2-52)$$

Donde: $P_{tot} = P_{rad} + P_{perd}$.

En antenas Superdirectivas la Ganancia de Potencia es mucho menor que la ganancia **directiva**.

Conviene también definir el término: Área efectiva, muy utilizado en antenas receptoras.

$$\text{Área efectiva} = A_e = \frac{\text{Potencia disponible en terminales}}{\text{Potencia / unidad de área}} \quad (2-53)$$

Al valor máximo de ganancia directiva se lo conoce con el nombre de Directividad.

O sea: Directividad $= D(\theta, \phi) = g_d \text{ máx.}$

$$D(\theta, \phi) = \frac{4 \pi \phi_{max}}{P_{rad}} \quad (2-54)$$

En la expresión anterior ϕ_{max} representa el máximo valor de intensidad de radiación.

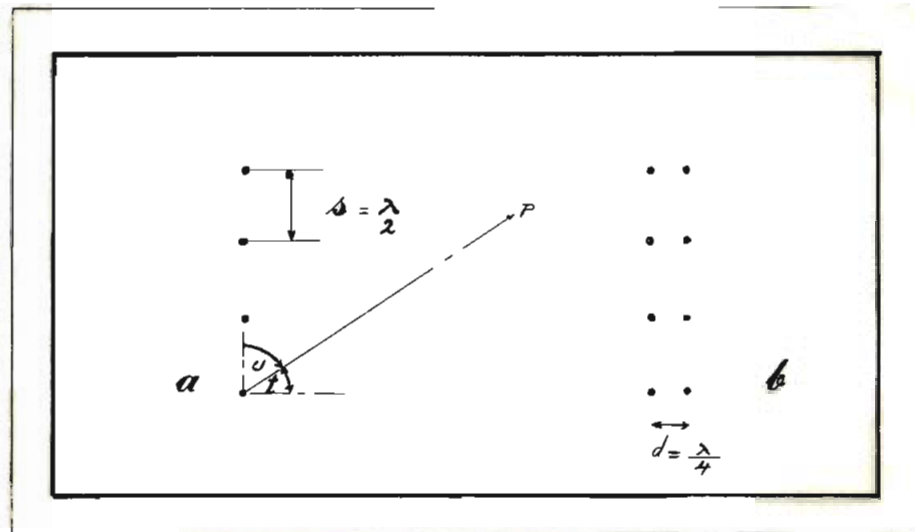
2-4 ARREGLOS EN DOS DIMENSIONES.

Se han estudiado los arreglos lineales, ahora es importante considerar los arreglos en dos dimensiones con los cuales se consigue mayor directividad. Los arreglos en dos dimensiones se forman de la unión de varios arreglos lineales.

Los arreglos son de mucha utilidad en diferentes rangos de frecuencias; así por ejemplo en el rango de frecuencias de 3 hasta 30 Mhz, son muy utilizados para comunicaciones a larga distancia y también a distancia media. En este rango de frecuencias se utiliza la transmisión Ionosférica. Cuando hay condiciones desfavorables, hay mucha pérdida de potencia de allí que conviene tener antenas con alta directividad, lo cual se consigue mediante la utilización de arreglos.

En frecuencias mayores que 30 Mhz, la transmisión se efectúa por línea de vista: por ejemplo: en servicios de radiotelefonía y telegrafía. También en estos casos conviene la utilización de arreglos por las razones ya anotadas.

Se va a empezar el estudio de los arreglos en dos dimensiones o arreglos planos, considerando en primer término un arreglo lineal Broadside de 4 elementos tal como se ilustra en la Fig. 2-18.



- Fig. 2-18 a) Arreglo lineal Broadside de cuatro elementos en el que el espaciamiento $d = \frac{\lambda}{2}$
- b) Arreglo plano formado por dos arreglos lineales colocados paralelamente a una distancia $d = \frac{\lambda}{4}$ y defasados $\delta = \frac{\lambda}{2}$

Anteriormente se analizaron los arreglos lineales, y se obtuvo que un arreglo lineal tal como el de la Fig. 2-18 a) tiene un factor arreglo f_1 , dado por:

$$f_1 = \left| \frac{\sin(n \frac{\psi_1}{2})}{n \sin(\frac{\psi_1}{2})} \right| \quad (2-55)$$

Siendo $\psi_1 = \beta d \cos \psi + \alpha$

Para el caso en consideración, puesto que el arreglo es

Broadside $\alpha = 0$, o sea todos los elementos están en fase.

Además se va a suponer que el espaciamiento entre los elementos isotrópicos es $d = \frac{\lambda}{2}$

Se mencionó que: $n = 4$; de tal manera que: $\psi_1 = \pi \cos \nu$

$$\text{Por lo tanto: } f_1 = \frac{\text{sen} \left(\frac{n\pi \cos \nu}{2} \right)}{n \text{ sen} \left(\frac{\pi \cos \nu}{2} \right)} = \frac{\text{sen} (2\pi \cos \nu)}{4 \text{ sen} \left(\frac{\pi \cos \nu}{2} \right)} \quad (2-56)$$

Si se tienen dos arreglos idénticos al de la Fig. 2-18 a). situados paralelamente y a una distancia $d = \frac{\lambda}{4}$ (Como se puede observar en la misma Fig. 2-18 parte b) ; puesto que ambos arreglos lineales son similares, tendrán la misma configuración unitaria dada por el factor arreglo f_1 .

Entre los dos arreglos existe un factor arreglo f_2 que en este caso corresponde a un arreglo de dos elementos separados $\frac{\lambda}{4}$ y defasados $\frac{\lambda}{2}$; por el método de multiplicación de configuraciones se tendrá que la configuración total de este arreglo de arreglo, está dado por el producto de la configuración unitaria por la configuración de arreglo. En términos de los factores arreglo, el factor arreglo total f está dado por el producto de los factores f_1 y f_2 .

El factor arreglo f_2 será:

$$f_2 = \frac{\text{sen} \left(\frac{n \gamma_2}{2} \right)}{n \text{ sen} \left(\frac{\gamma_2}{2} \right)} \quad (2-56)$$

Donde: $\gamma_2 = \beta d \cos \tau + \delta$

$$\alpha = \frac{\Delta}{4}, \quad \delta = -\frac{\pi}{2}, \quad n=2$$

Por lo tanto:

$$\% = \frac{\pi}{2} (\cos t - 1)$$

Pero $t = 90^\circ - \nu$ y en consecuencia $\cos t = \sin \nu$

De allí que el factor arreglo f , estará dado por el producto:

$$f = \frac{\sin(2\pi \cos \nu)}{4 \sin\left(\frac{\pi \cos \nu}{2}\right)} \cdot \frac{\sin\left[\frac{\pi}{2}(\sin \nu - 1)\right]}{2 \sin\left[\frac{\pi}{4}(\sin \nu - 1)\right]} \quad (2-57)$$

Si en la expresión anterior se asumen diferentes valores para el ángulo ν , se puede obtener la siguiente tabla:

ν (GRADOS)	t (GRADOS)	f_1	f_2	f
- 90	180	1	0	0
- 80	170	0.825	0.012	0.009
- 70	160	0.260	0.047	0.012
- 60	150	0	0.1051	0
- 50	140	0.23	0.180	0.041
- 40	130	0.267	0.276	0.073
- 30	120	0.190	0.382	0.072
- 20	110	0.090	0.494	0.044
- 10	100	0.025	0.604	0.015
0	90	0	0.707	0
10	80	0.025	0.796	0.019
20	70	0.090	0.869	0.078
30	60	0.190	0.9237	0.175
40	50	0.267	0.961	0.256
50	40	0.230	0.983	0.266
60	30	0	0.996	0
70	20	0.26	0.99	0.257
80	10	0.825	0.99	0.816
90	0	1	1	1

Tabla 2-3 Valores del factor f de un arreglo plano formado por dos arreglos lineales Broadside, paralelos entre si.

A base de los valores de la Tabla 2-3 se puede encontrar la configuración de radiación del arreglo plano, como se indica en la Fig. 2-19.

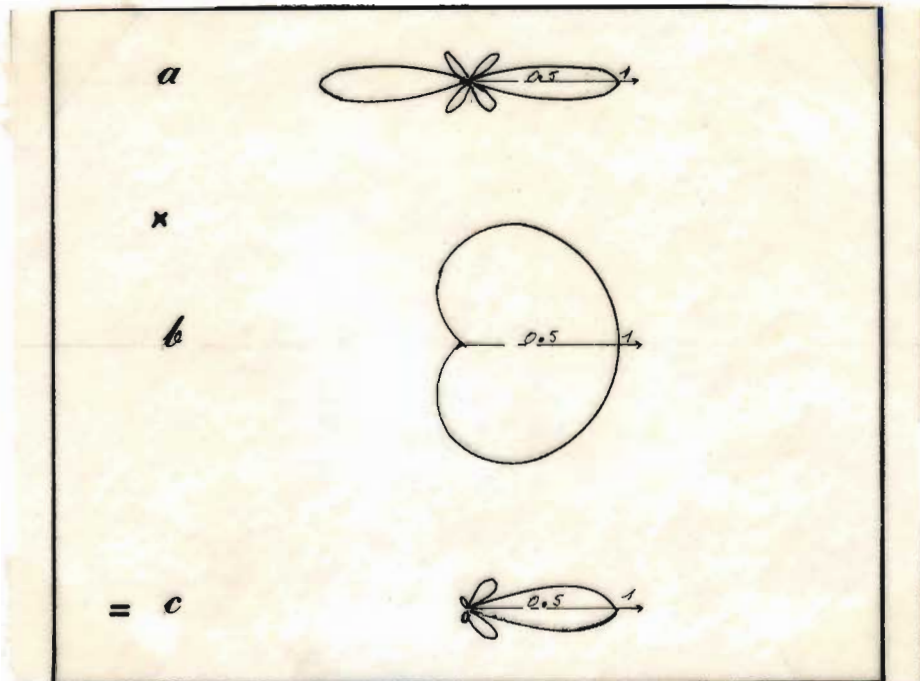


Fig. 2-19 a) Configuración del arreglo Broadside de 4 elementos.
 b) Configuración del arreglo Endfire de 2 elementos.
 c) Configuración del arreglo plano, como producto de las dos configuraciones anteriores.

Otro tipo de arreglo de mucho interés es aquel en que los elementos del arreglo están en un plano vertical, como se ilustra en la Fig. 2-20.

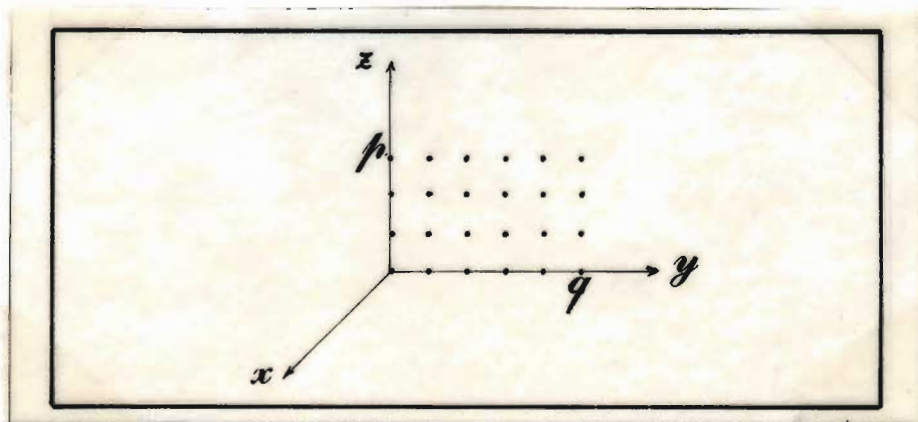


Fig. 2-20 Arreglo plano de $p \times q$ elementos isotrópicos.

Suponga que los elementos que forman este arreglo son isotrópicos y están alineados paralelos a los ejes y y z como se indica en la Fig. 2-20.

Asuma que hay p elementos en el sentido z y q elementos en el sentido y , separados entre si las distancias s_x y s_y respectivamente.

Considerando primeramente los p elementos localizados sobre el eje z , se ve que se trata de un arreglo lineal uniforme, y se halla en la parte correspondiente a estos arreglos, que el factor arreglo es de la forma:

$$f = \sum_{p=0}^{p-1} a_{p0} e^{j p s_x \cos \theta} \quad (2-58)$$

a_{p0} representa la corriente en el elemento p

θ es el ángulo entre la línea del arreglo y la recta que pasa por el punto donde se calcula el campo y el origen de coordenadas. Se puede considerar que la ecuación anterior representa la configuración de campo unitaria de un arreglo que se desplaza a lo largo del eje y . Por lo tanto el factor arreglo para este tipo de arreglo a lo largo del eje y es:

$$f_1 = \sum_{q=0}^{q-1} f_p e^{j q s_y \cos \theta} \quad (2-59)$$

En donde :

$$f_p = \sum_{p=0}^{p-1} a_{p0} e^{j p s_x \cos \theta} \quad (2-60)$$

Reemplazando la expresión (2-60) en (2-59), se tiene:

$$f' = \sum_{q=0}^{q-1} \sum_{p=0}^{p-1} a_{pq} e^{j\beta p s_x \cos \theta} e^{j\beta q s_y \cos \delta} \quad (2-61)$$

$$f' = \sum_{q=0}^{q-1} \sum_{p=0}^{p-1} a_{pq} e^{j\beta (p s_x \cos \theta + q s_y \cos \delta)}$$

Si se considera el caso especial en que $s_y = s_x = s$, queda:

$$\begin{aligned} f' &= \sum_{q=0}^{q-1} \sum_{p=0}^{p-1} a_{pq} e^{j\beta s (p \cos \theta + q \cos \delta)} \\ &= \sum_{q=0}^{q-1} a_{pq} e^{j\beta s \cos \delta} \sum_{p=0}^{p-1} e^{j\beta s \cos \theta} \end{aligned} \quad (2-62)$$

Si todos los elementos son iguales y $a_{pq} = 1$

$$f' = \sum_{q=0}^{q-1} e^{j\beta s \cos \delta} \sum_{p=0}^{p-1} e^{j\beta s \cos \theta}$$

$$f' = \left[\frac{\sin \left(\frac{q\beta s \cos \delta}{2} \right)}{q \sin \left(\frac{\beta s \cos \delta}{2} \right)} \right] \left[\frac{\sin \left(\frac{p\beta s \cos \theta}{2} \right)}{p \sin \left(\frac{\beta s \cos \theta}{2} \right)} \right] \quad (2-63)$$

Se ha llegado a la valiosa conclusión de que el factor de arreglo de un arreglo plano uniforme es igual al producto del factor de arreglo lineal en una dirección del arreglo plano por el factor de arreglo en la otra dirección del arreglo plano.

Considerando el caso en que hay un desfase constante de elemento a elemento, por tanto:

$$a_{pq} = A_{pq} e^{-j(p\alpha_x + q\alpha_y)} \quad (2-64)$$

Siendo α_x el defasamiento en la dirección x y α_y en la dirección y .

Entonces el factor arreglo quedaría:

$$\begin{aligned}
 f' &= \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{pq} \left[e^{j\beta A \cos \theta} e^{-j p \alpha_x} e^{j q \beta A \cos \alpha} e^{-j q \alpha_y} \right] \\
 &= \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{pq} \left[e^{j p (\beta A \cos \theta - \alpha_x)} e^{j q (\beta A \cos \alpha - \alpha_y)} \right] \quad (2-65)
 \end{aligned}$$

Cuando el máximo del lóbulo principal está en la dirección θ_1 , α_1 ; será un máximo cuando se cumple:

$$\beta A \cos \theta_1 - \alpha_x = 0 \quad \text{entonces; } \alpha_x = \beta A \cos \theta_1$$

$$\beta A \cos \alpha_1 - \alpha_y = 0 \quad \alpha_y = \beta A \cos \alpha_1$$

Reemplazando estos valores en la ecuación (2-65), se tiene:

$$f' = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{pq} \left[e^{j p \beta A (\cos \theta - \cos \theta_1)} e^{j q \beta A (\cos \alpha - \cos \alpha_1)} \right] \quad (2-66)$$

Si se establece que:

$$(\cos \theta - \cos \theta_1) = w_x$$

$$(\cos \alpha - \cos \alpha_1) = w_y$$

$$f' = \sum_{p=0}^{P-1} \sum_{q=0}^{Q-1} A_{pq} \left[e^{j \beta A (p w_x + q w_y)} \right] \quad (2-67)$$

Asumiendo: $A_{pq} = 1$

$$\begin{aligned}
 f' &= \sum_{p=0}^{p-1} \sum_{q=0}^{q-1} \frac{e^{j p \beta \Delta w_x}}{e} \frac{e^{j q \beta \Delta w_y}}{e} \\
 &= \sum_{p=0}^{p-1} \frac{e^{j p \beta \Delta w_x}}{e} \sum_{q=0}^{q-1} \frac{e^{j q \beta \Delta w_y}}{e}
 \end{aligned} \tag{2-68}$$

$$= \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{p \beta \Delta w_x}{2} \right)}{p \text{sen} \left(\frac{\beta \Delta w_x}{2} \right)} \right] \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{q \beta \Delta w_y}{2} \right)}{q \text{sen} \left(\frac{\beta \Delta w_y}{2} \right)} \right] \tag{2-69}$$

Cuando hay muchos elementos en el arreglo se puede hacer la siguiente aproximación:

$$f' = \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{p \beta \Delta w_x}{2} \right)}{p \left(\frac{\beta \Delta w_x}{2} \right)} \right] \left[\frac{\text{sen} \left(\frac{q \beta \Delta w_y}{2} \right)}{q \left(\frac{\beta \Delta w_y}{2} \right)} \right] \tag{2-70}$$

También para este caso, el factor arreglo está dado por el producto del factor del arreglo lineal en una dirección por el factor del arreglo lineal en la otra dirección.

CAPITULO

TERCERO

3. ESTUDIO DE LAS CARACTERÍSTICAS DE UN ARREGLO RECTANGULAR.

El conocimiento de las características de los arreglos rectangulares es muy necesario; pues permite diseñar un arreglo que satisfaga determinados requerimientos.

Las principales características que se van a estudiar son: configuración de campo eléctrico, directividad e impedancia. Inmediatamente se considerará la primera de ellas.

3-1 Configuración de Campo.

El conocer teóricamente la configuración de campo eléctrico de un arreglo rectangular es importante, pues esto permite realizar los ajustes necesarios para que el modelo práctico cumpla con las características deseadas.

Considérese un arreglo rectangular formado por antenas dipolo de media longitud de onda, se va a calcular su configuración de campo eléctrico. El arreglo es un $p \times q$; siendo p el número de elementos en el sentido x y q el número de elementos en el sentido y , (vease la Fig. 3-1).

Se ha encontrado para un arreglo plano de elementos isotrópicos (expresión 2-63) que el factor arreglo está dado por:

$$f' = \left[\begin{array}{c} \frac{\sin(q\beta s \cos \delta)}{2} \\ q \sin(\beta s \cos \delta) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{\sin(p\beta s \cos \theta)}{2} \\ p \sin(\beta s \cos \theta) \end{array} \right] \quad (3-1)$$

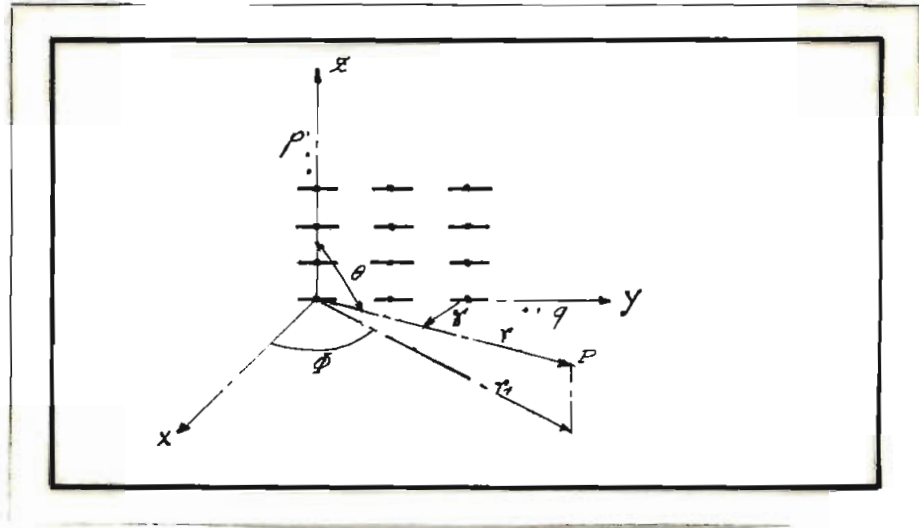


Fig. 3-1 Arreglo rectangular de dipolos y su relación con un sistema de coordenadas rectangulares.

De la Fig. 3-1 se deduce:

$$\cos \delta = \frac{y}{r}$$

$$\cos(90^\circ - \theta) = \sin \theta = \frac{r_z}{r}$$

$$\cos(90^\circ - \phi) = \sin \phi = \frac{y}{r}$$

de allí que:

$$\cos \delta = \sin \theta \sin \phi \quad (3-2)$$

De tal manera que el factor arreglo puede expresarse como:

$$f' = \left[\begin{array}{c} \frac{\sin(q\beta s \sin \theta \sin \phi)}{2} \\ q \sin(\beta s \sin \theta \sin \phi) \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{\sin(p\beta s \cos \theta)}{2} \\ p \sin(\beta s \cos \theta) \end{array} \right] \quad (3-3)$$

Para encontrar la configuración de radiación del arreglo plano de elementos isotrópicos en el plano horizontal (Véase la Fig. 2-20), recuerdese, que:

$$\theta = 90^\circ$$

De tal manera que:

$$\text{Sen } \theta = \text{Sen } 90^\circ = 1$$

$$\text{Cos } \theta = \text{Cos } 90^\circ = 0$$

Se nota en la expresión (3-3) que al reemplazar los valores de $\text{Sen } \theta$ y $\text{Cos } \theta$ para $\theta = 90^\circ$, en el un factor se tiene la indeterminación $\frac{0}{0}$

Con el objeto de levantar esta indeterminación, diferenciese con respecto a la variable θ , tanto el numerador como el denominador de la indeterminación en manera independiente y queda que en el límite cuando $\theta \rightarrow 90^\circ$ este factor vale uno.

Por tanto el factor arreglo f_r cuando $\theta = 90^\circ$, será:

$$f_r = \left[\frac{\text{sen} \left(\gamma \beta s \frac{\text{sen } \phi}{2} \right)}{\gamma \text{sen} \left(\beta s \frac{\text{sen } \phi}{2} \right)} \right] \quad (3-4)$$

Se concluye que para un arreglo plano de elementos isotrópicos, el factor arreglo expresado para un plano horizontal ($\theta = 90^\circ$) solamente depende del arreglo lineal en el sentido y ;

más no de los elementos en el sentido x .

Para encontrar la configuración de radiación debida al arreglo de dipolos en dos dimensiones, es necesario multiplicar la configuración de radiación de un arreglo de elementos isotrópicos por la configuración debida al dipolo en el mismo plano horizontal que se está considerando; por tanto el factor arreglo para el arreglo rectangular de dipolos será:

$$f_2 = \left| \frac{\sin(q\beta l \frac{\sin\phi}{2})}{q \sin(\beta l \frac{\sin\phi}{2})} \right| \left| \frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\phi_1)}{\sin\phi_1} \right| \quad (3-5)$$

De manera que el campo eléctrico total para un arreglo rectangular $p \times q$, estará dado por la siguiente expresión:

$$E_T(\theta=90^\circ) = p \times q E_1 \left[\frac{\sin(q\beta l_y \frac{\sin\phi}{2})}{q \sin(\beta l_y \frac{\sin\phi}{2})} \right] \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \cos\phi_1)}{\sin\phi_1} \right] \quad (3-6)$$

En donde: $\phi_1 = 90^\circ - \phi$

Del mismo modo cuando se requiere calcular la configuración de radiación en el plano xz , es decir cuando $\phi = 0^\circ$, es necesario partir de la expresión (3-3). Al reemplazar $\phi = 0^\circ$ en la expresión mencionada, también surge el problema de la indeterminación $\frac{0}{0}$

Resolviendo esta indeterminación de una manera semejante que en

el caso anterior queda:

$$f_{\theta}(\phi=0^{\circ}) = \frac{\sin\left(\frac{\mu \beta s \cos \theta}{2}\right)}{\mu \sin\left(\frac{\beta s \cos \theta}{2}\right)} \quad (3-7)$$

Esta expresión da el factor arreglo y hay que multiplicar la por la expresión que da la configuración del dipolo en el plano que se está considerando (esto es el plano $\phi = 0^{\circ}$). Por tanto para el arreglo de dipolos en dos dimensiones, el campo eléctrico está dado por la siguiente expresión:

$$E_{T(\phi=0^{\circ})} = \rho \times 9 E_{\perp} \frac{\sin\left(\frac{\mu \beta s \cos \theta}{2}\right)}{\mu \sin\left(\frac{\beta s \cos \theta}{2}\right)} \quad (3-8)$$

A manera de ejemplo se va a encontrar la expresión de campo eléctrico para un arreglo de dipolos 2×2 en el cual:

$$\Delta y = \lambda \quad \Delta z = \frac{\lambda}{2}$$

Para el plano horizontal se tendría desde la expresión (3-6) :

$$E_{T(\theta=90^{\circ})} = 4 E_{\perp} \frac{\sin\left(\frac{2\pi \sin \phi}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi \sin \phi}{2}\right)} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin \phi\right)}{\cos \phi} \quad (3-9)$$

Para calcular el campo en el plano vertical es necesario utilizar la expresión (3-8) desde la cual:

$$E_{T(\phi=0^{\circ})} = 4 E_{\perp} \frac{\sin\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)}{2 \sin\left(\frac{\pi \cos \theta}{2}\right)} \quad (3-10)$$

En esta forma se han obtenido las expresiones para el campo eléctrico de un arreglo rectangular de dipolos; por lo tanto se puede estudiar un nuevo punto que es la impedancia del arreglo.

3-2 IMPEDANCIA.

Es necesario conocer la impedancia de un arreglo con el objeto de poder acoplar el arreglo al transmisor.

Se va a calcular la impedancia de un arreglo plano de dipolos de media longitud de onda situados tal como se indica en la Fig. 3-2.

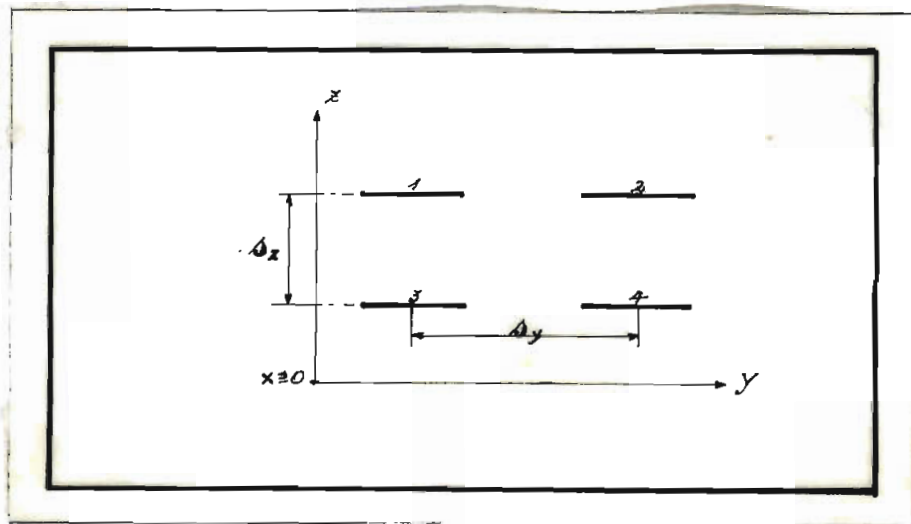


Fig. 3-2 Arreglo plano de dipolos.

Todos los elementos están alimentados con corrientes iguales

en la misma dirección y fase.

Considerando el dipolo número 1, se tiene que el voltaje aplicado en sus terminales está dado por la expresión:

$$V_1 = I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} + I_3 Z_{13} + I_4 Z_{14}. \quad (3-11)$$

I_2, I_3, I_4 representan las corrientes en los elementos 2, 3 y 4 respectivamente.

Z_{1n} = Impedancia mutua entre el elemento 1 y el elemento .

Z_{nn} = Autoimpedancia del elemento enésimo.

Dividiendo la expresión (3-11) para I_1 se tiene:

$$Z_1 = \frac{V_1}{I_1} = Z_{11} + \frac{I_2}{I_1} Z_{12} + \frac{I_3}{I_1} Z_{13} + \frac{I_4}{I_1} Z_{14} \quad (3-12)$$

Si todos los elementos son alimentados con corrientes iguales:

$$I_1 = I_2 = I_3 = I_4$$

Por lo tanto:

$$Z_1 = Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14}. \quad (3-13)$$

Z_1 representa la impedancia terminal del elemento 1.

La impedancia mutua entre el dipolo 1 y el resto de dipo-

los se puede obtener desde las expresiones siguientes: [9]

Resistencia mutua

$$R_{21} = -15 \cos \beta h (-2 C_i A - 2 C_i A' + C_i B + C_i B' + C_i C + C_i C') \\ + 15 \mu \beta h (2 \mathcal{O}_i A - 2 \mathcal{O}_i A' - \mathcal{O}_i B + \mathcal{O}_i B' - \mathcal{O}_i C + \mathcal{O}_i C') \text{ ohms.} \quad (3-14)$$

Reactancia mutua

$$X_{21} = -15 \cos \beta h (2 \mathcal{O}_i A + 2 \mathcal{O}_i A' - \mathcal{O}_i B - \mathcal{O}_i B' - \mathcal{O}_i C - \mathcal{O}_i C') \\ + 15 \mu \beta h (2 C_i A - 2 C_i A' - C_i B + C_i B' - C_i C + C_i C') \text{ ohms.} \quad (3-15)$$

En donde:

$$A = \beta \left[\sqrt{d^2 + h^2} + h \right]$$

$$A' = \beta \left[\sqrt{d^2 + h^2} - h \right]$$

$$B = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h-L)^2} + (h-L) \right]$$

$$B' = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h-L)^2} - (h-L) \right]$$

$$C = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h+L)^2} + (h+L) \right]$$

$$C' = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h+L)^2} - (h+L) \right]$$

Hay que recordar que:

$$C_i(x) = \text{coseno integral} = \int_{\infty}^x \frac{\cos u}{u} du. \quad (3-16)$$

$$C_i(x) = \ln 8x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^4}{4! \cdot 4} - \frac{x^6}{6! \cdot 6} + \dots$$

$\ln 8 = \text{constante de Euler} = 0.577$

$$Ci(x) = 0.577 + \ln x - \frac{x^2}{2! \cdot 2} + \frac{x^4}{4! \cdot 4} - \frac{x^6}{6! \cdot 6} \quad (3-17)$$

$$Si(x) = \int_0^x \frac{\sin u}{u} du = \text{seno integral}$$

$$Si(x) = x - \frac{x^3}{3! \cdot 3} + \frac{x^5}{5! \cdot 5} - \frac{x^7}{7! \cdot 7} \quad (3-18)$$

Las expresiones para resistencia mutua e impedancia mutua dadas anteriormente son válidas para dos dipolos colocados como se indica en el gráfico 3-3.

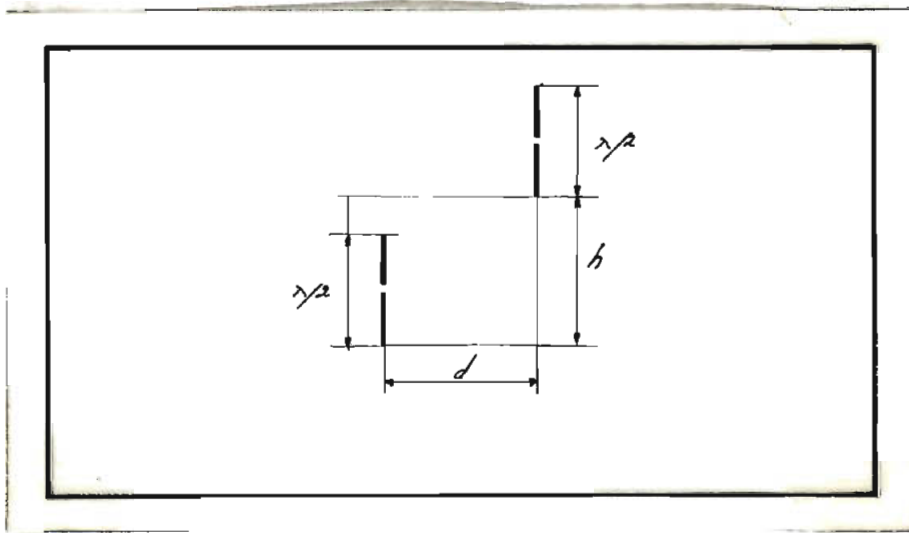


Fig. 3-3 Representación de dos dipolos de $\frac{\lambda}{2}$, separados las distancias d y h horizontal y verticalmente

Variando las distancias d y h se halla la impedancia mutua para diferentes casos.

En su libro sobre antenas, Kraus da una tabla en la que se puede ver la resistencia mutua entre estos dos elementos para diferentes valores de d y h .

Por ser muy necesaria esta tabla se va a reproducirla a continuación:

Espaciamiento d	Espaciamiento h						
	0.0λ	0.5λ	1.0λ	1.5λ	2.0λ	2.5λ	3λ
0.0	73.1	26.4	-4.1	1.8	-1.0	0.6	-0.4
0.5	-12.7	-11.8	-0.8	0.8	-1.0	0.5	-0.3
1.0	3.8	8.8	3.6	-2.9	1.1	-0.4	0.1
1.5	-2.4	-5.8	-6.3	2.0	0.6	-1.0	0.9
2.0	1.1	3.8	6.1	0.2	-2.6	1.6	-0.5
2.5	-0.8	-2.8	-5.7	-2.4	2.7	-0.3	-0.1
3.0	0.4	1.9	4.5	3.2	-2.1	-1.6	1.7
3.5	-0.3	-1.5	-3.9	-3.8	0.7	2.7	-1.0
4.0	0.2	1.1	3.1	3.7	0.5	-2.5	-0.1
4.5	-0.2	-0.9	-2.5	-3.4	-1.3	2.0	1.1
5.0	0.2	0.7	2.1	3.1	1.8	-1.4	-1.9
5.5	-0.1	-0.6	-1.8	-2.9	-2.2	0.5	1.8
6.0	0.1	0.5	1.6	2.6	2.3	-0.1	-2.0
6.5	-0.1	-0.5	-1.2	-2.3	-2.3	-0.5	1.7
7.0	0.1	0.4	1.1	2.1	2.3	0.9	-1.3
7.5	0.0	-0.3	-1.0	-1.9	-2.1	-1.0	0.7

Tabla 3-1 Resistencia mutua como función de d y h para dos antenas delgadas de media longitud de onda.

Supóngase el caso en que $L = \frac{\lambda}{2}$, $h = \lambda$ (véase Fig. 3-4) de tal manera que $S = \frac{\lambda}{2}$, se quiere calcular la impedancia del arreglo de cuatro antenas.

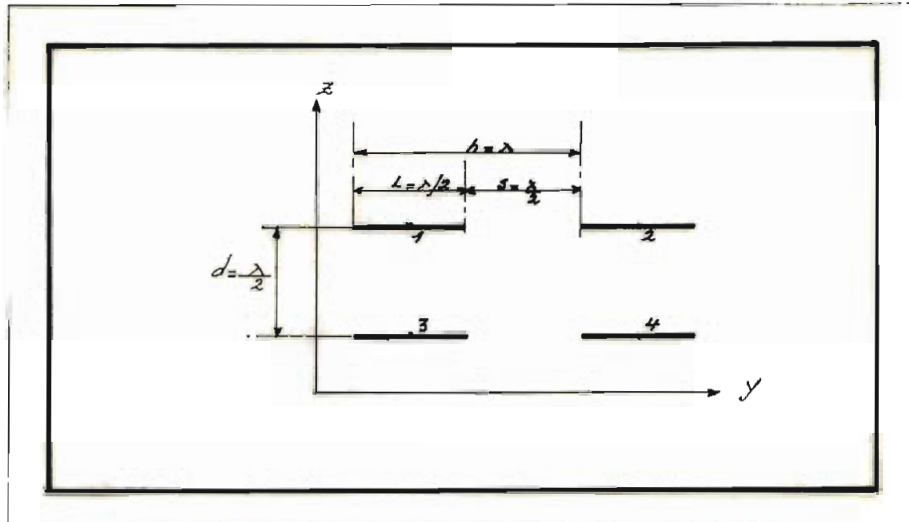


Fig. 3-4 Arreglo plano de dipolos.

Se dedujo para el caso de cuatro antenas como las que se representan en la Fig. 3-4 :

$$Z_{11} = Z_{11} + Z_{12} + Z_{13} + Z_{14} = (R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14}) + j (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}).$$

Desde la tabla 3-1 se obtiene:

Para el caso $d = 0$ $h = \lambda$

$$R_{12} = -4.1 \text{ ohms.}$$

Para el caso $d = \lambda/2$ $h = 0$

$$R_{13} = -12.7 \text{ ohms.}$$

Para el caso $d =$ $h =$

Para el caso $d = \lambda/2$ $h = \lambda$

$$R_{14} = -0.8 \text{ ohms.}$$

Las reactancias mutuas se pueden calcular desde la fórmula (3-15), o pueden ser miradas desde los gráficos que se dan a continuación y que representan la reactancia mutua y la resistencia mutua de dos antenas colineales y paralelas respectivamente. [10]

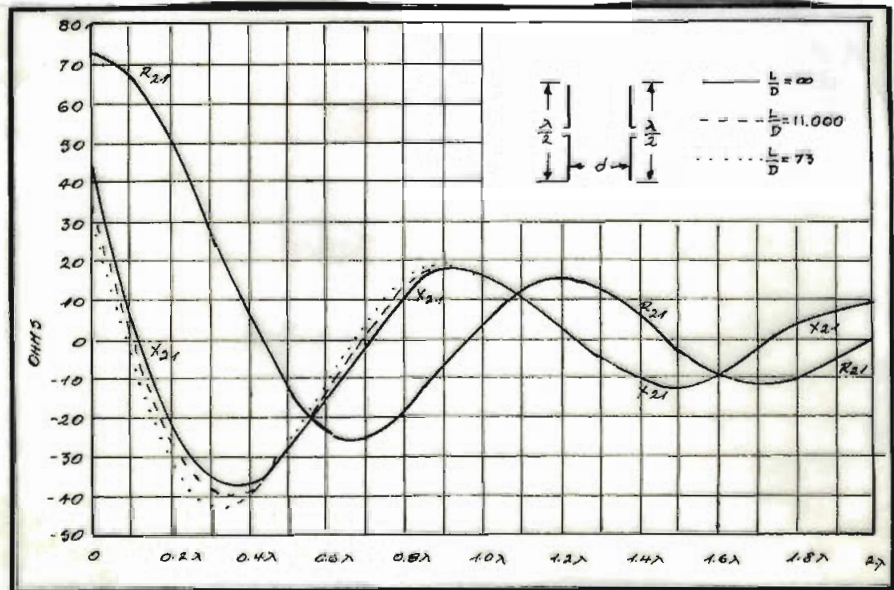


Fig. 3-5 Curvas de resistencia mutua y reactancia mutua (X_{21}) de dos antenas de $\lambda/2$ paralelas colineales como una función del espaciamento S entre ellas.

[10] Dibujos tomados del libro: Antennas de J. Kraus.

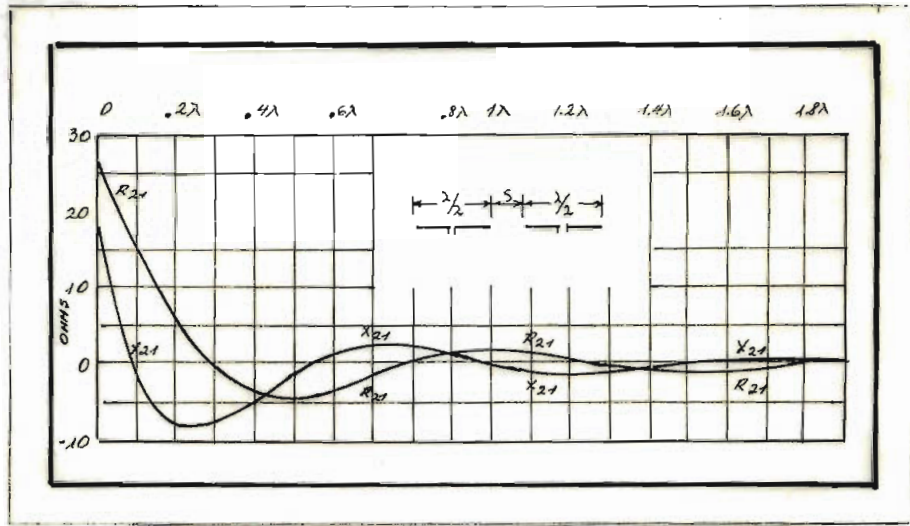


Fig. 3-6 Curvas de resistencia mutua (R_{21}) y reactancia mutua (X_{21}) para dos antenas paralelas separadas una distancia d .

Desde estos gráficos se obtiene:

Para el caso $d=0$ $S=\lambda/2$

$$X_{12} = - 2 \text{ ohms.}$$

Para el caso $d=\lambda/2$ $S=0$

$$X_{13} = - 2.8 \text{ ohms.}$$

Para el caso $d=\lambda/2$ $h=\lambda$

Se puede calcular X_{14} de la siguiente manera:

$$A = \beta (\sqrt{d^2 + h^2} + h) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\lambda\sqrt{5}}{2} + \lambda \right) = 13.3$$

$$A' = \beta (\sqrt{d^2 + h^2} - h) = \frac{2\pi}{\lambda} \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - 1 \right) = 0.72$$

$$B = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h-L)^2} + (h-L) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\lambda\sqrt{\frac{1}{2}} + \frac{\lambda}{2} \right] = 7.57$$

$$B' = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h-L)^2} - (h-L) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\lambda\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{\lambda}{2} \right] = 1.28$$

$$C = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h+L)^2} + (h+L) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\lambda\sqrt{10}}{2} + \frac{3\lambda}{2} \right] = 19.3$$

$$C' = \beta \left[\sqrt{d^2 + (h+L)^2} - (h+L) \right] = \frac{2\pi}{\lambda} \left[\frac{\lambda\sqrt{10}}{2} - \frac{3\lambda}{2} \right] = 0.50$$

$\beta h = 2\pi$, entonces: $\cos \beta h = 1$, $\sin \beta h = 0$

$$X_{14} = -15 \cos \beta h / (2 \sin A + 2 \sin A' - \sin B - \sin B' - \sin C - \sin C')$$

$$X_{14} = -15 (2 \sin 13.3 + 2 \sin 0.72 - \sin 7.57 - \sin 1.28 - \sin 19.3 - \sin 0.50) \text{ ohms.} = 4.26 \text{ ohms.}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} Z_{11} &= R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14} + j (X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) \\ &= 73 - 4.1 - 12.7 - 0.8 + j (43 - 2 - 28 - 4.26) \\ &= (55.4 + j 17.26) \text{ ohms.} \end{aligned}$$

La impedancia total del arreglo se puede calcular en esta forma:

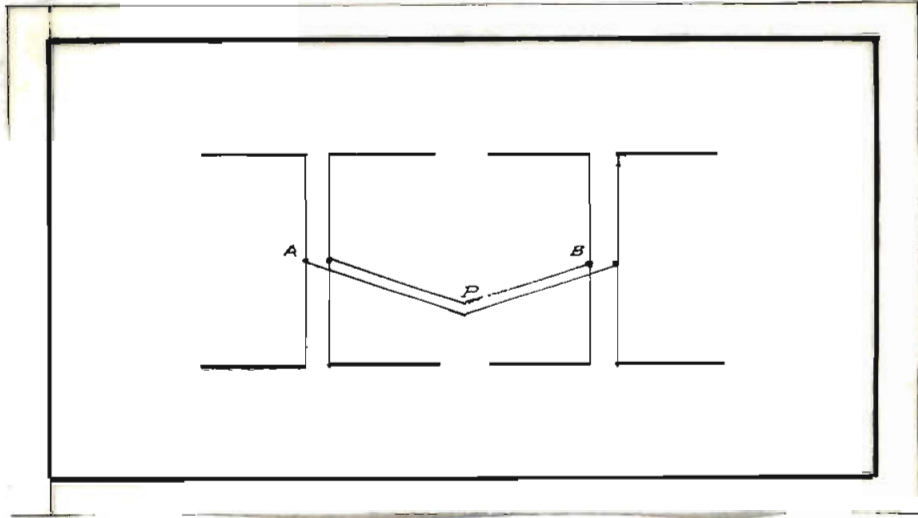


Fig. 3-7 Representación de un arreglo 2×2 para el cálculo de la impedancia total del arreglo.

Si los dipolos están alimentados tal como se observa en la Fig. 3-7; en el punto A se tendrá la mitad de la impedancia que se tiene en el elemento 1, pues las antenas 1 y 3 tienen la misma impedancia.

Por lo tanto: $Z_A = 27.7 + j 8.63$ ohms.

También $Z_B = 27.7 + j 8.63$ ohms.

Si la longitud AP es media longitud de onda, en el punto P se tendrá:

$$Z = 1/2 (27.7 + j 8.63) = 13.85 - j 4.31 \text{ ohms.}$$

La impedancia en el punto P se puede variar, modificando la longitud de las líneas de transmisión AP y BP.

3-3 DIRECTIVIDAD.

Es de importancia estudiar la directividad de un arreglo por que es un concepto muy utilizado en la práctica.

Considerando el mismo arreglo plano de 4 dipolos de media longitud **de onda**, como se observa en la Fig. 3-8.

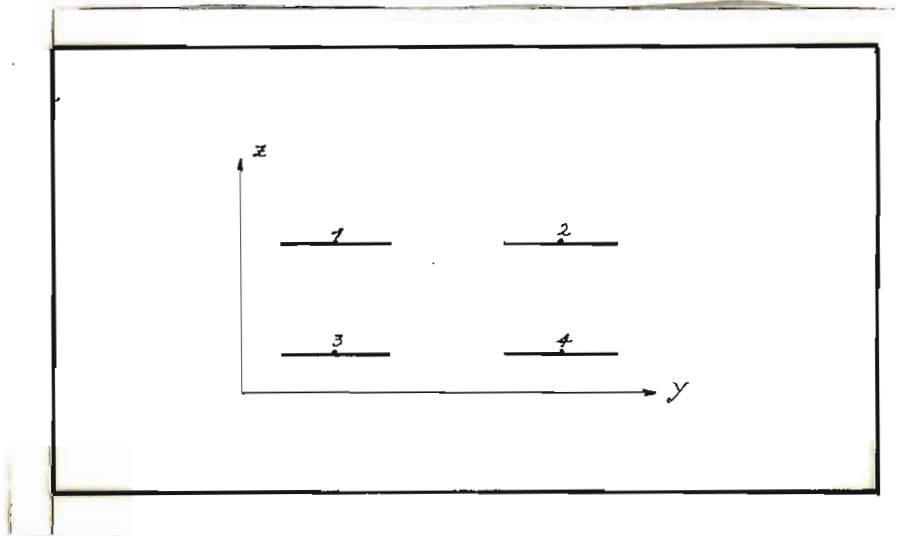


Fig. 3-8 Arreglo plano 2 x 2.

La directividad D es igual a : [11]

$$D = \frac{\text{Intensidad de radiación máxima}}{\text{Intensidad de radiación promedio}} \quad (3-19)$$

Cuando la configuración de radiación consta de un solo lóbulo de radiación, hay una fórmula para calcular la directividad. [12]

$$D = \frac{4\pi}{\Omega_r} \quad (3-20)$$

Donde θ_1, ϕ_1 son los ángulos expresados en radianes contenidos entre las líneas que pasan por los puntos de potencia mitad y el origen de coordenadas, como se puede observar en la Fig. 3-9

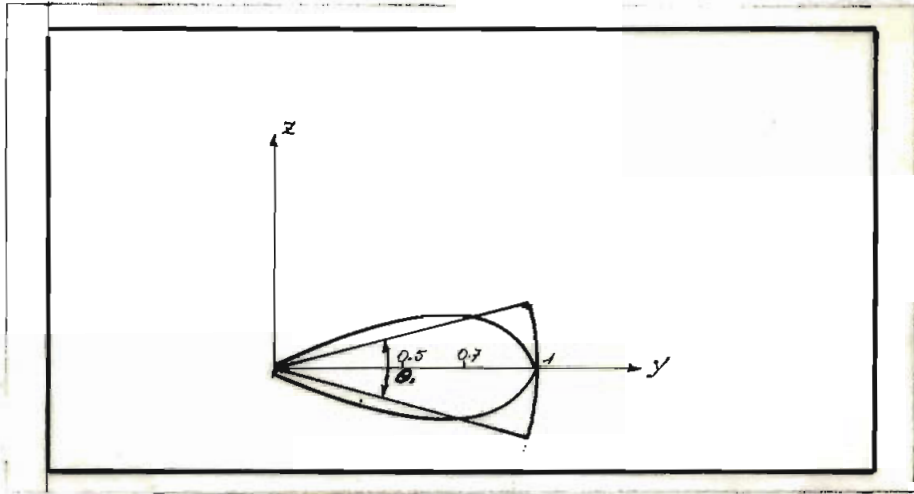


Fig. 3-9 Configuración de potencia, y ángulo entre puntos de potencia mitad para un cálculo rápido de la directividad.

En la Fig. 3-9, el ángulo ϕ_1 está en un plano perpendicular a aquel que contiene el ángulo θ_1 .

No siempre es posible encontrar analíticamente la directividad; por ejemplo cuando la ecuación matemática que representa la configuración de radiación es muy difícil.

La Ganancia es muy cercanamente igual a la directividad cuando la antena o el arreglo de antenas es muy eficiente ^[13] (esto es cuando \mathcal{K} es cercanamente igual al 100%).

$$G = K D \quad (3-21)$$

Donde $G = \text{Ganancia}$

$K = \text{Eficiencia de la antena o del arreglo.}$

$D = \text{Directividad.}$

Debido a que el concepto de Ganancia toma en cuenta la eficiencia de la antena; es muy útil y conveniente efectuar un estudio acerca de la Ganancia.

3-3-1 Ganancia.

Si \bar{W} es la potencia total aportada al sistema (véase la Fig. 3-7).

$\bar{W}_1 = \text{Potencia cedida a la antena 1.}$

Por lo tanto:

$$\bar{W}_1 = I_1^2 (R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14}) \quad (3-22)$$

$\bar{W}_3 = \text{Potencia cedida a la antena 3.}$

$$\text{Entonces: } \bar{W}_3 = I_3^2 (R_{33} + R_{31} + R_{32} + R_{34}) \quad (3-23)$$

Pero: $I_1 = I_3$

También se tiene: $R_{11} = R_{33}$ $R_{32} = R_{14}$ $R_{34} = R_{12}$

De tal manera que la potencia cedida a las antenas , 1 y 3 es:

$$\frac{W}{2} = 2 J_1^2 (R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14}) \quad (3-23)$$

De donde:

$$J_1 = \sqrt{\frac{W}{4(R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14})}} \quad (3-24)$$

Es lo más usual expresar la Ganancia como intensidad de campo del arreglo, con respecto a la intensidad del dipolo de media longitud de onda; teniendo presente que tanto el arreglo como el dipolo de media longitud de onda, reciben la misma potencia.

Si no se asumen pérdidas, la corriente en el dipolo de media longitud de onda es igual a :

$$J_0 = \sqrt{\frac{W}{R_{00}}} \quad (3-25)$$

Donde con R_{00} se expresa la autoresistencia del dipolo.

Se encontró en el capítulo 2-1 de esta tesis que el campo eléctrico para un dipolo de media longitud de onda situado verticalmente(coincidente con el eje z) es :

$$E = K J_0 \frac{\cos \left[\frac{\pi}{2} \cos \theta \right]}{\sin \theta} \quad (3-26)$$

Si el dipolo se encuentra en un plano horizontal (sobre el eje y) e interesa el campo en el plano horizontal, la expresión para el campo eléctrico en este caso estará dada por:

$$E = \kappa I_0 \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \cos \Phi_1\right]}{\sin \Phi_1} = \kappa I_0 \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \Phi\right]}{\cos \Phi} \quad (3-27)$$

En la expresión anterior Φ_1 es el ángulo complementario del ángulo Φ .

Reemplazando el valor de I_0 de la expresión (3-25) en la expresión (3-27) queda:

$$E_{\text{dipolo}}(\Phi) = \kappa \sqrt{\frac{W}{R_{00}}} \frac{\cos\left[\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \Phi\right]}{\cos \Phi} \quad (3-28)$$

Para el arreglo rectangular $p \times q$, se ha encontrado que la intensidad de campo eléctrico en el plano horizontal, está dada por la expresión (3-6):

$$E_T = p \times q E_1 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{q \beta \lambda_f \operatorname{sen} \Phi}{2}\right)}{q \operatorname{sen}\left(\frac{\beta \lambda_f \operatorname{sen} \Phi}{2}\right)} \right] \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cos \Phi_1\right)}{\operatorname{sen} \Phi_1} \right]$$

Pero $\Phi_1 = 90^\circ - \Phi$

En consecuencia:

$$E_{\text{arreglo}}(\Phi) = p \times q E_1 \left[\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{q \beta \lambda_f \operatorname{sen} \Phi}{2}\right)}{q \operatorname{sen}\left(\frac{\beta \lambda_f \operatorname{sen} \Phi}{2}\right)} \right] \left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \operatorname{sen} \Phi\right)}{\cos \Phi} \right] \quad (3-29)$$

Recordando que $E_{1-} \propto I_1$ y dividiendo la expresión (3-29) para la (3-28) se obtiene la Ganancia de un arreglo rectangular $p \times q$.

Por lo tanto:

$$\text{Ganancia} = \mathcal{G} = \frac{E_{\text{arreglo}}(\phi)}{E_{\text{dipolo}}(\phi)} = \frac{p \times q I_1}{\sqrt{\frac{W}{R_{00}}}} \left[\frac{\text{sen}(q\beta \Delta y \frac{\text{sen} \phi}{2})}{q \text{sen}(\beta \Delta y \frac{\text{sen} \phi}{2})} \right] \quad (3-30)$$

Para el arreglo de 4 elementos en consideración se tiene que: $p = 2$, $q = 2$ e I_1 está dada por la expresión (3-24).

Entonces:

$$\text{Ganancia} = \mathcal{G} = 4 \sqrt{\frac{R_{00}}{4/R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14}}} \left[\frac{\text{sen}(q\beta \Delta y \frac{\text{sen} \phi}{2})}{q \text{sen}(\beta \Delta y \frac{\text{sen} \phi}{2})} \right] \quad (3-31)$$

Para que haya Ganancia máxima ϕ debe valer 0° (ob-
servese por ejemplo la Fig. 3-1). Reemplazando este valor de ϕ en (3-31) y luego de levantar la indeterminación $\frac{0}{0}$ que se produce, se tiene:

$$\text{Ganancia máxima} = \mathcal{G} = 4 \sqrt{\frac{R_{00}}{4/R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14}}} \quad (3-32)$$

Se puede notar que la Ganancia máxima, además de depender del número de elementos depende también de las resistencias mu-
tuas entre elementos y en consecuencia, de las distancias que hay entre éstos.

3-4 Consideraciones para el Diseño y Aplicación a un Caso Práctico.

Se han estudiado las características de los arreglos rectangulares; ahora es conveniente emplear dichos conocimientos para diseñar un arreglo rectangular real.

La principal utilización de los arreglos rectangulares se tiene en enlaces en UHF, debido a que en estas aplicaciones se necesitan configuraciones en forma de "beam".

También se requiere que el arreglo se acople a una línea coaxial de 50 ohms de impedancia característica, que es la impedancia de salida del transmisor; y que el arreglo tenga una ganancia de varios db (dependiendo esta ganancia deseada de la distancia del enlace).

Asumiendo que en una aplicación dada se precisa un arreglo rectangular que produzca una ganancia de 8db; este objetivo se logrará con un arreglo 2×2 , pues si en la expresión (3-32) se reemplazan los valores de resistencia mutua correspondientes a estos arreglos, resultará una ganancia de 6.5 db. Si a esta ganancia se suma aquella producida por un reflector metálico plano, se alcanzará la ganancia deseada.

Surge entonces una pregunta: ¿A qué distancia hay que colocar los elementos en el arreglo?

La respuesta no es inmediata pues conviene hacer un análisis de la situación.

En el sentido vertical los dipolos deben estar colocados a una distancia $\frac{\lambda}{2}$, con esto se consigue un reforzamiento de la señal.

La alimentación puede ser cualquiera de estas dos: (Véase la fig. 3-9).

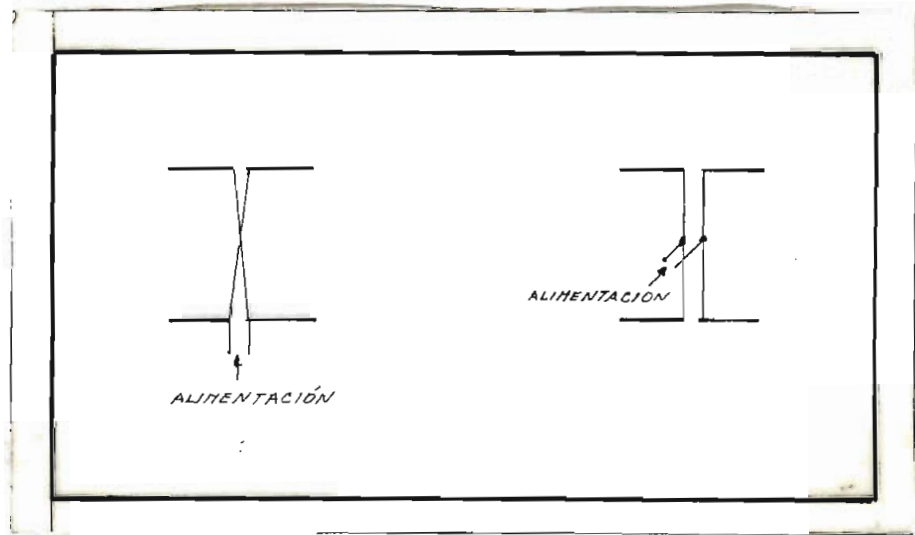


Fig. 3-9 Formas en que se pueden alimentar los dipolos.

En el sentido horizontal es necesario hallar la distancia d_y , es decir aquella entre centros de los dipolos, (véase Fig. 3-10).

Del estudio efectuado en el capítulo 3-1 de esta tesis

sobre las configuraciones de radiación de los arreglos rectangulares, se concluye que esta distancia s_y puede estar comprendida entre $\frac{\lambda}{2}$ y $\frac{5}{8}\lambda$. Esta distancia no puede exceder de $\frac{5}{8}\lambda$ porque el tamaño de los lóbulos laterales aumenta rápidamente. (Dibujando las configuraciones de radiación para diferentes valores de s_y a base de la expresión 3-6).

Ahora bien, con una distancia $s_y = \frac{\lambda}{2}$, significaría que $s \rightarrow 0$, lo cual tampoco conviene; pues en general en distancias s muy pequeñas hay notable influencia de un elemento con otro, lo cual hace variar notablemente la impedancia del arreglo, como se puede revisar en el capítulo 3-2 de esta tesis.

Por lo tanto la distancia más aconsejable es $s_y = \frac{5}{8}\lambda$.

En el gráfico 3-11 se pueden observar las distancias a las que hay que colocar los elementos en el arreglo.

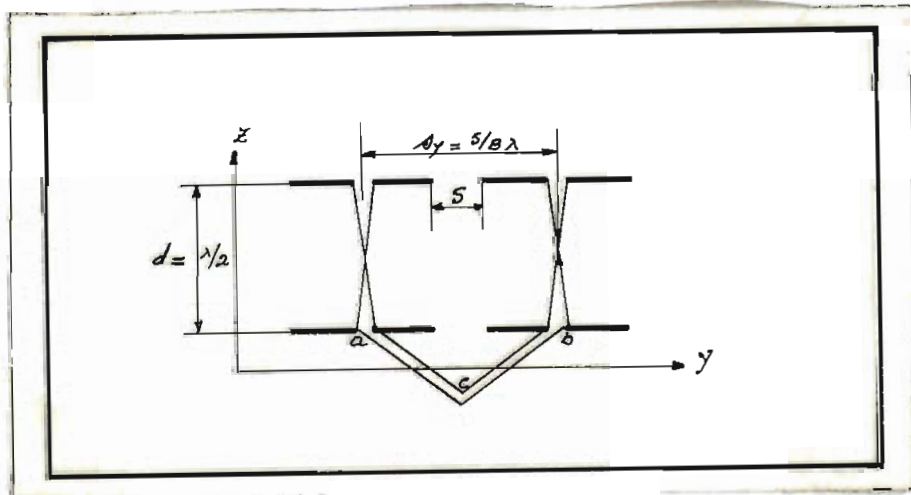


Fig. 3-11 Arreglo rectangular de dipolos, con las distancias a las que es aconsejable colocar los dipolos.

Es conveniente analizar la impedancia de entrada del arreglo de la Fig. 3-11. Recordando el estudio sobre impedancia, efectuado en el capítulo 3-2 de esta tesis, se tiene:

$$Z_1 = (R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14}) + j(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14}) \quad (3-33)$$

Para los elementos 1 y 2 : $d = \frac{\lambda}{8}$, $d = 0$; desde el gráfico 3-5 se obtiene:

$$R_{12} = 12.5 \text{ ohms.}$$

$$X_{12} = -4.0 \text{ ohms.}$$

Para los elementos 1 y 3 , cuando están a una distancia $d = \frac{\lambda}{2}$, se tiene: $R_{13} = -12.0 \text{ ohms}$, $X_{13} = -26 \text{ ohms}$.

Para los elementos 1 y 4; luego de efectuar el cálculo correspondiente se obtuvo:

$$R_{14} = -4.6 \text{ ohms.}$$

$$X_{14} = -11.0 \text{ ohms.}$$

Por lo tanto:

$$Z_1 = 68.9 - j 41 \text{ ohms.}$$

En el punto a ; esto es debido a los elementos 1 y 3 la impedancia será:

$$Z_a = 34.5 - j 20.5 \text{ ohms.}$$

Debido a los elementos 2 y 4 , en el punto b , se tendrá:

$$Z_b = 34.4 - j 20.5 \quad \text{ohms.}$$

Si la línea de transmisión $ac = bc = \frac{\lambda}{2}$; en el punto c , se tendrá:

$$Z_c = 17.2 - j 10.2 \quad \text{ohms.}$$

Como se puede notar, la magnitud de la impedancia de entrada del arreglo es menor que, la del dipolo de media longitud de onda.

3-4-1 Diseño Mejorado.

Una manera de mejorar el diseño , es colocando un reflector metálico plano atrás del arreglo rectangular; con esto se consigue mayor directividad y sobre todo que la radiación se dirija solamente en una dirección, lo que constituye un caso práctico.

En la Fig. 3-12 se puede observar el arreglo con el reflector metálico.

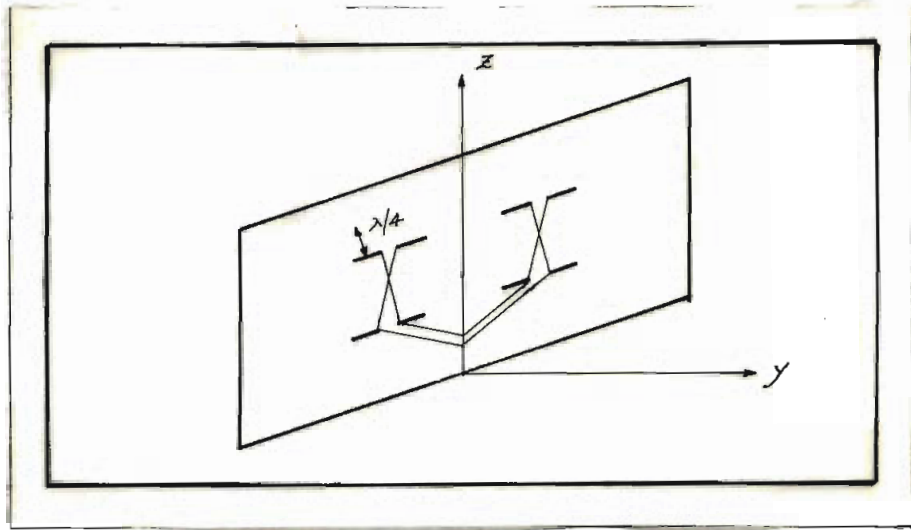


Fig. 3-12 Arreglo rectangular de dipolos en presencia de un reflector metálico.

El reflector metálico proporcionará una ganancia direccional de varios db, dependiendo de la distancia que haya entre el reflector y el arreglo. La distancia óptima a la que hay que colocar el reflector, depende del requerimiento en el diseño; pero es muy común colocar el reflector a una distancia de $\frac{\lambda}{4}$ del arreglo.

Es obvio que las características de un arreglo rectangular sufrirán modificación, cuando el arreglo esté en presencia de un reflector metálico plano. Inmediatamente se van a estudiar estas variaciones en las características.

3-4-2 Configuración de radiación de un arreglo rectangular en presencia de un reflector metálico plano.

Es importante conocer la forma que adquiere la configuración de radiación de esta clase de arreglos; por que éste es un caso de aplicación práctica.

Se encontró en el capítulo 3-1 de esta tesis, que el factor arreglo para un arreglo rectangular de dipolos como el de la Fig. 3-1, está dado por la expresión 3-5 :

$$f = \left[\frac{\sin \left(\frac{q \beta s}{2} \sin \phi \right)}{q \sin \left(\frac{\beta s}{2} \sin \phi \right)} \right] \left[\frac{\cos \left(\frac{\pi}{2} \sin \phi \right)}{\cos \phi} \right]$$

Se requiere conocer el factor arreglo, de un arreglo rectangular de dipolos en presencia de un reflector metálico; para esto es necesario valerse del método de imágenes. Conviene recordar que por el método de imágenes; el efecto del reflector delante de un elemento de corriente, se puede simular con un elemento de corriente situado atrás del reflector y a una distancia igual a la que se tenía entre el reflector y el elemento original de corriente; pero con la corriente en sentido contrario. (Obsérvese la Fig. 3-13)

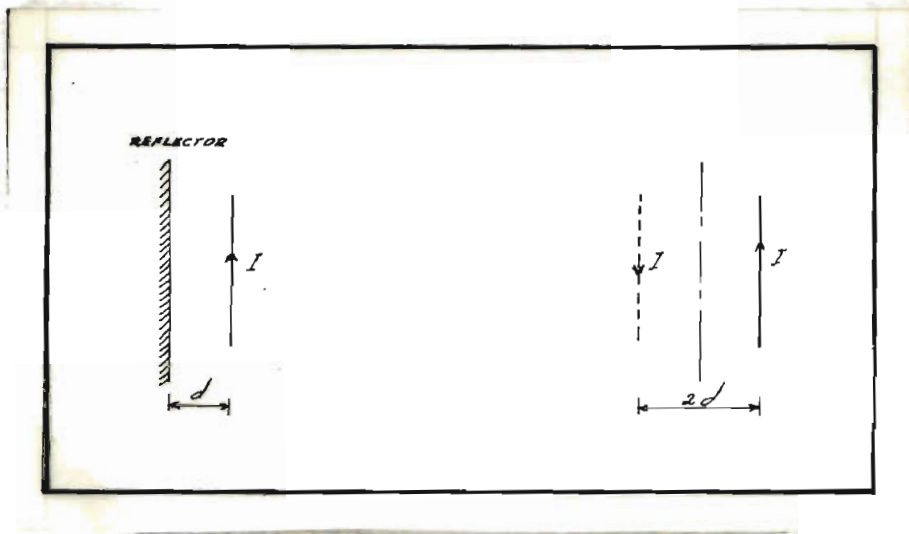


Fig. 3-13 Para explicar el método de imágenes.

Al arreglo rectangular a una distancia igual a $\frac{\lambda}{4}$ del reflector se lo puede mirar como si se tratara de dos arreglos situados a $\frac{\lambda}{2}$; pero con un defasamiento de 180° .

El factor arreglo, para este arreglo de arreglo se puede encontrar multiplicando la expresión (3-5), por el factor arreglo de dos elementos isotrópicos situados a una distancia $\frac{\lambda}{2}$ y defasados 180° .

El factor arreglo estará dado por la siguiente expresión:

$$f = \overbrace{\left[\frac{\sin\left(\frac{q\beta\lambda}{2} \sin\phi\right)}{q \sin\left(\frac{\beta\lambda}{2} \sin\phi\right)} \right]}^A \overbrace{\left[\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2} \sin\phi\right)}{\cos\phi} \right]}^B \overbrace{\left[\cos\left[\frac{\pi}{2} (\cos\phi - 1)\right] \right]}^C \quad (3-34)$$

Es conveniente hallar la configuración de radiación para el arreglo óptimo 2×2 en el cual $d_y = \frac{\lambda}{2}$ y $p = q = 2$.

Recordando que $d = \frac{\lambda}{2}$ y asumiendo varios valores para el ángulo ϕ , se puede obtener el factor arreglo del arreglo 2×2 . Efectuando el cálculo de la expresión (3-34) se obtuvo la siguiente tabla de valores:

ϕ (GRADOS)	$\text{sen } \phi$	A	B	C	$f = A \times B \times C$
0	0	1	1	1	1
10	0.1736	0.9426	0.9778	0.9997	0.921
20	0.3420	0.7826	0.9146	0.9955	0.7125
30	0.500	0.5555	0.8163	0.9779	0.443
40	0.6427	0.3040	0.6962	0.9332	0.198
50	0.7660	0.0667	0.5592	0.8468	0.031
60	0.866	0.1292	0.4180	0.707	0.038
70	0.9397	0.2706	0.2734	0.5120	0.037
80	0.9848	0.3549	0.139	0.2697	0.013
90	1.0	0.3826	0	0	0

Tabla 3-2 Factor arreglo de un arreglo rectangular de dipolos en presencia de un reflector plano.

Con los valores de la tabla 3-2 se puede dibujar el diagrama de radiación diagrama unitario de radiación en el plano horizontal del arreglo 2×2 , en el cual $d_y = \frac{\lambda}{2}$ y $d_x = \frac{\lambda}{2}$ (Véase la Fig. 3-14)

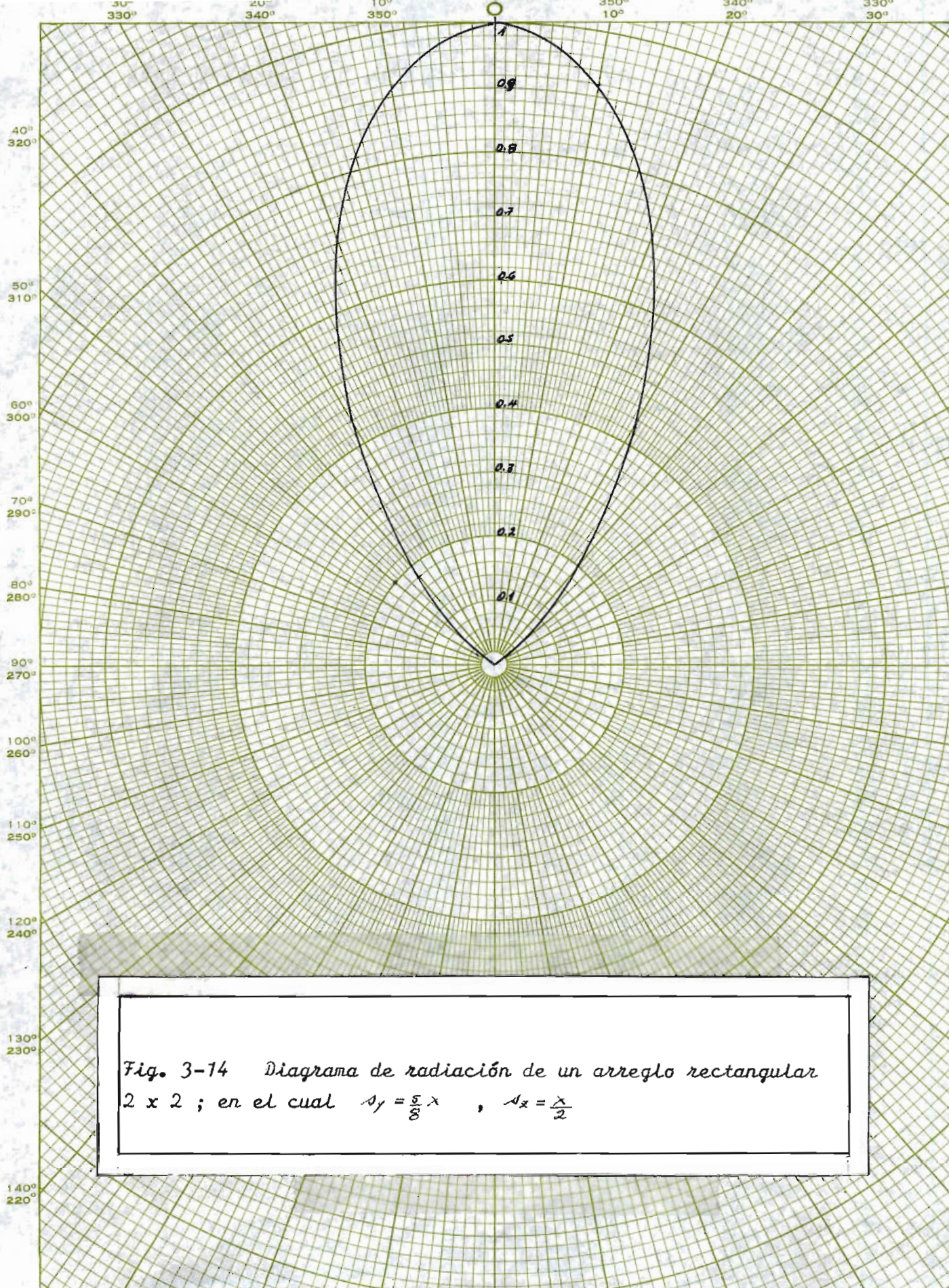


Fig. 3-14 Diagrama de radiación de un arreglo rectangular 2 x 2 ; en el cual $A_y = \frac{\pi}{8} \lambda$, $A_x = \frac{\lambda}{2}$

Como se notará en la Fig. 3-14, teóricamente no hay radiación en la dirección opuesta a la del lóbulo principal, debido a la presencia del reflector.

Colocando un reflector metálico plano varía la impedancia total del arreglo; por lo cual conviene también hacer un estudio de la variación de la impedancia.

3-4-3 Impedancia de un arreglo rectangular con reflector plano.

El efecto del reflector se puede reemplazar valiéndose del método de imágenes, como se observa en la Fig. 3-15.

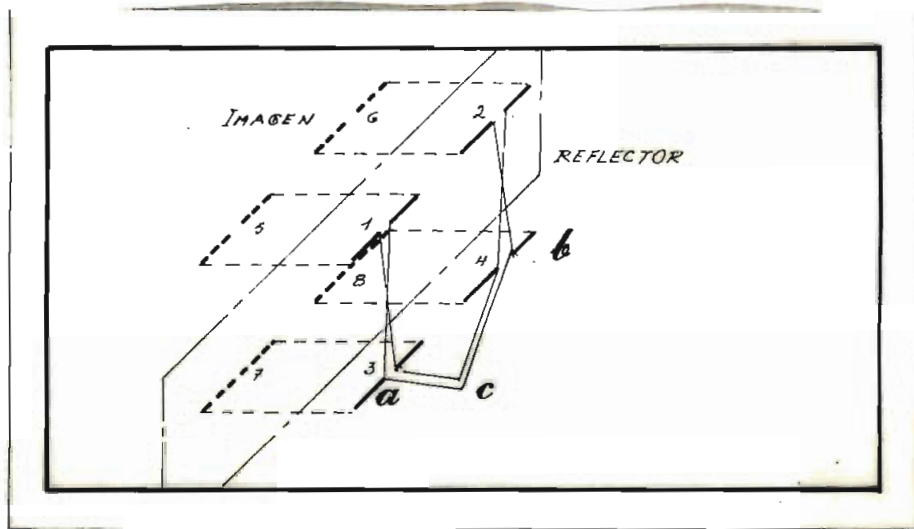


Fig. 3-15 Utilización del método de imágenes para reemplazar el efecto del reflector.

La impedancia del elemento 1 será:

$$Z_1 = (R_{11} + R_{12} + R_{13} + R_{14} - R_{15} - R_{16} - R_{17} - R_{18}) + j(X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} - X_{15} - X_{16} - X_{17} - X_{18})$$

Para este caso particular (reflector a $\frac{\lambda}{2}$ del arreglo) se nota:

$$R_{13} = R_{15} \quad X_{13} = X_{15} \quad R_{14} = R_{16} \quad X_{14} = X_{16}$$

Anteriormente se calculó $R_{12}, R_{13}, R_{14}; X_{12}, X_{13}, X_{14}$; falta $R_{17}, X_{17}, R_{18}, X_{18}$.

Luego de efectuar el cálculo se obtuvo:

$$R_{17} = -24 \text{ ohms.}$$

$$X_{17} = -6 \text{ ohms.}$$

$$R_{18} = -5.5 \text{ ohms.}$$

$$X_{18} = -8.9 \text{ ohms.}$$

De tal manera que la impedancia de entrada del arreglo será:

$$Z_c = 28.75 + j 2.71 \text{ ohms.}$$

Se nota claramente que la presencia del reflector ha influido sobre el valor de la impedancia de entrada del arreglo.

Un problema práctico que se presenta es el de acoplar el

arreglo de antenas (sistema balanceado) a la línea de alimentación (cable coaxial). Para superar este problema se utiliza una línea de $\frac{\lambda}{4}$ que va conectada entre los terminales del arreglo y de un balún. La impedancia característica de esta línea de un cuarto de longitud de onda se puede calcular así:

$$Z_0 = \sqrt{Z_c Z_d} = 74 \text{ ohms}$$

Donde: Z_c = impedancia de entrada del arreglo.

$Z_d = 200 \text{ ohms}$ = impedancia que debe tenerse en el otro extremo de la línea de $\frac{\lambda}{4}$, con el objeto de acoplarse mediante un balún al cable coaxial de 50 ohms de impedancia característica.

En esta forma se ha estudiado la variación de la impedancia de entrada del arreglo, cuando está presente un reflector plano.

3-4-4 Ganancia "directiva del arreglo rectangular en presencia de un reflector plano.

Es de mucha importancia encontrar la ganancia directiva del arreglo rectangular de dipolos en presencia del reflector metálico plano; pues en cualquier aplicación es fundamental conocer el número de (db) que se obtendrá con un arreglo dado.

Se recordará el concepto de ganancia, como la relación de la intensidad de campo del arreglo a la intensidad de campo de la antena de referencia (dipolo).

La intensidad de campo del arreglo (desde la expresión 3-34 que da el factor arreglo) será:

$$E = p \times q \times K I_1 \left[\frac{\sin(q \beta s \frac{\sin \phi}{2})}{q \sin(\beta s \frac{\sin \phi}{2})} \right] \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \sin \phi)}{\cos \phi} \right] \left[\cos \left[\frac{\pi}{2} (\cos \phi - 1) \right] \right] \quad (3-35)$$

Del estudio efectuado sobre la impedancia del arreglo; la resistencia en los terminales del elemento 1 del arreglo será:

$$R_1 = R_{11} + R_{12}, R_{13}, R_{14} - R_{15} - R_{16} - R_{17} - R_{18} \quad (3-36)$$

Para el caso en consideración: $R_{13} = R_{15}$ $R_{14} = R_{16}$.

Entonces: $R_1 = R_{11} + R_{12} - R_{17} - R_{18}$.

Por lo que:

$$I_1 = \sqrt{\frac{2W/4}{R_{11} + R_{12} - R_{17} - R_{18}}} \quad (3-37)$$

Se nota en la expresión anterior que el efecto del reflector se compensa, asumiendo que cada elemento recibe una potencia igual a : $2W/4$.

Donde w = potencia total aportada al arreglo.

Reemplazando la expresión (3-37) en la (3-35) se tiene:

$$E = \rho \times q \times K \sqrt{\frac{2w/4}{R_{11} + R_{12} - R_{17} - R_{18}}} \left[\frac{\sin(q\beta s \frac{\sin\phi}{2})}{q \sin(\beta s \frac{\sin\phi}{2})} \right] \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \frac{\sin\phi}{\cos\phi})}{\cos\phi} \right] \left[\cos\left[\frac{\pi}{2}(\cos\phi - 1)\right] \right]$$

Para un dipolo de media longitud de onda, se tiene que la intensidad de campo eléctrico es igual a:

$$E = K \sqrt{\frac{w}{R_{00}}} \left[\frac{\cos(\frac{\pi}{2} \frac{\sin\phi}{\cos\phi})}{\cos\phi} \right] \quad (3-38)$$

Por lo tanto la ganancia del arreglo respecto al dipolo de media longitud de onda será:

$$G = \rho \times q \sqrt{\frac{R_{00}}{2(R_{11} + R_{12} - R_{17} - R_{18})}} \left[\frac{\sin(q\beta s \frac{\sin\phi}{2})}{q \sin(\beta s \frac{\sin\phi}{2})} \right] \left[\cos\left[\frac{\pi}{2}(\cos\phi - 1)\right] \right] \quad (3-39)$$

Para obtener la ganancia directiva es necesario reemplazar el valor de $\phi = 0^\circ$ en la expresión anterior. Luego de levantar la indeterminación, se obtiene que la ganancia directiva es:

$$G_d = 2 \sqrt{2} \sqrt{\frac{R_{00}}{R_{11} + R_{12} - R_{17} - R_{18}}} \quad (3-40)$$

Reemplazando en la expresión (3-40) , los valores correspondientes de resistencia se tiene:

$$D = 2.3$$

Que expresada en (db) es: $20 \log 2.3 = 7.3 \text{ db}$.

Se puede obtener una ganancia directiva mayor, acercando el reflector al arreglo; por ejemplo cuando la separación entre el reflector y el arreglo es $\frac{\lambda}{8}$, se ha calculado que la ganancia directiva es 11.2 db.

En esta forma se han estudiado en este capítulo las características de los arreglos rectangulares y se han establecido los aspectos fundamentales que hay que considerar en el diseño de un arreglo rectangular real.

CAPITULO

CUARTO

4. COMPROBACION EXPERIMENTAL.

En el capítulo anterior se estudiaron los arreglos rectangulares; a continuación conviene construir un modelo real, con el objeto de realizar varias mediciones y comprobar si los resultados obtenidos en la teoría están de acuerdo con los de la experimentación.

Las mediciones que conviene efectuar son: configuración de radiación, impedancia y ganancia directiva del arreglo. Pero antes de exponer acerca de la forma como se realizaron estas mediciones, es menester hablar sobre la construcción del arreglo.

4-1 Construcción.

Es útil considerar los diferentes aspectos que intervinieron en la construcción del modelo experimental, para tomarlos en cuenta cuando se diseñe un arreglo práctico.

Entre estos factores se pueden anotar los siguientes:

1º.- La distancia entre dipolos en el sentido vertical debe

ser $l = \frac{\lambda}{2}$; pero es necesario tomar en cuenta la longitud eléctrica l_e ; siendo $l_e = \frac{l}{k}$, donde $k =$ constante dieléctrica del material.

De tal manera que para la frecuencia empleada de 600 MHz $l = \frac{\lambda}{2} = 25$ cms. Pero $l_e = 22.7$ cms. pues $k = 1.2$ ^{*[14]} ; es a esta distancia que hay que colocar los dipolos.

2º.- La longitud teórica de los dipolos es $\frac{\lambda}{2}$; pero en la práctica esta longitud es 0.48λ con el objeto de que la impedancia del dipolo no contenga reactancia

3º.- La distancia entre los centros de los dipolos colineales, se dedujo en el capítulo 3-4 de esta tesis debía ser $5/8 \lambda$; por lo que para la frecuencia de 600 MHz esta distancia es 31.25 cms.

4º.- La distancia a la cual se colocó el reflector plano es 12.5 cm. que corresponde a $\frac{\lambda}{4}$.

Con relación a los materiales, se empleó lámina de aluminio para el reflector plano y tubos de aluminio para los dipolos. Respecto a la lámina de aluminio, esta fue de un grueso de 0.8 mm con lo cual se cumple el requerimiento de que este grueso sea mucho mayor que la profundidad de penetración debida al efecto Skin; pues para la frecuencia de 600 MHz

la profundidad de penetración es: *[I5]

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{\pi f \mu \sigma}} = \frac{1}{\sqrt{\pi \times 600 \times 10^6 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 3.72 \times 10^7}} = 3.35 \times 10^{-3} \text{ mm.}$$

En donde f = frecuencia

μ = permeabilidad del medio

σ = conductividad del medio.

En esta forma se han revisado los principales factores que se tomaron en cuenta en la construcción del arreglo.

4-1 Obtención del Diagrama de Radiación.

Conseguir experimentalmente el diagrama de radiación de un arreglo rectangular es muy necesario, con el objeto de compararlo con el diagrama de radiación obtenido teóricamente.

Para efectuar este experimento se utilizó la siguiente disposición de aparatos. Obsérvese la Fig. 4-1

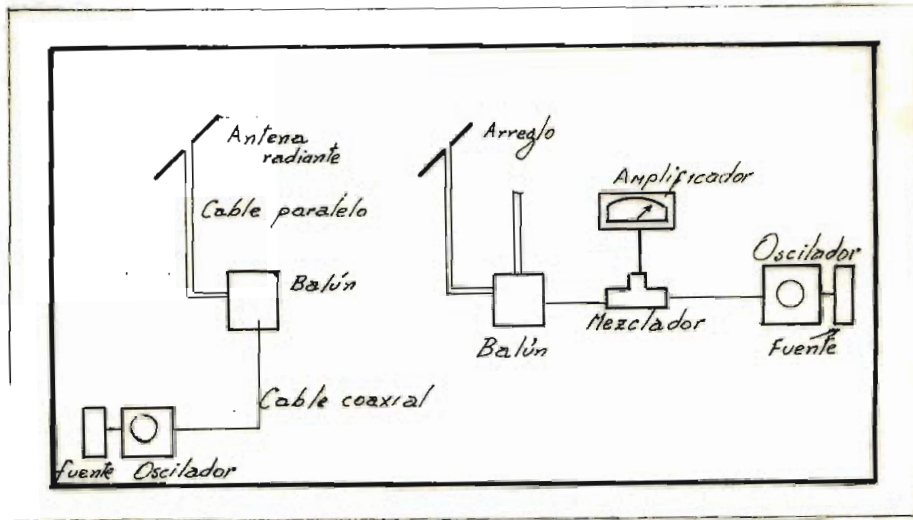


Fig. 4-1 Circuito utilizado para la obtención del diagrama de radiación.

El experimento consiste en lo siguiente:

Un dipolo de $\lambda/2$ está acoplado a un oscilador mediante un balún (obsérvese a la izquierda de la Fig. 4-1); éste dipolo radia la energía electromagnética en dirección al arreglo bajo prueba, el cual está acoplado a un detector del tipo DNT. Al arreglo bajo prueba se lo hace girar y la energía que recibe, la cual depende del ángulo que ha girado el arreglo es obtenida en el indicador del amplificador de FI.

Es necesario que la distancia entre la antena transmisora y el arreglo bajo prueba sea lo suficientemente lejana

con el objeto de tener la medida en la zona de radiación de la antena transmisora.

La distancia entre las dos antenas debe ser: *[16]

$$R \gg \frac{2d^2}{\lambda}$$

En donde d es la dimensión más grande del arreglo.

Entre las precauciones que hay que observar en la realización de este experimento se tienen las siguientes:

Escoger un sitio libre de obstáculos que den lugar a reflexiones.
Colocar las antenas lo suficientemente altas para evitar la influencia de tierra.

Los siguientes son los resultados conseguidos en este experimento:

ϕ GRADOS	E (db)	E	E/E_{max}
0	23.7	15.32	1
10	22.5	13.34	0.87
20	20	10.0	0.65
30	15	5.62	0.36
40	10	3.16	0.20
50	6	2	0.13
60	0	1	0.065
70	2.5	1.33	0.086
80	3	1.41	0.092
90	3	1.41	0.092

Tabla 4-1 Da los valores de campo eléctrico en el plano horizontal para un arreglo rectangular 2 x 2.

En la tabla 4-1 se han anotado los valores experimentales de campo eléctrico, expresados en db; con el objeto de dibujar el diagrama de radiación en una escala lineal, para compararlo con el diagrama de radiación encontrado teóricamente y dibujado en la Fig. 3-14, hay que recordar lo siguiente:

$$E \text{ (db)} = 20 \log E$$

Por lo tanto:

$$E = \log^{-1} \frac{E \text{ (db)}}{20}$$

A base de esta consideración se ha encontrado la tercera columna de la tabla 4-1. En la cuarta columna se ha escrito los valores correspondientes de E/E_{max} , lo cual servirá para representar el diagrama de radiación unitario.

En la Fig. 4-2 se ha dibujado en línea continua el diagrama de radiación obtenido en la experimentación y en línea de puntos el diagrama encontrado teóricamente para realizar las comparaciones correspondientes.

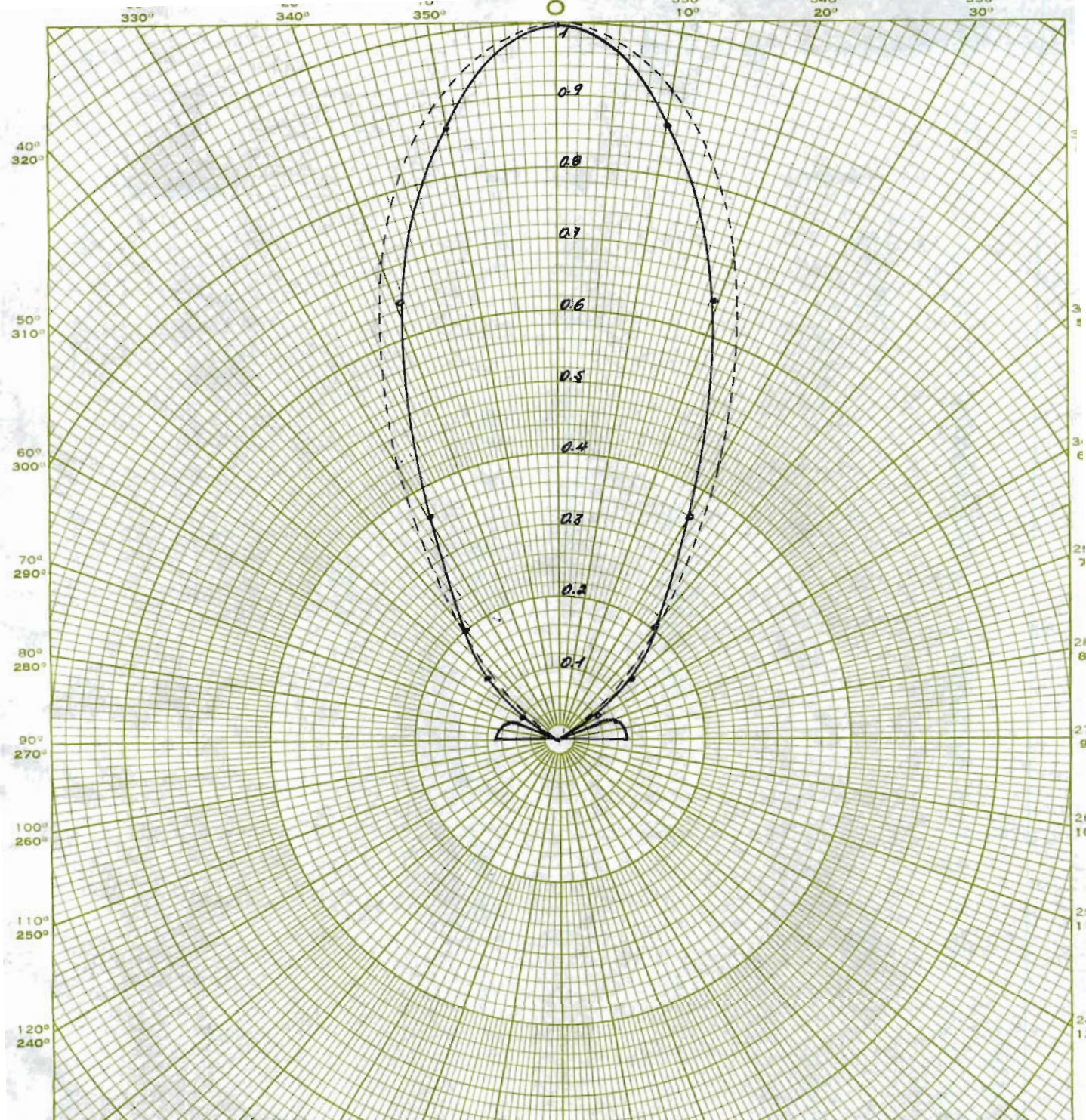


Fig. 4-2 Diagramas de radiación en el plano horizontal de un arreglo rectangular 2x2 ; en el cual $A_y = \frac{5}{8} \lambda$, $A_x = \frac{\lambda}{2}$

— Experimental
 - - - Teórico.

4-3 Medida de Impedancia.

Es importante encontrar experimentalmente la impedancia de un arreglo rectangular con el objeto de compararla con la impedancia obtenida teóricamente.

Para medir la impedancia de entrada al arreglo rectangular (punto c en la Fig. 4-3), se utilizó el circuito representado en la Fig. 4-4. Conviene recordar que se utilizó un balún con el objeto de acoplar el sistema balanceado (arreglo) al medidor de impedancia General Radio 1602-B (sistema desbalanceado), por intermedio del cable coaxial de alimentación.

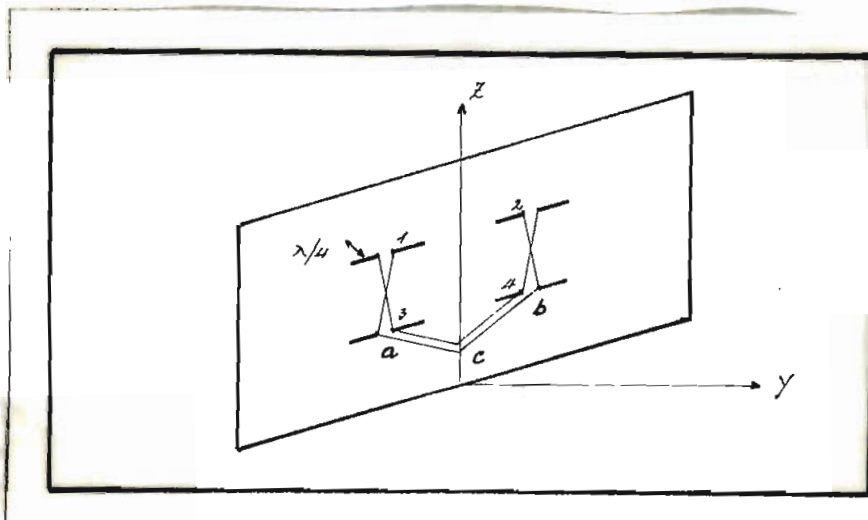


Fig. 4-3 Arreglo rectangular de dipolos en presencia de un reflector metálico plano.

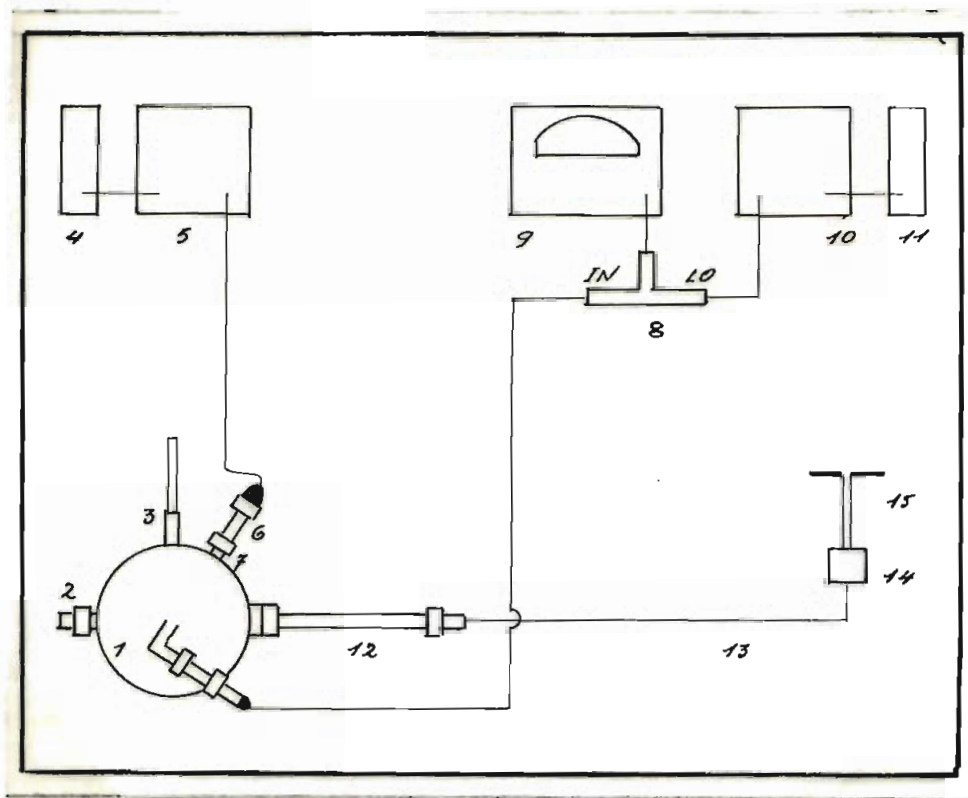


Fig. 4-4 Circuito utilizado en la medición.

- | | |
|---|--|
| 1. Medidor de Admitancia General Radio 1602-B | 11. Fuente de poder |
| 2. Conductancia Standard. | 12. Línea ajustable de media longitud de onda. |
| 3. Suceptancia Standard . | 13. Cable coaxial que alimenta al arreglo. |
| 4. Fuente de poder 1269-A Serie 135 | 14. Balún |
| 5. Oscilador 1362 UHF 220- 920 MHz. | 15. Arreglo de antenas. |
| 6. Filtro pasa bajo. | |
| 7.- Atenuador | |
| 8. Mezclador | |
| 9. Amplificador de FI | |
| 10. Oscilador | |

El medidor de admitancia trabaja sobre la base de indicación de nulo. En el medidor las corrientes fluyen en tres líneas coaxiales desde una fuente común; en cada línea hay una bobina, lógicamente la rotación del lazo da el grado de acoplamiento.

El voltaje inducido en el lazo de conductancia es:

$$U_g = K M_g G_s$$

En donde:

G_s = Conductancia Standard.

M_g = Acoplamiento mutuo entre la línea de conductancia Standard y el lazo de conductancia.

El voltaje U_b inducido en el lazo de susceptancia es:

$$U_b = j K M_b B_s$$

En donde:

B_s = Susceptancia Standard

M_b = Acoplamiento mutuo entre la línea de susceptancia y el lazo respectivo.

El voltaje inducido en el lazo donde va la admitancia desconocida es :

$$U_x = K M_x Y_x = K M_x (G_x + j B_x)$$

En balance la suma de los voltajes debe valer cero, o sea:

$$M_x (G_x + j B_x) + M_g G_s + j M_b B_s = 0$$

Por lo tanto:

$$G_x = - \frac{M_g}{M_x} G_s$$

$$B_x = - \frac{M_b}{M_x} B_s$$

G_s y B_s son constantes de allí que la escala M_g puede calibrarse en función de G_x y la escala M_b en función de B_x . La escala M_x puede calibrarse en función de un término multiplicativo.

En la Fig. 4-5 se pueden ver las escalas del medidor de admitancia.

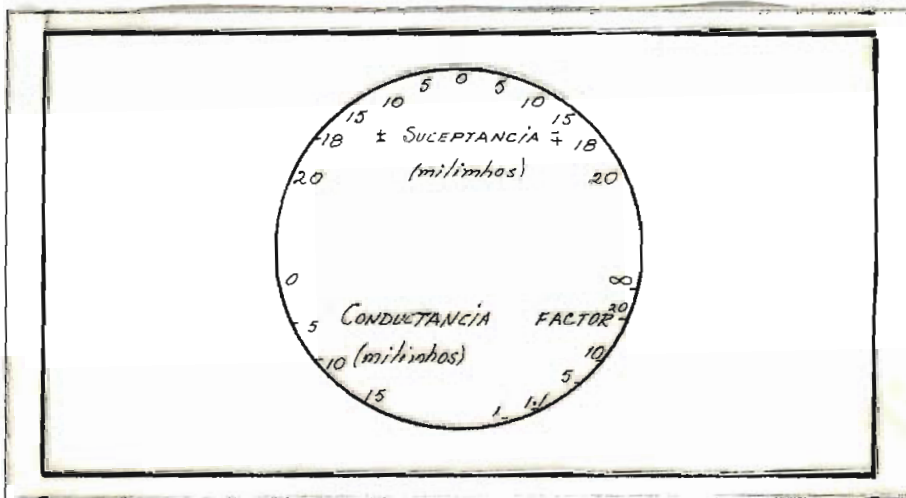


Fig. 4-5 Escalas del medidor de admitancia.

Como detector conviene utilizar el de la General Radio, tipo DNT, que está formado por el rectificador mezclador 874 - MRL, el amplificador de FI tipo 1216 - A- 30 y un oscilador Unit como oscilador local.

Luego de calibrar la suceptancia standard y de sintonizar el oscilador local a sus valores exactos, la línea ajustable es establecida a un cuarto de longitud de onda, conectando la terminación de corto circuito tipo 874-WN en su extremo estableciendo el medidor de admitancia, en una lectura $0 + j 0$ con un factor multiplicativo de uno y ajustando la línea hasta obtener un nulo. En esta forma se está listo para realizar la medición de impedancia del arreglo.

Primeramente se conectó el cable coaxial de alimentación al medidor de admitancia, a través de la línea ajustable de $\frac{\lambda}{4}$ (con el objeto de obtener directamente valores de impedancia) y se realizaron medidas de impedancia estando este cable en corto circuito y en circuito abierto, con el objeto de hallar la impedancia característica exacta de este cable utilizado para alimentar el arreglo rectangular.

Las lecturas obtenidas fueron:

Frecuencia utilizada : 600 kHz

En circuito abierto:

Factor de multiplicación = 5

$$B = 17.7 \text{ mhos}$$

$$G = 10.6 \text{ mhos}$$

En corto circuito.

Factor de multiplicación = 1

$$B = -2.8 \text{ mhos.}$$

$$G = 3 \text{ mhos.}$$

De tal manera que:

$$Z_{ca} = 2.5 \times 5 (10.6 + j 17.7) = (132.5 + j 221.25) \text{ ohms.}$$

$$Z_{cc} = 2.5 \times 1 (3.0 - j 2.8) = (7.5 - j 7.0) \text{ ohms.}$$

$$\begin{aligned} Z_{ca} \times Z_{cc} &= 993.75 - j 1659.37 - j 927.5 + 1548.75 \\ &= 2.542.5 + j 731.87 \end{aligned}$$

$$\text{Pero } Z_{ca} \times Z_{cc} = Z_o^2$$

Por lo tanto:

$$Z_o^2 = \sqrt{646.17 + 53.56} \times 10^2 = \sqrt{699.73} \times 10^2 = 26.4 \times 10^2$$

De donde:

$$Z_0 = 51 \text{ ohms.}$$

En lo sucesivo se tomará el valor de impedancia característica que dan los fabricantes, esto es 50 ohms.

El siguiente paso es acoplar el cable coaxial de alimentación (sistema desbalanceado), al arreglo de antenas en el punto c (sistema balanceado), véase la Fig. 4-3. El acoplamiento se efectúa mediante un balún de $\frac{\lambda}{2}$ como se observa en la Fig. 4-5.

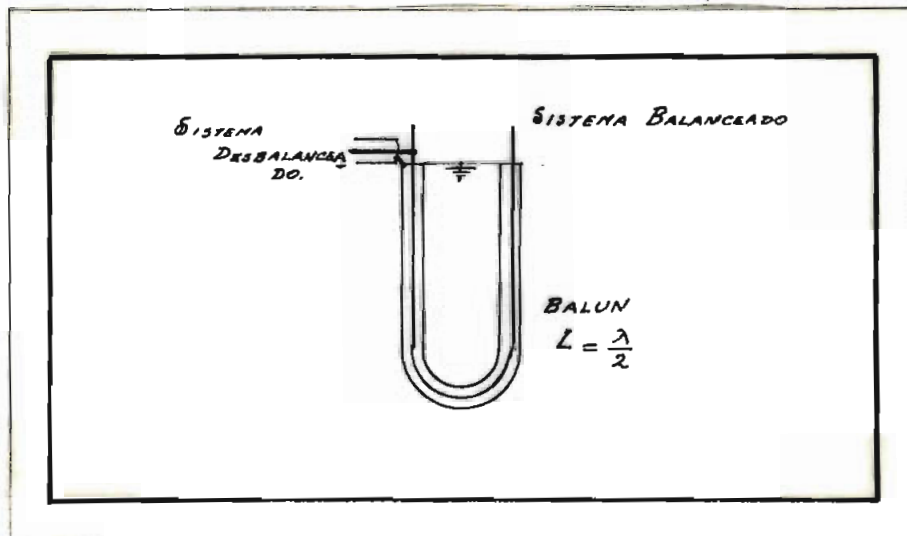


Fig. 4-5 Acoplamiento entre los sistemas balanceado y desbalanceado.

Con el arreglo conectado al cable coaxial de alimentación se obtuvieron los siguientes datos:

Frecuencia = 600 MHz

Factor de multiplicación = 1

$G = 5.2$

$B = -1$

De tal manera que:

$$Z = 2.5 \times 1 (5.2 - j) = (13 - j 2.5) \text{ ohms.}$$

$$Z / Z_0 = 0.26 - j 0.05$$

Este punto se lo localiza en el diagrama de Smith, sea éste el punto m.

O sea se ha medido la impedancia Z en el punto x, pero es necesario hallar la impedancia Z_1 es decir la impedancia del arreglo en el punto c' , (obsérvese la Fig. 4-6) para lo cual es necesario considerar la longitud eléctrica del cable de alimentación.

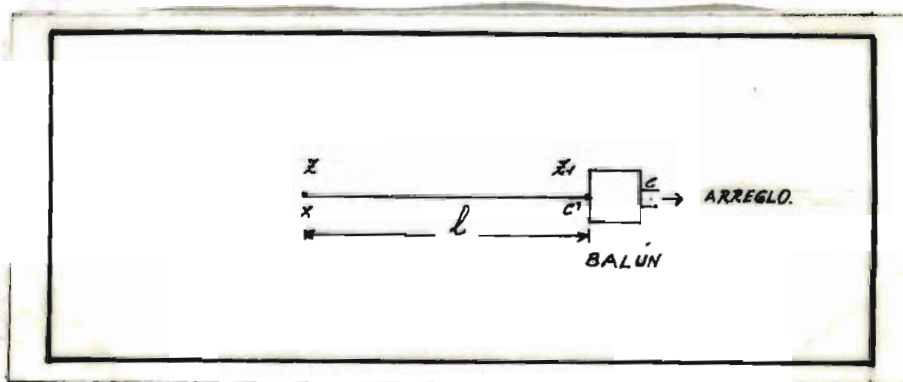


Fig. 4-6 Para explicar el acoplamiento entre los sistemas balanceado y desbalanceado.

Trazando una línea que pase por el centro del diagrama de Smith y el punto m , se observa que esta recta intersecta la escala *Wavelengths Toward Load* en el punto 0.008

Desconectando el arreglo en el punto c' , y colocando en circuito abierto el extremo del cable coaxial se obtuvo:

$$Z_{ca} = (132.5 + j 221.25) \text{ ohms.}$$

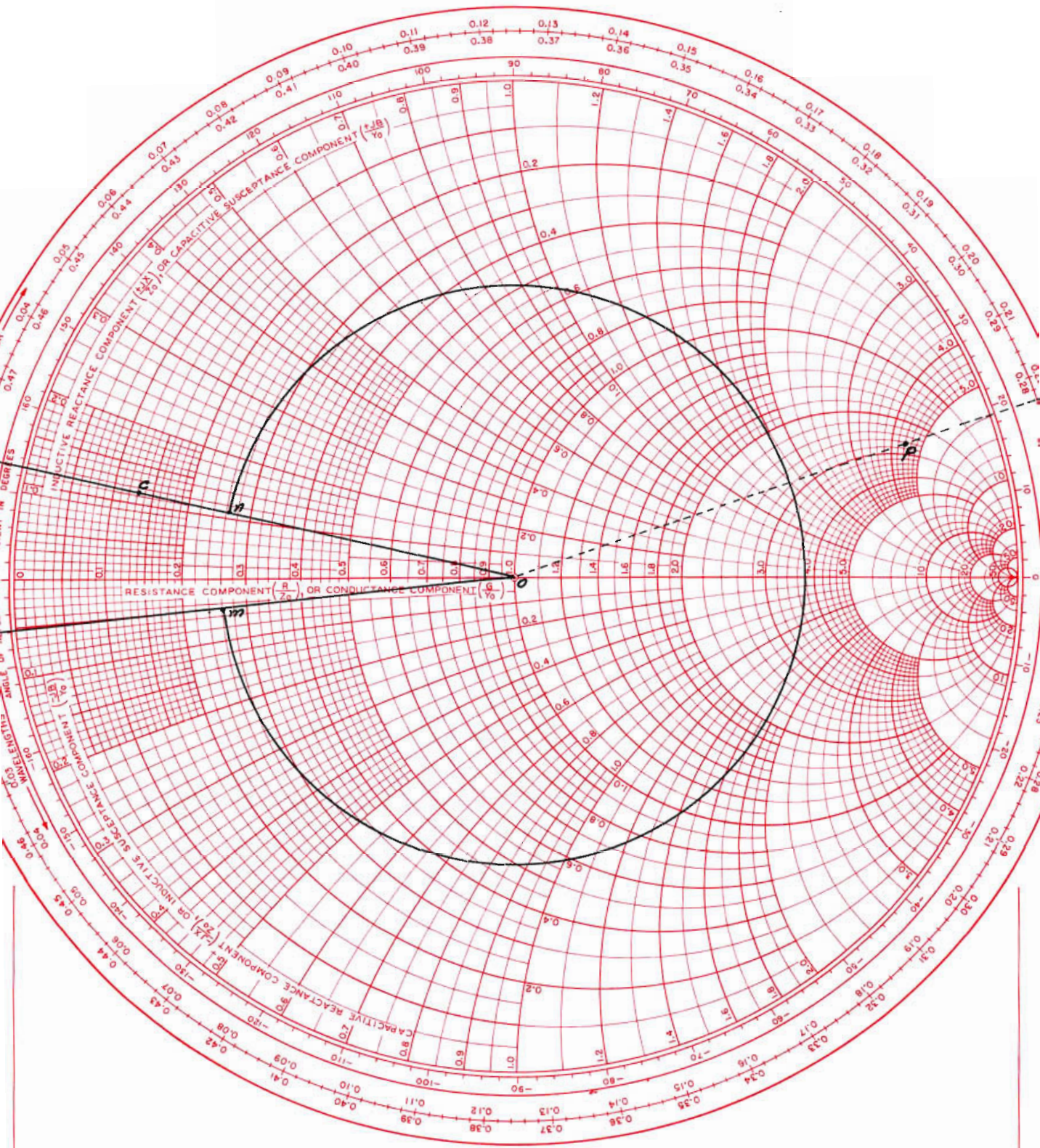
De tal manera que:

$$Z_{ca}/Z_0 = 2.64 + j 4.4$$

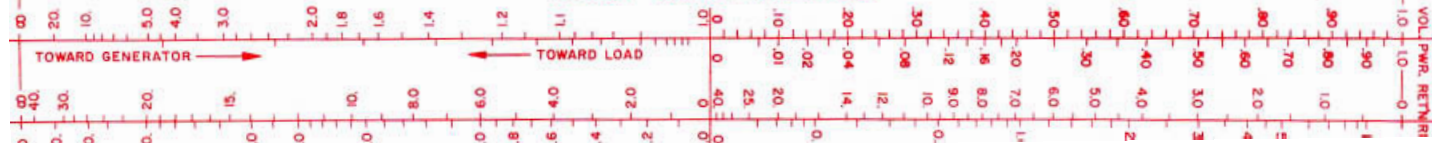
Localizando este valor de Z_{ca}/Z_0 sobre el Diagrama de Smith (punto p), y trazando una recta que pase por este punto p y el centro del Diagrama de Smith, se observa que esta línea atraviesa la escala *Wavelengths Toward Load* en el punto 0.276; de tal manera que si se sigue desde este punto en dirección antihoraria (hacia la carga), hasta el punto 0.25 de la escala; puesto que se está trabajando con valores de reactancia, se llega a la conclusión que debido a esta línea de alimentación, hay que corregir en un valor de 0.474 para hallar la impedancia en el punto c' .

Si se dibuja un círculo con centro en el punto O (centro del Diagrama de Smith) y con radio Om , se halla el punto n que es el punto de intersección de este círculo con la recta que pasan-

IMPEDANCE OR ADMITTANCE COORDINATES



RADIALLY SCALED PARAMETERS



do por el centro del Diagrama de Smith, atravieza la escala en el punto: $0.008 + 0.474 = 0.482$. Pero este punto n , no da todavía el valor exacto de impedancia en el punto c' , pues es necesario tomar en cuenta la pérdida que se tiene en este cable.

4-3-1 Consideración de la Pérdida en el Cable de Alimentación.

La atenuación que se ha producido en el cable coaxial, será igual a la distancia radial desde el punto p al círculo de conductancia igual a cero. Si a partir del punto n se descuenta esta atenuación, se obtendrá el punto c' en el que se puede leer la impedancia $Z_{c'}/Z_0$.

$$Z_{c'}/Z_0 = 0.135 + j 0.118$$

Por lo tanto:

$$Z_{c'} = 6.75 + j 5.9 \quad \text{ohms.}$$

Al otro lado del balún se obtendrá una impedancia 4 veces mayor, ésta es la impedancia de entrada al arreglo. (Z_c).

$$\text{Entonces: } Z_c = 27 + j 23.6 \quad \text{ohms.}$$

4.4 Medida de Ganancia.

La medida de ganancia del arreglo bajo prueba es realmente importante, pues permite conocer la relación de la intensidad de radiación del arreglo con respecto a una antena de referencia que puede ser el dipolo de media longitud de onda. La dirección en la cual se mide la intensidad de radiación en ambas antenas tiene que ser la misma, pero por lo general esta dirección es aquella perpendicular al plano del arreglo con el objeto de obtener la ganancia directiva o directividad.

La disposición de aparatos necesarios para la realización de esta medida, es la que se muestra a continuación. Véase la Fig. 4-8

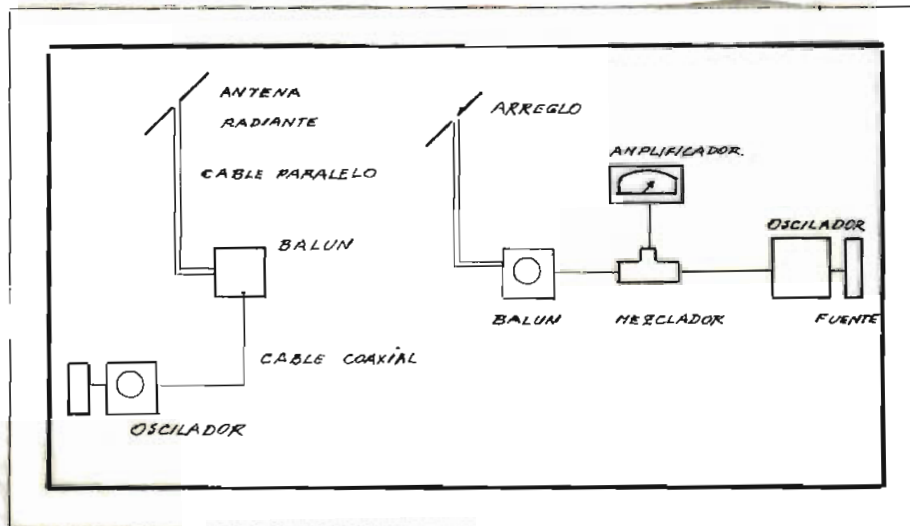


Fig. 4-8 Disposición de aparatos utilizados en la medida de ganancia.

En este experimento es necesario tomar en cuenta las mismas precauciones como las observadas para la obtención del diagrama de radiación (capítulo 4-1 de esta tesis).

Este experimento se lo efectuó en dos partes:

a) Se tuvo al arreglo rectangular acoplado al detector DNT y se realizó la lectura del indicador del amplificador de FJ, la lectura obtenida fue: 23.7 db.

b) A continuación, se desconectó el arreglo rectangular y en su lugar se conectó un dipolo simple de media longitud de onda, y como en el caso anterior se procedió a la lectura que se tiene en el amplificador de FJ, esta lectura fue: 15.9 db

De tal manera que la ganancia directiva o directividad es:

$$\text{Ganancia Directiva} = \frac{\text{Intensidad de radiación máxima del arreglo}}{\text{Intensidad de radiación máxima del dipolo}}$$

Expresada en db esta ganancia directiva es:

$$\begin{aligned} &\text{Ganancia máxima del arreglo (db)} - \text{Ganancia máxima del dipolo (db)} \\ &= 23.7 - 15.9 = 7.8 \text{ db.} \end{aligned}$$

CAPITULO QUINTO

5. CONCLUSIONES.

En la realización de este trabajo de tesis ha sido posible obtener valiosas conclusiones, las mismas que pueden ser catalogadas en dos grupos:

Aquellas que se desprenden del estudio teórico efectuado.

Las que se deducen de la comparación entre la parte teórica y la experimental correspondiente.

5-1 Conclusiones del estudio teórico efectuado.

Los arreglos se utilizan para obtener configuraciones de radiación más perfeccionadas que las que se obtienen con los elementos simples; así por ejemplo: los arreglos rectangulares producen configuraciones en forma de haz concentrado, que tienen mucha aplicación en la práctica (Véase la Fig. 4-2).

El factor arreglo, de un arreglo rectangular es igual al producto del factor arreglo del arreglo lineal en una dirección multiplicado por el factor arreglo del arreglo lineal en la otra dirección. De esto fácilmente se desprende que los arreglos tienen una ganancia directiva mayor que la que se obtiene con los arreglos lineales.

La distancia vertical entre dipolos en un arreglo rectangular debe ser $\frac{\lambda}{2}$ para que haya reforzamiento de la señal.

En un arreglo rectangular la distancia entre dipolos en el sentido horizontal debe ser: por un lado la menor posible con el objeto de evitar lóbulos laterales muy grandes; pero por otro lado una distancia muy corta entre elementos tiene notable influencia en la impedancia mutua y en consecuencia en la impedancia total del arreglo. Es aconsejable una distancia horizontal entre elementos de $\frac{5}{8} \lambda$.

Es necesaria la utilización de un reflector metálico plano en el arreglo rectangular; pues, gracias al reflector se consigue mayor ganancia directiva y la radiación se dirige en una sola dirección.

5-2 Conclusiones de la comparación entre la parte teórica y la experimental correspondiente.

Es conveniente recordar que en la parte experimental se realizaron tres medidas, a saber: configuración de radiación, impedancia y ganancia directiva del arreglo óptimo; con el objeto de comprobar los resultados teóricos alcanzados en esta tesis.

a) Comparando el diagrama de radiación obtenido experimentalmente (Fig. 4-2) con aquel deducido teóricamente (Fig. 3-14) y que por facilidad se lo ha repetido en línea de puntos en la misma (Fig. 4-2); se puede notar que efectivamente se ha conseguido el objetivo deseado, esto es tener un lóbulo en forma de haz en una sola dirección. Pero se notará que el diagrama experimental contiene lóbulos de radiación laterales, que en general siempre están presentes en el diagrama de radiación de un arreglo real; la razón de esto es que el diagrama teórico se obtuvo con la consideración que los elementos son muy delgados; en cambio el diagrama experimental se obtuvo con un arreglo en el cual los elementos tienen físicamente espesor.

b) Si se compara los valores de la impedancia de entrada del arreglo óptimo $2 \times 2'$, (teórico: Pag. 85, experimental: Pag. 107); se notará que el valor resistivo es muy similar en ambos casos; no así el valor de reactancia que es diferente. La diferencia encontrada se debe a los siguientes factores:

- 1- Cercanía de equipos y armarios metálicos al lugar de medición.
- 2- Errores propios de los aparatos.
- 3- Errores humanos entre los que destacan la falta de exactitud en la construcción, errores de apreciación etc.
- 4- La presencia de suelda en las conexiones que se notó afectan en los valores medidos.

c) Respecto a la ganancia directiva experimental, se encontró que ésta es ligeramente mayor que la hallada teóricamente; la razón se debe a que en el estudio teórico entran simplificaciones que dan lugar a estas diferencias.

En general se ha conseguido una buena relación entre los teóricos y experimentales, que era el objetivo de este trabajo de tesis.

5-3 Recomendaciones útiles.

Cuando se desee obtener el lóbulo de radiación de un arreglo; es necesario que la distancia entre el arreglo (que actúa como la antena receptora) y la antena que actúa como transmisora sea lo suficientemente lejana (Mayor que $2d^2/\lambda$, donde d es la distancia más grande del arreglo [17]) para que la medida se efectúe en la zona de radiación de la antena transmisora.

Conviene que tanto la antena receptora como la transmisora se encuentren varias longitudes de onda por encima de tierra de tal manera que no haya reflexiones indeseables que afecten las mediciones.

Cuando el arreglo contenga muchos elementos, de modo que

Las dimensiones del arreglo resulten muy grandes, puede recurrirse a un modelo en una escala más pequeña con el objeto de abaratar los costos de experimentación.

REFERENCIAS.

- BARRAGAN M : *Tesis de Grado (Politécnica)* 1973. 14
- BLAKE : *Antennas; John Wiley* 1966. 2
- HAYT : *Engineering Electromagnetics; McGraw - Hill* 1967
15
- JASJK H : *Antenna Engineering Handbook; McGraw - Hill* 1967
16 , 17
- JORDAN : *Electromagnetics Waves and Radiating Systems*
Prentice - Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J.,
1968. 1 , 8 , 13
- KRAUS : *Antenna Engineering; McGraw - Hill* 1950.
3 , 4 , , 9 , 10 , 11
12
- WEEKS : *Antenna Engineering; McGraw - Hill* 1968
5 , 6 , 7 .

BIBLIOGRAFIA.

- CEVALLOS MARJO: NOTAS del curso sobre Radiación y Antenas, dictado en la Politécnica en 1971.
- KANTI HORE : NOTAS del curso sobre Antenas, dictado en la Politécnica en 1971.
- BLAKE : Antennas; John Wiley and Sons, 1966
- COLLIN : Antenna Theory; McGraw - Hill, New York 1969.
- GIORDANO : Curso básico de Antenas, Editorial Glem: 1969
- KRAUS : Antennas; McGraw - Hill, New York 1950.
- JORDAN : Electromagnetics Waves and Radiating Systems
Prentice - Hall, Inc. 1968
- MARKOU : Antennas; Progress Publishers, Moscow 1965
- WEEKS : Antenna Engineering; McGraw - Hill 1968
- WOLFF : Antenna Analysis, John Wiley 1967