

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ANÁLISIS DE RESPUESTA A LOS ÍTEMS  
APLICADO A LA  
PRUEBA DE APTITUD ACADÉMICA POLITÉCNICA**

**PROYECTO DE TITULACIÓN  
PREVIO A LA OBTENCIÓN DEL TÍTULO DE  
INGENIERO MATEMÁTICO**

**EDISSON OSWALDO ACOSTA NÚÑEZ**  
edi\_acost@hotmail.com

**Director: Dr. Germán Patricio Rojas Idrovo PhD.**  
german.rojas@epn.edu.ec

**Quito, noviembre de 2014**

## **DECLARACIÓN**

Yo, Edison Oswaldo Acosta Núñez, declaro que el trabajo aquí descrito es de mi autoría; que no ha sido previamente presentado para ningún grado o calificación profesional; y, que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

La Escuela Politécnica Nacional, puede hacer uso de los derechos correspondientes a este trabajo, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la normatividad institucional vigente.

---

**Edison Oswaldo Acosta Núñez**

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Edison Oswaldo Acosta Núñez, bajo mi supervisión.

---

**Dr. Germán Rojas Idrovo PhD.**  
**DIRECTOR DEL PROYECTO**

## AGRADECIMIENTO

*A Dios,  
por darme salud y vida,  
y concederme las fuerzas necesarias  
para elaborar este proyecto.*

*A mis padres,  
por todo el apoyo incondicional que me dieron  
en los buenos y malos momentos  
a lo largo de este proyecto.*

*Al MSc. Alfonso Castro Balarezo,  
por su paciencia y dirección en el inicio de este proyecto;  
al Ing. Raúl Costales,  
por su apoyo en el desarrollo de este proyecto;  
y al Dr. Germán Rojas Idrovo,  
por su contribución para la culminación de este proyecto.*

*A Talía,  
por entregarme su tiempo, colaboración,  
compartirme sus conocimientos  
y darme una gran ayuda en este proyecto.*

*A Luis,  
por enseñarme sus conocimientos  
y brindarme su experiencia  
en la ejecución de este proyecto.*

*A todos aquellos  
que de una u otra manera  
me asesoraron desinteresadamente  
en la elaboración de este proyecto.*

***Edisson Acosta Núñez***

## DEDICATORIA

*A mi padre,  
por su apoyo innegable  
y ayuda decidida  
para culminar mis estudios.*

*A mi madre,  
por su ayuda constante  
y ejemplo permanente  
a lo largo de toda mi vida.*

*A mijita,  
por su paciencia y confianza,  
y por brindarme siempre  
todo su amor verdadero.*

*Edisson Acosta Núñez*

# CONTENIDO

DECLARACIÓN .....	i
CERTIFICACIÓN.....	ii
AGRADECIMIENTO .....	iii
DEDICATORIA.....	iv
CONTENIDO.....	v
RESUMEN .....	x
INTRODUCCIÓN.....	xi
<b>CAPÍTULO 1 PRUEBA DE APTITUD ACADÉMICA POLITÉCNICA .....</b>	<b>1</b>
1.1 POLÍTICAS DE ADMISIÓN DE LA EPN .....	1
1.1.1 FILOSOFÍA DE ADMISIÓN .....	1
1.1.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE ADMISIÓN .....	2
1.1.3 LA UNIDAD DE ADMISIÓN .....	2
1.1.4 CUPOS DE INGRESO.....	2
1.1.5 DEFINICIÓN DE LA PAAP.....	3
1.1.6 CONDICIÓN DE ADMISIÓN.....	3
1.1.7 EJECUCIÓN DE LA PAAP.....	4
1.2 ESTRUCTURA DE LA PAAP .....	5
1.2.1 APTITUD VERBAL .....	5
1.2.1.1 Sinónimos .....	6
1.2.1.2 Antónimos .....	6
1.2.1.3 Analogías verbales.....	6
1.2.1.4 Completar oraciones .....	7
1.2.1.5 Términos excluidos .....	7
1.2.1.6 Comprensión de lectura .....	7
1.2.2 APTITUD MATEMÁTICA .....	7
1.2.2.1 Razonamiento numérico .....	8
1.2.2.1.1 Operaciones aritméticas.....	8
1.2.2.1.2 Regla de tres .....	8
1.2.2.1.3 Sucesiones .....	8
1.2.2.2 Razonamiento algebraico .....	8
1.2.2.2.1 Ecuaciones .....	8
1.2.2.2.2 Inecuaciones .....	9
1.2.2.2.3 Funciones.....	9
1.2.2.3 Razonamiento geométrico .....	9
1.2.2.3.1 Rectas .....	9
1.2.2.3.2 Triángulos.....	9
1.2.2.3.3 Círculos.....	9
1.2.3 APTITUD ABSTRACTA .....	9

1.2.3.1	Analogías gráficas .....	10
1.2.3.2	Secuenciación .....	10
1.2.3.3	Matrices gráficas.....	10
1.3	PUNTUACIONES OBSERVADAS DE LA UA .....	10
1.4	EXAMEN NACIONAL PARA LA EDUCACIÓN SUPERIOR .....	11
1.4.1	DEFINICIÓN DEL ENES.....	12
1.4.2	ESTRUCTURA DEL ENES .....	12
1.4.2.1	Aptitud verbal.....	12
1.4.2.1.1	Sinónimos.....	13
1.4.2.1.2	Antónimos .....	13
1.4.2.1.3	Analogías verbales.....	13
1.4.2.1.4	Frases incompletas.....	14
1.4.2.1.5	Términos excluidos .....	14
1.4.2.1.6	Lectura comprensiva .....	14
1.4.2.1.7	Orden de oraciones .....	14
1.4.2.1.8	Refranes .....	14
1.4.2.2	Razonamiento numérico .....	14
1.4.2.2.1	Operaciones matemáticas .....	15
1.4.2.3	Razonamiento abstracto.....	15
1.4.2.3.1	Analogías gráficas .....	15
1.4.2.3.2	Secuenciación .....	15
1.4.2.3.3	Matrices gráficas .....	16
1.5	COMPARACIÓN ENTRE LA PAAP Y EL ENES .....	16
<b>CAPÍTULO 2 TEORÍA DE RESPUESTA A LOS ÍTEMS .....</b>		<b>18</b>
2.1	INTRODUCCIÓN DE LA TRI.....	18
2.1.1	PROCEDENCIA .....	18
2.1.2	DEFINICIÓN .....	19
2.1.3	PROPÓSITO .....	19
2.2	ANTECEDENTES DE LA TRI.....	19
2.2.1	CRONOLOGÍA DE LA TRI.....	19
2.2.2	ALGUNAS DIFERENCIAS ENTRE LA TCT Y LA TRI.....	20
2.3	OBJETIVOS DE LA TRI.....	24
2.3.1	OBJETIVOS GENERALES.....	24
2.3.2	OBJETIVOS ESPECÍFICOS .....	24
2.4	SUPUESTOS DE LA TRI.....	25
2.4.1	CURVA CARACTERÍSTICA DEL ÍTEM.....	25
2.4.1.1	Parámetros de la CCI.....	27
2.4.1.1.1	Parámetro $a$ .....	27
2.4.1.1.2	Parámetro $b$ .....	30
2.4.1.1.3	Parámetro $c$ .....	32
2.4.2	UNIDIMENSIONALIDAD .....	34

2.4.3	INDEPENDENCIA LOCAL.....	35
2.5	TIPOS DE MODELOS DE TRI.....	36
2.5.1	MODELO DE OJIVA NORMAL.....	36
2.5.2	MODELO DE OJIVA LOGÍSTICO .....	39
2.5.2.1	Modelo logístico de un parámetro .....	39
2.5.2.2	Modelo logístico de dos parámetros.....	40
2.5.2.3	Modelo logístico de tres parámetros.....	43
2.6	COMPROBACIÓN DE LOS MODELOS DE TRI.....	45
2.6.1	DEFINICIÓN DE LA VARIABLE.....	45
2.6.2	EXAMINACIÓN DE LOS ÍTEMS.....	45
2.6.3	COMPROBACIÓN DE LA UNIDIMENSIONALIDAD.....	46
2.6.4	ELECCIÓN DEL MODELO DE TRI.....	46
2.6.5	ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.....	46
2.6.5.1	Estimación de mínimos cuadrados .....	47
2.6.5.2	Estimación de máxima verosimilitud .....	49
2.6.5.3	Estimación de máxima verosimilitud de los parámetros del ítem.....	52
2.6.5.3.1	Estimación de máxima verosimilitud: modelo logístico .....	52
2.6.5.4	Estimación de máxima verosimilitud de la habilidad del individuo .....	65
2.6.5.4.1	Estimación de máxima verosimilitud: modelo logístico .....	65
2.6.5.5	Estimación de máxima verosimilitud conjunta de los parámetros del ítem y la habilidad .....	69
2.6.5.5.1	Estimación de máxima verosimilitud conjunta: modelo logístico .....	69
2.6.5.6	Estimación de máxima verosimilitud marginal y un algoritmo EM .....	74
2.6.5.6.1	Estimación de máxima verosimilitud marginal de los parámetros del ítem.....	74
2.6.5.6.2	La solución de Bock y Lieberman.....	77
2.6.5.6.3	La solución de Bock y Aitkin.....	83
2.6.5.7	Número de parámetros a estimar .....	90
2.6.6	AJUSTE DEL MODELO .....	91
2.6.6.1	Prueba chi-cuadrado .....	91
2.6.6.1.1	Para un ítem determinado.....	91
2.6.6.1.2	Para $n$ ítems.....	92
2.7	CURVA CARACTERÍSTICA DEL TEST.....	93
2.7.1	DEFINICIÓN .....	93
2.7.2	PUNTUACIONES VERDADERAS EN EL TEST.....	95
<b>CAPÍTULO 3 APLICACIÓN .....</b>		<b>97</b>
3.1	DESCRIPCIÓN DE LA BASE DE DATOS .....	97
3.1.1	DESCRIPCIÓN DE LOS INDIVIDUOS.....	97
3.1.2	DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES.....	98
3.1.2.1	Variables de identificación .....	98
3.1.2.2	Variables de los ítems.....	99
3.1.2.3	Variable de respuesta.....	99
3.2	VALIDACIÓN DE LA BASE DE DATOS.....	99



3.2.1	VALIDACIÓN DE LOS INDIVIDUOS.....	100
3.2.2	VALIDACIÓN DE LAS VARIABLES.....	101
3.3	FRECUENCIAS.....	102
3.3.1	TEMARIOS DE LA PAAP.....	102
3.3.2	VARIABLES DE LOS ÍTEMS.....	103
3.3.3	VARIABLE DE RESPUESTA.....	111
3.4	COMPROBACIÓN DEL MODELO DE TRI.....	111
3.4.1	DEFINICIÓN DE LA VARIABLE.....	111
3.4.2	EXAMINACIÓN DE LOS ÍTEMS.....	112
3.4.3	COMPROBACIÓN DE LA UNIDIMENSIONALIDAD.....	112
3.4.4	ELECCIÓN DEL MODELO DE TRI.....	113
3.4.5	ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS.....	114
3.4.5.1	Número de parámetros a estimar.....	114
3.4.5.2	Parámetros estimados de los ítems.....	115
3.4.5.2.1	Intervalos de confianza de los parámetros estimados.....	121
3.4.5.3	Aptitudes estimadas de los individuos.....	123
3.4.5.3.1	Intervalos de confianza de las aptitudes estimadas.....	127
3.4.5.4	Probabilidades de los individuos a los ítems.....	129
3.4.5.5	Curvas características de los ítems.....	132
3.4.6	AJUSTE DEL MODELO.....	138
3.4.6.1	Para cada ítem.....	138
3.4.6.2	Para los 100 ítems.....	141
3.4.6.3	Valores pronosticados y valores observados.....	141
<b>CAPÍTULO 4 COMPARACIÓN DE RESULTADOS.....</b>		<b>149</b>
4.1	PUNTUACIONES OBSERVADAS DE LA UA.....	149
4.2	PUNTUACIONES VERDADERAS DE LA TRI.....	151
4.3	ANÁLISIS DESCRIPTIVO.....	154
4.4	HISTOGRAMAS.....	156
4.5	CURVA CARACTERÍSTICA DEL TEST.....	157
4.6	GRÁFICOS DE LAS PUNTUACIONES.....	157
4.7	EVALUACIÓN DEL MODELO.....	159
4.7.1	CONDICIÓN DE ADMISIÓN.....	159
4.7.2	PRUEBA DE AJUSTE.....	160
4.7.2.1	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.....	165
4.7.2.2	Propedéutico de Empresarial y Económicas.....	167
4.8	CORRELACIÓN.....	169
4.8.1	CORRELACIÓN PUNTUACIONES Y CALIFICACIONES.....	169
4.8.1.1	El coeficiente de correlación.....	169
4.8.1.1.1	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.....	171

4.8.1.1.2	Propedéutico de Empresarial y Económicas .....	173
4.8.2	CORRELACIÓN CALIFICACIONES Y BACHILLERATO .....	175
4.8.2.1.1	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias .....	175
4.8.2.1.2	Propedéutico de Empresarial y Económicas .....	176
<b>CAPÍTULO 5 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES.....</b>		<b>178</b>
5.1	CONCLUSIONES.....	178
5.2	RECOMENDACIONES .....	182
<b>REFERENCIAS .....</b>		<b>183</b>
<b>ANEXOS .....</b>		<b>185</b>
ANEXO A.	Preguntas de la PAAP .....	186
ANEXO B.	Solucionario de la PAAP .....	202
ANEXO C.	Preguntas del ENES .....	220
ANEXO D.	Análisis factorial.....	226
ANEXO E.	Hoja de respuestas de la PAAP .....	229
ANEXO F.	Base de datos de la PAAP .....	230
ANEXO G.	Temarios de las variables de los ítems de la PAAP .....	231
ANEXO H.	Análisis factorial (aplicación).....	233
LISTA DE FIGURAS .....		239
LISTA DE TABLAS.....		240

## RESUMEN

El proyecto desarrollado presenta un nuevo enfoque de la evaluación educativa, se aplica a la Prueba de Aptitud Académica Politécnica de la Unidad de Admisión de la Escuela Politécnica Nacional el Análisis de Respuesta a los Ítems; esta técnica probabilística asigna una puntuación en la prueba a un individuo mediante la suma de las probabilidades del individuo a los ítems, estas probabilidades son el resultado del modelo logístico de la curva característica del ítem con varios parámetros, la estimación de estos parámetros son el resultado de maximizar una función de verosimilitud. Y se compara los resultados con los obtenidos con la técnica matemática utilizada por la Unidad de Admisión de la Escuela Politécnica Nacional.

**Palabras claves:** prueba de aptitud, Teoría de Respuesta a los Ítems, modelo logístico, curva característica del ítem.

## ABSTRACT

This project has developed a new approach of the educational evaluation, it applies to the Polytechnic Academic Aptitude Test of the Admission Unit of the Escuela Politécnica Nacional the Item Response Analysis; this probabilistic technique assigns a test score to an subject by the add of the probabilities of the subject to the items; these probabilities are the result of the logistic model of the item characteristic curve with several parameters; the estimation of these parameters are the result of maximize a likelihood function. The results are compared with the obtained with the mathematical technique used by the Admission Unit of the Escuela Politécnica Nacional.

**Keywords:** aptitude test, Item Response Theory, logistic model, item characteristic curve.

## INTRODUCCIÓN

El planteamiento del problema nace de dos vertientes, la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP) y la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI). Planteamos cada una y luego la relación que existe entre las mismas.

La Escuela Politécnica Nacional (EPN) a través de la Unidad de Admisión (UA) ha aplicado durante algunos años la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP), como un instrumento diseñado para evaluar las aptitudes de los aspirantes a ingresar a la misma.

En la actualidad la Secretaría Nacional de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT), a través del Sistema Nacional de Nivelación y Admisión (SNNA) aplica el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES), como un instrumento de evaluación de la aptitud para los aspirantes a ingresar a las universidades del país.

La estructura de la PAAP y el ENES son similares porque comprenden temáticas relacionadas, en el caso de la PAAP: aptitud verbal, aptitud matemática y aptitud abstracta; y en lo referente al ENES: aptitud verbal, razonamiento numérico y razonamiento abstracto. También es importante señalar que las dos pruebas de aptitud tienen opciones de respuesta, la PAAP presenta cinco opciones de respuesta, mientras que, el ENES cuatro, de tal manera que cumplen con el requisito indispensable para la aplicación de esta metodología. Por lo tanto este estudio aplicado a la PAAP serviría para tener una metodología adecuada, que en un futuro se aplicaría al ENES.

En las normas del proceso de admisión de la Unidad de Admisión se menciona que serán admitidos a la Escuela Politécnica Nacional los aspirantes que, habiendo alcanzado un puntaje superior a la media aritmética de todas las puntuaciones de las pruebas presentadas en cada convocatoria, hayan obtenido las mejores puntuaciones, hasta cubrir el cupo establecido por la Institución.

La Unidad de Admisión de la Escuela Politécnica Nacional asigna una puntuación en la prueba a un individuo mediante la suma de las puntuaciones de los ítems (técnica matemática). Esto abre la pauta para introducir la otra parte dentro de este planteamiento.

La Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) es un modelo matemático para evaluar la habilidad de un individuo con un ítem en términos de parámetros para el individuo y para el ítem. Cada individuo es caracterizado por un parámetro de habilidad y cada ítem por un conjunto de parámetros.

El propósito de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) es obtener una puntuación en la prueba de un individuo en una habilidad, tales como: aptitud matemática, habilidad académica, inteligencia, conocimiento de geografía, aritmética, etc.

La Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) es una técnica probabilística que asigna una puntuación en la prueba a un individuo mediante la suma de las probabilidades del individuo a los ítems, estas probabilidades son el resultado del modelo logístico de la curva característica del ítem con varios parámetros, la estimación de estos parámetros son el resultado de maximizar una función de verosimilitud.

De manera que este proyecto pretende aplicar a la Prueba de Aptitud Académica Politécnica de la Unidad de Admisión de la Escuela Politécnica Nacional el Análisis de Respuesta a los Ítems y comparar los resultados con los obtenidos con la técnica matemática utilizada por la Unidad de Admisión de la Escuela Politécnica Nacional.

# **CAPÍTULO 1**

## **PRUEBA DE APTITUD ACADÉMICA POLITÉCNICA**

En el primer capítulo se describe los aspectos fundamentales de la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP), los mismos que constituyen los tópicos principales para la comprensión de este trabajo y que se utilizarán a lo largo del mismo. La primera parte es una visión general de las políticas de admisión de la Escuela Politécnica Nacional (EPN): filosofía, principios fundamentales, Unidad de Admisión (UA), cupos de ingreso, definición de la PAAP, condición de admisión y ejecución de la PAAP. La segunda detalla la estructura de la PAAP: secciones, preguntas, opciones de respuesta y tiempo de resolución. La tercera explica la metodología utilizada por la Unidad de Admisión (UA) para asignar las puntuaciones a los individuos. La cuarta describe el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES). Y finalmente la quinta parte compara la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP) y el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES).

### **1.1 POLÍTICAS DE ADMISIÓN DE LA EPN**

La Escuela Politécnica Nacional (EPN) a través de la Unidad de Admisión (UA) ha aplicado durante algunos años la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP).

#### **1.1.1 FILOSOFÍA DE ADMISIÓN**

“La Escuela Politécnica Nacional tiene como misión: generar, asimilar y adaptar, transmitir y difundir, aplicar, transferir y gestionar el conocimiento científico y tecnológico, para contribuir al desarrollo sostenido y sustentable de nuestro país, como resultado de una dinámica interacción con los actores de la sociedad ecuatoriana y la comunidad internacional.”

“Consecuente con su misión la Politécnica aplica un conjunto de políticas y criterios de admisión con miras a enrolar, de entre los aspirantes, a aquellos estudiantes de mayor talento y provistos del potencial necesario para asumir los retos educativos y académicos que exigen los estudios superiores en esta Institución.” (Primero y segundo incisos del numeral 1 de Políticas de Admisión de la EPN) (Unidad de Admisión, 2011).

### **1.1.2 PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE ADMISIÓN**

“El proceso de admisión a la Escuela Politécnica Nacional se rige por el principio de equidad y transparencia, ofreciendo las mismas oportunidades educacionales a todos los estudiantes calificados, independientemente de su condición económica y social, sin hacer ningún tipo de discriminación basada en la raza, religión, edad, género, discapacidad física, orientación sexual, estado civil, nacionalidad o cultura.” (Numeral 2 de Políticas de Admisión de la EPN) (Unidad de Admisión, 2011).

### **1.1.3 LA UNIDAD DE ADMISIÓN**

“La Unidad de Admisión, unidad ejecutiva dependiente del Vicerrectorado, es la encargada de dirigir, coordinar, organizar y supervisar la admisión de nuevos estudiantes a la Escuela Politécnica Nacional.” (Numeral 3 de Políticas de Admisión de la EPN) (Unidad de Admisión, 2011).

“Es función de la Unidad de Admisión: preparar, receptar y evaluar la Prueba de Aptitud Académica Politécnica y conceder la admisión a los aspirantes que, cumpliendo los requisitos y condiciones, deseen continuar los estudios superiores en nuestra Institución.” (Numeral 4.2 de Políticas de Admisión de la EPN) (Unidad de Admisión, 2011).

### **1.1.4 CUPOS DE INGRESO**

“Con base en la disponibilidad de su cuerpo académico y a su capacidad instalada, la Escuela Politécnica Nacional se reserva el derecho de establecer para cada período lectivo, un determinado número de cupos de ingreso.”

“La admisión de los aspirantes a ingresar a los Cursos Propedéuticos de Pregrado está basada en el resultado de la Prueba de Aptitud Académica Politécnica o de los exámenes de ubicación.” (Primero y segundo incisos del numeral 4.1) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.1.5 DEFINICIÓN DE LA PAAP**

“La Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP) es un instrumento diseñado para evaluar las aptitudes de los aspirantes requeridos para acceder a la educación superior y cumplir satisfactoriamente sus exigencias académicas.”

“Independientemente de la carrera de pregrado por la que opten, los aspirantes a ingresar a la Escuela Politécnica Nacional deberán rendir la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP); esta será una para quienes opten por las carreras de ingeniería y otra para aquellos que opten por las carreras de tecnología.”

“Para cada período lectivo la Escuela Politécnica Nacional realizará una convocatoria para rendir la PAAP; de ser el caso y para completar el cupo establecido por Consejo Académico se podrá realizar una nueva convocatoria.”

“Los aspirantes, que aprobando la PAAP, no ingresen a la Escuela Politécnica Nacional en el período lectivo correspondiente, su nota previa inscripción pasará a competir con los aspirantes del siguiente período lectivo.”

“El estudiante mejor egresado y/o abanderado del Pabellón Nacional de cada colegio del País podrá ingresar a la Escuela Politécnica Nacional sin rendir la PAAP, previa inscripción.” (Primero, segundo, tercero, cuarto y quinto incisos del numeral 5 de Políticas de Admisión de la EPN) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.1.6 CONDICIÓN DE ADMISIÓN**

“Serán admitidos a la Escuela Politécnica Nacional los aspirantes que, habiendo alcanzado un puntaje superior a la media aritmética de todas las puntuaciones de



las pruebas presentadas en cada convocatoria, hayan obtenido las mejores puntuaciones, hasta cubrir el cupo establecido por la Institución.”

“También podrán ser admitidos a la Escuela Politécnica Nacional los aspirantes que hayan aprobado al menos dos asignaturas en los exámenes de ubicación.” (Primero y segundo incisos del numeral 6 de Políticas de Admisión de la EPN) (Unidad de Admisión, 2011).

### 1.1.7 EJECUCIÓN DE LA PAAP

El aspirante recibe el momento de la prueba, un *folleto de preguntas* (Anexo A) y una *hoja de respuestas* (Anexo E) que luego es leído electrónicamente mediante un lector óptico, por lo que hay que tomar en cuenta las siguientes indicaciones (Unidad de Admisión, 2011):

- Leer cuidadosamente las instrucciones generales que aparecen en cada una de las secciones a ser evaluadas.
- Usar solamente lápiz HB o N°2.
- No usar bolígrafo ni lápiz de minas.
- Anotar en la *hoja de respuestas* sus datos personales claramente, un error en el código de inscripción o número de cédula de identidad puede invalidar la prueba.
- Rellenar completamente en la *hoja de respuestas* el círculo que corresponda a la que considere como respuesta correcta, de esta manera:

Correcto	Incorrecto
●	⊗ ⊙ ⊕ ⊖

- Borrar completamente cualquier marca que se quisiera cambiar.
- Si necesita borrar tenga cuidado de no borrar las líneas guías en la *hoja de respuestas*.
- Si alguna pregunta se hace difícil, se debe continuar con las otras y si el tiempo lo permite se podrá revisar nuevamente.
- Asegúrese que el número de la *hoja de respuestas* corresponda al de la pregunta en el folleto.
- Cualquier operación que deba realizar puede hacerla en el folleto de preguntas.

- La proporción habitual es que se dedica menos tiempo a la parte verbal 20 a 30 minutos y el resto 90 a 100 minutos a la parte matemática y abstracta (Unidad de Admisión, 2005).
- No se permite utilizar calculadora.

## 1.2 ESTRUCTURA DE LA PAAP

### **Secciones**

La PAAP consta de 3 secciones: aptitud verbal, aptitud matemática y aptitud abstracta.

### **Preguntas**

La PAAP contiene 100 preguntas o ítems, elegidas de un banco de preguntas de 5.000 aproximadamente, que ya fueron tomadas en otros países (EE.UU, Chile, etc.). Se establece el porcentaje de cada una de las secciones por el perfil técnico que deben tener los aspirantes. En la Tabla 1.1 se presenta la estructura de la PAAP.

<b>Sección</b>	<b>Número de ítems</b>	<b>%</b>
Aptitud verbal	40	40,0
Aptitud matemática	50	50,0
Aptitud abstracta	10	10,0
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100,0</b>

**Tabla 1.1 Estructura de la PAAP.**

### **Opciones de respuesta**

En la PAAP todas las preguntas son de opción múltiple, es decir, se presenta el enunciado y 5 opciones de respuesta, que van precedidas por las letras A, B, C, D y E, de las cuales el aspirante debe seleccionar una sola como correcta (Daza & Paz, 2000).

### **Tiempo de resolución**

La PAAP se realiza en un tiempo limitado de 2 horas.

#### 1.2.1 APTITUD VERBAL

La sección de aptitud verbal está diseñada para evaluar:

- La comprensión verbal.
- La capacidad de razonar con los significados de las palabras y oraciones.
- La capacidad de analizar, comprender y sintetizar la lectura de un texto escrito.

Las aptitudes verbales se miden por medio de ejercicios como:

- Sinónimos
- Antónimos
- Analogías verbales
- Completar oraciones
- Términos excluidos
- Comprensión de lectura

#### **1.2.1.1 Sinónimos**

Estas preguntas evalúan la aptitud para identificar las palabras que tienen escritura diferente pero significado igual o semejante, dentro del contexto de una oración, por lo tanto tienen capacidad de sustitución (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.2.1.2 Antónimos**

Estas preguntas evalúan la aptitud para identificar las palabras que tienen entre sí una relación de oposición conceptual o significado opuesto (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.2.1.3 Analogías verbales**

Estas preguntas evalúan la aptitud para identificar la relación existente entre un par de palabras dadas. Esto se llama relación base y puede ser entre otras de: causa – efecto, característica o cualidad, función que desempeña, material – objeto, general – específico, pertenencia, etc. (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.2.1.4 Completar oraciones**

Estas preguntas evalúan la aptitud para completar una oración incompleta, de modo que al final se obtenga un significado armónico, lógico y coherente (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.2.1.5 Términos excluidos**

Estas preguntas evalúan la aptitud para identificar las palabras que no pertenece al campo léxico o de significados de un grupo o conjunto de palabras que se presenta (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2011).

#### **1.2.1.6 Comprensión de lectura**

Estas preguntas evalúan la aptitud para comprender el sentido directo de un fragmento, establecer las ideas principales y secundarias, decodificar el sentido implícito del párrafo. Interpretar, analizar y llegar a conclusiones a partir de las ideas, opiniones o criterios expresados por el autor (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2011).

### **1.2.2 APTITUD MATEMÁTICA**

La sección de aptitud matemática está diseñada para evaluar en el ámbito de la Aritmética, Álgebra y Geometría:

- La rapidez y precisión en realizar cálculos u operaciones.
- La capacidad de resolver un problema, interpretando un enunciado y traduciéndolo a lenguaje matemático.
- La capacidad de razonamiento lógico – deductivo.

Las aptitudes matemáticas se miden por medio de ejercicios como:

- Razonamiento numérico
- Razonamiento algebraico
- Razonamiento geométrico

### **1.2.2.1 Razonamiento numérico**

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver problemas numéricos, tales como: operaciones aritméticas, regla de tres, sucesiones, etc.

#### *1.2.2.1.1 Operaciones aritméticas*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver operaciones aritméticas, tales como: adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación; además de operaciones con decimales, reglas de signos, etc. (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2005).

#### *1.2.2.1.2 Regla de tres*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver reglas de tres, tales como: simple (directa e inversa) y compuesta (Ejemplos en el Anexo A) (Preuniversitario "Stephen Hawking", 2010).

#### *1.2.2.1.3 Sucesiones*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver una sucesión de términos formados de acuerdo con una ley<sup>1</sup>, tales como: numéricas o de letras las mismas que pueden ser simples o alternadas (Ejemplos en el Anexo A) (Preuniversitario "Stephen Hawking", 2010).

### **1.2.2.2 Razonamiento algebraico**

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver problemas algebraicos, tales como: ecuaciones, inecuaciones, funciones, etc.

#### *1.2.2.2.1 Ecuaciones*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver ecuaciones, tales como: polinómicas (lineales o cuadráticas), radicales, racionales, etc.; además de sistemas de ecuaciones, perpendicularidad, etc. (Ejemplos en el Anexo A) (Microsoft Encarta, 2009).

---

<sup>1</sup> Pueden ser sumas, restas, multiplicaciones, divisiones, potenciación, radicación o combinación de éstas.

#### *1.2.2.2.2 Inecuaciones*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver inecuaciones, tales como: lineales y no lineales (Ejemplos en el Anexo A) (Galindo & Gortaire, 2003).

#### *1.2.2.2.3 Funciones*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver funciones, tales como: cuadráticas, exponenciales, etc.; además de composición de funciones y representaciones gráficas (Ejemplos en el Anexo A) (Galindo & Gortaire, 2003).

### **1.2.2.3 Razonamiento geométrico**

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver problemas geométricos, tales como: rectas, triángulos, círculos, etc.

#### *1.2.2.3.1 Rectas*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver rectas, en temas como: longitudes, paralelismo, etc. (Ejemplos en el Anexo A) (Galindo & Gortaire, 2003).

#### *1.2.2.3.2 Triángulos*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver triángulos según la longitud de sus lados: equilátero, isósceles y escaleno; y según sus ángulos: acutángulo, rectángulo y obtusángulo (Ejemplos en el Anexo A) (Microsoft Encarta, 2009).

#### *1.2.2.3.3 Círculos*

Estas preguntas evalúan la aptitud para resolver círculos, en temas como: radio, área, etc. (Ejemplos en el Anexo A) (Microsoft Encarta, 2009).

### **1.2.3 APTITUD ABSTRACTA**

La sección de aptitud abstracta está diseñada para evaluar la capacidad de razonamiento abstracto.

Las aptitudes abstractas se miden por medio de ejercicios como:

- Analogías gráficas
- Secuenciación
- Matrices gráficas

### 1.2.3.1 Analogías gráficas

Estas preguntas evalúan la aptitud para identificar la relación existente entre un par de figuras dadas<sup>2</sup> (Unidad de Admisión, 2005).

### 1.2.3.2 Secuenciación

Estas preguntas evalúan la aptitud para descubrir la secuencia lógica de las series de figuras en casillas horizontales<sup>2</sup> (Unidad de Admisión, 2005).

### 1.2.3.3 Matrices gráficas

Estas preguntas evalúan la aptitud para descubrir la secuencia lógica de las series de figuras en casillas horizontales y verticales (Ejemplos en el Anexo A) (Unidad de Admisión, 2005).

## 1.3 PUNTUACIONES OBSERVADAS DE LA UA

La metodología utilizada por la Unidad de Admisión (UA) de la Escuela Politécnica Nacional (EPN) para asignar una puntuación en la prueba a un individuo es una técnica matemática.

Dadas las respuestas de los individuos a los ítems de la prueba, su formulación matricial es la siguiente:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si contesto la opción A} \\ 2 & \text{si contesto la opción B} \\ 3 & \text{si contesto la opción C} \\ 4 & \text{si contesto la opción D} \\ 5 & \text{si contesto la opción E} \\ -1 & \text{si contesto la opción OTROS} \end{cases} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (1)$$

---

<sup>2</sup> Estas preguntas no se evaluaron en la prueba objeto de estudio pero si en otras pruebas.

donde:

$x_{ij}$ : Respuesta del individuo  $j$  al ítem  $i$ .

$N$ : Número de individuos de la prueba.

$n$ : Número de ítems de la prueba.

La *puntuación observada* en la prueba de un individuo es igual a la suma de las puntuaciones de los ítems y siempre será un número entero:

$$T_j = \sum_{i=1}^n u_{ij} \quad j = 1, \dots, N \quad (2)$$

donde:

$T_j$ : Puntuación observada del individuo  $j$  en la prueba.

$u_{ij}$ :  $\begin{cases} 1 & \text{respuesta correcta del individuo } j \text{ al ítem } i \\ 0 & \text{respuesta incorrecta del individuo } j \text{ al ítem } i \end{cases}$

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$N$ : Número de individuos de la prueba.

### **Condiciones**

- Cada pregunta tiene una sola respuesta correcta y a cada una se le asigna un punto.
- Los errores no descuentan puntos (Unidad de Admisión, 2005).

### **Rango**

El rango de los valores de la puntuación observada en la prueba de un individuo  $j$  es  $0 \leq T_j \leq n$ , siendo  $n$  el número de ítems de la prueba.

## **1.4 EXAMEN NACIONAL PARA LA EDUCACIÓN SUPERIOR**

La Secretaría Nacional de Educación Superior, Ciencia, Tecnología e Innovación (SENESCYT) a través del Sistema Nacional de Nivelación y Admisión (SNNA) actualmente aplica el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES).



### 1.4.1 DEFINICIÓN DEL ENES

El Examen Nacional para la Educación Superior (ENES) es un instrumento de evaluación de la aptitud de baja sensibilidad a la instrucción formal (ya que no se relaciona directamente con los planes de estudio de bachillerato) para los aspirantes a ingresar a las universidades del país (SENESCYT, 2012).

### 1.4.2 ESTRUCTURA DEL ENES

#### **Secciones**

El ENES consta de 3 secciones: aptitud verbal, razonamiento numérico y razonamiento abstracto.

#### **Preguntas**

El ENES contiene 120 ítems, doce de ellos son piloto<sup>3</sup>. En la Tabla 1.2 se presenta la estructura del ENES.

Sección	Ítems para calificar	Ítems piloto	Total	%
Aptitud verbal	36	4	40	33,3
Razonamiento numérico	36	4	40	33,3
Razonamiento abstracto	36	4	40	33,3
<b>Total</b>	<b>108</b>	<b>12</b>	<b>120</b>	<b>100,0</b>

Tabla 1.2 Estructura del ENES.

#### **Opciones de respuesta**

La estructura general de los ítems se basa en una instrucción seguida de un planteamiento con 4 opciones de respuesta en donde sólo una es la correcta.

#### **Tiempo de resolución**

El tiempo para resolverlo es de 2 horas.

#### 1.4.2.1 Aptitud verbal

Es la capacidad de análisis que poseen los seres humanos para manejar el lenguaje simbólico, el empleo correcto de vocabulario, significado de palabras, frases, oraciones y párrafos. El dominio de esta habilidad implica la comprensión

---

<sup>3</sup> Los ítems piloto están a prueba para identificar su calidad y poder incluirlos en futuras versiones.

del material escrito mediante el análisis lógico de la semántica, la sintáctica y las relaciones entre palabras y conceptos (SENESCYT, 2012).

En el razonamiento verbal se toman en consideración varios ámbitos, entre los que están:

- Sinónimos
- Antónimos
- Analogías verbales
- Frases incompletas
- Términos excluidos
- Lectura comprensiva
- Orden de oraciones
- Refranes

#### *1.4.2.1.1 Sinónimos*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para identificar un significado equivalente o cercano con la palabra propuesta (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.2 Antónimos*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para reconocer el significado opuesto que poseen las palabras (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.3 Analogías verbales*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para establecer relaciones de comparación entre conceptos relacionados (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.4 Frases incompletas*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para concluir la relación lógica entre palabras que forman la oración (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.5 Términos excluidos*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para identificar el término que no se relacione con las mismas (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.6 Lectura comprensiva*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para determinar el significado de palabras y oraciones presentadas en forma escrita. Permiten evaluar las capacidades de análisis y síntesis, contempladas en el proceso de discriminación escrita. (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.7 Orden de oraciones*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para determinar la coherencia y la expresión de un juicio lógico en una oración, en función de la utilización de reglas gramaticales básicas (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.1.8 Refranes*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para determinar la coherencia, el significado y el mensaje que encierra un refrán (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

### **1.4.2.2 Razonamiento numérico**

Es la capacidad que tiene una persona para inferir relaciones que se expresan en números y para razonar con material cuantitativo (SENESCYT, 2012).

En el razonamiento numérico se involucra la habilidad para estructurar, organizar y resolver problemas matemáticos que están vinculadas con operaciones de matemática básica.

#### *1.4.2.2.1 Operaciones matemáticas*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para resolver operaciones matemáticas, tales como: suma, resta, multiplicación y división; trabajo de números naturales, fracciones y porcentajes, etc. (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### **1.4.2.3 Razonamiento abstracto**

Es la capacidad para procesar la información a través de herramientas del pensamiento, tales como el análisis y la síntesis, la imaginación espacial, el reconocimiento de patrones y la habilidad de trabajar y razonar con símbolos o situaciones no verbales (SENESCYT, 2012).

En el razonamiento abstracto se toma en consideración varios subprocesos, siendo estos:

- Analogías gráficas
- Secuenciación
- Matrices gráficas

#### *1.4.2.3.1 Analogías gráficas*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para reconocer relaciones de comparación entre un grupo de imágenes gráficas, generando un proceso de discriminación de un estímulo gráfico (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### *1.4.2.3.2 Secuenciación*

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para reconocer procesos de seguimiento mediante la discriminación de un proceso secuencial en donde

cada figura cambia de acuerdo a una determinada regla (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

#### 1.4.2.3.3 Matrices gráficas

Los ejercicios de este componente evalúan la habilidad para reconocer procesos de seguimiento y proporcionar el elemento faltante en una matriz secuencial (Ejemplos en el Anexo C) (SENESCYT, 2012).

## 1.5 COMPARACIÓN ENTRE LA PAAP Y EL ENES

La Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP) y el Examen Nacional para la Educación Superior (ENES) se relacionan en varios aspectos como se presenta en la Tabla 1.3.

Aspectos	PAAP	ENES
Evaluación	Aptitud (No mide el grado de conocimientos)	Aptitud (No se relaciona con los planes de estudio de bachillerato)
Aspirantes	2.977	250.994
Preguntas o ítems	100	120
Categorías de respuesta	5 (A, B, C, D y E)	4 (A, B, C y D)
Tiempo de resolución	2 horas	2 horas
Base de datos	Filas: individuos (aspirantes)	Filas: individuos (aspirantes)
	Columnas: variables (preguntas o ítems)	Columnas: variables (preguntas o ítems)
	Datos: categorías de respuesta codificadas	Datos: categorías de respuesta
Puntuaciones	Mínima: 0	Mínima: 400
	Máxima: 100	Máxima: 1000
Condición de admisión	Mejores puntuaciones hasta cubrir el cupo (superiores a la media aritmética)	Mejores puntuaciones hasta cubrir el cupo
Número de secciones	3	3
Secciones	Aptitud verbal (40 preg.)(40%)	Aptitud verbal (40 preg.)(33,3%)
	Aptitud matemática (50 preg.)(50%)	Razonamiento numérico (40 preg.)(33,3%)
	Aptitud abstracta (10 preg.)(10%)	Razonamiento abstracto (40 preg.)(33,3%)
Aptitud verbal	Sinónimos	Sinónimos
	Antónimos	Antónimos
	Analogías verbales	Analogías verbales
	Completar oraciones	Frases incompletas
	Términos excluidos	Términos excluidos
	Comprensión de lectura	Lectura comprensiva
		Orden de oraciones
	Refranes	
Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Razonamiento numérico
	Razonamiento algebraico	
	Razonamiento geométrico	
Aptitud abstracta	Analogías gráficas	Analogías gráficas
	Secuenciación	Secuenciación
	Matrices gráficas	Matrices gráficas

Tabla 1.3 Comparación entre la PAAP y el ENES.

En la tabla anterior se observa que la PAAP y el ENES tienen estructura similar, principalmente en las bases de datos, que constituyen el insumo esencial para el Análisis de Respuesta a los Ítems. Por lo tanto este estudio aplicado a la PAAP serviría para tener una metodología adecuada, que en un futuro se aplicaría al ENES.

## **CAPÍTULO 2**

### **TEORÍA DE RESPUESTA A LOS ÍTEMS**

En el segundo capítulo se estudia los fundamentos de la metodología de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI), los mismos que son el soporte matemático en el cual se basan las aplicaciones. La primera parte es una introducción de la TRI: procedencia, definición y propósito. La segunda es una reseña histórica de los antecedentes de la TRI: cronología de la TRI y algunas diferencias entre la TCT y la TRI. La tercera plantea los objetivos generales y específicos de la TRI. La cuarta revela los supuestos de la TRI: curva característica del ítem, unidimensionalidad e independencia local. La quinta expone los tipos de modelos de TRI: normal y logístico de uno, dos y tres parámetros. La sexta explica la comprobación de los modelos de TRI: definición de la variable, examinación de los ítems, comprobación de la unidimensionalidad, elección del modelo de TRI, estimación de los parámetros y ajuste del modelo. Y finalmente la séptima parte define la curva característica del test (CCT) mediante la cual se obtienen las puntuaciones verdaderas en el test.

#### **2.1 INTRODUCCIÓN DE LA TRI**

##### **2.1.1 PROCEDENCIA**

El nombre Teoría de Respuesta a los Ítems proviene de que este enfoque se basa en las propiedades de los ítems más que en las del test global; a diferencia de la atención superficial que otorgan la teoría y los métodos tradicionales sobre pruebas a las respuestas a ítems individuales, tales respuestas son el núcleo de la teoría y metodología de respuesta a los ítems (Aiken, 2003).

La Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) refleja el funcionamiento real del modelo basado en los ítems, permitiendo distinguirlo de otros análisis más generales que utilizan el concepto de variable latente, como pueden ser el análisis factorial, análisis multidimensional o ecuaciones estructurales (Muñiz, 1997).

### 2.1.2 DEFINICIÓN

La Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) (Item Response Theory IRT) es un modelo matemático para evaluar la habilidad de un individuo con un ítem en términos de parámetros para el individuo y para el ítem. Cada individuo es caracterizado por un parámetro de habilidad y cada ítem por un conjunto de parámetros (Burbano, 1997).

### 2.1.3 PROPÓSITO

El propósito de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) es obtener una puntuación en la prueba de un individuo en una variable no observada (variable latente), tales como: aptitud matemática, habilidad académica, inteligencia, conocimiento de geografía, aritmética, etc. (Aristidesvara, 2008).

## 2.2 ANTECEDENTES DE LA TRI

En los antecedentes de la TRI se investiga los orígenes y desarrollo de los modelos de TRI.

### 2.2.1 CRONOLOGÍA DE LA TRI

Una cronología de los modelos de TRI con algunos de los hitos más destacados en el desarrollo de la TRI se presenta en la Tabla 2.1 (Muñiz, 1997).

Año	Hito
1905	Binet y Simon anticipan con sus gráficos el concepto de curva característica.
1925	Thurstone presenta curvas semejantes a las curvas características de los ítems.
1936	Richardson ajusta la ojiva normal a las respuestas a los ítems.
1942	A través de los métodos psicofísicos, Ferguson se aproxima al planteamiento de las curvas características.
1944	Guttman presenta su modelo de escalamiento para datos cualitativos.
1945	Tucker acuña el término Curva Característica del Ítem.
1950	Lazarsfeld acuña el término de rasgo latente, denominación inicial de los modelos de TRI.
1952	Lord publica el trabajo titulado: <i>Una teoría sobre las puntuaciones de los tests</i> , que puede ser considerado como el inicio de la TRI.
1957	Birnbaum utiliza la función logística en vez de la ojiva normal.
1960	Publicación del libro de Rasch sobre el modelo logístico de un parámetro.
1967	Influyente conferencia invitada de Benjamin Wright en un congreso en Nueva York organizado por el Educational Testing Service.
1968	Se publica el libro de Lord y Novick, con contribuciones de Birnbaum, que supone un fuerte impulso para la TRI.
1969	Wright y Panchapakesan publican su trabajo sobre la estimación de los parámetros del



	modelo de Rasch e introducen el programa BICAL. Samejima propone modelos para ítems politómicos y de respuesta continua.
1972	Nuevos desarrollos en la estimación de los parámetros.
1974	Lord presenta sus nuevos métodos de estimación, implementados en el programa de ordenador LOGIST.
1976	Se hace público el programa LOGIST para estimar los parámetros de los modelos logísticos.
1979	Libro de Wright y Stone, <i>Best Test Design</i> . Programa de ordenador BICAL para el modelo logístico de un parámetro.
1980	Lord publica su libro sobre aplicaciones de la TRI.
1981	Bock y Aitkin presentan el método de estimación de máxima verosimilitud marginal de los parámetros de los ítems: una aplicación de un algoritmo EM.
1982	Segunda versión del programa de ordenador LOGIST para estimar los parámetros de los modelos logísticos.
1984	Programa de ordenador BILOG para estimar los parámetros de los modelos logísticos.
1985	Libro de Hambleton y Swaminathan.
1990	Libro de Wainer sobre los tests adaptativos computarizados.
1991	Libro de Hambleton, Swaminathan y Rogers, seguramente el texto introductorio sobre TRI más utilizado en la actualidad.
1993	Holland y Wainer coordinan un libro sobre el funcionamiento diferencial de los ítems.
1997	Manual de la TRI moderna coordinado por Van der Linden y Hambleton.

**Tabla 2.1 Cronología de los modelos de TRI.**

## 2.2.2 ALGUNAS DIFERENCIAS ENTRE LA TCT Y LA TRI

En las últimas décadas, aún sin olvidar la Teoría Clásica de los Tests (TCT), cada vez se presta más atención a aquellos modelos conocidos como modelos de Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI). La TRI constituye un nuevo enfoque en la teoría de los tests que permite resolver ciertos problemas de medición psicológica y educativa inatacables desde la TCT. Algunos de los aspectos fundamentales en los que se diferencia la TCT y la TRI se presenta en la Tabla 2.2 (Muñiz, 1997).

Aspectos	Teoría Clásica de los Tests (TCT)	Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)
Modelo.	Lineal.	No lineal.
Supuestos.	Débiles (fáciles de cumplir por los datos).	Fuertes (difíciles de cumplir por los datos).
Invarianza de las mediciones.	No.	Sí.
Invarianza de las propiedades del test.	No.	Sí.
Escala de las puntuaciones.	Entre cero y la puntuación máxima en el test (o alguna transformación de éstas).	Entre $-\infty$ y $+\infty$ (o alguna transformación de éstas).
Énfasis.	Test.	Ítems.
Relación ítem-test.	Sin especificar.	Curva característica del ítem.
Descripción de los ítems.	Índice de discriminación. Índice de dificultad.	Parámetro de discriminación ( <i>a</i> ) Parámetro de dificultad ( <i>b</i> ) Parámetro de azar ( <i>c</i> )
Errores de medida.	Error típico de medida (común para toda la muestra).	Función de información (varía según el nivel de aptitud).

Tamaño muestral.	Puede funcionar bien con muestras entre 200 y 500 individuos, aproximadamente.	Se recomiendan más de 500 individuos, aunque depende del modelo.
Estimación de las puntuaciones.	Sumatoria de respuestas.	Patrón de respuesta.
Longitud del test.	Necesariamente largos.	No necesariamente largos.
Análisis matemático.	Simple.	Complejo.
Ajuste del modelo.	No requiere.	Si requiere.

**Tabla 2.2 Algunas diferencias entre la TCT y la TRI.**

Se describe cada uno de los aspectos diferenciales mencionados:

### **Modelo**

En la TCT el modelo es lineal, la puntuación empírica es igual a la puntuación verdadera más el error ( $T = V + e$ ). Mientras que, en la TRI la función que relaciona las puntuaciones observadas con las puntuaciones verdaderas es no lineal (curvilínea), viene dada por el tipo de curva adoptada por el modelo, habitualmente es logística (Muñiz, 1997).

### **Supuestos**

Los supuestos de la TCT son débiles en el sentido de que son generales y es fácil que la mayoría de los datos empíricos los cumplan; éstos supuestos constituyen a la vez su fuerza y su debilidad, por un lado permiten su uso en muchas situaciones empíricas, pero por el contrario las predicciones resultan más genéricas. Mientras que, los supuestos de la TRI son más fuertes, más restrictivos, se sacrifica la generalidad para ganar precisión predictiva, el precio a pagar es la exigencia de que los datos cumplan supuestos muy específicos (Muñiz, 1997).

### **Invarianza de las mediciones**

La TCT no permite mediciones invariantes respecto del instrumento utilizado, sobrellevó este déficit en la práctica de forma digna, elaborando toda una tecnología para equiparar las puntuaciones obtenidas con distintos instrumentos. Mientras que, la TRI permite mediciones invariantes respecto del instrumento utilizado y ello se deriva de los modelos utilizados (Muñiz, 1997).

### ***Invarianza de las propiedades del test***

En la TCT las propiedades importantes de un test son los índices de dificultad y de discriminación de los ítems, que dependen de la muestra de individuos utilizados para estimarlas; existe una solución práctica a este problema, consiste en estimar las propiedades del test en muestras de individuos extraídas de la población con la que se va a usar, y no extender sus propiedades más allá de esa población. Mientras que, en la TRI las estimaciones de los parámetros de los ítems son invariantes respecto de los individuos evaluados y ello se deriva de los modelos utilizados (Muñiz, 1997).

### ***Escala de las puntuaciones***

En la TCT la escala empírica de las puntuaciones va desde la puntuación mínima obtenible en el test, habitualmente cero, hasta la máxima puntuación posible; para facilitar la interpretabilidad de las puntuaciones, esta escala suele transformarse en otra más conveniente, por ejemplo: percentiles, puntuaciones típicas, etc. Mientras que, en la TRI las puntuaciones estimadas a los individuos ( $\theta$ ) van de  $-\infty$  a  $+\infty$ , y en esa escala aparecen todas las mediciones, se use el test que se use, de ahí la mentada invarianza; también se hacen transformaciones de conveniencia; la función que une las puntuaciones  $\theta$  con las puntuaciones en la escala del test se denomina curva característica del test (Muñiz, 1997).

### ***Énfasis***

En la TCT la unidad de análisis básica es el test; en la cual para poder comparar las mediciones de dos personas, había que aplicarles el mismo test o dos formas paralelas. Mientras que, en la TRI el propio nombre ya menciona que la unidad de análisis básica es el ítem; el test pasa a ser un agregado de ítems y sus propiedades dependen de las de éstos; puesto que cualquier agregado de ítems (test) que se elija proporciona una medición en la misma escala común (Muñiz, 1997).

### ***Relación ítem-test***

En la TCT aunque sepamos la puntuación en un test de una persona, no por ello conocemos la probabilidad que tiene de acertar determinado ítem del test; el

modelo no establece una conexión formal entre la puntuación en el test y la probabilidad de superar los ítems. Mientras que, en la TRI una vez definida la curva característica del ítem (CCI), si conocemos la puntuación de un individuo es inmediato el cálculo de la probabilidad que tiene de superar el ítem (Muñiz, 1997).

### ***Descripción de los ítems***

En la TCT los dos índices utilizados para describir los ítems, son el índice de discriminación y el índice de dificultad, ambos resultan dependientes de la muestra en la que se calculan. Mientras que, en la TRI los parámetros:  $a$  (discriminación),  $b$  (dificultad) y  $c$  (azar), son invariantes respecto de la muestra utilizada para estimarlos (Muñiz, 1997).

### ***Errores de medida***

En la TCT lo habitual es ofrecer un error único y común, el error típico de medida para todos los individuos de la muestra, sin tener en cuenta su nivel en la variable medida. Mientras que, en la TRI es la de ser capaz de ofrecer errores de medida en función del nivel de los individuos en la variable medida, valiéndose de la función de información (Muñiz, 1997).

### ***Tamaño muestral***

La TCT funciona razonablemente bien con muestras bastante pequeñas, entre 200 y 500 individuos, aproximadamente. Mientras que, la TRI necesita muestras muy grandes, se recomiendan más de 500 individuos (número orientativo), aunque depende del modelo; esto es para estimar con precisión los parámetros de los ítems y la puntuación de los individuos (Muñiz, 1997).

### ***Estimación de las puntuaciones***

En la TCT la puntuación de una prueba, estima la habilidad como la sumatoria de respuestas a ítems individuales. Mientras que, en la TRI utiliza el patrón de respuesta (Cortada, 2004).

### ***Longitud del test***

En la TCT los tests deben ser necesariamente largos. Mientras que, en la TRI los tests no deben ser necesariamente largos, y además puede aplicarse a ítems que presentan formatos muy diversos dentro del mismo instrumento de medición (Cortada, 2003).

### ***Análisis matemático***

En la TCT los análisis matemáticos son más simples. Mientras que, en la TRI los análisis matemáticos son más complejos (Hambleton & Jones, 1993).

### ***Ajuste del modelo***

En la TCT el análisis no requiere estudios de bondad de ajuste estrictos que aseguren un buen ajuste del modelo a los datos. Mientras que, en la TRI el análisis requiere un ajuste del modelo a los datos (Hambleton & Jones, 1993).

## **2.3 OBJETIVOS DE LA TRI**

### **2.3.1 OBJETIVOS GENERALES**

Los objetivos generales de la TRI son (Muñiz, 1997):

- Proporcionar mediciones de las variables educativas que no varíen en función del instrumento utilizado, es decir, que sean invariantes respecto de los tests utilizados.
- Disponer de instrumentos de medida cuyas propiedades no dependan de los objetos medidos, es decir, que sean invariantes respecto de los individuos evaluados.

### **2.3.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS**

Además de los objetivos generales, o más bien, derivados de éstos, los objetivos específicos de la TRI son (Muñiz, 1998):

- Función de información de los ítems y del test.
- Errores típicos de medida distintos para cada nivel de la variable medida.
- Bancos de ítems con parámetros estrictamente definidos.
- Funcionamiento diferencial de los ítems.

- Tests referidos al criterio.
- Tests adaptativos computarizados.
- Equiparación de puntuaciones.

## 2.4 SUPUESTOS DE LA TRI

Los tres supuestos básicos de la TRI son:

- La curva característica del ítem.
- La unidimensionalidad.
- La independencia local.

### 2.4.1 CURVA CARACTERÍSTICA DEL ÍTEM

La curva característica del ítem (CCI) (item characteristic curve ICC) es una función matemática que relaciona las puntuaciones de los individuos en la variable de criterio y la probabilidad de respuesta correcta (Muñiz, 1997).

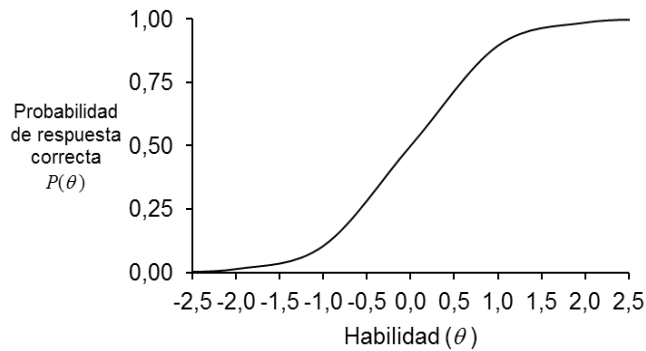
La formalización de la CCI se realiza en términos de la población, la variable de criterio será denotada por  $\theta$  (theta). En la TRI, la variable de criterio  $\theta$  es considerada como una variable no observada (variable latente). Genéricamente, esta variable latente es referida como “habilidad”<sup>4</sup>. Se asume que la variable de criterio (habilidad) puntuación  $\theta_j$  es conocida para cada individuo en la población,  $j = 1, 2, \dots, N$ . La métrica de las puntuaciones de la habilidad se supone que tiene media cero y desviación estándar uno. Cuando se trata de los resultados de tests, habrá una distribución de frecuencia de las puntuaciones de los individuos sobre la escala de habilidad, que tendrá media  $\mu_\theta$  y varianza  $\sigma_\theta^2$ . En términos de la población,  $P_i(\theta_j)$  denota la probabilidad de respuesta correcta en cualquier punto en la escala de habilidad e  $i$  denota un ítem,  $i = 1, 2, 3, \dots, n$  (Baker, 1992).

En la Figura 2.1 se presenta la curva característica del ítem. En el eje de las abscisas se representan los valores de la variable de criterio (habilidad)  $\theta_j$ . Y en

---

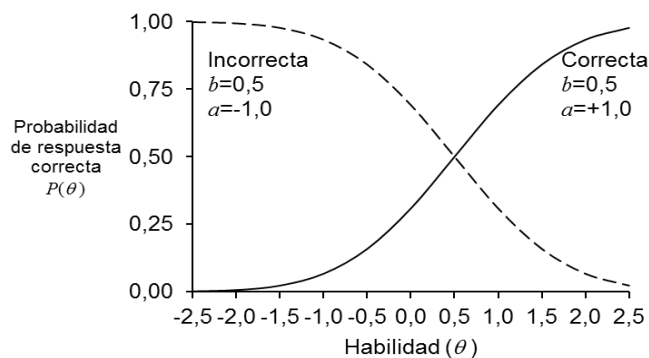
<sup>4</sup> Hay que tener en cuenta que una amplia variedad de capacidades cognitivas o habilidades físicas pueden ser etiquetadas como habilidad.

el eje de las ordenadas se representa la probabilidad de respuesta correcta  $P_i(\theta_j)$ . La CCI graficada nos da la probabilidad de respuesta correcta para los distintos valores de  $\theta_j$  (Muñiz, 1997).



**Figura 2.1** Curva característica del ítem.

En un ítem puntuado dicotómicamente se obtienen dos curvas características del ítem, uno para cada categoría de respuesta. La probabilidad de respuesta incorrecta  $Q_i(\theta_j)$  también puede ser graficada como una función de las puntuaciones de habilidad. La Figura 2.2 presenta las curvas características del ítem tanto para la respuesta correcta ( $b_i = +0,5$ ,  $a_i = +1,0$ ) y la respuesta incorrecta ( $b_i = +0,5$ ,  $a_i = -1,0$ ) de un ítem. En el caso de un ítem puntuado dicotómicamente, esta imagen espejo es resultado característico del hecho de que  $P_i(\theta_j) + Q_i(\theta_j) = 1$  en cada nivel de habilidad.



**Figura 2.2** Curvas características del ítem para las respuestas correcta e incorrecta a un ítem.

### Rango

En teoría el rango de los valores es  $-\infty \leq \theta_j \leq \infty$ , pero en la práctica el rango de los valores es  $-2,5 \leq \theta_j \leq 2,5$  (Baker, 2001).

### Interpretación

Los términos utilizados para describir los niveles de habilidad del individuo están relacionados con los rangos de los valores del parámetro, como se presenta en la Tabla 2.3.

Nivel de habilidad	Rango de valores
Muy bajo	-2,50 – -1,50
Bajo	-1,49 – -0,50
Moderado	-0,49 – 0,50
Alto	0,51 – 1,50
Muy alto	1,51 – 2,50

Tabla 2.3 Niveles de habilidad del individuo.

#### 2.4.1.1 Parámetros de la CCI

Las CCI utilizadas en la TRI son de la forma “S alargada” y son definidas por tres parámetros, denotados por:  $a_i$ ,  $b_i$  y  $c_i$  como se presenta en la Figura 2.3.

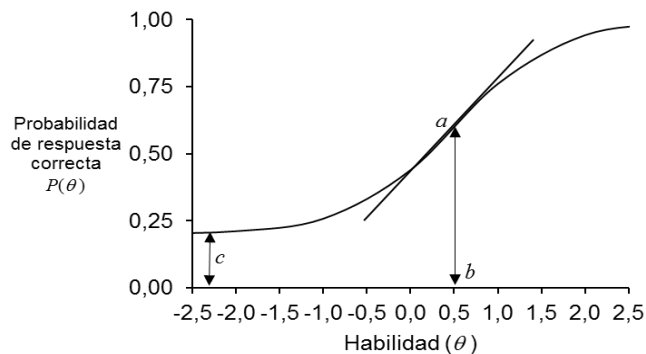


Figura 2.3 Parámetros de la CCI.

##### 2.4.1.1.1 Parámetro $a$

#### Definición

El parámetro  $a_i$  se denomina *parámetro de discriminación del ítem* (parámetro de la pendiente) y su valor es proporcional a la pendiente de la recta tangente a la CCI en el punto de máxima pendiente de ésta (Muñiz, 1997).



### **Rango**

En teoría el rango de los valores es  $-\infty \leq a_i \leq \infty$ , el valor de  $a_i$  es generalmente positivo para la respuesta correcta a un ítem. En la práctica el rango de los valores es  $0 < a_i \leq 2,5$  (Baker, 1992).

### **Interpretación**

Los términos utilizados para describir los niveles de discriminación del ítem están relacionados con los rangos de los valores del parámetro, como se presenta en la Tabla 2.4 (Baker, 2001).

<b>Nivel de discriminación</b>	<b>Rango de valores</b>
Ninguno	0
Muy bajo	0,01 – 0,34
Bajo	0,35 – 0,64
Moderado	0,65 – 1,34
Alto	1,35 – 1,69
Muy alto	1,70 – 2,50

**Tabla 2.4 Niveles del parámetro de discriminación del ítem.**

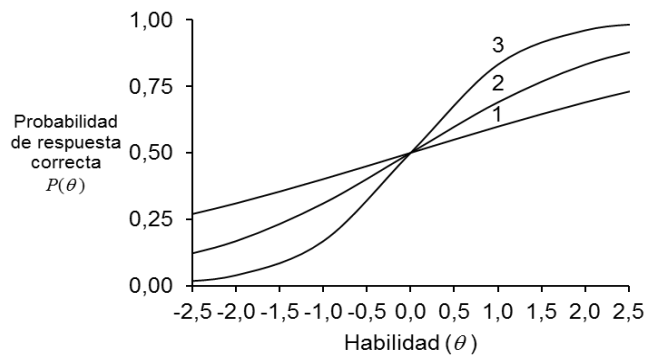
Los términos utilizados para describir los niveles de inclinación de la pendiente están relacionados con los rangos de los valores del parámetro, como se presenta en la Tabla 2.5.

<b>Nivel de inclinación de la pendiente</b>	<b>Rango de valores</b>
Nada inclinada	0
Muy poco inclinada	0,01 – 0,34
Poco inclinada	0,35 – 0,64
Moderadamente inclinada	0,65 – 1,34
Bastante inclinada	1,35 – 1,69
Muy inclinada	1,70 – 2,50

**Tabla 2.5 Niveles de inclinación de la pendiente según el parámetro de discriminación del ítem.**

### **Ilustración**

El concepto de discriminación del ítem es ilustrado en la Figura 2.4, mediante tres CCI con el mismo nivel de dificultad pero con diferentes niveles de discriminación (Baker, 2001).

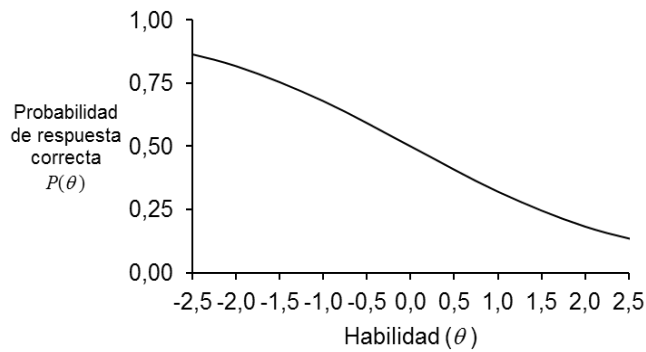


**Figura 2.4** Tres CCI con el mismo nivel de dificultad pero con diferentes niveles de discriminación.

- La CCI 1 representa a un ítem con un *nivel de discriminación bajo*, ya que tiene un valor de  $a_1 = 0,4$ , la curva tiene una pendiente poco inclinada y la probabilidad de acertar el ítem cambia lentamente a medida que el nivel de habilidad aumenta.
- La CCI 2 representa a un ítem con un *nivel de discriminación moderado*, ya que tiene un valor de  $a_2 = 0,8$ , la curva tiene una pendiente moderadamente inclinada y la probabilidad de acertar el ítem cambia suavemente a medida que el nivel de habilidad aumenta.
- La CCI 3 representa a un ítem con un *nivel de discriminación alto*, ya que tiene un valor de  $a_3 = 1,6$ , la curva tiene una pendiente muy inclinada y la probabilidad de acertar el ítem cambia rápidamente a medida que el nivel de habilidad aumenta.

### ***Discriminación negativa***

Mientras la mayoría de los ítems de la prueba discriminan en una forma positiva, algunos ítems tienen discriminación negativa; en tales ítems, la probabilidad de acertar el ítem disminuye a medida que el nivel de habilidad aumenta de bajo a alto, como se presenta en la Figura 2.5 (Baker, 2001).



**Figura 2.5 Ítem con discriminación negativa.**

Este caso puede ocurrir cuando el tamaño de muestra requerido para cada modelo no es el adecuado, con lo cual se obtienen estimaciones del parámetro  $a_i$  atípicas (negativas).

#### 2.4.1.1.2 Parámetro $b$

##### **Definición**

El parámetro  $b_i$  se denomina *parámetro de dificultad del ítem* (parámetro de localización) expresado en unidades de  $\theta$ , que indica el punto en la escala de habilidad en la que la probabilidad de respuesta correcta es 0,50 (Baker, 2001).

##### **Rango**

En teoría el rango de los valores es  $-\infty \leq b_i \leq \infty$ , pero en la práctica el rango de los valores es  $-4 \leq b_i \leq 4$  (Buela-Casal & Sierra, 1997).

##### **Interpretación**

Los términos utilizados para describir los niveles de dificultad del ítem son: muy fácil, fácil, mediana, difícil y muy difícil; pero sólo tienen significado con respecto al punto medio de la escala de habilidad (Tabla 2.6).

Nivel de dificultad	Rango de valores
Muy fácil	-4,00 – -1,50
Fácil	-1,49 – -0,50
Mediana	-0,49 – 0,50
Difícil	0,51 – 1,50
Muy difícil	1,51 – 4,00

**Tabla 2.6 Niveles del parámetro de dificultad del ítem.**

La forma apropiada de interpretar el valor numérico del parámetro de dificultad del ítem es en términos de las interrelaciones del ítem en la escala de habilidad; el parámetro de discriminación puede ser utilizado para completar el significado a esta interpretación; la dificultad del ítem es el valor en la escala de habilidad correspondiente al punto de máxima pendiente de la CCI; por lo tanto, el ítem discrimina mejor entre los individuos en la zona de este nivel de habilidad; el concepto es que la dificultad del ítem es un parámetro de localización, como se presenta en la Tabla 2.7 (Baker, 2001).

Interrelaciona los individuos con nivel de habilidad...	Rango de valores
Muy bajo	-4,00 – -1,50
Bajo	-1,49 – -0,50
Moderado	-0,49 – 0,50
Alto	0,51 – 1,50
Muy alto	1,51 – 4,00

Tabla 2.7 Niveles de habilidad que interrelaciona el parámetro de dificultad del ítem.

### Ilustración

El concepto de dificultad del ítem como parámetro de localización es ilustrado en la Figura 2.6, mediante tres CCI con el mismo nivel de discriminación pero con diferentes niveles de dificultad (Baker, 2001).

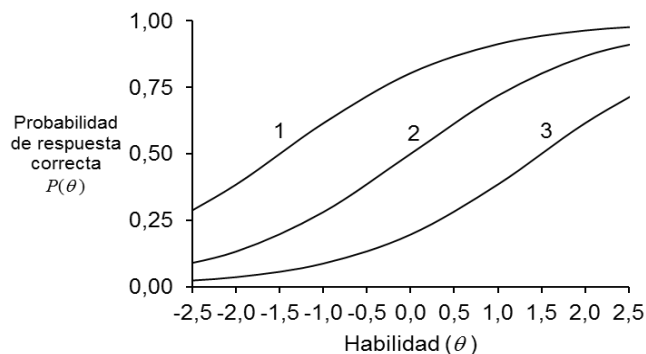


Figura 2.6 Tres CCI con el mismo nivel de discriminación pero con diferentes niveles de dificultad.

- La CCI 1 representa a un *ítem muy fácil*, ya que tiene un valor de  $b_1 = -1,5$ , la probabilidad de acertar el ítem es alta para los individuos de nivel de habilidad bajo y se aproxima a uno para los individuos de nivel de habilidad moderado.

- La CCI 2 representa a un *ítem de dificultad mediana*, ya que tiene un valor de  $b_2 = 0$ , la probabilidad de acertar el ítem es baja en los niveles de habilidad muy bajos, alrededor de 0,5 en la mitad de la escala de habilidad y cerca de uno en los niveles de habilidad altos.
- La CCI 3 representa a un *ítem difícil*, ya que tiene un valor de  $b_3 = 1,5$ , la probabilidad de acertar el ítem es muy baja para la mayoría de la escala de habilidad e incrementa sólo cuando los niveles de habilidad son muy altos.

#### 2.4.1.1.3 Parámetro $c$

##### **Definición**

El parámetro  $c_i$  se denomina *parámetro de azar del ítem* y representa la probabilidad de acertar el ítem al azar, cuando no se conoce la respuesta. Más técnicamente  $c_i$  es el valor de  $P_i(\theta_j)$  cuando  $\theta_j = -\infty$  (Muñiz, 1997).

Cuando los ítems son de opción múltiple, una buena aproximación del valor  $c_i$  es que depende del número de opciones que tiene el ítem con sólo una respuesta correcta, aunque no es estrictamente equivalente al parámetro  $c_i$ .

##### **Rango**

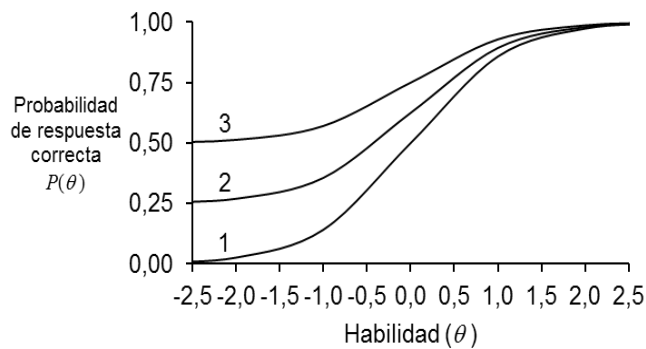
En teoría el rango de los valores es  $0 \leq c_i \leq 1$ , pero en la práctica los valores mayores de 0,35 no son considerados aceptables, por lo tanto el rango de los valores de  $0 \leq c_i \leq 0,35$  es utilizado (Baker, 2001).

##### **Interpretación**

Según un modelo de tres parámetros, el valor numérico del parámetro de azar  $c_i$  es interpretado directamente, ya que es una probabilidad.

##### **Ilustración**

El concepto de acertar el ítem al azar es ilustrado en la Figura 2.7, mediante tres CCI con los mismos niveles de discriminación y dificultad pero con diferentes niveles de azar (Anastasi & Urbina, 1998).



**Figura 2.7** Tres CCI con el mismo nivel de discriminación y dificultad pero con diferentes niveles de azar.

- La CCI 1 representa a un *ítem con baja probabilidad de acertar al azar*, ya que tiene un valor de  $c_1 = 0$ , esto quiere decir que los individuos con nivel de habilidad muy bajo tienen una probabilidad igual a cero de acertar el ítem; y cuya asíntota inferior es igual a cero.
- La CCI 2 representa a un *ítem con moderada probabilidad de acertar al azar*, ya que tiene un valor de  $c_2 = 0,25$ , esto quiere decir que incluso los individuos con nivel de habilidad muy bajo tienen una probabilidad mayor a cero de acertar el ítem y cuya asíntota inferior es mayor a cero.
- La CCI 3 representa a un *ítem con alta probabilidad de acertar al azar*, ya que tiene un valor de  $c_3 = 0,5$ , esto quiere decir que incluso los individuos con nivel de habilidad muy bajo tienen una probabilidad inmensamente mayor a cero de acertar el ítem y cuya asíntota inferior es considerablemente mayor a cero.

### TIPOS DE CCI NO UTILIZADOS EN LA TRI

Dos tipos de CCI no son utilizados en la TRI (Figura 2.8), en el caso 1 si se utilizase como CCI la recta ocurriría que, para determinados valores de  $\theta$  la probabilidad  $P(\theta)$  podría ser negativa o mayor que uno, lo que sería incompatible con los axiomas de la probabilidad, que establecen su valor entre 0 y 1; en el caso 2 el modelo es poco plausible para modelizar conducta humana real, en la que el paso fallar-acertar un ítem no se produce tan sistemáticamente en un punto

concreto y siempre el mismo, más bien se da una transición probabilística (Muñiz, 1997).

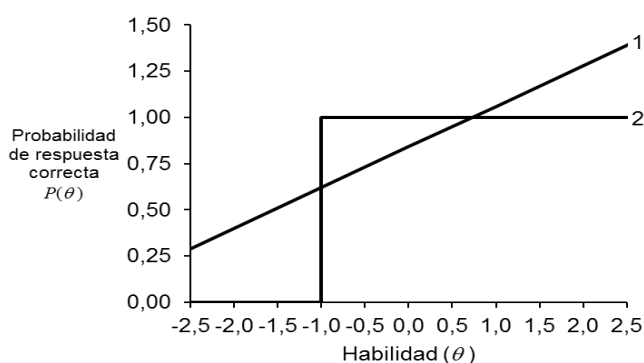


Figura 2.8 Tipos de CCI no utilizados en la TRI.

## 2.4.2 UNIDIMENSIONALIDAD

El supuesto de unidimensionalidad indica que la puntuación en la prueba de un individuo únicamente depende de una dimensión o factor: su nivel en la variable medida (Muñiz, 1997).

La TRI brinda una metodología que construye una variable latente continua a partir de múltiples variables observadas discretas (Sánchez, 2004).

### Comprobación de la unidimensionalidad

Para comprobar que un conjunto de ítems constituyen una sola dimensión existen varias técnicas de las cuales el análisis factorial es la técnica más utilizada para comprobar la unidimensionalidad (Anexo D).

El problema es que raras veces se encuentra una unidimensionalidad perfecta, es decir, un solo factor extraído que explique el 100% de la varianza, la unidimensionalidad se convierte en una cuestión de grado: cuanto más varianza explique el primer factor, “más unidimensionalidad” existirá (Bandeira, 2005). En la práctica, es muy difícil que sólo exista un único factor que explique las respuestas de los individuos al test, puesto que sobre el mismo influyen factores de diversa naturaleza, como factores cognoscitivos, de personalidad, de motivación, etc. Por tanto, lo que verdaderamente exige esta hipótesis de

unidimensionalidad es la existencia de un factor “dominante” que determine la respuesta al test (Sánchez, 2004).

### 2.4.3 INDEPENDENCIA LOCAL

Si se cumple el supuesto de la unidimensionalidad, de ello resulta matemáticamente que existe independencia local entre los ítems; esto es, que para un individuo con un determinado valor en la variable unidimensionalidad, su respuesta a un ítem no viene influida por sus respuestas en los otros ítems (Muñiz, 1997).

Los ítems encadenados cuya respuesta depende de que se conozca la del anterior carecerían de independencia local; lo mismo ocurriría si el orden de presentación de los ítems afecta a las respuestas, etc., existiendo numerosas situaciones atentatorias contra el principio de independencia local (Muñiz, 1997).

Para un valor dado de  $\theta_j$ , la probabilidad de un determinado patrón de respuesta a los ítems es igual al producto de las probabilidades para cada uno de los ítems, su formulación matemática es (Muñiz, 1997):

$$P_i(U_{1j}, U_{2j}, \dots, U_{nj} | \theta_j) = P_1(U_{1j} | \theta_j) P_2(U_{2j} | \theta_j) \dots P_n(U_{nj} | \theta_j) = \prod_{i=1}^n P_i(U_{ij} | \theta_j) \quad j = 1, \dots, N \quad (3)$$

donde:

$U_{ij}$ : Respuesta del individuo  $j$  al ítem  $i$ .

$$U_{ij} = |u_{ij}| \quad u_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{respuesta correcta del individuo } j \text{ al ítem } i \\ 0 & \text{respuesta incorrecta del individuo } j \text{ al ítem } i \end{cases}$$

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$N$ : Número de individuos de la prueba.

Por ejemplo, si una prueba consta de tres ítems y la probabilidad de que cierto individuo acierte el primero es  $P_1 = 0,40$ , de que acierte el segundo  $P_2 = 0,50$  y el tercero  $P_3 = 0,80$ , lo que establece el principio de independencia local es que la probabilidad de que este individuo acierte los tres ítems viene dada por:

$$(P_1)(P_2)(P_3) = (0,40)(0,50)(0,80) = 0,16$$



## 2.5 TIPOS DE MODELOS DE TRI

La existencia de distintos modelos para estimar los parámetros de los ítems, son resultantes de dos aspectos que les caracterizan: el tipo de función matemática adoptada y el número de parámetros de los ítems (Bandeira, 2005):

- Según el tipo de función matemática, existen dos tipos para la CCI: la función de distribución normal acumulada y la función de distribución logística acumulada<sup>5</sup>.
- Según el número de parámetros de los ítems, los modelos existentes pueden adoptar: uno, dos o tres parámetros.

### 2.5.1 MODELO DE OJIVA NORMAL

Autores como Richardson (1936), Ferguson (1942) y Finney (1944) justificaron la utilización de la ojiva normal por razones pragmáticas. Básicamente, asumieron que la curva característica del ítem podría ser modelado por la ojiva normal. Entonces, ajustaron la ojiva normal a las proporciones observadas de respuestas correctas a lo largo de la escala de habilidad. En los conjuntos típicos de datos de respuesta al ítem, la ojiva normal ha demostrado ser un modelo viable (Baker, 1992).

La función de distribución normal acumulada<sup>6</sup> viene dada por:

$$P_i(\theta_j) \equiv P_i(\mu_i, \sigma_i, \theta_j) = \Phi(Z) = \int_{-Z_{ij} = -(\theta_j - \mu_i)/\sigma_i}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{(-1/2)Z^2} dZ \quad (4)$$

donde:

$\mu_i$ : Media del ítem  $i$ .

$\sigma_i$ : Desviación estándar del ítem  $i$ .

$\theta_j$ : Habilidad del individuo  $j$ .

$Z_{ij}$ : Desviación normal.

---

<sup>5</sup> Dada la mayor tratabilidad matemática de la función logística, estos son más frecuentemente utilizados.

<sup>6</sup> Cabe señalar que esta función se está utilizando como la ecuación de una curva y no como una función de distribución acumulada que se utilizaría en la teoría estadística.

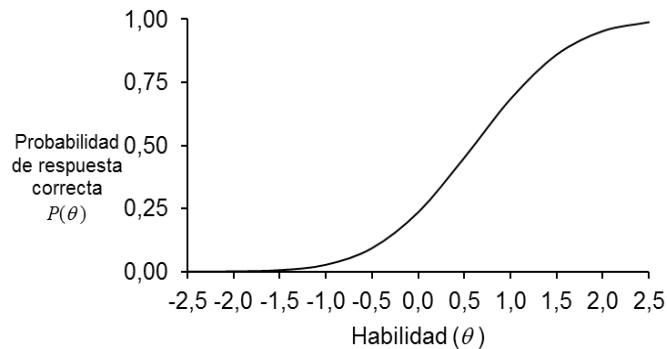
De la ecuación (4), se tiene:

$$Z_{ij} = \left( \frac{\theta_j - \mu_i}{\sigma_i} \right)$$

pero  $b_i = \mu_i$  y  $a_i = 1/\sigma_i$ . Entonces la desviación normal puede ser escrita como sigue:

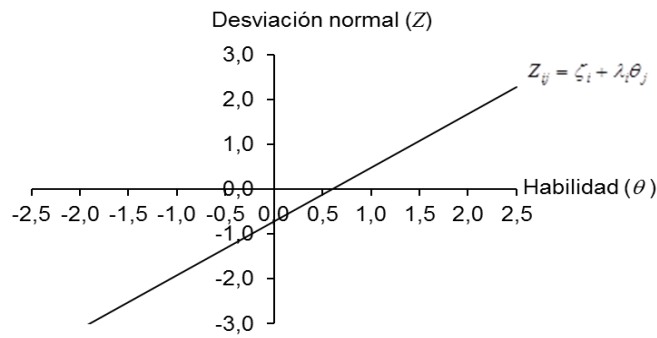
$$Z_{ij} = \left( \frac{\theta_j - \mu_i}{\sigma_i} \right) = a_i(\theta_j - b_i) \quad (5)$$

La curva característica del ítem basada en el modelo de ojiva normal con  $b_i = 0,6$  y  $a_i = 1,2$  se grafica en la Figura 2.9.



**Figura 2.9** Curva característica del ítem basada en el modelo de ojiva normal.

La función  $P_i(\theta_j)$  define una relación no lineal entre la probabilidad de respuesta correcta y  $\theta$ . Si una transformación de la desviación normal es aplicada a la  $P_i(\theta_j)$ , el resultado será una relación lineal entre la nueva variable  $Z$  y  $\theta$ . En lugar de graficar  $P_i(\theta_j)$  como una función de  $\theta$ , la  $Z$  puede ser graficada como una función de  $\theta$ , y el resultado se presenta en la Figura 2.10.



**Figura 2.10 Transformación de la desviación normal de la curva característica del ítem.**

El efecto de esta transformación es la de convertir la ojiva normal en una recta de regresión lineal. La ecuación de esta recta es:

$$Z_{ij} = \zeta_i + \lambda_i \theta_j \quad (6)$$

donde:

$\zeta_i$ : Intersección.

$\lambda_i$ : Pendiente.

$\theta_j$ : Habilidad.

En la ecuación (5),  $Z$  fue expresada como una función de los parámetros de la curva característica del ítem; por tanto,

$$Z_{ij} = a_i(\theta_j - b_i) = \zeta_i + \lambda_i \theta_j \quad (7)$$

entonces,

$$a_i \theta_j - a_i b_i = \zeta_i + \lambda_i \theta_j$$

igualando por partes,

$$\begin{aligned} a_i \theta_j &= \lambda_i \theta_j \\ a_i &= \lambda_i \end{aligned} \quad (8)$$

Por tanto, el parámetro de discriminación del ítem  $a_i$  es la pendiente de la recta de regresión lineal que relaciona la transformación de la desviación normal de la probabilidad de respuesta correcta y la habilidad  $\theta$ . Similarmente,

$$-a_i b_i = \zeta_i$$

sustituyendo  $a_i$

$$\begin{aligned} -\lambda_i b_i &= \zeta_i \\ b_i &= -\frac{\zeta_i}{\lambda_i} \end{aligned} \quad (9)$$

y el parámetro de localización es el negativo de la razón entre la intercepción y la pendiente de la recta de regresión.

## 2.5.2 MODELO DE OJIVA LOGÍSTICO

Según la TRI, el modelo matemático estándar para la curva característica del ítem es la forma acumulada de la función logística, fue deducida en 1844; fue usado como un modelo para la curva de característica del ítem a finales de 1950, por su simplicidad se ha convertido en el modelo preferido (Baker, 2001).

### 2.5.2.1 Modelo logístico de un parámetro

El modelo logístico de un parámetro fue formulado originalmente por el matemático Danés George Rasch en el año 1960, por lo que también se le conoce como *modelo de Rasch*; Rasch abordó el análisis de los datos de la prueba desde el punto de vista de la *teoría de la probabilidad*. A pesar de que comenzó a partir de un marco de referencia muy diferente, la resultante del modelo de la curva característica del ítem fue un modelo logístico (Baker, 2001).

El modelo de Rasch asume que la CCI viene dada por la función logística, y que la probabilidad de acertar el ítem depende de: un parámetro del ítem (la dificultad del ítem ( $b_i$ )) y la habilidad del individuo ( $\theta_j$ ); bajo los siguientes supuestos (Buela-Casal & Sierra, 1997):

- El parámetro de discriminación del ítem es igual para todos los ítems de la prueba ( $a_i = 1$ ).
- Los individuos no contestan ningún ítem al azar ( $c_i = 0$ ).

Su formulación matemática es:

$$P_i(\theta_j) = \frac{e^{Z_{ij}}}{1 + e^{Z_{ij}}} = \frac{1}{1 + e^{-Z_{ij}}} = \frac{1}{1 + e^{-(\theta_j - b_i)}} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n \end{array} \quad (10)$$

donde:

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el individuo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$ .

$Z_{ij}$ : Desviación logística (logit).

$\theta_j$ : Habilidad del individuo  $j$ .

$b_i$ : Parámetro de dificultad del ítem  $i$ .

$N$ : Número de individuos de la prueba.

$n$ : Número de ítems de la prueba.

### Tamaño de muestra

El modelo de Rasch requiere menos individuos en una muestra que los otros dos modelos. Un mínimo de 100 individuos es generalmente considerado suficiente para que los parámetros estimados no tengan valores atípicos. En muchas pruebas éste es un número grande, pero si una muestra más pequeña es utilizada, los resultados tendrán un margen de error alto (el modelo con los parámetros estimados no se ajustarían a los datos) (Alderson, Clapham, & Wall, 1995).

#### 2.5.2.2 Modelo logístico de dos parámetros

El modelo logístico de dos parámetros fue formulado originalmente por Allan Birnbaum entre los años 1957 y 1968, por lo que también se le conoce como *modelo de Birnbaum* (Bandeira, 2005).

El modelo asume que la CCI viene dada por la función logística, y que la probabilidad de acertar el ítem depende de: dos parámetros de ítem (la dificultad del ítem ( $b_i$ ) y la discriminación del ítem ( $a_i$ )) y la habilidad del individuo ( $\theta_j$ ); bajo el siguiente supuesto (Buela-Casal & Sierra, 1997):

- Los individuos no contestan ningún ítem al azar ( $c_i = 0$ ).

Su formulación matemática es:

$$P_i(\theta_j) = P_i(a_i, b_i, \theta_j) = \Psi(Z) = \frac{e^{Z_{ij}}}{1 + e^{Z_{ij}}} = \frac{1}{1 + e^{-Z_{ij}}} = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (11)$$

donde:

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el individuo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$ .

$Z_{ij}$ : Desviación logística (logit).

$\theta_j$ : Habilidad del individuo  $j$ .

$b_i$ : Parámetro de dificultad del ítem  $i$ .

$a_i$ : Parámetro de discriminación del ítem  $i$ .

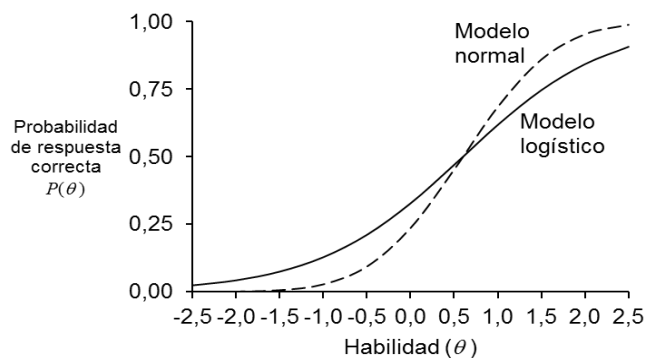
$N$ : Número de individuos de la prueba.

$n$ : Número de ítems de la prueba.

### Tamaño de muestra

Este modelo es más complejo y requiere una muestra de al menos 200 individuos (Alderson, Clapham, & Wall, 1995).

La justificación de la utilización del modelo logístico es la similitud con el modelo normal. Utilizando los mismos valores de los parámetros del modelo de ojiva normal  $b_i = 0,6$  y  $a_i = 1,2$ , la ojiva logística fue calculada y la CCI correspondiente es graficada en la Figura 2.11.



**Figura 2.11** Curvas características del ítem basadas en los modelos normal y logístico.

En la figura anterior se observa que las formas generales de las dos curvas son similares; comparten un parámetro de localización común, pero las pendientes de las curvas son diferentes. Tanto la ojiva normal y ojiva logística tienen un punto de

inflexión en  $b_i = \mu_i$  (Maxwell, 1959); por tanto, el valor numérico de  $b_i$  tendrá el mismo sentido en ambos modelos. Sin embargo, el mismo valor numérico de  $a_i$  obtiene diferentes pendientes bajo los dos modelos. Esto se produce como consecuencia de las diferencias en las varianzas de las funciones normal y logística. Si se establece una función de densidad normal unitaria  $N(0,1)$ , la correspondiente función logística tendrá media cero y varianza  $\pi^2/3$ . Por tanto, la función logística tendrá más extensión. Dado que  $a_i = 1/\sigma_i$ , la pendiente de la ojiva logística correspondiente será menor que la de la ojiva normal (Baker, 1992).

Con el fin de obtener una buena similitud entre las ojivas normal y logística, un ajuste al argumento de entrada  $Z$  es necesario. Haley (1952) ha demostrado que, si la desviación logística  $Z_{ij} = a_i(\theta_j - b_i)$  es multiplicado por 1,702 y utilizado como el argumento de entrada en la ecuación (11), la diferencia absoluta entre  $P_i(\theta_j)$  de la ojiva normal y la ojiva logística es menos de 0,01 sobre el rango completo de  $\theta$ . Por tanto,

$$|\Phi(Z) - \Psi[(1,702)Z]| < 0,01 \quad \text{para } -\infty \leq \theta \leq \infty \quad (12)$$

La función logística también está relacionada con el logaritmo de las probabilidades de acertar el ítem. En cualquier punto en la escala de habilidad ( $\theta_j$ ), la probabilidad de respuesta correcta está dada por  $P_i(\theta_j)$ , y la probabilidad de respuesta incorrecta es  $Q_i(\theta_j) = 1 - P_i(\theta_j)$ . Las probabilidades de dar una respuesta correcta son  $P_i(\theta_j)/Q_i(\theta_j)$ . Si el logaritmo natural (ln) de esta relación es tomado, se cumple lo siguiente:

$$\ln \left[ \frac{P_i(\theta_j)}{Q_i(\theta_j)} \right] = \ln P_i(\theta_j) - \ln Q_i(\theta_j) = Z_{ij} \quad (13)$$

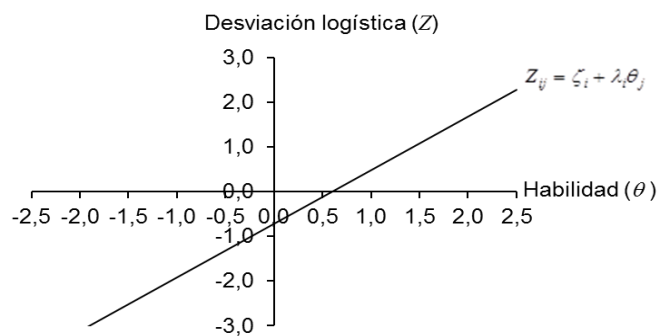
Esto puede ser demostrado de la siguiente manera. Bajo el modelo logístico,

$$P_i(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-Z_{ij}}}$$

$$e^{-Z_{ij}} = \frac{1 - P_i(\theta_j)}{P_i(\theta_j)} = \frac{Q_i(\theta_j)}{P_i(\theta_j)}$$

$$Z_{ij} = \ln \left| \frac{P_i(\theta_j)}{Q_i(\theta_j)} \right| = a_i(\theta_j - b_i) = \zeta_i + \lambda_i \theta_j \quad (14)$$

La relación entre la desviación logística y la proporción de respuestas correctas es también conocida como la transformación logística. Para propósitos de la estimación de los parámetros del ítem, es conveniente utilizar la transformación para obtener una representación lineal de la CCI. Con la transformación dada en la ecuación (14), la ojiva logística que relaciona  $P_i(\theta_j)$  y  $\theta_j$  se convierte en una recta de regresión lineal que relaciona  $\theta_j$  y  $Z_{ij}$ . En la Figura 2.12, la CCI bajo un modelo logístico ha sido transformada a su equivalente lineal.



**Figura 2.12 Transformación de la desviación logística de la curva característica del ítem.**

Aunque la recta de regresión resultante parece ser idéntica a la de la ojiva normal, es importante reconocer que los ejes verticales tienen diferentes unidades de medida. En el presente caso, el eje vertical está en unidades de  $\ln\{[P_i(\theta_j)]/[Q_i(\theta_j)]\}$  y, en el caso anterior, estaba en unidades de una transformación de la desviación normal de  $P_i(\theta_j)$  (Baker, 1992).

### 2.5.2.3 Modelo logístico de tres parámetros

El modelo logístico de tres parámetros fue también formulado originalmente por Allan Birnbaum entre los años 1957 y 1968; Birnbaum modificó el modelo logístico de dos parámetros para incluir un parámetro que representa la contribución de adivinar a la probabilidad de respuesta correcta, desafortunadamente al hacerlo, algunas de las propiedades matemáticas de la función logística se perdieron. Sin



embargo el modelo resultante se conoce como el modelo (logístico) de tres parámetros, a pesar de que técnicamente no es un modelo logístico (Baker, 2001).

El modelo asume que la CCI viene dada por la función logística, y que la probabilidad de acertar el ítem depende de: tres parámetros del ítem (la dificultad del ítem ( $b_i$ ), la discriminación del ítem ( $a_i$ ) y el parámetro de azar del ítem ( $c_i$ )) y la habilidad del individuo ( $\theta_j$ ) (Buela-Casal & Sierra, 1997).

Su formulación matemática es:

$$P_i(\theta_j) = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-Z_{ij}}} = c_i + (1 - c_i) \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \quad \begin{matrix} j = 1, \dots, N \\ i = 1, \dots, n \end{matrix} \quad (15)$$

donde:

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el individuo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$ .

$\theta_j$ : Habilidad del individuo  $j$ .

$b_i$ : Parámetro de dificultad del ítem  $i$ .

$a_i$ : Parámetro de discriminación del ítem  $i$ .

$c_i$ : Parámetro de azar del ítem  $i$ .

$N$ : Número de individuos de la prueba.

$n$ : Número de ítems de la prueba.

### Tamaño de muestra

Este modelo es muy complicado de comprender y utilizar, y se requiere un conjunto de datos de al menos 1000 individuos (Alderson, Clapham, & Wall, 1995).

El modelo logístico de tres parámetros es el más general: si se asume  $c_i = 0$  se obtiene el modelo logístico de dos parámetros y si además  $a_i = 1$  se obtiene el modelo logístico de un parámetro.

## **2.6 COMPROBACIÓN DE LOS MODELOS DE TRI**

Los pasos para la selección y confirmación de un modelo de TRI son (Muñiz, 1997):

1. Definir la variable que se pretende evaluar.
2. Examinar los ítems destinados a medir la variable.
3. Comprobar la unidimensionalidad de los ítems.
4. Elegir uno de los modelos de TRI.
5. Estimar los parámetros de los ítems y la habilidad de cada individuo.
6. Comprobar que el modelo se ajusta a los datos.

### **2.6.1 DEFINICIÓN DE LA VARIABLE**

En el primer paso, hay que definir rigurosamente la variable que se pretende evaluar, es decir, hay que delimitar las posibles conexiones con otras variables y teorías, antecedentes, predicciones, etc., caso contrario mal se podrá medir. (Muñiz, 1997).

### **2.6.2 EXAMINACIÓN DE LOS ÍTEMS**

En el segundo paso, hay que examinar los ítems destinados a medir la variable; no existe reglas de aplicación automática, sin embargo algunas recomendaciones para la elaboración de ítems de opción múltiple son (Muñiz, 1997):

- Evitar palabras que puedan dar pistas sobre la solución correcta, tales como: siempre, ninguno, nunca, todos, a veces, usualmente, generalmente, típicamente, etc.
- No repetir palabras o expresiones para cada una de las alternativas si se pueden incluir en el enunciado general.
- Las alternativas incorrectas o distractores han de ser plausibles y atractivas para las personas que no conocen la respuesta correcta.
- Las alternativas han de tener aproximadamente la misma longitud.
- No utilizar como alternativas expresiones tales como “todas las anteriores” o “ninguna de las anteriores”.
- Es aconsejable utilizar cuatro o cinco alternativas para minimizar los aciertos al azar.

- Evitar negaciones dobles, por ejemplo, una en el enunciado general y otra en las alternativas.
- Las alternativas erróneas no deben solaparse, o significar lo mismo, o lo contrario.
- Las alternativas de un ítem deben ser lo más homogéneas posible.
- La alternativa correcta debe estar expresada con el mismo detalle que las incorrectas.
- Evitar los ítems que pueden contestarse por mera lógica o sentido común.
- Asegurarse de que los enunciados presentados en un ítem no proporcionan pistas para responder a otros.
- Las alternativas incorrectas no deben ser irrelevantes.
- La ubicación de la alternativa correcta debe establecerse al azar.
- Cada ítem debe ir dirigido a evaluar un solo problema.

### **2.6.3 COMPROBACIÓN DE LA UNIDIMENSIONALIDAD**

En el tercer paso, hay que comprobar la unidimensionalidad de los ítems, según lo explicado en la sección de Unidimensionalidad, el análisis factorial es la técnica más utilizada.

### **2.6.4 ELECCIÓN DEL MODELO DE TRI**

En el cuarto paso, hay que elegir uno de los modelos de TRI, cabe señalar que cualquier elección a priori es adecuada, será el ajuste del modelo a los datos el cual decida lo correcto o incorrecto de la elección. Sin embargo, ciertas características de los ítems pueden proporcionar algunas claves que mejoren la elección del modelo.

### **2.6.5 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS**

En el quinto paso, hay que estimar los parámetros de los ítems y la habilidad de cada individuo, partiendo de las respuestas dadas por los individuos a los ítems de la prueba.

### 2.6.5.1 Estimación de mínimos cuadrados

Regresión lineal simple (Castro, 2003).

La estructura básica del modelo es:

$$Z_j = \zeta + \lambda\theta_j + \varepsilon_j \quad j = 1, \dots, N \quad (16)$$

donde:

$Z_j$ : Variable aleatoria observable.

$\zeta$ : Constante (parámetro desconocido).

$\lambda$ : Pendiente (parámetro desconocido).

$\theta_j$ : Regresor (Variable aleatoria o determinística).

$\varepsilon_j$ : Variable aleatoria no observable.

$N$ : Número de individuos de la prueba.

Estimadores de mínimos cuadrados de  $\zeta$  y  $\lambda$ .

$$S(\hat{\zeta}, \hat{\lambda}) = \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)^2 \quad \hat{\zeta}, \hat{\lambda} \in R \quad (17)$$

donde:

$S(\hat{\zeta}, \hat{\lambda})$ : Error al reemplazar  $\zeta$  por  $\hat{\zeta}$ , error al reemplazar  $\lambda$  por  $\hat{\lambda}$ .

**Definición.**  $\hat{\zeta}$ ,  $\hat{\lambda}$  son estimadores de mínimos cuadrados si y solo si:

$$\min_{\hat{\zeta}, \hat{\lambda}} S(\hat{\zeta}, \hat{\lambda}) = \min_{\hat{\zeta}, \hat{\lambda}} \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)^2 \quad (18)$$

$$S(\hat{\zeta}, \hat{\lambda}) = \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)^2$$

$$\frac{\partial S(\hat{\zeta}, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\zeta}} = -2 \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)$$

$$\frac{\partial S(\hat{\zeta}, \hat{\lambda})}{\partial \hat{\lambda}} = -2 \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j) \theta_j$$

$$\begin{cases} N\bar{Z} - N\hat{\zeta} - N\hat{\lambda}\bar{\theta} = 0 \\ \sum_{j=1}^N \theta_j Z_j - N\hat{\zeta}\bar{\theta} - \hat{\lambda} \sum_{j=1}^N \theta_j^2 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\zeta} &= \bar{Z} - \hat{\lambda}\bar{\theta} \\
\sum_{j=1}^N \theta_j Z_j - N(\bar{Z} - \hat{\lambda}\bar{\theta})\bar{\theta} &= \hat{\lambda} \sum_{j=1}^N \theta_j^2 \\
\sum_{j=1}^N \theta_j Z_j - N\bar{Z}\bar{\theta} &= \hat{\lambda} \left( \sum_{j=1}^N \theta_j^2 - N\bar{\theta}^2 \right) \\
\hat{\lambda} &= \frac{\sum_{j=1}^N (\theta_j - \bar{\theta})(Z_j - \bar{Z})}{\sum_{j=1}^N (\theta_j - \bar{\theta})^2} \tag{19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\hat{\lambda} &= \frac{S_{\theta Z}}{S_{\theta\theta}} \\
\hat{\zeta} &= \bar{Z} - \hat{\lambda}\bar{\theta} \tag{20}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
S_{\theta Z} &= \sum_{j=1}^N (\theta_j - \bar{\theta})(Z_j - \bar{Z}) \\
S_{\theta\theta} &= \sum_{j=1}^N (\theta_j - \bar{\theta})^2 \\
S_{ZZ} &= \sum_{j=1}^N (Z_j - \bar{Z})^2
\end{aligned}$$

Hipótesis sobre los errores:

- 1)  $\forall j \quad E(\varepsilon_j) = 0$
- 2)  $\forall j \quad \text{Var}(\varepsilon_j) = E(\varepsilon_j^2) = \sigma^2$
- 3)  $\forall j \quad \forall i \quad j \neq i \quad \text{Cov}(\varepsilon_j, \varepsilon_i) = E(\varepsilon_j \varepsilon_i) = 0$

**Teorema.** Suponiendo las hipótesis 1, 2 y 3. Los estimadores de mínimos cuadrados son insesgados.

$$E(\hat{\lambda}) = \lambda \tag{21}$$

$$E(\hat{\zeta}) = \zeta \tag{22}$$

**Teorema.** Suponiendo las hipótesis 1, 2 y 3. Se tiene:

$$Var(\hat{\lambda}) = \frac{\sigma^2}{S_{\theta\theta}} \quad (23)$$

$$Var(\hat{\zeta}) = \sigma^2 \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{\theta}^2}{S_{\theta\theta}} \right) \quad (24)$$

$$Cov(\hat{\zeta}, \hat{\lambda}) = -\frac{\sigma^2 \bar{\theta}}{S_{\theta\theta}} \quad (25)$$

### Errores estándar

El error estándar de  $\hat{\lambda}$  es:

$$ee(\hat{\lambda}) = \sqrt{\frac{SCE}{N-2} \frac{1}{S_{\theta\theta}}} \quad (26)$$

El error estándar de  $\hat{\zeta}$  es:

$$ee(\hat{\zeta}) = \sqrt{\frac{SCE}{N-2} \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{\theta}^2}{S_{\theta\theta}} \right)} \quad (27)$$

### Intervalos de confianza

Intervalo de confianza para  $\lambda$  de nivel  $1-\alpha$ .

$$\begin{aligned} \hat{\lambda} \pm ee(\hat{\lambda}) t_{n-2}(\alpha/2) \\ \hat{\lambda} \pm \sqrt{\frac{SCE}{N-2} \frac{1}{S_{\theta\theta}}} t_{n-2}(\alpha/2) \end{aligned} \quad (28)$$

Intervalo de confianza para  $\zeta$  de nivel  $1-\alpha$ .

$$\begin{aligned} \hat{\zeta} \pm ee(\hat{\zeta}) t_{n-2}(\alpha/2) \\ \hat{\zeta} \pm \sqrt{\frac{SCE}{N-2} \left( \frac{1}{N} + \frac{\bar{\theta}^2}{S_{\theta\theta}} \right)} t_{n-2}(\alpha/2) \end{aligned} \quad (29)$$

#### 2.6.5.2 Estimación de máxima verosimilitud

Se comienza estimando el modelo de la ecuación (16), para ello, se necesita obtener estimaciones de los parámetros. El resultado del análisis será la recta de regresión (Peña, 2002):

$$\hat{Z}_j = \hat{\zeta} + \hat{\lambda}\theta_j \quad (30)$$

que estima el valor de  $Z$ ,  $\hat{Z}_j$ , para cada valor de  $\theta$ .

La función de densidad para una observación es:

$$f(Z_j) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[\frac{-1}{2\sigma^2}(Z_j - \zeta - \lambda\theta_j)^2\right]$$

y por la independencia de las observaciones, tomando logaritmos resulta que la función soporte para la muestra es:

$$L(\zeta, \lambda, \sigma^2) = -\frac{N}{2} \ln \sigma^2 - \frac{N}{2} \ln 2\pi - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{j=1}^N (Z_j - \zeta - \lambda\theta_j)^2$$

Para obtener los estimadores de  $\zeta$  y  $\lambda$  se deriva esta función respecto a cada uno de los parámetros, se obtiene, eliminando las constantes:

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta} = 0 = \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)$$

Este resultado implica que los residuos de la ecuación dados por:

$$\varepsilon_j = Z_j - \hat{Z}_j = Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j$$

deben tener media cero. Se puede escribir esta ecuación como:

$$\sum_{j=1}^N \varepsilon_j = 0 \quad (31)$$

o en su forma equivalente:

$$\sum_{j=1}^N Z_j = N\hat{\zeta} + \hat{\lambda} \sum_{j=1}^N \theta_j \quad (32)$$

La segunda ecuación se obtiene derivando respecto a  $\hat{\lambda}$  en la función soporte:

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 = \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)(-\theta_j)$$

y puede interpretarse como:

$$\sum_{j=1}^N \varepsilon_j \theta_j = 0 \quad (33)$$

Ésta es una condición necesaria porque, si no fuese así, y los residuos creciesen por ejemplo con el valor de la  $\theta$ , podríamos utilizar esta información para obtener una recta mejor. Los residuos de la mejor recta no pueden contener información respecto a la variable  $\theta$ . Esta ecuación puede escribirse:

$$\sum_{j=1}^N Z_j \theta_j = \hat{\zeta} \sum_{j=1}^N \theta_j + \hat{\lambda} \sum_{j=1}^N \theta_j^2 \quad (34)$$

Las ecuaciones (32) y (34) se llaman *ecuaciones normales de la regresión* y proporcionan los parámetros  $\hat{\zeta}$  y  $\hat{\lambda}$ . Dividiendo por  $N$  la primera:

$$\bar{Z} = \hat{\zeta} + \hat{\lambda} \bar{\theta} \quad (35)$$

que indica que la recta de regresión pasará siempre por el centro de los datos, el punto  $(\bar{\theta}, \bar{Z})$ . Dividiendo también por  $N$  la segunda y restando la ecuación (35) multiplicada por  $\bar{\theta}$ :

$$\frac{\sum_{j=1}^N Z_j \theta_j}{N} - \bar{\theta} \bar{Z} = \hat{\lambda} \left( \frac{\sum_{j=1}^N \theta_j^2}{N} - \bar{\theta}^2 \right)$$

el término de la izquierda es la covarianza entre ambas variables y el que multiplica a  $\hat{\lambda}$  la varianza muestral de  $\theta$ , con lo que:

$$\hat{\lambda} = \frac{Cov(\theta, Z)}{s_{\theta}^2} \quad (36)$$

la pendiente estimada, o el coeficiente de regresión  $\hat{\lambda}$ , es directamente proporcional a la covarianza entre las variables. La constante de proporcionalidad,  $s_{\theta}^2$ , asegura que  $\hat{\lambda}$  tenga dimensiones de incremento de  $Z$  por unidad de  $\theta$ . Restando la ecuación (35) de la recta de regresión (30), se obtiene:



$$\hat{Z}_j = \bar{Z} + \hat{\lambda}(\theta_j - \bar{\theta}) \quad (37)$$

expresión alternativa para la recta de regresión.

La estimación de la varianza,  $\sigma^2$ , se obtiene por:

$$\frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = 0 = \frac{-N}{2\sigma^2} + \frac{2}{4\sigma^2} \sum_{j=1}^N (Z_j - \hat{\zeta} - \hat{\lambda}\theta_j)^2$$

y la estimación de máxima verosimilitud de la varianza de la perturbación se estima por la varianza de los residuos:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{j=1}^N \varepsilon_j^2}{N} \quad (38)$$

### Métodos de construcción básicos

Existen dos métodos de construcción básicos para la estimación de los parámetros:

- Estimación de los parámetros del ítem suponiendo que las habilidades de los individuos son conocidas (solución 1).
- Estimación de las habilidades de los individuos suponiendo que los parámetros del ítem son conocidos (solución 2).

#### 2.6.5.3 Estimación de máxima verosimilitud de los parámetros del ítem

La estimación de máxima verosimilitud (maximum likelihood estimation MLE) estará en términos del modelo logístico de la curva característica del ítem de dos parámetros para un solo ítem con puntuaciones de la habilidad conocidas para los individuos (solución 1).

##### 2.6.5.3.1 Estimación de máxima verosimilitud: modelo logístico

Aunque los métodos de estimación podrían derivarse sobre la base de los individuos, la lógica del método de estimación es más sencillo si los individuos son agrupados de acuerdo a la habilidad; por tanto, los individuos agrupados

serán utilizados a continuación. Supongamos que  $k$  grupos de  $f_j$  individuos que poseen puntuaciones de la habilidad conocidas  $\theta_j$  son extraídos al azar de una población de individuos y  $j=1,2,\dots,k$ . Cada individuo ha respondido a un solo ítem puntuado dicotómicamente. Temporalmente los  $f_j$  individuos que tienen habilidad  $\theta_j$ ,  $r_j$  dieron la respuesta correcta y  $f_j - r_j$  dieron la respuesta incorrecta. Sea  $R = (r_1, r_2, r_3, \dots, r_k)$  el vector del número observado de respuestas correctas (Tabla 2.8) (Baker, 1992).

	Correcta	Incorrecta	
$\theta_1$	$r_1$	$f_1 - r_1$	$f_1$
$\theta_2$	$r_2$	$f_2 - r_2$	$f_2$
$\theta_3$	$r_3$	$f_3 - r_3$	$f_3$
·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	·
$\theta_j$	$r_j$	$f_j - r_j$	$f_j$
·	·	·	·
·	·	·	·
·	·	·	·
$\theta_k$	$r_k$	$f_k - r_k$	$f_k$
			$N$

**Tabla 2.8** Tabla de contingencia.

La proporción observada de respuestas correctas en la habilidad  $\theta_j$  es:

$$p(\theta_j) = p_j = \frac{r_j}{f_j}$$

y la proporción observada de respuestas incorrectas es:

$$q(\theta_j) = q_j = \frac{f_j - r_j}{f_j}$$

Se supone que el  $r_j$  observado en cada habilidad  $\theta_j$  están distribuidos binomialmente con parámetros  $f_j, P_j$ , donde  $P_j$  es la probabilidad verdadera de respuesta correcta. Entonces  $E(r_j) = f_j P_j$  y la varianza  $(r_j) = f_j P_j Q_j$ . Por tanto,

$$E(p_j) = E\left(\frac{r_j}{f_j}\right) = \frac{1}{f_j} E(r_j) = P_j$$

El valor de  $P_j$  depende de los parámetros  $\zeta$  y  $\lambda$  del modelo de la curva característica del ítem así como el valor de  $\theta_j$ .

La función de distribución logística acumulada está dada por:

$$P_j = P(\theta_j) = P(\zeta, \lambda, \theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-(\zeta + \lambda\theta_j)}} \quad (39)$$

$$Q_j = Q(\theta_j) = 1 - P(\theta_j) \quad (40)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \frac{1}{1 + e^{-(\zeta + \lambda\theta_j)}} \\ &= \frac{1 + e^{-(\zeta + \lambda\theta_j)} - 1}{1 + e^{-(\zeta + \lambda\theta_j)}} \\ &= \frac{1}{e^{(\zeta + \lambda\theta_j)} [1 + e^{-(\zeta + \lambda\theta_j)}]} \\ &= \frac{1}{e^{(\zeta + \lambda\theta_j)} + 1} \end{aligned}$$

Sea  $Z_j = \zeta + \lambda\theta_j$  la desviación logística, es decir, el “logit”. Algunas derivadas útiles son:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_j}{\partial \zeta} &= \frac{-(-1) \left[ e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} (-1) \right]}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} & \frac{\partial P_j}{\partial \lambda} &= \frac{-(-1) \left[ e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} (-\theta_j) \right]}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} \\
&= \frac{e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)}}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} & &= \frac{e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \theta_j}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} \\
&= \frac{1}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] \left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] e^{(\zeta+\lambda\theta_j)}} & &= \frac{\theta_j}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] \left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] e^{(\zeta+\lambda\theta_j)}} \\
&= \frac{1}{1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)}} \cdot \frac{1}{e^{(\zeta+\lambda\theta_j)} + 1} & &= \frac{1}{1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)}} \cdot \frac{1}{e^{(\zeta+\lambda\theta_j)} + 1} \cdot \theta_j \\
&= P_j Q_j & &= P_j Q_j \theta_j
\end{aligned}$$
  

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q_j}{\partial \zeta} &= -\frac{-(-1) \left[ e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} (-1) \right]}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} & \frac{\partial Q_j}{\partial \lambda} &= -\frac{-(-1) \left[ e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} (-\theta_j) \right]}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} \\
&= -\frac{e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)}}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} & &= -\frac{e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \theta_j}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right]^2} \\
&= -\frac{1}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] \left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] e^{(\zeta+\lambda\theta_j)}} & &= -\frac{\theta_j}{\left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] \left[ 1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)} \right] e^{(\zeta+\lambda\theta_j)}} \\
&= -\frac{1}{1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)}} \cdot \frac{1}{e^{(\zeta+\lambda\theta_j)} + 1} & &= -\frac{1}{1 + e^{-(\zeta+\lambda\theta_j)}} \cdot \frac{1}{e^{(\zeta+\lambda\theta_j)} + 1} \cdot \theta_j \\
&= -P_j Q_j & &= -P_j Q_j \theta_j
\end{aligned}$$

Ahora, tomando todas las categorías de respuesta y los grupos de puntuaciones de la habilidad en consideración, la probabilidad de  $R$  esta dada por la función de verosimilitud:

$$\begin{aligned}
P(R) &= \prod_{j=1}^k P(r_j) \\
P(R) &= \prod_{j=1}^k C_j^k P_j^{r_j} Q_j^{f_j - r_j} \\
P(R) &= \prod_{j=1}^k \frac{f_j!}{r_j! (f_j - r_j)!} P_j^{r_j} Q_j^{f_j - r_j} \tag{41}
\end{aligned}$$

y el logaritmo natural de la verosimilitud es:

$$L = \ln P(R) = \text{const} + \sum_{j=1}^k r_j \ln P_j + \sum_{j=1}^k (f_j - r_j) \ln Q_j \quad (42)$$

Las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos  $\zeta$  y  $\lambda$  (donde  $\zeta$  es la intersección y  $\lambda$  es la pendiente) están basados en la información proporcionada por la muestra y son los valores que satisfacen las ecuaciones.

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \zeta} &= 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} &= 0 \end{aligned} \quad (43)$$

Las primeras y segundas derivadas parciales de  $L$  con respecto a los parámetros  $\zeta$  y  $\lambda$  son necesarias. Éstas son:

$$\begin{aligned} L_1 &= \frac{\partial L}{\partial \zeta} \\ &= \sum_{j=1}^k \frac{r_j}{P_j} P_j Q_j + \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - r_j)}{Q_j} (-P_j Q_j) \\ &= \sum_{j=1}^k [r_j Q_j - (f_j - r_j) P_j] \\ &= \sum_{j=1}^k [r_j Q_j - f_j P_j + r_j P_j] \\ &= \sum_{j=1}^k (r_j - f_j P_j) \end{aligned}$$

pero

$$p_j = \frac{r_j}{f_j}$$

entonces sustituyendo  $(r_j - f_j P_j) = f_j (p_j - P_j)$  se obtiene:

$$L_1 = \sum_{j=1}^k f_j (p_j - P_j)$$

$$\begin{aligned}
L_2 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} \\
&= \sum_{j=1}^k \frac{r_j}{P_j} P_j Q_j \theta_j + \sum_{j=1}^k \frac{(f_j - r_j)}{Q_j} (-P_j Q_j \theta_j) \\
&= \sum_{j=1}^k (r_j - f_j P_j) \theta_j \\
&= \sum_{j=1}^k f_j (p_j - P_j) \theta_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
L_{11} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2} = \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[ \sum_{j=1}^k (r_j - f_j P_j) \right] = - \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \\
L_{22} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \sum_{j=1}^k (r_j - f_j P_j) \theta_j \right] = - \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \theta_j^2 \\
L_{21} &= \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta \partial \lambda} = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left[ \sum_{j=1}^k (r_j - f_j P_j) \right] = - \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \theta_j = L_{12}
\end{aligned}$$

Utilizando el equivalente logístico  $W_j = P_j Q_j$  del peso de Urban-Müller, las derivadas parciales pueden ser escritas como (Baker, 1992):

$$\begin{aligned}
L_1 &= \sum_{j=1}^k f_j W_j \left( \frac{p_j - P_j}{P_j Q_j} \right) \\
L_2 &= \sum_{j=1}^k f_j W_j \left( \frac{p_j - P_j}{P_j Q_j} \right) \theta_j \\
L_{11} &= - \sum_{j=1}^k f_j W_j \\
L_{12} &= L_{21} = - \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \\
L_{22} &= - \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2
\end{aligned}$$

Con el fin de resolver las ecuaciones de verosimilitud, un procedimiento iterativo basado en una serie de Taylor es empleado. Dado que las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros son funciones de la muestra,  $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ ,  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ ; si las aproximaciones  $\hat{\zeta}_1$ ,  $\hat{\lambda}_1$  para  $\hat{\zeta}$ ,  $\hat{\lambda}$  son

encontradas de manera rigurosa, entonces  $\hat{\zeta} = \hat{\zeta}_1 + \Delta\hat{\zeta}$  y  $\hat{\lambda} = \hat{\lambda}_1 + \Delta\hat{\lambda}$  de modo que  $\Delta\hat{\zeta}$ ,  $\Delta\hat{\lambda}$  son los errores en las aproximaciones. Utilizando un desarrollo en serie de Taylor para la primera ecuación en (43) (Baker, 1992):

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \zeta}(\zeta, \lambda) &= \frac{\partial L}{\partial \zeta}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \Delta\hat{\zeta}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \Delta\hat{\lambda}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta \partial \lambda}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) \\ &+ \text{términos que contienen potencias de orden superior de } \Delta\hat{\zeta}_1 \text{ y } \Delta\hat{\lambda}_1 \end{aligned}$$

La notación  $\partial L / \partial \zeta(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1)$ ,  $\partial^2 L / \partial \zeta^2(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1)$ , etc., indica que las derivadas de la función de verosimilitud son evaluadas utilizando las estimaciones  $\hat{\zeta}_1$ ,  $\hat{\lambda}_1$ . Por tanto, la serie de Taylor permite que las derivadas con respecto a los parámetros desconocidos a ser evaluados utilizando estimaciones, y los únicos desconocidos son los  $\Delta\hat{\zeta}_1$  y  $\Delta\hat{\lambda}_1$ . Igualando  $\partial L / \partial \zeta(\zeta, \lambda) = 0$  e ignorando términos que contienen  $\Delta\hat{\zeta}_1^2$ ,  $\Delta\hat{\lambda}_1^2$  y potencias de orden superior se obtiene:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \zeta}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \Delta\hat{\zeta}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \Delta\hat{\lambda}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta \partial \lambda}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1)$$

Sea:

$$L_1 = \frac{\partial L}{\partial \zeta}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) \quad L_{11} = \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta^2}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) \quad L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta \partial \lambda}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1)$$

Entonces la serie puede ser escrita como:

$$-L_1 = L_{11}\Delta\hat{\zeta}_1 + L_{12}\Delta\hat{\lambda}_1$$

Similarmente, para la segunda ecuación en (43):

$$0 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \Delta\hat{\lambda}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \Delta\hat{\zeta}_1 \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \zeta}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) + \dots$$

Sea:

$$L_2 = \frac{\partial L}{\partial \lambda}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) \quad L_{22} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1) \quad L_{21} = L_{12} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial \zeta}(\hat{\zeta}_1, \hat{\lambda}_1)$$

La ecuación puede ser escrita como:

$$-L_2 = L_{22}\Delta\hat{\lambda} + L_{21}\Delta\hat{\zeta}$$

Por tanto, las ecuaciones de solución que hay que resolver para  $\Delta\hat{\zeta}$  y  $\Delta\hat{\lambda}$  son:

$$\begin{aligned} -L_1 &= L_{11}\Delta\hat{\zeta} + L_{12}\Delta\hat{\lambda} \\ -L_2 &= L_{21}\Delta\hat{\zeta} + L_{22}\Delta\hat{\lambda} \end{aligned} \quad (44)$$

En términos de álgebra matricial,

$$\begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \Delta\hat{\zeta} \\ \Delta\hat{\lambda} \end{bmatrix}$$

Despejando  $\Delta\hat{\zeta}$  y  $\Delta\hat{\lambda}$  se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \Delta\hat{\zeta} \\ \Delta\hat{\lambda} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix} \quad (45)$$

Dado que los  $\hat{\zeta}_1$ ,  $\hat{\lambda}_1$  fueron aproximaciones rigurosas y  $\Delta\hat{\zeta}$ ,  $\Delta\hat{\lambda}$  son estimaciones, los valores obtenidos de los parámetros,  $\hat{\zeta}_2 = \hat{\zeta}_1 + \Delta\hat{\zeta}$  y  $\hat{\lambda}_2 = \hat{\lambda}_1 + \Delta\hat{\lambda}$  son sólo aproximaciones de segundo orden. Por tanto, el proceso debe ser repetido hasta que  $\Delta\hat{\zeta}$  y  $\Delta\hat{\lambda}$  sean suficientemente pequeños. Un procedimiento iterativo para lograr esto puede ser establecido de la siguiente manera: Sea

$$\hat{\zeta}_t = \hat{\zeta}_1 \quad \hat{\lambda}_t = \hat{\lambda}_1$$

donde  $t$  índice de la iteración; entonces,

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{t+1} &= \hat{\zeta}_t + \Delta\hat{\zeta}_t \\ \hat{\lambda}_{t+1} &= \hat{\lambda}_t + \Delta\hat{\lambda}_t \end{aligned}$$

$Z_t = \hat{\zeta}_t + \hat{\lambda}_t \theta_j$  es considerado como la desviación “verdadera” en la iteración  $t$ . En términos de álgebra matricial,



$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \Delta\hat{\zeta} \\ \Delta\hat{\lambda} \end{bmatrix}_t \quad (46)$$

Sustituyendo (45) para los últimos términos se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{bmatrix}_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \end{bmatrix}_t \quad (47)$$

que es conocida como la ecuación de Newton-Raphson (ver Kendall y Stuart, 1967, Vol. 2, p. 49). La matriz de segundas derivadas es conocida en matemáticas como la matriz “Hessiana” (Baker, 1992).

Dado que las segundas derivadas no contienen ningún término observado,  $E(L_{gg'}) = L_{gg'}$  y los términos pueden ser utilizados tal como son. Por tanto, para un modelo de CCI logístico de dos parámetros, el Método de Fisher de puntuación para los parámetros y el procedimiento de Newton-Raphson son los mismos. Después de la sustitución de las derivadas, las ecuaciones de solución (44) se convierten en (Baker, 1992):

$$\begin{aligned} \Delta\hat{\zeta} \sum_{j=1}^k f_j W_j + \Delta\hat{\lambda} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j &= \sum_{j=1}^k f_j W_j \left( \frac{p_j - P_j}{P_j Q_j} \right) \\ \Delta\hat{\zeta} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j + \Delta\hat{\lambda} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 &= \sum_{j=1}^k f_j W_j \left( \frac{p_j - P_j}{P_j Q_j} \right) \theta_j \end{aligned} \quad (48)$$

Expresando el proceso iterativo para estimar  $\zeta$  y  $\lambda$  en la forma de Newton-Raphson,

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 \end{bmatrix}_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j \left( \frac{p_j - P_j}{P_j Q_j} \right) \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j \left( \frac{p_j - P_j}{P_j Q_j} \right) \theta_j \end{bmatrix}_t \quad (49)$$

Sea  $v_j = (p_j - P_j) / P_j Q_j$ ; entonces la ecuación (49) puede ser escrita como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta} \\ \hat{\lambda} \end{bmatrix}_t + \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 \end{bmatrix}_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j \end{bmatrix}_t \quad (50)$$

Trabajando sólo con el segundo término del lado derecho de la ecuación (50) se obtiene:

$$\begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 \end{bmatrix}_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j \end{bmatrix}_t$$

Tomando la inversa por el método de los determinantes y multiplicando por el vector de las primeras derivadas se obtiene el vector:

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j W_j \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \left( \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \right)^2} \right] \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 & -\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \\ -\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j & \sum_{j=1}^k f_j W_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \\ \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j \end{bmatrix} \\ & = \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j W_j \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \left( \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \right)^2} \right] \times \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j - \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j \\ -\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j + \sum_{j=1}^k f_j W_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Entonces,

$$\Delta \hat{\zeta}_t = \frac{\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j - \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j}{\sum_{j=1}^k f_j W_j \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \left( \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \right)^2} \quad (51)$$

$$\Delta \hat{\lambda}_t = \frac{\sum_{j=1}^k f_j W_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j - \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j}{\sum_{j=1}^k f_j W_j \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \left( \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \right)^2} \quad (52)$$

Si el numerador y el denominador de la expresión (52) para el incremento en el parámetro de la pendiente estimada son divididos por  $\sum_{j=1}^k f_j W_j$ ,

$$\Delta \hat{\lambda}_t = \frac{\sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j - \left[ \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j / \sum_{j=1}^k f_j W_j \right]}{\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \left[ \left( \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \right)^2 / \sum_{j=1}^k f_j W_j \right]} \quad (53)$$

Esta ecuación tiene exactamente la misma forma que el coeficiente de regresión de mínimos cuadrados usual. Sin embargo, debido a la presencia de los términos  $f_j W_j$ , una fórmula paralela a la de una estimación de mínimos cuadrados ponderados es obtenida (Baker, 1992).

En la ecuación (51), el numerador y el denominador pueden ser divididos por  $\sum_{j=1}^k f_j W_j$ . Entonces, sea:

$$\bar{v} = \frac{\sum_{j=1}^k f_j W_j v_j}{\sum_{j=1}^k f_j W_j} \quad \bar{\theta} = \frac{\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j}{\sum_{j=1}^k f_j W_j}$$

y sustituyendo estos en (51) se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\zeta}_t &= \frac{\bar{v} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \bar{\theta} \sum_{j=1}^k f_j W_j v_j \theta_j}{\sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 - \left[ \left( \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j \right)^2 / \sum_{j=1}^k f_j W_j \right]} \\ &= \bar{v} - \Delta \hat{\lambda}_t \bar{\theta} \end{aligned} \quad (54)$$

la cual tiene la misma forma como el término de intercepción usual en la regresión lineal. Con las expresiones para  $\Delta \hat{\zeta}_t$  y  $\Delta \hat{\lambda}_t$  en mano, el proceso iterativo definido por la ecuación (50) puede ser descrito.

Otra vez,

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_{t+1} &= \hat{\zeta}_t + \Delta\hat{\zeta}_t \\ \hat{\lambda}_{t+1} &= \hat{\lambda}_t + \Delta\hat{\lambda}_t\end{aligned}$$

y

$$\hat{Z}_{t+1} = \hat{\zeta}_{t+1} + \hat{\lambda}_{t+1}\theta_j$$

$\hat{Z}_{t+1}$  se convierte en el “verdadero” logit, y el proceso iterativo continúa hasta que un criterio de convergencia se cumpla.

Una vez que los parámetros de la regresión  $\zeta$  y  $\lambda$  han sido estimados, los parámetros estimados del ítem  $\hat{a} = \hat{\lambda}$  y  $\hat{b} = -(\hat{\zeta} / \hat{\lambda})$  son fácilmente obtenidos.

Maxwell (1959) ha proporcionado las varianzas muestrales (para muestras grandes) de  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\zeta}$  y  $\hat{b}$ .

$$S_{\hat{\lambda}}^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j W_j (\theta_j - \bar{\theta})^2} = \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j (\theta_j - \bar{\theta})^2} = S_a^2 \quad (55)$$

$$S_{\hat{\zeta}}^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j W_j} + \bar{\theta}^2 S_a^2 = \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j} + \bar{\theta}^2 S_a^2 \quad (56)$$

Dado que  $\hat{b} = -(\hat{\zeta} / \hat{\lambda})$  y  $\hat{a} = \hat{\lambda}$ ,

$$S_{\hat{b}}^2 = \frac{1}{\hat{a}^2} \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j W_j} + S_a^2 (\hat{b} - \bar{\theta})^2 \right] = \frac{1}{\hat{a}^2} \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j} + S_a^2 (\hat{b} - \bar{\theta})^2 \right] \quad (57)$$

Cuando los  $\theta_j$  son conocidos, Berkson (1955a, p.157) ha demostrado que, bajo el modelo logístico y la variación binomial de los  $p_j$  observados, los términos  $\sum_{j=1}^k f_j p_j$  y  $\sum_{j=1}^k f_j p_j \theta_j$  son estadísticos suficientes mínimos para  $\zeta$  y  $\lambda$ , respectivamente. Además, cuando los estimadores de máxima verosimilitud  $\hat{\lambda}$ ,  $\hat{\zeta}$  son finitos, son necesariamente uno a uno las funciones de estos estadísticos

suficientes. Después de sustituir por  $W_j$  y  $v_j$  y la realización de algunos cálculos algebraicos, las ecuaciones (53) y (54) pueden ser escritas como (Baker, 1992):

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\lambda} &= \frac{\sum_{j=1}^k f_j p_j \theta_j - \sum_{j=1}^k f_j P_j \theta_j}{\frac{-\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \theta_j \left( \sum_{j=1}^k f_j p_j - \sum_{j=1}^k f_j P_j \right) / \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \theta_j^2 - \left[ \left( \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \theta_j \right)^2 / \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \right]}} \\ \Delta \hat{\zeta} &= \frac{\sum_{j=1}^k f_j p_j - \sum_{j=1}^k f_j P_j - \Delta \hat{\lambda} \sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j \theta_j}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j} \end{aligned}$$

y los primeros términos en los numeradores de estas ecuaciones pueden ser identificados como los estadísticos suficientes.

La estimación de máxima verosimilitud de los parámetros del ítem bajo un modelo de CCI logístico de dos parámetros también puede ser expresado en un formato de regresión. Sean  $z_j$  el logit “calculado” y  $Z_j$  el logit “verdadero”, entonces, siguiendo Berkson (1955a),

$$z_j = Z_j + \frac{(p_j - P_j)}{P_j Q_j}$$

y

$$z_j - Z_j = \frac{(p_j - P_j)}{P_j Q_j}$$

Substituyendo en el lado derecho de la ecuación (48), una forma alternativa de las ecuaciones de solución puede ser obtenida.

$$\begin{aligned} \Delta \hat{\zeta} \sum_{j=1}^k f_j W_j + \Delta \hat{\lambda} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j &= \sum_{j=1}^k f_j W_j (z_j - Z_j) \\ \Delta \hat{\zeta} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j + \Delta \hat{\lambda} \sum_{j=1}^k f_j W_j \theta_j^2 &= \sum_{j=1}^k f_j W_j (z_j - Z_j) \theta_j \end{aligned} \tag{58}$$

## Errores estándar

El error estándar de  $\hat{a}$  es:

$$ee(\hat{a}) = \sqrt{S_{\hat{a}}^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j (\theta_j - \bar{\theta})^2}} \quad (59)$$

El error estándar de  $\hat{b}$  es:

$$ee(\hat{b}) = \sqrt{S_{\hat{b}}^2} = \sqrt{\frac{1}{\hat{a}^2} \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j} + S_{\hat{a}}^2 (\hat{b} - \bar{\theta})^2 \right]} \quad (60)$$

## Intervalos de confianza

Intervalo de confianza para  $a$  de nivel  $1-\alpha$ .

$$\begin{aligned} \hat{a} \pm ee(\hat{a}) Z_{\alpha/2} \\ \hat{a} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j (\theta_j - \bar{\theta})^2}} Z_{\alpha/2} \end{aligned} \quad (61)$$

Intervalo de confianza para  $b$  de nivel  $1-\alpha$ .

$$\begin{aligned} \hat{b} \pm ee(\hat{b}) Z_{\alpha/2} \\ \hat{b} \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{a}^2} \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j} + S_{\hat{a}}^2 (\hat{b} - \bar{\theta})^2 \right]} Z_{\alpha/2} \end{aligned} \quad (62)$$

### 2.6.5.4 Estimación de máxima verosimilitud de la habilidad del individuo

La estimación de máxima verosimilitud (maximum likelihood estimation MLE) de su habilidad desconocida, estará basada en los valores de los parámetros de los ítems conocidos (solución 2).

#### 2.6.5.4.1 Estimación de máxima verosimilitud: modelo logístico

Un individuo dado responde a los  $n$  ítems de una prueba, y las respuestas son puntuadas dicotómicamente,  $u_{ij} = 0, 1$ , donde  $i$  denota el ítem  $1 \leq i \leq n$  y  $j$  denota

el individuo  $1 \leq j \leq N$ , obteniendo un vector de respuestas a los ítems de longitud  $n$  denotado por  $U_j = (u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \dots, u_{nj} | \theta_j)$ . Bajo el supuesto de independencia local, los  $u_{ij}$  son estadísticamente independientes. Por tanto, la probabilidad de que el vector de respuestas de los ítems para un individuo dado viene dado por la función de verosimilitud (Baker, 1992):

$$P[U_j | \theta] = \prod_{i=1}^n P_i^{u_{ij}}(\theta_j) Q_i^{1-u_{ij}}(\theta_j) \quad (63)$$

Para simplificar la notación, sea  $P_i(\theta_j) = P_{ij}$  y  $Q_i(\theta_j) = Q_{ij}$ ; entonces,

$$P[U_j | \theta] = \prod_{i=1}^n P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} \quad (64)$$

Tomando el logaritmo natural de la función de verosimilitud se obtiene:

$$L = \ln P[U_j | \theta] = \sum_{i=1}^n [u_{ij} \ln P_{ij} + (1-u_{ij}) \ln Q_{ij}] \quad (65)$$

Ahora, los  $P_{ij}$  son funciones de la curva característica del ítem, y la desviación  $Z_{ij}$  será expresada en términos de los parámetros  $\zeta_i$  y  $\lambda_i$ ; por tanto,  $Z_{ij} = \zeta_i + \lambda_i \theta_j$ . Puesto que los parámetros para todos los  $n$  ítems se suponen conocidos y son los “valores verdaderos”, sólo la derivada del ln-verosimilitud con respecto a un determinado individuo tendrá que ser tomada (Baker, 1992).

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^n u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} + \sum_{i=1}^n (1-u_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} \quad (66)$$

Las derivadas de  $P_{ij}$  y  $Q_{ij}$  con respecto al parámetro de habilidad será dependiente del modelo de la curva característica del ítem particular empleado.

Como fue el caso para los ítems, las técnicas de Newton-Raphson serán utilizadas para obtener las estimaciones de un parámetro de habilidad a través de un procedimiento iterativo. Por tanto, las derivadas parciales de segundo orden de la función de verosimilitud con respecto al parámetro de habilidad también serán

necesarias. Ahora, para un individuo dado, una ecuación de Newton-Raphson puede ser establecida para resolver iterativamente la estimación de máxima verosimilitud de la habilidad. Esta ecuación es como sigue (Baker, 1992):

$$[\hat{\theta}_j]_{t+1} = [\hat{\theta}_j]_t - \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j^2} \right]_t^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \right]_t \quad (67)$$

Cuando este procedimiento de Newton-Raphson se ha realizado, un estimador de la habilidad  $\hat{\theta}_j$  para el individuo es obtenido.

Las primeras y segundas derivadas del ln-verosimilitud con respecto a la habilidad serán necesarias. Algunas derivadas útiles con respecto a  $\theta_j$  son:

$$\frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} = \lambda_i P_{ij} Q_{ij} \qquad \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} = -\lambda_i P_{ij} Q_{ij}$$

Sustituyendo estas derivadas en la ecuación (66) se obtiene la primera derivada del ln-verosimilitud con respecto a  $\theta_j$ , y esta es:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial \theta_j} &= \sum_{i=1}^n u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} (\lambda_i P_{ij} Q_{ij}) + \sum_{i=1}^n (1 - u_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} (-\lambda_i P_{ij} Q_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i (u_{ij} - P_{ij}) \\ &= \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij} - \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{ij} \end{aligned} \quad (68)$$

Es interesante notar que el primer término de la derecha en la forma final de la ecuación (68) es el estadístico suficiente y mínimo para la estimación de la habilidad bajo un modelo logístico (Birnbaum, 1968). Sea  $W_{ij} = P_{ij} Q_{ij}$ ,

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^n \lambda_i W_{ij} \left( \frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij} Q_{ij}} \right) \quad (69)$$

La derivada de segundo orden de la función ln-verosimilitud con respecto a  $\theta_j$  es:



$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j^2} &= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i (u_{ij} - P_{ij}) \right] \\
&= \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i u_{ij} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta_j} \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i P_{ij} \right] \\
&= - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 P_{ij} Q_{ij} \\
&= - \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 W_{ij} \tag{70}
\end{aligned}$$

Como fue el caso al estimar los parámetros del ítem, la segunda derivada del Inverosimilitud no contenía datos observados. Por tanto, los enfoques Newton-Raphson y Fischer “puntuación para los parámetros” son los mismos. Sustituyendo (70) para la  $(\partial^2 L / \partial \theta^2)$  en la ecuación (67) se obtiene (Baker, 1992):

$$\begin{aligned}
[\hat{\theta}_j]_{t+1} &= [\hat{\theta}_j]_t + \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i^2 W_{ij} \right]_t^{-1} \cdot \left[ \sum_{i=1}^n \lambda_i W_{ij} \left( \frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij} Q_{ij}} \right) \right]_t \\
[\hat{\theta}_j]_{t+1} &= [\hat{\theta}_j]_t + \left[ \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i W_{ij} \left( \frac{u_{ij} - P_{ij}}{P_{ij} Q_{ij}} \right)}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 W_{ij}} \right]_t \tag{71}
\end{aligned}$$

que sería resuelta iterativamente para el valor de  $\hat{\theta}_j$  para cada individuo.

La varianza muestral (para muestras grandes) de  $\hat{\theta}_j$  vendrá dada por:

$$S_{\hat{\theta}_j}^2 = \frac{1}{-E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j^2} \right)} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 W_{ij}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^2 W_{ij}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^2 P_{ij} Q_{ij}} \tag{72}$$

y el error estándar será:

$$ee(\hat{\theta}_j) = \sqrt{S_{\hat{\theta}_j}^2} = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^2 P_{ij} Q_{ij}}} \tag{73}$$

## Intervalo de confianza

Intervalo de confianza para  $\theta_j$  de nivel  $1-\alpha$ .

$$\begin{aligned}\hat{\theta}_j &\pm ee(\hat{\theta}_j) Z_{\alpha/2} \\ \hat{\theta}_j &\pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^2 P_{ij} Q_{ij}}} Z_{\alpha/2}\end{aligned}\quad (74)$$

### 2.6.5.5 Estimación de máxima verosimilitud conjunta de los parámetros del ítem y la habilidad

Birnbaum (1968) presentó un método simplificado para la estimación de máxima verosimilitud conjunta (joint maximum likelihood estimation JMLE) de los parámetros del ítem y la habilidad.

#### 2.6.5.5.1 Estimación de máxima verosimilitud conjunta: modelo logístico

Una muestra de  $N$  individuos son extraídos al azar de una población de individuos que poseen la variable latente, es decir, la habilidad de interés. No hay supuestos de la distribución de los individuos sobre la habilidad continua (Lord y Novick 1968, p. 375). Estos individuos responden a los  $n$  ítems de la prueba, y las respuestas son puntuadas dicotómicamente,  $u_{ij} = 0, 1$ , donde  $i$  denota el ítem  $1 \leq i \leq n$  y  $j$  denota el individuo  $1 \leq j \leq N$ . Para cada individuo, habrá un vector de respuestas a los ítems de longitud  $n$  denotado por  $(u_{1j}, u_{2j}, u_{3j}, \dots, u_{nj} | \theta_j)$ . Bajo el supuesto de independencia local, los  $u_{ij}$  son estadísticamente independientes para todos los individuos que tengan la misma habilidad. Habrá un vector para cada individuo; por tanto, habrá  $N$  vectores. La resultante una matriz  $N \times n$  de respuestas a los ítems es denotado por  $U = |u_{ij}|$ , y  $\theta$  es el vector de las  $N$  puntuaciones de la habilidad de los individuos  $(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)$ . Por tanto, la probabilidad de que la matriz  $N \times n$  de respuestas a los ítems está dada por la función de verosimilitud (Baker, 1992):

$$P[U | \theta] = \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n P_i^{u_{ij}}(\theta_j) Q_i^{1-u_{ij}}(\theta_j) \quad (75)$$

Para simplificar la notación, sea  $P_i(\theta_j) = P_{ij}$  y  $Q_i(\theta_j) = Q_{ij}$ ; entonces:

$$P[U | \theta] = \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n P_{ij}^{u_{ij}} Q_{ij}^{1-u_{ij}} \quad (76)$$

Tomando el logaritmo natural de la función de verosimilitud se obtiene:

$$L = \ln P[U | \theta] = \prod_{j=1}^N \prod_{i=1}^n [u_{ij} \ln P_{ij} + (1-u_{ij}) \ln Q_{ij}] \quad (77)$$

Ahora, los  $P_{ij}$  son funciones de la curva característica del ítem, y la desviación  $Z_{ij}$  será expresada en términos de los parámetros del ítem lineales  $\zeta_i$  y  $\lambda_i$ ,  $Z_{ij} = \zeta_i + \lambda_i \theta_j$ . Dado que los parámetros para todos los  $n$  ítems y las puntuaciones de la habilidad para todos los  $N$  individuos son desconocidos, será necesario tomar las derivadas de  $L$  con respecto a estos parámetros, igualarlos a cero, y resolver las  $2n+N$  ecuaciones simultáneas para obtener las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros desconocidos. Tomando las derivadas con respecto a los parámetros de intersección y pendiente (Baker, 1992),

$$\frac{\partial L}{\partial \zeta_i} = \sum_{j=1}^N u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \zeta_i} + \sum_{j=1}^N (1-u_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \zeta_i} \quad (78)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i} = \sum_{j=1}^N u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \lambda_i} + \sum_{j=1}^N (1-u_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \lambda_i} \quad (79)$$

y habrá  $n$  pares de tales derivadas.

Tomando la derivada del ln-verosimilitud con respecto a los parámetros de la habilidad se obtiene:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta_j} = \sum_{i=1}^n u_{ij} \frac{1}{P_{ij}} \frac{\partial P_{ij}}{\partial \theta_j} + \sum_{i=1}^n (1-u_{ij}) \frac{1}{Q_{ij}} \frac{\partial Q_{ij}}{\partial \theta_j} \quad (80)$$

y habrá una de tales derivadas para cada uno de los  $N$  parámetros de la habilidad. Las derivadas de  $P_{ij}$  y  $Q_{ij}$  con respecto a los parámetros dependerán del modelo de curva característica del ítem empleado.

La técnica iterativa de Newton-Raphson será utilizada para obtener las estimaciones de los parámetros del ítem y la habilidad. Por tanto, las derivadas parciales de segundo orden de la función de verosimilitud con respecto a los parámetros serán necesarias. De nuevo, estas pueden ser representadas simbólicamente. Las derivadas necesarias son (Baker, 1992):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \zeta_i^2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i^2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \zeta_i \partial \lambda_i} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j^2} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j \partial \zeta_i} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j \partial \lambda_i}$$

La ecuación de Newton-Raphson tomará la siguiente forma:

$$A_{t+1} = A_t - B_t^{-1} \cdot F_t \quad (81)$$

donde:

- $A$ : Vector columna de los parámetros estimados del ítem y la habilidad de longitud  $2n + N$ .
- $B$ : Matriz de las derivadas parciales de segundo orden de dimensión  $2n + N \times 2n + N$ .
- $F$ : Vector columna de las derivadas de primer orden de la función de verosimilitud, de longitud  $2n + N$ .
- $t$ : Índice de la iteración.

Dado que la dimensionalidad de todos los términos en la ecuación (81) es de orden  $2n + N$ , cuando el número de ítems o de individuos son bastante grandes, matrices y vectores de considerable tamaño resultan. Estas son más allá de las capacidades de la mayoría de las computadoras digitales, de manera que las formas de reducir la dimensionalidad deben ser encontradas. Tres supuestos se realizan para obtener ecuaciones susceptibles para una solución eficiente.

- En primer lugar, dado que cada individuo es extraído al azar de la población, el individuo es un objeto independiente. Por tanto, las derivadas cruzadas entre pares de individuos tendrán esperanzas de cero, y los

términos correspondientes pueden ser eliminados. En la parte inferior derecha la submatriz  $N \times N$  de  $B$  (donde  $B$  es la matriz inversa), los términos aparecerán sólo en la diagonal.

- En segundo lugar, no hay ninguna razón para creer que debería haber alguna covarianza entre cada individuo y cualquiera de los parámetros de un ítem dado. Por tanto, los individuos y los ítems pueden ser asumidos que son independientes, y las derivadas cruzadas correspondientes pueden ser eliminadas. Como consecuencia, la parte superior derecha la submatriz  $2n \times N$  y la parte inferior izquierda la submatriz  $N \times 2n$  de la matriz  $B$  serán llenadas de ceros. Estos dos supuestos han simplificado enormemente la estructura interna de la ecuación (81) pero no han reducido su dimensionalidad (Baker, 1992).
- En la submatriz  $2n \times 2n$  en la parte superior izquierda de la matriz  $B$  que consiste en las derivadas correspondientes a todos los pares de combinaciones de los  $2n$  parámetros de los ítems. En la parte inferior derecha, hay una submatriz diagonal  $N \times N$  que contiene un término de cada individuo. De la estructura de la matriz  $B$ , se puede observar que los ítems y los individuos han sido ortogonalizados. Pero una submatriz  $2n \times 2n$  está asociada con los parámetros de los ítems. De nuevo, cuando  $n$  es grande,  $n > 50$ , esto presenta dificultades computacionales. La simplificación final asume que los ítems son independientes. Por tanto, las derivadas de segundo orden correspondientes de la función de verosimilitud pueden ser eliminadas, dejando sólo las submatrices  $2 \times 2$  para cada ítem. Cabe señalar que, dentro de un ítem, habrá covarianza entre los parámetros de un ítem, y consecuentemente, habrá términos de las derivadas cruzadas en la matriz Hessiana (Baker, 1992).

La estructura de la matriz  $B$  es ahora muy dispersa, contiene submatrices  $2 \times 2$  a lo largo de la diagonal de la parte superior derecha de la submatriz  $2n \times 2n$ . Hay una submatriz  $2 \times 2$  para cada ítem, y la estimación de los parámetros del ítem a través de los ítems ha sido ortogonalizado. La inspección de las derivadas dentro de cada submatriz  $2 \times 2$  revela que son idénticamente las mismas derivadas de segundo orden de la función de verosimilitud como los de un solo ítem presentado

en la solución 1. Además, hay un término para cada uno de los  $N$  individuos. Si la ecuación resultante fuera resuelta, todavía implicaría la inversa de una matriz  $2n+N$ , incluso si es una matriz muy dispersa. Lo que Birnbaum hizo fue aprovechar el hecho de que tanto los ítems y los individuos habían sido ortogonalizados en esta ecuación (Baker, 1992).

Es en este punto que el método de Birnbaum (1968, p. 420) entra en juego. Propuso el uso de un procedimiento en dos etapas “ida y vuelta” para resolver las estimaciones de los  $2n+N$  parámetros.

- En la primera etapa, los parámetros del ítem son estimados suponiendo que las habilidades de los individuos son conocidas.
- En la segunda etapa, las habilidades de los individuos son estimadas suponiendo que los parámetros del ítem son conocidos.

Para iniciar el proceso, una estimación aproximada de la habilidad de cada individuo es obtenida. La puntuación bruta estandarizada en la prueba es comúnmente utilizada como el valor inicial “conocido” de la habilidad del individuo; por ejemplo, ver Wood, Wingersky y Lord (1976). Ahora, si cada ítem se considera por separado, un solo ítem, conocida la habilidad situación presentada en la solución 1. Entonces, después de que las segundas derivadas han sido reemplazadas por sus esperanzas, hay un Newton-Raphson separado o una ecuación de puntuación de Fisher para cada ítem, como se presenta a continuación, se resuelve iterativamente para los parámetros del ítem  $\hat{\zeta}_i, \hat{\lambda}_i$  (Baker, 1992).

$$\begin{bmatrix} \hat{\zeta}_i \\ \hat{\lambda}_i \end{bmatrix}_{t+1} = \begin{bmatrix} \hat{\zeta}_i \\ \hat{\lambda}_i \end{bmatrix}_t - \begin{bmatrix} E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \zeta_i^2}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \zeta_i \partial \lambda_i}\right) \\ E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i \partial \zeta_i}\right) & E\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda_i^2}\right) \end{bmatrix}_t^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial L}{\partial \zeta_i} \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_i} \end{bmatrix}_t \quad (82)$$

Uno de tales conjuntos de ecuaciones se resuelve individualmente para cada uno de los  $n$  ítems. En este punto, un conjunto de  $2n$  parámetros estimados del ítem está disponible. En la segunda etapa, estas estimaciones de los parámetros pueden ser tratadas como los “verdaderos” parámetros del ítem, y la situación de

la solución 2 para estimar la habilidad del individuo se tiene. Ahora, para cada uno de los  $N$  individuos, una ecuación de Newton-Raphson puede ser establecida para resolver la estimación de máxima verosimilitud de la habilidad. De nuevo, los datos observados en las segundas derivadas son reemplazados por sus esperanzas bajo el método de puntuación de Fisher. Estas ecuaciones son las siguientes (Baker, 1992):

$$[\hat{\theta}_j]_{t+1} = [\hat{\theta}_j]_t - \left[ E \left( \frac{\partial^2 L}{\partial \theta_j^2} \right) \right]^{-1} \cdot \left[ \frac{\partial L}{\partial \theta_j} \right] \quad (83)$$

Después que este método de estimación ha sido realizado para cada individuo, un vector de estimaciones de máxima verosimilitud  $\hat{\theta}_j$  de longitud  $N$  es obtenido.

#### 2.6.5.6 Estimación de máxima verosimilitud marginal y un algoritmo EM

La estimación de máxima verosimilitud marginal y un algoritmo de maximización de la esperanza (marginal maximum likelihood estimation and an expectation maximization algorithm MMLE/EM) será utilizado para identificar el método de Bock y Aitkin para la estimación de los parámetros del ítem.

##### 2.6.5.6.1 *Estimación de máxima verosimilitud marginal de los parámetros del ítem*

Bajo el método MMLE para la estimación de los parámetros del ítem, se supone que los individuos representan una muestra aleatoria de una población en la que la habilidad está distribuida de acuerdo a una función de densidad  $g(\theta | \zeta)$ , donde  $\zeta$  es el vector que contiene los parámetros del examinado de la distribución de la habilidad de la población. La situación ahora corresponde a un modelo de efectos mixtos ANOVA, con los ítems considerados como un efecto fijo y las habilidades un efecto aleatorio. La esencia de la solución de Bock y Lieberman (1970) es la integración sobre la distribución de la habilidad, eliminando así las molestias de los parámetros aleatorios (habilidad) de la función de verosimilitud. Por tanto, los parámetros del ítem son estimados en la distribución marginal, y la estimación de los parámetros del ítem se libera de su dependencia en la estimación de cada habilidad del individuo aunque no de su dependencia en la distribución de la

habilidad. Esto produce estimaciones consistentes de los parámetros del ítem para muestras de todos los tamaños ya que el aumento de tamaño de la muestra no requiere de la estimación de parámetros del individuo adicionales. (Baker, 1992).

En el método MMLE, el estimador puntual de la habilidad de un individuo, es decir,  $\hat{\theta}_j$ , es reemplazada por una distribución que asigna los datos de los individuos  $j$  a través de la escala de habilidad en proporción a la probabilidad de su existencia en cualquier punto dado a lo largo de la escala de habilidad. Por tanto, en lugar de un valor único  $\hat{\theta}$  para un individuo, la probabilidad es encontrar un individuo con cada posible valor  $\theta$  a lo largo de la escala de habilidad condicional en el vector de respuesta al ítem  $\underline{U}_j$ , los parámetros del ítem en  $\underline{\xi}$ , y la distribución de la población de la habilidad. En estadística Bayesiana, esta probabilidad es conocida como la probabilidad posterior. Puesto que la habilidad se supone que es continua, un gráfico de esta probabilidad como una función de la habilidad resulta en una curva continua. Esta curva representa un resumen de la información acerca de  $\theta$  contenida en los datos de respuesta al ítem observados por el individuo  $j$ . Cada vector de respuesta al ítem del individuo generaría dicha curva. La probabilidad posterior es crucial en el método MMLE porque es el vehículo para liberar el método de estimación de los parámetros del ítem de su dependencia en la estimación de cada habilidad del individuo como es el caso del método JMLE. Esto se logra empleando el siguiente teorema de Bayes para calcular toda la distribución posterior de la habilidad (Baker, 1992):

$$P(\theta_j | \underline{U}_j, \underline{\tau}, \underline{\xi}) = \frac{P(\underline{U}_j | \theta_j, \underline{\xi})g(\theta_j | \underline{\tau})}{\int P(\underline{U}_j | \theta_j, \underline{\xi})g(\theta_j | \underline{\tau})d\theta} \quad (84)$$

Suponiendo independencia local, el primer término en el numerador está dado por:

$$P(\underline{U}_j | \theta_j, \underline{\xi}) = \prod_{i=1}^n P_i(\theta_j)^{u_{ij}} Q_i(\theta_j)^{1-u_{ij}} \quad (85)$$



la cual es una función de verosimilitud. Es la probabilidad del vector de respuesta al ítem del individuo  $\underline{U}_j$  condicionada a la habilidad del individuo  $\theta_j$  y los parámetros del ítem en  $\underline{\xi}$ .

El segundo término en el numerador,  $g(\theta_j | \underline{\tau})$ , es la función de densidad de probabilidad de la habilidad en la población de individuos. Dado que la forma de esta distribución es desconocida antes de que los datos sean recolectados, se hace un juicio en cuanto a su forma. Este juicio está basado en el conocimiento de la distribución de la habilidad para el test y los individuos de interés; frecuentemente, su forma será la normal, pero podría tener otras formas. Esta distribución, con vector de parámetro  $\underline{\tau}$ , define la probabilidad relativa de los valores  $\theta_j$ . En estadística Bayesiana, es conocida como la distribución a priori y, en el presente contexto, como la distribución a priori de la habilidad. Un supuesto necesario es que la distribución a priori de la habilidad es la misma para todos los individuos. Por tanto, el producto en el numerador de la ecuación (84),  $P(\underline{U}_j | \theta_j, \underline{\xi})g(\theta_j | \underline{\tau})$ , es la distribución conjunta de  $\underline{U}_j$  y  $\theta_j$  (Baker, 1992).

En el denominador de la ecuación (84), tenemos:

$$\int P(\underline{U}_j | \theta_j, \underline{\xi})g(\theta_j | \underline{\tau})d\theta$$

Debido a que la integración es con respecto al parámetro molesto  $\theta$ , esta expresión es la probabilidad marginal (incondicional) del vector de respuesta al ítem  $\underline{U}_j$  con respecto a los parámetros del ítem y la densidad de la habilidad de la población.

En la ecuación (84), la distribución posterior de la habilidad ha sido definida a través de una aplicación del teorema de Bayes. Esta distribución de probabilidad posterior combina la información de la distribución a priori de la habilidad y la función de verosimilitud. Lo que la distribución posterior hace esencialmente es distribuir los datos, en los vectores de respuesta a los ítems, a través de la escala de habilidad en proporción a la probabilidad posterior de los individuos en cada

punto en la escala. El resultado neto es que el número esperado de individuos en cada punto a lo largo de la escala de habilidad es determinado (Baker, 1992).

#### 2.6.5.6.2 La solución de Bock y Lieberman

En la presentación de la solución de máxima verosimilitud marginal por Bock y Lieberman (1970), tanto sus similitudes y diferencias con respecto a la solución 1 y la solución JMLE será enfatizada. El modelo CCI logístico de tres parámetros con parametrización  $a$ ,  $b$ ,  $c$  será utilizado. Para simplificar la notación, sea  $P(\underline{U}_j) = \int P(\underline{U}_j | \theta_j, \xi) g(\theta_j | \tau) d\theta$ . Entonces, siguiendo Bock y Lieberman (1970), la función de verosimilitud marginal es:

$$L = \prod_j^N P(\underline{U}_j) \quad (86)$$

El logaritmo natural de  $L$  es:

$$\ln L = \sum_j^N \ln P(\underline{U}_j) \quad (87)$$

y, para encontrar la ecuación de verosimilitud marginal para  $a_i$ , tomar:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (\ln L) = 0$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_i} (\ln L) &= \sum_j^N \frac{\partial}{\partial a_i} (\ln P(\underline{U}_j)) \\ &= \sum_j^N [P(\underline{U}_j)]^{-1} \int \frac{\partial}{\partial a_i} [P(\underline{U}_j | \theta_j, \xi)] g(\theta_j | \tau) d\theta \end{aligned}$$

Utilizando la relación<sup>7</sup>:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} [P(\underline{U}_j | \theta, \xi)] = \frac{\partial}{\partial a_i} [\ln P(\underline{U}_j | \theta, \xi)] P(\underline{U}_j | \theta, \xi)$$

<sup>7</sup> Por conveniencia, el subíndice  $j$  en  $\theta$  es retirado en las siguientes expresiones.

resulta en:

$$\begin{aligned}
&= \sum_j^N [P(\underline{U}_j)]^{-1} \int \frac{\partial}{\partial a_i} [\ln P(\underline{U}_j | \theta, \xi)] P(\underline{U}_j | \theta, \xi) g(\theta | \tau) d\theta \\
&= \sum_j^N \int \frac{\partial}{\partial a_i} [\ln P(\underline{U}_j | \theta, \xi)] \left[ \frac{P(\underline{U}_j | \theta, \xi) g(\theta | \tau)}{P(\underline{U}_j)} \right] d\theta
\end{aligned}$$

Cuando el segundo término entre corchetes es definido por la ecuación (84), reemplazando este término se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (\ln L) = \sum_j^N \int \frac{\partial}{\partial a_i} [\ln P(\underline{U}_j | \theta, \xi)] [P(\theta | \underline{U}_j, \xi, \tau)] d\theta \quad (88)$$

Reemplazando  $P(\underline{U}_j | \theta, \xi)$  en el primer término entre corchetes de la ecuación (88) con la expresión de verosimilitud dada en la ecuación (85) se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_i} (\ln L) &= \sum_j^N \int \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \ln \prod_i^n P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \right] [P(\theta | \underline{U}_j, \xi, \tau)] d\theta \\
&= \sum_j^N \int \left[ \prod_i^n P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \right]^{-1} \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \prod_i^n P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \right] [P(\theta | \underline{U}_j, \xi, \tau)] d\theta
\end{aligned} \quad (89)$$

Se necesita:

$$\frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \prod_i^n P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \right] = \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta)^{u_{jh}} Q_h(\theta)^{1-u_{jh}} \right] \frac{\partial}{\partial a_i} [P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}}] \quad (90)$$

Notar que el producto es ahora sobre  $h \neq i$  en vez de  $i$ . Esto resulta de la eliminación de los términos  $P_i(\theta)$ ,  $Q_i(\theta)$  cuando se toma la derivada con respecto a  $a_i$ . Siendo  $v = a_i(\theta_j - b_i)$ , notar que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_i} [P_i(\theta)] &= (1 - c_i) [e^v (-1)(1 + e^v)^{-2} e^v (\theta - b_i) + (1 + e^v)^{-1} e^v (\theta - b_i)] \\
&= (1 - c_i) (\theta - b_i) P_i^*(\theta) Q_i^*(\theta) \\
&= K
\end{aligned} \quad (91)$$

Continuando,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \prod_i^n P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \right] \\
&= \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta)^{u_{ih}} Q_h(\theta)^{1-u_{ih}} \right] \left[ P_i(\theta)^{u_{ij}} \frac{\partial}{\partial a_i} [Q_i(\theta)^{1-u_{ij}}] + Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \frac{\partial}{\partial a_i} [P_i(\theta)^{u_{ij}}] \right] \\
&= \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta)^{u_{ih}} Q_h(\theta)^{1-u_{ih}} \right] [P_i(\theta)^{u_{ij}} (1-u_{ij}) Q_i(\theta)^{1-u_{ij}-1} (-K) + Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} u_{ij} P_i(\theta)^{u_{ij}-1} (K)]
\end{aligned} \tag{92}$$

Recopilando los términos,

$$= K \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta)^{u_{ih}} Q_h(\theta)^{1-u_{ih}} \right] [Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} u_{ij} P_i(\theta)^{u_{ij}-1} - P_i(\theta)^{u_{ij}} (1-u_{ij}) Q_i(\theta)^{1-u_{ij}-1}]$$

El segundo término entre corchetes es +1 si  $u_{ij} = 1$  y -1 cuando  $u_{ij} = 0$ ; por tanto, puede ser escrito como  $(-1)^{(u_{ij}+1)}$ . Entonces,

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial a_i} \left[ \prod_i^n P_i(\theta)^{u_{ij}} Q_i(\theta)^{1-u_{ij}} \right] \\
&= (-1)^{(u_{ij}+1)} (1-c_i) \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta)^{u_{ih}} Q_h(\theta)^{1-u_{ih}} \right] [e^v (-1)(1+e^v)^{-2} e^v (\theta - b_i) + (1+e^v)^{-1} e^v (\theta - b_i)] \\
&= (-1)^{(u_{ij}+1)} (1-c_i) \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta)^{u_{ih}} Q_h(\theta)^{1-u_{ih}} \right] (\theta - b_i) P_i^*(\theta) Q_i^*(\theta)
\end{aligned} \tag{93}$$

Sustituyendo la expresión anterior (93) en la ecuación (89) y restituyendo el subíndice  $j$  se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial a_i} (\ln L) &= \sum_j^N (-1)^{(u_{ij}+1)} (1-c_i) \int (\theta_j - b_i) \left[ \prod_i^n P_i(\theta_j)^{u_{ij}} Q_i(\theta_j)^{1-u_{ij}} \right]^{-1} \\
&\quad \times \left[ \prod_{h \neq i}^n P_h(\theta_j)^{u_{ih}} Q_h(\theta_j)^{1-u_{ih}} \right] P_i^*(\theta_j) Q_i^*(\theta_j) [P(\theta_j | \underline{U}_j, \xi, \tau)] d\theta
\end{aligned} \tag{94}$$

Esta es la ecuación de verosimilitud marginal para  $a_i$  para el modelo logístico de tres parámetros. Si el numerador y denominador son multiplicados por  $[P_i(\theta_j)^{u_{ij}} Q_i(\theta_j)^{1-u_{ij}}]$ , el operador del producto en el término entre corchetes sobre  $h \neq i$  se revierte a un término sobre  $i$ . Si, en el numerador, entonces recolecta los

$(-1)^{(u_{ij}+1)}$  y también tiene el operador del producto sobre  $i$ , la ecuación (94) puede ser escrita como sigue (Baker, 1992):

$$\frac{\partial}{\partial a_i} (\ln L) = (1 - c_i) \sum_j^N \int [u_{ij} - P_i(\theta_j)] W_{ij}(\theta_j - b_i) [P(\theta_j | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau})] d\theta = 0 \quad (95)$$

donde:

$$W_{ij} = \frac{P_i^*(\theta_j) Q_i^*(\theta_j)}{P_i(\theta_j) Q_i(\theta_j)}$$

Comprendiendo la transición de las ecuaciones (94) a (95) es facilitado por la relación siguiente:

$$\sum_i^n (-1)^{(u_{ij}+1)} \frac{1}{P_i(\theta_j)^{u_{ij}} Q_i(\theta_j)^{1-u_{ij}}} = \sum_i^n (u_{ij} - P_i(\theta_j)) \frac{1}{P_i(\theta_j) Q_i(\theta_j)}$$

Suponga que  $u_{ij} = 1$ ; entonces,

$$(-1)^2 \frac{1}{P_i(\theta_j)} = \frac{[1 - P_i(\theta_j)]}{P_i(\theta_j) Q_i(\theta_j)} = \frac{1}{P_i(\theta_j)}$$

y, cuando  $u_{ij} = 0$ ,

$$(-1)^1 \frac{1}{Q_i(\theta_j)} = \frac{[0 - P_i(\theta_j)]}{P_i(\theta_j) Q_i(\theta_j)} = \frac{1}{Q_i(\theta_j)}$$

La expresión (95) ilustra que la ecuación de verosimilitud marginal para  $a_i$  de Bock y Lieberman tiene una forma similar a la ecuación de verosimilitud no marginal (58) empleado tanto en la solución 1 como en la solución JMLE pero multiplicado por  $[P(\theta_j | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau})]$  e integrado sobre la distribución posterior.

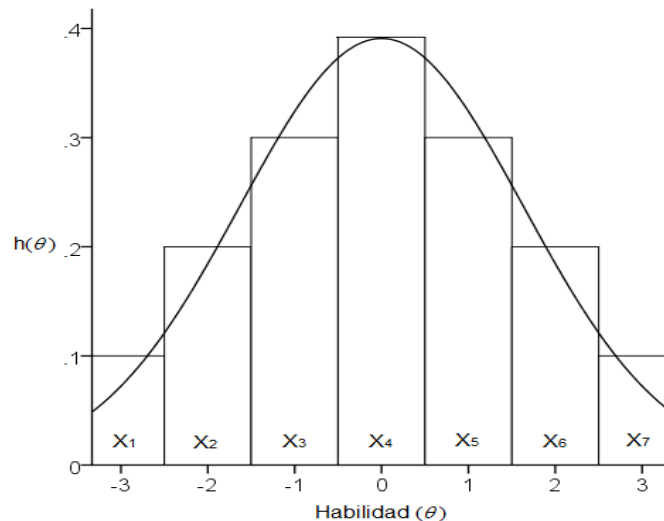
Las ecuaciones de verosimilitud para  $b_i$  y  $c_i$  son:

$$\frac{\partial}{\partial b_i} (\ln L) = -a_i (1 - c_i) \sum_j^N \int [u_{ij} - P_i(\theta_j)] W_{ij} [P(\theta_j | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau})] d\theta = 0 \quad (96)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_i} (\ln L) = (1 - c_i)^{-1} \sum_j^N \int \left[ \frac{[u_{ij} - P_i(\theta_j)]}{P_i(\theta_j)} \right] [P(\theta_j | \underline{U}_j, \xi, \tau)] d\theta = 0 \quad (97)$$

### Distribuciones de la cuadratura

La técnica conocida como cuadratura de Hermite-Gauss puede ser empleada para la aproximación de las integrales. Si  $g(\theta | \tau)$  es una distribución continua con momentos finitos, puede ser aproximado a cualquier grado deseado de precisión por una distribución discreta sobre un número finito de puntos (es decir, por un histograma). Bajo el enfoque de aproximación de la cuadratura, el problema de encontrar la suma del área bajo la curva continua es reemplazado por el problema más simple de encontrar la suma de las áreas de un número finito de rectángulos que se aproximan al área bajo la curva como se presenta en la Figura 2.13.



**Figura 2.13 Área bajo una curva.**

El punto medio de cada rectángulo en la escala de habilidad,  $X_k$  ( $k = 1, 2, \dots, q$ ), es denominado un “nodo”. Cada nodo tiene un peso asociado  $A(X_k)$  que toma en cuenta la altura de la función de densidad  $g(\theta | \tau)$  en la vecindad de  $X_k$  y la anchura de los rectángulos. Los valores de  $X_k$  y  $A(X_k)$  son encontrados resolviendo un conjunto de ecuaciones que involucran la distribución continua para ser aproximada y el número específico de nodos (ver Hildebrand, 1956, pp. 327-330). Stroud y Secrest (1966) ofrece tablas de  $X_k$  y los pesos

correspondientes  $A(X_k)$  para aproximar la curva de error de Gauss pero no la distribución normal unitaria. Bock y Lieberman (1970) indicaron que, para aproximar la distribución última, los valores presentados de  $X_k$  están multiplicados por  $\sqrt{2}$  y los valores presentados de  $A(X_k)$  están divididos por  $\sqrt{\pi}$ . No es necesario para  $g(\theta | \xi)$  por ser normal en la forma; en general, puede ser empíricamente definido (Mislevy & Bock, 1982). Finalmente, notar la similitud entre los  $q$  valores de  $X_k$  y la noción de niveles de habilidad conocidos  $\theta_j$ . Esta relación es vital para establecer el vínculo entre la solución marginal de Bock y Lieberman (1970) y la (no marginalizada) solución 1 (Baker, 1992).

Sustituyendo la aproximación de la cuadratura para la integral en la ecuación (95) resulta en:

$$a_i : (1 - c_i) \sum_k^q \sum_j^N [u_{ij} - P_i(X_k)] W_{ik} (X_k - b_i) [P(X_k | \underline{U}_j, \xi, \xi)] = 0 \quad (98)$$

donde  $W_{ik} = P_i^*(X_k) Q_i^*(X_k) / P_i(X_k) Q_i(X_k)$  es el término de ponderación y los  $\theta_j$  han sido reemplazados por  $X_k$ . La forma de la cuadratura de la ecuación MMLE de Bock y Lieberman para el parámetro de dificultad  $b_i$  puede ser escrita por inspección de la ecuación (96):

$$b_i : (1 - c_i) (-a_i) \sum_k^q \sum_j^N [u_{ij} - P_i(X_k)] W_{ik} [P(X_k | \underline{U}_j, \xi, \xi)] = 0 \quad (99)$$

y que para  $c_i$  puede ser escrita de la ecuación (97):

$$c_i : (1 - c_i)^{-1} \sum_k^q \sum_j^N \frac{[u_{ij} - P_i(X_k)]}{P_i(X_k)} [P(X_k | \underline{U}_j, \xi, \xi)] = 0 \quad (100)$$

Entonces, las expresiones (98), (99) y (100) representan la forma de la cuadratura de las ecuaciones de verosimilitud marginales para el modelo logístico de tres parámetros. Bajo el método de Bock y Lieberman (1970), la técnica Newton-Raphson sería empleada para estimar los  $3n$  parámetros de los ítems de un test simultáneamente. Como fue el caso en JMLE, los valores observados de los  $u_{ij}$

en las segundas derivadas de la función ln-verosimilitud fueron reemplazadas por sus valores esperados. Por tanto, el método de puntuación de Fischer fue realmente utilizado. Sin embargo, el método es computacionalmente poco atractivo porque requiere la inversa de una matriz de información  $3n \times 3n$ . Debido a esto, los métodos de estimación fueron limitados a un número muy pequeño de ítems. Además, los parámetros estimados del ítem no están “libres de la muestra”, ya que el método requiere de la distribución de la población de la habilidad en una muestra conocida de antemano (Baker, 1992).

### 2.6.5.6.3 La solución de Bock y Aitkin

Una reformulación de las ecuaciones de verosimilitud de Bock y Lieberman por Bock y Aitkin (1981) obtienen una solución que es computacionalmente factible y, bajo la suposición de que la distribución de la población es conocida o es simultáneamente estimada con la especificación correcta, produce parámetros estimados del ítem consistentes. Como fue el caso en el método JMLE de Birnbaum, Bock y Aitkin suponen que los ítems son independientes, que los individuos son independientes, y que los ítems y los individuos son independientes. Consecuentemente, los parámetros del ítem pueden ser estimados en un ítem único en una base de tiempo, con la habilidad estimada de los individuos en base a cada individuo. La reformulación resulta en las ecuaciones de verosimilitud para un ítem que tienen la misma forma general que las ecuaciones de verosimilitud de la solución 1. Para enlazar la solución MMLE y la solución 1 más formalmente, comenzamos en la ecuación de verosimilitud para  $a_i$  (98) multiplicando por el término  $P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau})$  y distribuyendo la sumatoria sobre el operador  $j$ . Esto resulta en:

$$a_i : (1 - c_i) \sum_k^q (X_k - b_i) \left[ \sum_j^N u_{ij} P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau}) - P_i(X_k) \sum_j^N P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau}) \right] W_{ik} = 0 \quad (101)$$

Poniendo la ecuación (84) en la forma de la cuadratura se obtiene:

$$P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau}) = \frac{\prod_i^n P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} A(X_k)}{\sum_k^q \prod_i^n P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} A(X_k)} \quad (102)$$



la cual es la probabilidad posterior de un individuo teniendo el nivel de habilidad  $X_k$ , y:

$$P_i(X_k) = c_i + (1 - c_i) \frac{e^{a_i(X_k - b_i)}}{1 + e^{a_i(X_k - b_i)}}$$

Por tanto,  $Q_i(X_k) = 1 - P_i(X_k)$ . Entonces, del segundo elemento dentro del término entre corchetes de la ecuación (101), el siguiente término puede ser definido:

$$\bar{f}_{ik} = \sum_j^N P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau}) = \sum_j^N \left[ \frac{\prod_i^n P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} A(X_k)}{\sum_k^q \prod_i^n P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} A(X_k)} \right] \quad (103)$$

Notar que esto es simplemente la suma sobre los  $N$  individuos de la probabilidad posterior de un individuo que tiene una habilidad de  $X_k$ . El primer elemento dentro del término entre corchetes de la ecuación (101) se obtiene:

$$\bar{r}_{ik} = \sum_j^N u_{ij} P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau}) = \sum_j^N \left[ \frac{\prod_i^n u_{ij} P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} A(X_k)}{\sum_k^q \prod_i^n P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} A(X_k)} \right] \quad (104)$$

Siguiendo Bock y Aitkin, sea:

$$L(X_k) = \prod_i^n P_i(X_k)^{u_{ij}} Q_i(X_k)^{1-u_{ij}} \quad (105)$$

representa la forma de la cuadratura de la probabilidad condicional de  $\underline{U}_j$ , dado  $\theta = X_k$  y los parámetros del ítem. Entonces la forma de la cuadratura de la expresión (102) puede ser escrita:

$$P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau}) = \frac{L(X_k)A(X_k)}{\sum_k^q L(X_k)A(X_k)} \quad (106)$$

Las expresiones para  $\bar{f}_{ik}$  y  $\bar{r}_{ik}$  entonces pueden ser escritas como:

$$\bar{f}_{ik} = \sum_j^N \left[ \frac{L(X_k)A(X_k)}{\sum_k^q L(X_k)A(X_k)} \right] \quad (107)$$

$$\bar{r}_{ik} = \sum_j^N \left[ \frac{u_{ij}L(X_k)A(X_k)}{\sum_k^q L(X_k)A(X_k)} \right] \quad (108)$$

Los términos  $\bar{r}_{ik}$  y  $\bar{f}_{ik}$  necesitan ser examinados un poco más cercanamente. Los  $\bar{f}_{ik}$  son el número de individuos en una población de tamaño  $N$  esperando que tenga una puntuación de la habilidad  $X_k$ . Esto resulta de la distribución de los datos de un individuo sobre los  $q$  nodos de la cuadratura en proporción a las probabilidades posteriores de hallarse en cada nodo. Los  $\bar{r}_{ik}$  son el número de individuos en la población en la habilidad  $X_k$  esperando que respondan correctamente al ítem. Notar que las ecuaciones (107) y (108) son las mismas a excepción de la  $u_{ij}$  que aparece en la ecuación (108). Dado que este término es 1 o 0, sólo los elementos correspondientes a las respuestas correctas son acumulados; por tanto, la frecuencia de la respuesta correcta en  $X_k$  es obtenida a través de la ecuación (108) (Baker, 1992).

Con las cantidades  $\bar{r}_{ik}$  y  $\bar{f}_{ik}$  en la mano, la forma de la cuadratura de las ecuaciones de verosimilitud marginales pueden ser escritas como:

$$a_i : (1 - c_i) \sum_k^q (X_k - b_i) [\bar{r}_{ik} - \bar{f}_{ik} P_i(X_k)] W_{ik} = 0 \quad (109)$$

$$b_i : (-a_i)(1 - c_i) \sum_k^q [\bar{r}_{ik} - \bar{f}_{ik} P_i(X_k)] W_{ik} = 0 \quad (110)$$

$$c_i : (1 - c_i)^{-1} \sum_k^q \frac{[\bar{r}_{ik} - \bar{f}_{ik} P_i(X_k)]}{P_i(X_k)} = 0 \quad (111)$$

Estas ecuaciones son idénticas en forma a las presentadas para la solución 1, en realidad, son las ecuaciones de verosimilitud para un análisis probit para el ítem  $i$

en la que  $X_k$  es la variable independiente. La diferencia es que, en la solución 1, el número total de individuos  $f_{ik}$  responden en un nivel de habilidad ( $\theta_k$ ) y el número que presenta la respuesta correcta  $r_{ik}$  son conocidos de los datos. En la solución MMLE, estas cantidades son desconocidas, y el número esperado de individuos que responden al ítem  $i$  y el número esperado de respuestas correctas son sustituidos por estas cantidades desconocidas en cada nodo de la cuadratura ( $X_k$ ). En la literatura de la TRI  $\bar{f}_{ik}$  y  $\bar{r}_{ik}$  son conocidos como los “datos artificiales” ya que son creados a través de las ecuaciones (107) y (108). Como fue el caso con la solución 1, los parámetros del ítem de un ítem serán estimados utilizando el procedimiento iterativo de Newton-Raphson/Fisher. Dado que la estructura de las segundas y cruzadas derivadas de los parámetros del ítem son las mismas que las que se derivan en la solución 1. Típicamente, las estimaciones iniciales de los parámetros del ítem basados en las ecuaciones son utilizadas para iniciar el proceso iterativo. En cada iteración, se realizan ajustes a los parámetros estimados del ítem hasta que un criterio de convergencia adecuado se cumpla. En la etapa de la estimación de los parámetros del ítem del método JMLE, los  $f_{ik}$  y  $r_{ik}$  son conocidos. Sin embargo, bajo el método MMLE, los valores de  $\bar{f}_{ik}$  y  $\bar{r}_{ik}$  dependen de los valores de los parámetros estimados del ítem. Pero las ecuaciones (109), (110) y (111) no hacen ninguna provisión para esta dependencia. Consecuentemente, un método necesita ser establecido en la que tanto los “datos artificiales” y los parámetros estimados del ítem pueden ser obtenidos iterativamente. El método adoptado por Bock y Aitkin (1981) fue emplear el algoritmo EM de Dempster, Laird y Rubin (1977).

### **Algoritmo EM**

El algoritmo Expectation Maximization (EM) es un procedimiento iterativo para encontrar las estimaciones de máxima verosimilitud de los parámetros de los modelos de probabilidad en presencia de variables aleatorias no observadas. La E significa el paso de la esperanza y la M el paso de la maximización.

En el caso típico de TRI, se desea encontrar estimaciones de los parámetros del ítem en presencia de una variable aleatoria no observable ( $\theta$ ). Para hacer

inferencias sobre  $\theta$ , alguna representación observable basado en las respuestas a los ítems ( $\underline{U}$ ) es utilizado. Cuando el algoritmo EM es formado como una extensión del principio de información faltante de Orchard y Woodbury (1972),  $(\underline{U}, \theta)$  es considerado como los datos no observados (completos) y  $\underline{U}$  los datos observados (incompletos). Sea  $f(\underline{U}, \theta | \underline{\xi})$  que representa la función de densidad de probabilidad conjunta de los datos completos  $(\underline{U}, \theta)$ , donde  $\underline{\xi}$  representa los parámetros del ítem a ser estimados. Dada la matriz de parámetros del ítem provisional en el p-ésimo ciclo,  $\underline{\xi}^{p+1}$  es calculado mediante la maximización de la esperanza posterior  $[E[\ln f(\underline{U}, \theta | \underline{\xi}) | \underline{U}, \underline{\xi}^p]]$  con respecto a  $\underline{\xi}$ . Este proceso se repite hasta que un criterio de convergencia se cumpla. Los dos pasos generales del algoritmo son:

- Paso E: Calcular  $E[\ln f(\underline{U}, \theta | \underline{\xi}) | \underline{U}, \underline{\xi}^p]$   
Paso M: Elegir  $\underline{\xi}^{p+1}$  tal que la esperanza posterior es maximizada (112)

Para su aplicación a la TRI, notar que, para los modelos de TRI logísticos de dos y tres parámetros, la distribución de  $f(\underline{U}, \theta | \underline{\xi})$  es desconocido y no es un miembro de la familia exponencial y, por tanto, los estadísticos suficientes no son válidos. Como sustituto, los valores esperados (es decir, las esperanzas posteriores) de  $\ln f(\underline{U}, \theta | \underline{\xi})$ , condicionada en alguna representación observada de  $\theta$ , son tomados y estas cantidades tratadas como si fueran conocidas (paso E). Estos valores esperados son utilizados para encontrar los parámetros estimados del ítem maximizando el ln de la función de verosimilitud (paso M) empleando los métodos de máxima verosimilitud. Los detalles de este procedimiento para la solución de Bock y Aitkin siguen a continuación (Baker, 1992).

Se parte del supuesto de que la habilidad es restringida a un conjunto finito de valores  $\theta_k$ , con probabilidades  $\vartheta_1, \dots, \vartheta_k, \dots, \vartheta_q$ . Además, sea  $\underline{f} = (f_{i1}, \dots, f_{ik}, \dots, f_{iq})'$  que representa el número de individuos en cada uno de los  $q$  valores de habilidad para el i-ésimo ítem y  $\underline{r} = (r_{i1}, \dots, r_{ik}, \dots, r_{iq})'$  el número de respuestas correctas en

cada uno de los  $q$  valores de habilidad para el  $i$ -ésimo ítem. Si las habilidades de los  $N$  individuos son muestreados aleatoriamente de la distribución anterior, la probabilidad conjunta de que los  $f_{i1}, \dots, f_{ik}, \dots, f_{iq}$  individuos tendrán niveles de habilidad  $\theta_1, \dots, \theta_k, \dots, \theta_q$  está dada por la función multinomial:

$$\left[ \frac{f!}{f_{i1}! \cdots f_{ik}! \cdots f_{iq}!} \right] \prod_k^q \mathcal{G}_k^{f_{ik}} \quad (113)$$

Dado  $f_{ik}$  y  $\theta_k$ , la probabilidad del vector de respuesta  $\underline{r}$  es:

$$\prod_i^n \binom{f_{ik}}{r_{ik}} P_i(\theta_k)^{r_{ik}} Q_i(\theta_k)^{f_{ik}-r_{ik}} \quad (114)$$

y la probabilidad conjunta de los vectores  $f$  y  $r$  es:

$$\prod_k^q \prod_i^n \binom{f_{ik}}{r_{ik}} P_i(\theta_k)^{r_{ik}} Q_i(\theta_k)^{f_{ik}-r_{ik}} \left[ \frac{f!}{f_{i1}! \cdots f_{ik}! \cdots f_{iq}!} \right] \prod_k^q \mathcal{G}_k^{f_{ik}} \quad (115)$$

Del criterio de factorización (ver Halmos y Savage, 1949), puede verse que  $(\underline{f}, \underline{r})$  es el estadístico suficiente para los datos completos  $(\underline{U}, \theta)$ .

Ignorando los términos constantes, la función ln-verosimilitud para los datos completos puede ser escrita en una forma similar a la solución 1:

$$\ln(L) = \sum_k^q \sum_i^n \left[ r_{ik} \ln P_i(\theta_k) + (f_{ik} - r_{ik}) \ln Q_i(\theta_k) + \sum_k^q f_{ik} \ln \mathcal{G}_k \right] \quad (116)$$

Aquí  $(\underline{f}, \underline{r})$  es inobservable pero, tomando la esperanza posterior de la función ln-verosimilitud, dado  $\underline{\xi}$ , se obtiene:

$$E[\ln L] = \sum_k^q \sum_i^n \left[ E(r_{ik} | \underline{U}, \underline{\xi}) \ln P_i(\theta_k) + E[(f_{ik} - r_{ik}) | \underline{U}, \underline{\xi}] \ln Q_i(\theta_k) + \sum_k^q E(f_{ik} | \underline{U}) \ln \mathcal{G}_k \right] \quad (117)$$

La última suma en la ecuación (117) puede ser ignorado ya que no depende de los  $\underline{\xi}$ . Los términos restantes son iguales a la suma de las funciones ln-

verosimilitud encontrado en la solución 1 cuando  $(\underline{f}, \underline{r})$  es reemplazado por  $E(\underline{f}, \underline{r} | \underline{U}, \underline{\xi})$ , que son estadísticos suficientes de dimensión finita. Maximizando la ecuación (117) es equivalente a maximizar la expresión del paso E en la ecuación (112) y, para una determinada  $g(\theta | \underline{\tau})$  y el modelo de TRI, proporciona parámetros estimados del ítem que resuelven las ecuaciones de máxima verosimilitud marginales (109), (110) y (111) (Bock y Aitkin, 1981). Dado que los ítems se suponen que son independientes, las segundas derivadas cruzadas de los diferentes ítems son cero en el paso M, y la maximización de  $E(\ln L)$  se realiza para cada ítem por separado (Baker, 1992).

### **Utilización de EM en el método de estimación de los parámetros del ítem**

La solución de Bock y Aitkin para la estimación de máxima verosimilitud marginal de los parámetros del ítem fue implementada a través de un algoritmo EM de la siguiente manera (Baker, 1992):

a. El paso de la esperanza (E):

1. Utilizar la forma de la cuadratura dada en la expresión (105) y los parámetros estimados del ítem provisionales para calcular la probabilidad de cada vector de puntuación del ítem del individuo en cada uno de los  $q$  nodos de la cuadratura.
2. Utilizar la expresión (106) y los pesos de la cuadratura  $A(X_k)$  en cada uno de los  $q$  nodos para calcular la probabilidad posterior de que la habilidad del  $j$ -ésimo individuo es  $X_k$ .
3. Utilizar las ecuaciones (107) y (108) para generar  $\bar{f}_{ik}$  y  $\bar{r}_{ik}$ , el número esperado de individuos que intentan el ítem  $i$  y el número esperado de respuestas correctas para ese ítem en cada uno de los  $q$  nodos de habilidad.

b. El paso de la maximización (M):

Resolver las ecuaciones de verosimilitud marginales (109), (110) y (111) para los parámetros estimados del ítem utilizando los “datos artificiales”  $\bar{f}_{ik}$  y  $\bar{r}_{ik}$ . Debido a que estos valores dependen del término  $P(X_k | \underline{U}_j, \underline{\xi}, \underline{\tau})$  que, a su vez, dependen de los parámetros del ítem desconocidos, las ecuaciones de

verosimilitud marginales son implícitas y deben resolverse iterativamente (por ejemplo, a través de la serie de Taylor y el procedimiento de Newton-Raphson/Fisher).

- c. Si la probabilidad total es igual a la del ciclo anterior, el proceso de estimación del ítem converge y el proceso termina. Caso contrario, los pasos a y b se repiten.

Maximizando las ecuaciones de verosimilitud marginales es, con respecto a los resultados de los parámetros estimados del ítem, equivalente a maximizar la esperanza posterior de la expresión (117). El número esperado de intentos ( $\bar{f}_{ik}$ ) y el número esperado de respuestas correctas en cada nivel de habilidad ( $\bar{r}_{ik}$ ), calculado en el paso 3, sirven como valores de la E. La función de verosimilitud es entonces maximizada (paso M) en el paso b utilizando estos valores, que están basados en los datos incompletos fingiendo que están basados en los datos completos (es decir, como si fueran conocidos). Esto lleva a un proceso iterativo en el que los pasos E y M se repiten hasta que un criterio de convergencia se cumpla.

### 2.6.5.7 Número de parámetros a estimar

El número de parámetros a estimar se calcula mediante la fórmula (Bandeira, 2005):

$$\text{Número de parámetros a estimar} = pn + N \quad (118)$$

donde:

$p$ : Número de parámetros del modelo de TRI elegido.

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$N$ : Número de individuos de la prueba.

Según el modelo logístico de TRI elegido, se calcula con la fórmula (118) el número de parámetros a estimar, y se presenta en la Tabla 2.9 (Montero, 2000).

Modelo logístico	Parámetros a estimar	Número de parámetros a estimar	Número total de parámetros a estimar
Un parámetro	$b$ : Dificultad	$n$	$n + N$
	$\theta$ : Habilidad	$N$	
Dos parámetros	$a$ : Discriminación	$n$	$2n + N$

	$b$ : Dificultad	$n$	
	$\theta$ : Habilidad	$N$	
Tres parámetros	$a$ : Discriminación	$n$	$3n + N$
	$b$ : Dificultad	$n$	
	$c$ : Azar	$n$	
	$\theta$ : Habilidad	$N$	

**Tabla 2.9 Número de parámetros a estimar.**

## 2.6.6 AJUSTE DEL MODELO

En el sexto paso, hay que comprobar que el modelo con los parámetros estimados se ajusta a los datos observados generados por los individuos al responder a los ítems.

Existen varios procedimientos estadísticos para la comprobación del ajuste del modelo, en este caso se realizará el ajuste mediante la prueba chi-cuadrado.

### 2.6.6.1 Prueba chi-cuadrado

Las técnicas basadas en chi-cuadrado consisten en comparar los valores pronosticados por el modelo con los valores observados. Para ello se divide el rango de la variable de criterio  $\theta$  en varios grupos o categorías y se comparan los valores pronosticados y los valores observados para cada grupo. En el caso de ajuste perfecto, ambos valores coincidirán en todos los grupos; a medida que aumentan las diferencias, el ajuste es peor. Lo que nos indica la chi-cuadrado es si esas diferencias son estadísticamente significativas (Muñiz, 1997).

#### 2.6.6.1.1 Para un ítem determinado

Prueba de hipótesis al nivel de significación  $\alpha$ .

- 1) Hipótesis nula.  $H_0$  : El modelo se ajusta a los datos para un ítem.
- 2) Hipótesis alternativa.  $H_1$  : El modelo no se ajusta a los datos para un ítem.
- 3) Estadístico de prueba.

El estadístico  $Q_1$  de Yen (1981) es aplicable a cualquiera de los tres modelos logísticos de TRI (Muñiz, 1997):



$$Q_1 = \sum_{j=1}^k \frac{f_{ij}[P_i(\theta_j) - p_i(\theta_j)]^2}{P_i(\theta_j)[1 - P_i(\theta_j)]} \quad i = 1, \dots, n \quad (119)$$

donde:

$k$ : Número de grupos de habilidad en los que se divide  $\theta$ .

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$\theta_j$ : Habilidad del grupo  $j$ .

$f_{ij}$ : Número de individuos del grupo  $j$  del ítem  $i$ .

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el grupo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$  (valor del modelo de la CCI utilizando los parámetros estimados del ítem).

$p_i(\theta_j)$ : Proporción observada de individuos del grupo  $j$  que acierta el ítem  $i$ .

$Q_1$ : Se distribuye según  $\chi^2_{1-\alpha}(k)$  con  $1-\alpha$  nivel de confianza y  $k$  grados de libertad.

La proporción observada de individuos del grupo  $j$  que acierta el ítem  $i$ , se calcula mediante la fórmula (Baker, 2001):

$$p_i(\theta_j) = \frac{r_{ij}}{f_{ij}} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, k \\ i = 1, \dots, n \end{array} \quad (120)$$

donde:

$r_{ij}$ : Número de individuos del grupo  $j$  que aciertan el ítem  $i$ .

$f_{ij}$ : Número de individuos del grupo  $j$  del ítem  $i$ .

$k$ : Número de grupos de habilidad en los que se divide  $\theta$ .

$n$ : Número de ítems de la prueba.

#### 4) Región de rechazo.

Rechazo  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$  si:

$$Q_1 < -\chi^2_{1-\alpha}(k) \quad \text{o} \quad Q_1 > \chi^2_{1-\alpha}(k) \quad (121)$$

##### 2.6.6.1.2 Para $n$ ítems

Prueba de hipótesis al nivel de significación  $\alpha$ .

1) Hipótesis nula.  $H_0$ : El modelo se ajusta a los datos.

2) Hipótesis alternativa.  $H_1$ : El modelo no se ajusta a los datos.

3) Estadístico de prueba.

Wright y Panchepakesan (1969) proponen un estadístico para el ajuste del modelo para los  $n$  ítems del test, dado por (Muñiz, 1997):

$$Q_{2T} = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} [P_i(\theta_j) - p_i(\theta_j)]^2}{P_i(\theta_j) [1 - P_i(\theta_j)]} \quad (122)$$

donde:

$k$ : Número de grupos de habilidad en los que se divide  $\theta$ .

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$\theta_j$ : Habilidad del grupo  $j$ .

$f_{ij}$ : Número de individuos del grupo  $j$  del ítem  $i$ .

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el grupo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$  (valor del modelo de la CCI utilizando los parámetros estimados del ítem).

$p_i(\theta_j)$ : Proporción observada de individuos del grupo  $j$  que acierta el ítem  $i$ .

$Q_{2T}$ : Se distribuye según  $\chi^2_{1-\alpha}(k+1)(n-1)$  con  $1-\alpha$  nivel de confianza y  $(k+1)(n-1)$  grados de libertad.

4) Región de rechazo.

Rechazo  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$  si:

$$Q_{2T} < -\chi^2_{1-\alpha}(k+1)(n-1) \quad \text{o} \quad Q_{2T} > \chi^2_{1-\alpha}(k+1)(n-1) \quad (123)$$

## 2.7 CURVA CARACTERÍSTICA DEL TEST

### 2.7.1 DEFINICIÓN

La curva característica del test (CCT) establece una relación entre las puntuaciones de la escala  $\theta$  y las puntuaciones verdaderas en el test (Muñiz, 1997).

La curva característica del test (CCT) es la suma de las curvas características de los ítems (CCI) que componen el test: si a cada habilidad  $\theta$  se suman los valores de  $P_i(\theta_j)$  de cada ítem se obtiene la CCT, se define como (Muñiz, 1997):

$$CCT = \sum_{i=1}^n P_i(\theta_j) \quad j = 1, \dots, N \quad (124)$$

donde:

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el individuo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$ .

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$N$ : Número de individuos de la prueba.

En la Figura 2.14 se presenta la curva característica del test (CCT) formado por los cien ítems de un test, se representa en el eje de las abscisas las puntuaciones de la escala  $\theta$ , cuyo rango es  $-2,5 \leq \theta_j \leq 2,5$ , y en el eje de las ordenadas las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) (es igual al valor de la CCT), cuyo rango es  $0 \leq V_j \leq n$ .

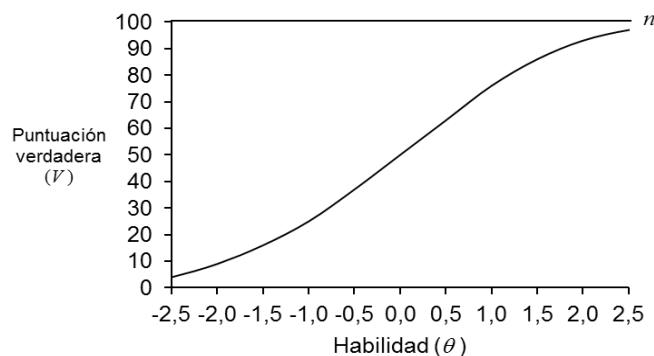


Figura 2.14 Curva característica del test.

### Forma de la CCT (Baker, 2001)

La forma general de la CCT es una función monótona creciente; en algunos casos, tiene una forma de “S suavizada” similar a una CCI; en otros casos, incrementará suavemente, pues tiene una meseta pequeña antes de incrementar nuevamente; sin embargo, en todos los casos, será asintótico para un valor de  $n$  en el límite superior. La forma de la CCT depende de algunas causas:

- Número de ítems.
- Modelo de la CCI utilizado.
- Valores de los parámetros del ítem.

### Interpretación de la CCT (Baker, 2001)

- La habilidad correspondiente a la *puntuación verdadera media* (el número de ítems en el test dividido por 2, es decir,  $n/2$ ) localiza la dificultad del test a lo largo de la escala de habilidad.
- La pendiente general de la CCT está relacionada de cómo el valor de la puntuación verdadera depende de la habilidad; en algunos tests, la CCT es casi una línea recta en la mayor parte de la escala de habilidad; sin embargo, en la mayoría de los tests, la CCT es no lineal y la pendiente es sólo descriptiva para un reducido rango de niveles de habilidad.
- Dado que no existe una fórmula explícita para la CCT, no hay parámetros para la curva. La puntuación verdadera media define la dificultad del test en términos numéricos, pero la pendiente de la CCT es mejor definida en términos verbales.
- Cuando un modelo de uno o dos parámetros es utilizado para los  $n$  ítems en un test, implica que, una puntuación verdadera de cero corresponde a una habilidad de menos infinito, y una puntuación verdadera de  $n$  corresponde a una habilidad de más infinito.

#### 2.7.2 PUNTUACIONES VERDADERAS EN EL TEST

La puntuación verdadera en el test de un individuo al que se ha estimado mediante un modelo de TRI una determinada puntuación  $\theta_j$ , viene estimada por la suma de las probabilidades  $P_i(\theta_j)$  dadas por las curvas características de los ítems que componen el test, se define como (Muñiz, 1997):

$$V_j = \sum_{i=1}^n P_i(\theta_j) \quad j=1, \dots, N \quad (125)$$

donde:

$V_j$ : Puntuación verdadera en el test del individuo  $j$  (es igual al valor de la CCT).

$P_i(\theta_j)$ : Probabilidad que el individuo  $j$  con habilidad  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$ .

$n$ : Número de ítems de la prueba.

$N$ : Número de individuos de la prueba.

Las puntuaciones verdaderas en el test estimadas pueden ser muy útiles para la interpretación de los resultados, pues vienen expresadas en la misma escala que las puntuaciones observadas, mientras que los valores de  $\theta$  constituyen otra escala, precisamente una escala que la CCT transforma en puntuaciones verdaderas (Muñiz, 1997).

### **Error de medida**

Las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) como ocurre en cualquier proceso de estimación, no coincidirán siempre con las puntuaciones observadas ( $T_j$ ), se define el *error de medida* como la diferencia entre ambas:

$$e_j = |T_j - V_j| \quad j = 1, \dots, N \quad (126)$$

donde:

$e_j$ : Error de medida del individuo  $j$ .

$T_j$ : Puntuación observada en el test del individuo  $j$ .

$V_j$ : Puntuación verdadera en el test del individuo  $j$ .

$N$ : Número de individuos de la prueba.

## CAPÍTULO 3

### APLICACIÓN

En el tercer capítulo se realiza el enfoque práctico de este trabajo, contiene la aplicación que se ha realizado sobre datos reales utilizando la metodología expuesta en el segundo capítulo. En la primera parte se describe la base de datos de la PAAP: individuos y variables, en la segunda se valida la base de datos de la PAAP: individuos y variables, en la tercera se realiza el análisis descriptivo: temarios, respuestas a los ítems y variable de respuesta, y finalmente en la cuarta parte se desarrolla la comprobación del modelo de Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI).

#### 3.1 DESCRIPCIÓN DE LA BASE DE DATOS

Se considera para esta aplicación la base de datos de la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP) correspondiente al Semestre 2012-A del período Enero-Junio de 2012 tomada el 29 de octubre de 2011 por la Unidad de Admisión (UA) de la Escuela Politécnica Nacional (EPN), a los aspirantes a ingresar al Propedéutico de Ingeniería y Ciencias, y Propedéutico de Empresarial y Económicas<sup>8</sup>.

Luego de ser leído electrónicamente mediante un lector óptico las hojas de respuestas (Anexo E) de la evaluación de cada uno de los individuos se obtiene la base de datos de la PAAP. Esta base de datos pasa por un proceso de validación mediante el cual se obtiene las respuestas de 2.977 individuos a una prueba de 100 ítems, es decir, se incluyen un total de 297.700 observaciones (Anexo F).

##### 3.1.1 DESCRIPCIÓN DE LOS INDIVIDUOS

Cada fila representa un individuo, denotado por  $j$  (Hintze, 2007).

---

<sup>8</sup> Los datos serán manejados con la confidencialidad y reserva del caso.

La base de datos de la PAAP tiene 2.977 filas que representan a cada uno de los individuos y contiene: su identificación y sus respuestas a los ítems.

### 3.1.2 DESCRIPCIÓN DE LAS VARIABLES

Los tipos de variables de la base de datos de la PAAP son:

- Variables de identificación
- Variables de los ítems
- Variable de respuesta

#### 3.1.2.1 Variables de identificación

Son variables opcionales que contienen las etiquetas de las filas que son utilizadas para etiquetar varios reportes (Hintze, 2007).

La base de datos de la PAAP tiene 5 variables de identificación y son las siguientes:

- **Individuo.** Indica la identificación del individuo  $j$  y están etiquetados desde el Individuo0001 hasta el Individuo2977.
- **Bachillerato.** Indica el tipo de título de bachillerato del individuo  $j$ , con las categorías: Administración y contabilidad, Bachiller técnico, Ciencias, Ciencias sociales, Físico matemático, Humanidades modernas, Informática, Polivalente, Químico biólogo, Secretariado y Tecnólogo eléctrico.
- **Certificado.** Indica el tipo de certificado del individuo  $j$ , con las categorías: sin certificado, abanderado, mejor egresado y cambio universidad.
- **Propedéutico.** Indica el tipo de propedéutico que aspira el individuo  $j$ , con las categorías: Propedéutico de Ingeniería y Ciencias, y Propedéutico de Empresarial y Económicas.
- **Próximo.** Indica el semestre que aspira ingresar el individuo  $j$ , con las categorías: si el individuo no registra ningún dato significa que aspira ingresar al semestre inmediato, de lo contrario si registra la letra "S" significa que aspira ingresar al semestre siguiente.

### 3.1.2.2 Variables de los ítems

Son las variables que contienen las respuestas de cada individuo a las preguntas de la prueba, cada variable representa una pregunta denominada ítem, denotada por  $i$  (Hintze, 2007).

La base de datos de la PAAP tiene 100 variables de los ítems, etiquetados desde el Item001 hasta el Item100 y contienen las respuestas del individuo  $j$  al ítem  $i$ , e incluyen 6 categorías de respuesta: 1 (A), 2 (B), 3 (C), 4 (D), 5 (E), -1 (OTROS).

### 3.1.2.3 Variable de respuesta

Es la variable que contiene una lista de las respuestas correctas, las respuestas corresponden a las preguntas por posición, es decir, el valor en la fila uno es la respuesta correcta para la variable uno, el valor en la fila dos es la respuesta correcta para la variable dos, y así sucesivamente (Hintze, 2007).

La base de datos de la PAAP tiene una variable de respuesta, etiquetada como Respuesta y contiene una lista de 100 respuestas correctas.

## 3.2 VALIDACIÓN DE LA BASE DE DATOS

El proceso de admisión a la EPN empieza con la inscripción de los aspirantes al Propedéutico de Ingeniería y Ciencias, o al Propedéutico de Empresarial y Económicas (Tabla 3.1).

Certificado	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias		Propedéutico de Empresarial y Económicas		Total	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Sin certificado	3.580	98,4	491	97,2	4.071	98,2
Abanderado	33	0,9	7	1,4	40	1,0
Mejor egresado	23	0,6	7	1,4	30	0,7
Cambio universidad	3	0,1	0	0,0	3	0,1
<b>Total</b>	<b>3.639</b>	<b>100,0</b>	<b>505</b>	<b>100,0</b>	<b>4.144</b>	<b>100,0</b>

Tabla 3.1 Número de individuos inscritos.

En la tabla anterior se observa que en total los aspirantes sin certificado presentan el mayor porcentaje de inscritos con el 98,2%, mientras que, los



aspirantes de cambio de universidad presentan el menor porcentaje de inscritos con el 0,1%.

La validación se efectúa a la base de datos de los aspirantes que se presentaron a rendir la PAAP. En el proceso de validación se trata de detectar los errores e inconsistencias, a fin de obtener una base depurada y de esta manera conseguir el modelo que mejor se ajuste a los datos. A continuación se realiza la validación de los individuos y las variables.

### 3.2.1 VALIDACIÓN DE LOS INDIVIDUOS

En el proceso de validación de los individuos de la base de datos de la PAAP, se consideran dos tipos de individuos:

**Válidos.** Son los individuos que se considerarán para el análisis.

**No válidos.** Son los individuos que no se considerarán para el análisis y se clasifican en 5 inconsistencias:

- **Mejores egresados.** Son los individuos que aprueban independientemente de la puntuación en la PAAP.
- **Duplicados (BLANK).** Son los individuos que coinciden en todas las respuestas y tienen cédula de identidad en blanco.
- **Duplicados (MULT).** Son los individuos que coinciden en todas las respuestas y tienen cédula de identidad rellena varias veces en la misma columna.
- **BLANK.** Son los individuos con cédula de identidad en blanco.
- **No inscritos.** Son los individuos que rinden la PAAP sin haberse inscrito.

La frecuencia de las inconsistencias encontradas en la validación de los individuos se presenta en la Tabla 3.2.

Inconsistencia	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias		Propedéutico de Empresarial y Económicas		Sin propedéutico		Total	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Válidos	2.686	99,9	291	99,7	0	0,0	2.977	97,5
Mejores egresados	3	0,1	1	0,3	0	0,0	4	0,1
Duplicados (BLANK)	0	0,0	0	0,0	26	36,6	26	0,9
Duplicados (MULT)	0	0,0	0	0,0	12	16,9	12	0,4
BLANK	0	0,0	0	0,0	12	16,9	12	0,4
No inscritos	0	0,0	0	0,0	21	29,6	21	0,7
<b>Total</b>	<b>2.689</b>	<b>100,0</b>	<b>292</b>	<b>100,0</b>	<b>71</b>	<b>100,0</b>	<b>3.052</b>	<b>100,0</b>

Tabla 3.2 Inconsistencias en la validación de los individuos.

En la tabla anterior se observa que en total los individuos válidos presentan el mayor porcentaje con el 97,5%, mientras que, el total de inconsistencias (mejores egresados, duplicados (BLANK), duplicados (MULT), BLANK y no inscritos) presentan el menor porcentaje con el 2,5%.

### 3.2.2 VALIDACIÓN DE LAS VARIABLES

En el proceso de validación de las variables de los ítems de la base de datos de la PAAP, se revisa que las 6 categorías de respuesta tengan sus respectivas respuestas codificadas de los individuos a los ítems, las cuales se presentan en la Tabla 3.3.

Categorías de respuesta	Codificación
A	1
B	2
C	3
D	4
E	5
OTROS	-1

Tabla 3.3 Categorías de respuesta.

En la tabla anterior, la respuesta A está codificada con el valor “1”, B con el valor “2”, C con el valor “3”, D con el valor “4”, E con el valor “5” y OTROS con el valor “-1”, el mismo significa que el individuo:

- No contestó ninguna opción.
- Contestó varias opciones.
- No rellenó bien el círculo.
- No usó el lápiz adecuado.

La frecuencia de las inconsistencias encontradas en la validación de las variables de los ítems se presenta en la Tabla 3.4.

Inconsistencia	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias		Propedéutico de Empresarial y Económicas		Total	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Válidos	268.600	100,0	29.100	100,0	297.700	100,0
No válidos	0	0,0	0	0,0	0	0,0
<b>Total</b>	<b>268.600</b>	100,0	<b>29.100</b>	100,0	<b>297.700</b>	100,0

Tabla 3.4 Inconsistencias en la validación de las variables de los ítems.

En la tabla anterior se observa que en total las variables de los ítems válidas representan el 100%, es decir, no se encontró ningún dato vacío.

### 3.3 FRECUENCIAS

#### 3.3.1 TEMARIOS DE LA PAAP

Las variables de los 100 ítems de la PAAP están divididas en 3 secciones: los primeros 40 ítems corresponden a la aptitud verbal (40%), los siguientes 50 ítems a la aptitud matemática (50%) y los últimos 10 ítems a la aptitud abstracta (10%), y se representa en la Figura 3.1.

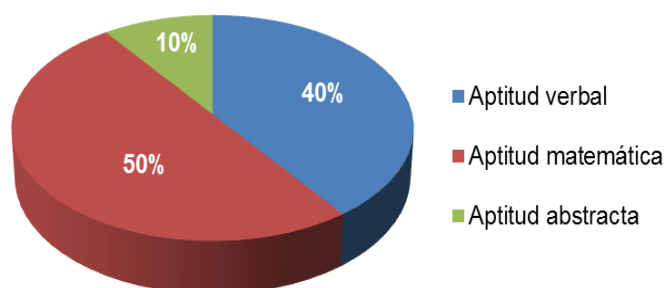


Figura 3.1 Secciones de las variables de los ítems.

En la tabla anterior se observa que de los 100 ítems de la PAAP, la sección de aptitud matemática representa el mayor porcentaje con el 50%, seguida de la sección de aptitud verbal con el 40% y la sección de aptitud abstracta con el 10% que constituye el menor porcentaje.

Cada uno de los ítems tiene su respectivo temario (Anexo G), las frecuencias de los temarios se presentan en la Tabla 3.5.

Sección	Subsección 1	Subsección 2	Subsección 3	Frecuencia	%	Subtotal	%
Aptitud verbal	Sinónimos			7	7,0	40	40,0
	Antónimos			7	7,0		
	Analogías verbales			7	7,0		
	Completar oraciones			7	7,0		
	Términos excluidos			7	7,0		
	Comprensión de lectura			5	5,0		
Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Adición	3	3,0	50	50,0
			Sustracción	2	2,0		
			Multiplicación	2	2,0		
			División	2	2,0		
	Regla de tres	Simple directa	8	8,0			
	Sucesiones	Numéricas	3	3,0			
		Letras	1	1,0			
	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Radicales	1	1,0		
			Racionales	1	1,0		
			Sistema de ecuaciones	1	1,0		

		Perpendicularidad	1	1,0			
		Lineales	5	5,0			
		Cuadráticas	1	1,0			
	Ecuaciones	Lineales	1	1,0			
		No lineales	1	1,0			
	Funciones	Cuadráticas	1	1,0			
		Exponenciales	1	1,0			
		Composición de funciones	1	1,0			
		Representaciones gráficas	2	2,0			
	Razonamiento geométrico	Rectas	Longitudes	1	1,0		
			Paralelismo	1	1,0		
		Triángulos	Equiláteros	1	1,0		
			Isósceles	1	1,0		
			Escalenos	1	1,0		
			Rectángulos	3	3,0		
		Círculos	Obtusángulos	1	1,0		
			Radios	2	2,0		
			Áreas	1	1,0		
Aptitud abstracta		Matrices gráficas		10	10,0	10	10,0
<b>Total</b>			<b>100</b>	<b>100,0</b>	<b>100</b>	<b>100,0</b>	

**Tabla 3.5 Frecuencia de los temarios de las variables de los ítems.**

En la tabla anterior se observa que el temario regla de tres simple directa presenta el mayor porcentaje con el 8%, mientras que, la mayoría de los temarios (sucesiones de letras, ecuaciones radicales, ecuaciones lineales, funciones cuadráticas, longitudes de rectas, triángulos equiláteros, áreas de círculos, etc.) presentan el menor porcentaje con el 1%.

### 3.3.2 VARIABLES DE LOS ÍTEMES

En la Tabla 3.6 se presenta la frecuencia de las categorías de respuesta: A, B, C, D, E y OTROS (las respuestas correctas están resaltadas en negrilla) de las variables de los ítems; además el total de respuestas correctas e incorrectas de los individuos a los 100 ítems de la PAAP para cada uno de los propedéuticos.

Propedéutico de Ingeniería y Ciencias																		
Variable	A		B		C		D		E		OTROS		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Total respuestas	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Item001	970	36,1	374	13,9	1.052	39,2	215	8,0	19	0,7	56	2,1	1.052	39,2	1.634	60,8	2.686	100,0
Item002	206	7,7	433	16,1	407	15,2	219	8,2	1.298	48,3	123	4,6	1.298	48,3	1.388	51,7	2.686	100,0
Item003	27	1,0	22	0,8	73	2,7	2.509	93,4	28	1,0	27	1,0	2.509	93,4	177	6,6	2.686	100,0
Item004	306	11,4	574	21,4	1.270	47,3	162	6,0	244	9,1	130	4,8	1.270	47,3	1.416	52,7	2.686	100,0
Item005	155	5,8	622	23,2	1.553	57,8	214	8,0	37	1,4	105	3,9	1.553	57,8	1.133	42,2	2.686	100,0
Item006	1.483	55,2	310	11,5	279	10,4	558	20,8	26	1,0	30	1,1	558	20,8	2.128	79,2	2.686	100,0
Item007	441	16,4	867	32,3	289	10,8	130	4,8	904	33,7	55	2,0	441	16,4	2.245	83,6	2.686	100,0
Item008	546	20,3	301	11,2	630	23,5	531	19,8	465	17,3	213	7,9	546	20,3	2.140	79,7	2.686	100,0
Item009	443	16,5	77	2,9	135	5,0	1.551	57,7	385	14,3	95	3,5	1.551	57,7	1.135	42,3	2.686	100,0
Item010	289	10,8	397	14,8	336	12,5	549	20,4	903	33,6	212	7,9	397	14,8	2.289	85,2	2.686	100,0
Item011	436	16,2	369	13,7	1.110	41,3	103	3,8	585	21,8	83	3,1	1.110	41,3	1.576	58,7	2.686	100,0
Item012	342	12,7	166	6,2	1.105	41,1	278	10,3	668	24,9	127	4,7	668	24,9	2.018	75,1	2.686	100,0
Item013	100	3,7	186	6,9	122	4,5	63	2,3	2.154	80,2	61	2,3	2.154	80,2	532	19,8	2.686	100,0
Item014	879	32,7	177	6,6	332	12,4	858	31,9	361	13,4	79	2,9	858	31,9	1.828	68,1	2.686	100,0
Item015	714	26,6	529	19,7	347	12,9	738	27,5	313	11,7	45	1,7	529	19,7	2.157	80,3	2.686	100,0
Item016	221	8,2	265	9,9	498	18,5	474	17,6	999	37,2	229	8,5	999	37,2	1.687	62,8	2.686	100,0
Item017	133	5,0	1.476	55,0	230	8,6	69	2,6	733	27,3	45	1,7	1.476	55,0	1.210	45,0	2.686	100,0
Item018	1.070	39,8	200	7,4	582	21,7	59	2,2	724	27,0	51	1,9	1.070	39,8	1.616	60,2	2.686	100,0
Item019	68	2,5	191	7,1	298	11,1	1.891	70,4	152	5,7	86	3,2	1.891	70,4	795	29,6	2.686	100,0
Item020	233	8,7	695	25,9	945	35,2	738	27,5	39	1,5	36	1,3	945	35,2	1.741	64,8	2.686	100,0
Item021	455	16,9	936	34,8	166	6,2	336	12,5	733	27,3	60	2,2	936	34,8	1.750	65,2	2.686	100,0
Item022	550	20,5	72	2,7	47	1,7	1.928	71,8	55	2,0	34	1,3	1.928	71,8	758	28,2	2.686	100,0
Item023	44	1,6	145	5,4	206	7,7	486	18,1	1.772	66,0	33	1,2	1.772	66,0	914	34,0	2.686	100,0
Item024	1.170	43,6	661	24,6	371	13,8	121	4,5	307	11,4	56	2,1	661	24,6	2.025	75,4	2.686	100,0
Item025	1.936	72,1	120	4,5	197	7,3	357	13,3	29	1,1	47	1,7	1.936	72,1	750	27,9	2.686	100,0
Item026	52	1,9	114	4,2	113	4,2	2.044	76,1	308	11,5	55	2,0	2.044	76,1	642	23,9	2.686	100,0
Item027	27	1,0	93	3,5	155	5,8	31	1,2	2.350	87,5	30	1,1	2.350	87,5	336	12,5	2.686	100,0
Item028	757	28,2	22	0,8	716	26,7	200	7,4	955	35,6	36	1,3	716	26,7	1.970	73,3	2.686	100,0
Item029	105	3,9	361	13,4	139	5,2	110	4,1	1.891	70,4	80	3,0	1.891	70,4	795	29,6	2.686	100,0
Item030	861	32,1	510	19,0	164	6,1	873	32,5	182	6,8	96	3,6	510	19,0	2.176	81,0	2.686	100,0
Item031	976	36,3	45	1,7	151	5,6	1.381	51,4	60	2,2	73	2,7	976	36,3	1.710	63,7	2.686	100,0
Item032	197	7,3	739	27,5	578	21,5	155	5,8	906	33,7	111	4,1	906	33,7	1.780	66,3	2.686	100,0
Item033	961	35,8	198	7,4	381	14,2	979	36,4	74	2,8	93	3,5	979	36,4	1.707	63,6	2.686	100,0
Item034	302	11,2	392	14,6	397	14,8	323	12,0	1.192	44,4	80	3,0	1.192	44,4	1.494	55,6	2.686	100,0
Item035	371	13,8	684	25,5	507	18,9	605	22,5	336	12,5	183	6,8	605	22,5	2.081	77,5	2.686	100,0
Item036	1.536	57,2	198	7,4	254	9,5	153	5,7	453	16,9	92	3,4	1.536	57,2	1.150	42,8	2.686	100,0
Item037	1.278	47,6	85	3,2	225	8,4	446	16,6	592	22,0	60	2,2	225	8,4	2.461	91,6	2.686	100,0
Item038	27	1,0	32	1,2	808	30,1	813	30,3	934	34,8	72	2,7	934	34,8	1.752	65,2	2.686	100,0
Item039	1.723	64,1	93	3,5	237	8,8	386	14,4	185	6,9	62	2,3	1.723	64,1	963	35,9	2.686	100,0
Item040	88	3,3	156	5,8	257	9,6	1.518	56,5	586	21,8	81	3,0	1.518	56,5	1.168	43,5	2.686	100,0
Item041	55	2,0	110	4,1	1.980	73,7	231	8,6	267	9,9	43	1,6	1.980	73,7	706	26,3	2.686	100,0
Item042	106	3,9	872	32,5	380	14,1	712	26,5	298	11,1	318	11,8	712	26,5	1.974	73,5	2.686	100,0
Item043	156	5,8	1.291	48,1	266	9,9	640	23,8	202	7,5	131	4,9	1.291	48,1	1.395	51,9	2.686	100,0
Item044	640	23,8	258	9,6	500	18,6	898	33,4	254	9,5	136	5,1	898	33,4	1.788	66,6	2.686	100,0
Item045	76	2,8	144	5,4	241	9,0	280	10,4	1.853	69,0	92	3,4	1.853	69,0	833	31,0	2.686	100,0
Item046	206	7,7	146	5,4	173	6,4	1.014	37,8	937	34,9	210	7,8	937	34,9	1.749	65,1	2.686	100,0
Item047	256	9,5	135	5,0	182	6,8	259	9,6	1.700	63,3	154	5,7	1.700	63,3	986	36,7	2.686	100,0
Item048	1.960	73,0	188	7,0	218	8,1	126	4,7	120	4,5	74	2,8	1.960	73,0	726	27,0	2.686	100,0
Item049	605	22,5	233	8,7	499	18,6	863	32,1	363	13,5	123	4,6	863	32,1	1.823	67,9	2.686	100,0
Item050	593	22,1	620	23,1	369	13,7	565	21,0	351	13,1	188	7,0	593	22,1	2.093	77,9	2.686	100,0

Item051	222	8,3	214	8,0	1.101	41,0	<b>771</b>	<b>28,7</b>	316	11,8	62	2,3	771	28,7	1.915	71,3	2.686	100,0
Item052	165	6,1	288	10,7	322	12,0	519	19,3	<b>1.077</b>	<b>40,1</b>	315	11,7	1.077	40,1	1.609	59,9	2.686	100,0
Item053	103	3,8	<b>1.319</b>	<b>49,1</b>	312	11,6	583	21,7	<b>307</b>	<b>11,3</b>	66	2,5	1.319	49,1	1.367	50,9	2.686	100,0
Item054	205	7,6	325	12,1	<b>1.299</b>	<b>48,4</b>	411	15,3	253	9,4	193	7,2	1.299	48,4	1.387	51,6	2.686	100,0
Item055	773	28,8	401	14,9	229	8,5	238	8,9	<b>802</b>	<b>29,9</b>	243	9,0	802	29,9	1.884	70,1	2.686	100,0
Item056	362	13,5	<b>504</b>	<b>18,8</b>	1.348	50,2	256	9,5	145	5,4	71	2,6	504	18,8	2.182	81,2	2.686	100,0
Item057	201	7,5	99	3,7	541	20,1	<b>1.773</b>	<b>66,0</b>	23	0,9	49	1,8	1.773	66,0	913	34,0	2.686	100,0
Item058	<b>1.571</b>	<b>58,5</b>	160	6,0	347	12,9	385	14,3	103	3,8	120	4,5	1.571	58,5	1.115	41,5	2.686	100,0
Item059	180	6,7	660	24,6	<b>768</b>	<b>28,6</b>	474	17,6	338	12,6	266	9,9	768	28,6	1.918	71,4	2.686	100,0
Item060	333	12,4	270	10,1	<b>1.230</b>	<b>45,8</b>	311	11,6	297	11,1	245	9,1	1.230	45,8	1.456	54,2	2.686	100,0
Item061	361	13,4	530	19,7	654	24,3	<b>681</b>	<b>25,4</b>	180	6,7	280	10,4	681	25,4	2.005	74,6	2.686	100,0
Item062	<b>326</b>	<b>12,1</b>	853	31,8	305	11,4	482	17,9	390	14,5	330	12,3	326	12,1	2.360	87,9	2.686	100,0
Item063	<b>739</b>	<b>27,5</b>	210	7,8	424	15,8	526	19,6	644	24,0	143	5,3	739	27,5	1.947	72,5	2.686	100,0
Item064	576	21,4	152	5,7	385	14,3	94	3,5	<b>1.399</b>	<b>52,1</b>	80	3,0	1.399	52,1	1.287	47,9	2.686	100,0
Item065	393	14,6	<b>1.870</b>	<b>69,6</b>	212	7,9	102	3,8	49	1,8	60	2,2	1.870	69,6	816	30,4	2.686	100,0
Item066	236	8,8	186	6,9	<b>1.693</b>	<b>63,0</b>	223	8,3	138	5,1	210	7,8	1.693	63,0	993	37,0	2.686	100,0
Item067	42	1,6	124	4,6	185	6,9	<b>2.217</b>	<b>82,5</b>	91	3,4	27	1,0	2.217	82,5	469	17,5	2.686	100,0
Item068	433	16,1	322	12,0	<b>986</b>	<b>36,7</b>	294	10,9	382	14,2	269	10,0	986	36,7	1.700	63,3	2.686	100,0
Item069	<b>993</b>	<b>37,0</b>	521	19,4	329	12,2	441	16,4	251	9,3	151	5,6	993	37,0	1.693	63,0	2.686	100,0
Item070	266	9,9	537	20,0	<b>872</b>	<b>32,5</b>	490	18,2	193	7,2	328	12,2	872	32,5	1.814	67,5	2.686	100,0
Item071	700	26,1	259	9,6	211	7,9	829	30,9	<b>523</b>	<b>19,5</b>	164	6,1	523	19,5	2.163	80,5	2.686	100,0
Item072	275	10,2	512	19,1	<b>483</b>	<b>18,0</b>	653	24,3	488	18,2	275	10,2	483	18,0	2.203	82,0	2.686	100,0
Item073	212	7,9	465	17,3	<b>1.004</b>	<b>37,4</b>	225	8,4	562	20,9	218	8,1	1.004	37,4	1.682	62,6	2.686	100,0
Item074	362	13,5	555	20,7	482	17,9	<b>852</b>	<b>31,7</b>	252	9,4	183	6,8	852	31,7	1.834	68,3	2.686	100,0
Item075	287	10,7	<b>1.243</b>	<b>46,3</b>	227	8,5	337	12,5	397	14,8	195	7,3	1.243	46,3	1.443	53,7	2.686	100,0
Item076	48	1,8	179	6,7	<b>2.246</b>	<b>83,6</b>	103	3,8	26	1,0	84	3,1	2.246	83,6	440	16,4	2.686	100,0
Item077	342	12,7	<b>1.031</b>	<b>38,4</b>	547	20,4	338	12,6	177	6,6	251	9,3	1.031	38,4	1.655	61,6	2.686	100,0
Item078	188	7,0	381	14,2	<b>1.466</b>	<b>54,6</b>	304	11,3	129	4,8	218	8,1	1.466	54,6	1.220	45,4	2.686	100,0
Item079	<b>857</b>	<b>31,9</b>	417	15,5	342	12,7	569	21,2	204	7,6	297	11,1	857	31,9	1.829	68,1	2.686	100,0
Item080	300	11,2	196	7,3	239	8,9	582	21,7	<b>1.171</b>	<b>43,6</b>	198	7,4	1.171	43,6	1.515	56,4	2.686	100,0
Item081	822	30,6	236	8,8	<b>811</b>	<b>30,2</b>	225	8,4	275	10,2	317	11,8	811	30,2	1.875	69,8	2.686	100,0
Item082	181	6,7	<b>893</b>	<b>33,2</b>	327	12,2	994	37,0	97	3,6	194	7,2	893	33,2	1.793	66,8	2.686	100,0
Item083	218	8,1	492	18,3	464	17,3	<b>940</b>	<b>35,0</b>	175	6,5	397	14,8	940	35,0	1.746	65,0	2.686	100,0
Item084	415	15,5	<b>897</b>	<b>33,4</b>	513	19,1	294	10,9	231	8,6	336	12,5	897	33,4	1.789	66,6	2.686	100,0
Item085	884	32,9	326	12,1	466	17,3	<b>491</b>	<b>18,3</b>	120	4,5	399	14,9	491	18,3	2.195	81,7	2.686	100,0
Item086	<b>2.063</b>	<b>76,8</b>	145	5,4	166	6,2	98	3,6	25	0,9	189	7,0	2.063	76,8	623	23,2	2.686	100,0
Item087	<b>1.556</b>	<b>57,9</b>	559	20,8	139	5,2	120	4,5	125	4,7	187	7,0	1.556	57,9	1.130	42,1	2.686	100,0
Item088	153	5,7	183	6,8	267	9,9	<b>1.787</b>	<b>66,5</b>	54	2,0	242	9,0	1.787	66,5	899	33,5	2.686	100,0
Item089	183	6,8	1.153	42,9	483	18,0	<b>413</b>	<b>15,4</b>	149	5,5	305	11,4	413	15,4	2.273	84,6	2.686	100,0
Item090	129	4,8	<b>1.053</b>	<b>39,2</b>	814	30,3	279	10,4	117	4,4	294	10,9	1.053	39,2	1.633	60,8	2.686	100,0
Item091	<b>1.707</b>	<b>63,6</b>	109	4,1	187	7,0	466	17,3	86	3,2	131	4,9	1.707	63,6	979	36,4	2.686	100,0
Item092	153	5,7	133	5,0	57	2,1	74	2,8	<b>2.110</b>	<b>78,6</b>	159	5,9	2.110	78,6	576	21,4	2.686	100,0
Item093	68	2,5	378	14,1	142	5,3	<b>1.947</b>	<b>72,5</b>	24	0,9	127	4,7	1.947	72,5	739	27,5	2.686	100,0
Item094	92	3,4	82	3,1	<b>2.233</b>	<b>83,1</b>	71	2,6	45	1,7	163	6,1	2.233	83,1	453	16,9	2.686	100,0
Item095	160	6,0	<b>873</b>	<b>32,5</b>	176	6,6	164	6,1	1.095	40,8	218	8,1	873	32,5	1.813	67,5	2.686	100,0
Item096	331	12,3	394	14,7	<b>1.003</b>	<b>37,3</b>	512	19,1	146	5,4	300	11,2	1.003	37,3	1.683	62,7	2.686	100,0
Item097	256	9,5	<b>2.055</b>	<b>76,5</b>	87	3,2	48	1,8	67	2,5	173	6,4	2.055	76,5	631	23,5	2.686	100,0
Item098	241	9,0	306	11,4	441	16,4	<b>1.358</b>	<b>50,6</b>	38	1,4	302	11,2	1.358	50,6	1.328	49,4	2.686	100,0
Item099	872	32,5	54	2,0	54	2,0	65	2,4	<b>1.444</b>	<b>53,8</b>	197	7,3	1.444	53,8	1.242	46,2	2.686	100,0
Item100	<b>2.073</b>	<b>77,2</b>	49	1,8	52	1,9	291	10,8	33	1,2	188	7,0	2.073	77,2	613	22,8	2.686	100,0
<b>Total</b>	<b>51.739</b>	<b>19,3</b>	<b>43.037</b>	<b>16,0</b>	<b>52.141</b>	<b>19,4</b>	<b>57.442</b>	<b>21,4</b>	<b>49.041</b>	<b>18,3</b>	<b>15.200</b>	<b>5,7</b>	<b>122.473</b>	<b>45,6</b>	<b>146.127</b>	<b>54,4</b>	<b>268.600</b>	<b>100,0</b>

Propedéutico de Empresarial y Económicas																		
Variable	A		B		C		D		E		OTROS		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Total respuestas	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Item001	103	35,4	35	12,0	111	38,1	35	12,0	1	0,3	6	2,1	111	38,1	180	61,9	291	100,0
Item002	24	8,2	53	18,2	55	18,9	27	9,3	120	41,2	12	4,1	120	41,2	171	58,8	291	100,0
Item003	0	0,0	5	1,7	5	1,7	274	94,2	4	1,4	3	1,0	274	94,2	17	5,8	291	100,0
Item004	53	18,2	70	24,1	113	38,8	10	3,4	32	11,0	13	4,5	113	38,8	178	61,2	291	100,0
Item005	27	9,3	59	20,3	168	57,7	20	6,9	4	1,4	13	4,5	168	57,7	123	42,3	291	100,0
Item006	177	60,8	28	9,6	27	9,3	55	18,9	2	0,7	2	0,7	55	18,9	236	81,1	291	100,0
Item007	39	13,4	92	31,6	36	12,4	13	4,5	108	37,1	3	1,0	39	13,4	252	86,6	291	100,0
Item008	65	22,3	31	10,7	74	25,4	52	17,9	49	16,8	20	6,9	65	22,3	226	77,7	291	100,0
Item009	43	14,8	12	4,1	13	4,5	177	60,8	38	13,1	8	2,7	177	60,8	114	39,2	291	100,0
Item010	28	9,6	37	12,7	36	12,4	56	19,2	112	38,5	22	7,6	37	12,7	254	87,3	291	100,0
Item011	68	23,4	42	14,4	113	38,8	12	4,1	51	17,5	5	1,7	113	38,8	178	61,2	291	100,0
Item012	28	9,6	20	6,9	125	43,0	24	8,2	75	25,8	19	6,5	75	25,8	216	74,2	291	100,0
Item013	10	3,4	23	7,9	8	2,7	15	5,2	231	79,4	4	1,4	231	79,4	60	20,6	291	100,0
Item014	102	35,1	21	7,2	45	15,5	68	23,4	47	16,2	8	2,7	68	23,4	223	76,6	291	100,0
Item015	91	31,3	40	13,7	28	9,6	105	36,1	25	8,6	2	0,7	40	13,7	251	86,3	291	100,0
Item016	29	10,0	25	8,6	64	22,0	50	17,2	101	34,7	22	7,6	101	34,7	190	65,3	291	100,0
Item017	19	6,5	140	48,1	33	11,3	10	3,4	87	29,9	2	0,7	140	48,1	151	51,9	291	100,0
Item018	105	36,1	25	8,6	79	27,1	12	4,1	63	21,6	7	2,4	105	36,1	186	63,9	291	100,0
Item019	9	3,1	28	9,6	37	12,7	179	61,5	27	9,3	11	3,8	179	61,5	112	38,5	291	100,0
Item020	14	4,8	109	37,5	94	32,3	62	21,3	5	1,7	7	2,4	94	32,3	197	67,7	291	100,0
Item021	49	16,8	96	33,0	32	11,0	49	16,8	60	20,6	5	1,7	96	33,0	195	67,0	291	100,0
Item022	71	24,4	6	2,1	3	1,0	204	70,1	4	1,4	3	1,0	204	70,1	87	29,9	291	100,0
Item023	5	1,7	11	3,8	31	10,7	69	23,7	171	58,8	4	1,4	171	58,8	120	41,2	291	100,0
Item024	120	41,2	68	23,4	45	15,5	10	3,4	40	13,7	8	2,7	68	23,4	223	76,6	291	100,0
Item025	189	64,9	23	7,9	27	9,3	39	13,4	7	2,4	6	2,1	189	64,9	102	35,1	291	100,0
Item026	12	4,1	9	3,1	9	3,1	209	71,8	48	16,5	4	1,4	209	71,8	82	28,2	291	100,0
Item027	5	1,7	9	3,1	23	7,9	8	2,7	242	83,2	4	1,4	242	83,2	49	16,8	291	100,0
Item028	86	29,6	1	0,3	57	19,6	32	11,0	112	38,5	3	1,0	57	19,6	234	80,4	291	100,0
Item029	14	4,8	35	12,0	17	5,8	8	2,7	210	72,2	7	2,4	210	72,2	81	27,8	291	100,0
Item030	99	34,0	58	19,9	20	6,9	90	30,9	15	5,2	9	3,1	58	19,9	233	80,1	291	100,0
Item031	89	30,6	3	1,0	11	3,8	179	61,5	4	1,4	5	1,7	89	30,6	202	69,4	291	100,0
Item032	33	11,3	96	33,0	59	20,3	15	5,2	76	26,1	12	4,1	76	26,1	215	73,9	291	100,0
Item033	84	28,9	35	12,0	70	24,1	81	27,8	11	3,8	10	3,4	81	27,8	210	72,2	291	100,0
Item034	29	10,0	43	14,8	43	14,8	44	15,1	121	41,6	11	3,8	121	41,6	170	58,4	291	100,0
Item035	33	11,3	62	21,3	50	17,2	67	23,0	54	18,6	25	8,6	67	23,0	224	77,0	291	100,0
Item036	151	51,9	27	9,3	27	9,3	18	6,2	57	19,6	11	3,8	151	51,9	140	48,1	291	100,0
Item037	141	48,5	12	4,1	13	4,5	56	19,2	61	21,0	8	2,7	13	4,5	278	95,5	291	100,0
Item038	1	0,3	0	0,0	112	38,5	75	25,8	94	32,3	9	3,1	94	32,3	197	67,7	291	100,0
Item039	193	66,3	5	1,7	20	6,9	45	15,5	23	7,9	5	1,7	193	66,3	98	33,7	291	100,0
Item040	4	1,4	13	4,5	34	11,7	148	50,9	82	28,2	10	3,4	148	50,9	143	49,1	291	100,0
Item041	7	2,4	10	3,4	181	62,2	50	17,2	35	12,0	8	2,7	181	62,2	110	37,8	291	100,0
Item042	10	3,4	83	28,5	62	21,3	63	21,6	35	12,0	38	13,1	63	21,6	228	78,4	291	100,0
Item043	27	9,3	98	33,7	31	10,7	90	30,9	29	10,0	16	5,5	98	33,7	193	66,3	291	100,0
Item044	69	23,7	28	9,6	59	20,3	95	32,6	22	7,6	18	6,2	95	32,6	196	67,4	291	100,0
Item045	5	1,7	17	5,8	35	12,0	30	10,3	197	67,7	7	2,4	197	67,7	94	32,3	291	100,0
Item046	35	12,0	13	4,5	18	6,2	126	43,3	74	25,4	25	8,6	74	25,4	217	74,6	291	100,0
Item047	24	8,2	20	6,9	18	6,2	41	14,1	169	58,1	19	6,5	169	58,1	122	41,9	291	100,0
Item048	195	67,0	30	10,3	28	9,6	16	5,5	16	5,5	6	2,1	195	67,0	96	33,0	291	100,0
Item049	62	21,3	32	11,0	45	15,5	85	29,2	55	18,9	12	4,1	85	29,2	206	70,8	291	100,0
Item050	53	18,2	76	26,1	45	15,5	51	17,5	47	16,2	19	6,5	53	18,2	238	81,8	291	100,0

Item051	36	12,4	35	12,0	104	35,7	<b>71</b>	<b>24,4</b>	36	12,4	9	3,1	71	24,4	220	75,6	291	100,0
Item052	31	10,7	41	14,1	47	16,2	54	18,6	<b>86</b>	<b>29,6</b>	32	11,0	86	29,6	205	70,4	291	100,0
Item053	23	7,9	<b>102</b>	<b>35,1</b>	35	12,0	67	23,0	52	17,9	12	4,1	102	35,1	189	64,9	291	100,0
Item054	28	9,6	46	15,8	<b>103</b>	<b>35,4</b>	65	22,3	24	8,2	25	8,6	103	35,4	188	64,6	291	100,0
Item055	89	30,6	36	12,4	20	6,9	34	11,7	<b>81</b>	<b>27,8</b>	31	10,7	81	27,8	210	72,2	291	100,0
Item056	57	19,6	<b>49</b>	<b>16,8</b>	125	43,0	35	12,0	14	4,8	11	3,8	49	16,8	242	83,2	291	100,0
Item057	31	10,7	15	5,2	74	25,4	<b>156</b>	<b>53,6</b>	7	2,4	8	2,7	156	53,6	135	46,4	291	100,0
Item058	<b>152</b>	<b>52,2</b>	22	7,6	51	17,5	44	15,1	11	3,8	11	3,8	152	52,2	139	47,8	291	100,0
Item059	19	6,5	89	30,6	<b>64</b>	<b>22,0</b>	59	20,3	26	8,9	34	11,7	64	22,0	227	78,0	291	100,0
Item060	35	12,0	30	10,3	<b>106</b>	<b>36,4</b>	45	15,5	42	14,4	33	11,3	106	36,4	185	63,6	291	100,0
Item061	48	16,5	69	23,7	67	23,0	<b>58</b>	<b>19,9</b>	16	5,5	33	11,3	58	19,9	233	80,1	291	100,0
Item062	<b>35</b>	<b>12,0</b>	82	28,2	36	12,4	54	18,6	49	16,8	35	12,0	35	12,0	256	88,0	291	100,0
Item063	<b>50</b>	<b>17,2</b>	29	10,0	49	16,8	58	19,9	87	29,9	18	6,2	50	17,2	241	82,8	291	100,0
Item064	65	22,3	22	7,6	35	12,0	10	3,4	<b>148</b>	<b>50,9</b>	11	3,8	148	50,9	143	49,1	291	100,0
Item065	54	18,6	<b>179</b>	<b>61,5</b>	25	8,6	10	3,4	11	3,8	12	4,1	179	61,5	112	38,5	291	100,0
Item066	35	12,0	27	9,3	<b>164</b>	<b>56,4</b>	33	11,3	11	3,8	21	7,2	164	56,4	127	43,6	291	100,0
Item067	9	3,1	18	6,2	21	7,2	<b>221</b>	<b>75,9</b>	18	6,2	4	1,4	221	75,9	70	24,1	291	100,0
Item068	43	14,8	36	12,4	<b>89</b>	<b>30,6</b>	35	12,0	60	20,6	28	9,6	89	30,6	202	69,4	291	100,0
Item069	<b>85</b>	<b>29,2</b>	60	20,6	21	7,2	60	20,6	41	14,1	24	8,2	85	29,2	206	70,8	291	100,0
Item070	37	12,7	65	22,3	<b>82</b>	<b>28,2</b>	37	12,7	19	6,5	51	17,5	82	28,2	209	71,8	291	100,0
Item071	66	22,7	32	11,0	20	6,9	106	36,4	<b>43</b>	<b>14,8</b>	24	8,2	43	14,8	248	85,2	291	100,0
Item072	33	11,3	46	15,8	<b>45</b>	<b>15,5</b>	60	20,6	72	24,7	35	12,0	45	15,5	246	84,5	291	100,0
Item073	24	8,2	47	16,2	<b>83</b>	<b>28,5</b>	32	11,0	68	23,4	37	12,7	83	28,5	208	71,5	291	100,0
Item074	38	13,1	52	17,9	52	17,9	<b>77</b>	<b>26,5</b>	43	14,8	29	10,0	77	26,5	214	73,5	291	100,0
Item075	41	14,1	<b>120</b>	<b>41,2</b>	30	10,3	36	12,4	41	14,1	23	7,9	120	41,2	171	58,8	291	100,0
Item076	8	2,7	25	8,6	<b>226</b>	<b>77,7</b>	15	5,2	5	1,7	12	4,1	226	77,7	65	22,3	291	100,0
Item077	40	13,7	<b>95</b>	<b>32,6</b>	60	20,6	44	15,1	25	8,6	27	9,3	95	32,6	196	67,4	291	100,0
Item078	28	9,6	49	16,8	<b>136</b>	<b>46,7</b>	30	10,3	19	6,5	29	10,0	136	46,7	155	53,3	291	100,0
Item079	<b>88</b>	<b>30,2</b>	34	11,7	37	12,7	58	19,9	31	10,7	43	14,8	88	30,2	203	69,8	291	100,0
Item080	54	18,6	18	6,2	33	11,3	72	24,7	<b>97</b>	<b>33,3</b>	17	5,8	97	33,3	194	66,7	291	100,0
Item081	89	30,6	25	8,6	<b>82</b>	<b>28,2</b>	25	8,6	34	11,7	36	12,4	82	28,2	209	71,8	291	100,0
Item082	27	9,3	<b>72</b>	<b>24,7</b>	44	15,1	115	39,5	8	2,7	25	8,6	72	24,7	219	75,3	291	100,0
Item083	23	7,9	49	16,8	55	18,9	<b>90</b>	<b>30,9</b>	19	6,5	55	18,9	90	30,9	201	69,1	291	100,0
Item084	42	14,4	<b>70</b>	<b>24,1</b>	51	17,5	50	17,2	26	8,9	52	17,9	70	24,1	221	75,9	291	100,0
Item085	86	29,6	34	11,7	54	18,6	<b>52</b>	<b>17,9</b>	13	4,5	52	17,9	52	17,9	239	82,1	291	100,0
Item086	<b>202</b>	<b>69,4</b>	26	8,9	21	7,2	10	3,4	6	2,1	26	8,9	202	69,4	89	30,6	291	100,0
Item087	<b>122</b>	<b>41,9</b>	68	23,4	22	7,6	23	7,9	29	10,0	27	9,3	122	41,9	169	58,1	291	100,0
Item088	23	7,9	26	8,9	35	12,0	<b>167</b>	<b>57,4</b>	8	2,7	32	11,0	167	57,4	124	42,6	291	100,0
Item089	21	7,2	106	36,4	63	21,6	<b>41</b>	<b>14,1</b>	18	6,2	42	14,4	41	14,1	250	85,9	291	100,0
Item090	12	4,1	<b>97</b>	<b>33,3</b>	87	29,9	48	16,5	15	5,2	32	11,0	97	33,3	194	66,7	291	100,0
Item091	<b>157</b>	<b>54,0</b>	19	6,5	22	7,6	64	22,0	11	3,8	18	6,2	157	54,0	134	46,0	291	100,0
Item092	11	3,8	23	7,9	7	2,4	12	4,1	<b>224</b>	<b>77,0</b>	14	4,8	224	77,0	67	23,0	291	100,0
Item093	13	4,5	48	16,5	17	5,8	<b>194</b>	<b>66,7</b>	5	1,7	14	4,8	194	66,7	97	33,3	291	100,0
Item094	12	4,1	10	3,4	<b>230</b>	<b>79,0</b>	15	5,2	7	2,4	17	5,8	230	79,0	61	21,0	291	100,0
Item095	20	6,9	<b>82</b>	<b>28,2</b>	17	5,8	16	5,5	132	45,4	24	8,2	82	28,2	209	71,8	291	100,0
Item096	48	16,5	35	12,0	<b>103</b>	<b>35,4</b>	55	18,9	18	6,2	32	11,0	103	35,4	188	64,6	291	100,0
Item097	45	15,5	<b>192</b>	<b>66,0</b>	13	4,5	8	2,7	15	5,2	18	6,2	192	66,0	99	34,0	291	100,0
Item098	44	15,1	31	10,7	53	18,2	<b>125</b>	<b>43,0</b>	7	2,4	31	10,7	125	43,0	166	57,0	291	100,0
Item099	95	32,6	10	3,4	7	2,4	10	3,4	<b>150</b>	<b>51,5</b>	19	6,5	150	51,5	141	48,5	291	100,0
Item100	<b>223</b>	<b>76,6</b>	2	0,7	11	3,8	33	11,3	4	1,4	18	6,2	223	76,6	68	23,4	291	100,0
<b>Total</b>	<b>5.626</b>	<b>19,3</b>	<b>4.509</b>	<b>15,5</b>	<b>5.523</b>	<b>19,0</b>	<b>6.238</b>	<b>21,4</b>	<b>5.385</b>	<b>18,5</b>	<b>1.819</b>	<b>6,3</b>	<b>11.818</b>	<b>40,6</b>	<b>17.282</b>	<b>59,4</b>	<b>29.100</b>	<b>100,0</b>



Variable	Total																	
	A		B		C		D		E		OTROS		Respuestas correctas		Respuestas incorrectas		Total respuestas	
	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%	Frecuencia	%
Item001	1.073	36,0	409	13,7	1.163	39,1	250	8,4	20	0,7	62	2,1	1.163	39,1	1.814	60,9	2.977	100,0
Item002	230	7,7	486	16,3	462	15,5	246	8,3	1.418	47,6	135	4,5	1.418	47,6	1.559	52,4	2.977	100,0
Item003	27	0,9	27	0,9	78	2,6	2.783	93,5	32	1,1	30	1,0	2.783	93,5	194	6,5	2.977	100,0
Item004	359	12,1	644	21,6	1.383	46,5	172	5,8	276	9,3	143	4,8	1.383	46,5	1.594	53,5	2.977	100,0
Item005	182	6,1	681	22,9	1.721	57,8	234	7,9	41	1,4	118	4,0	1.721	57,8	1.256	42,2	2.977	100,0
Item006	1.660	55,8	338	11,4	306	10,3	613	20,6	28	0,9	32	1,1	613	20,6	2.364	79,4	2.977	100,0
Item007	480	16,1	959	32,2	325	10,9	143	4,8	1.012	34,0	58	1,9	480	16,1	2.497	83,9	2.977	100,0
Item008	611	20,5	332	11,2	704	23,6	583	19,6	514	17,3	233	7,8	611	20,5	2.366	79,5	2.977	100,0
Item009	486	16,3	89	3,0	148	5,0	1.728	58,0	423	14,2	103	3,5	1.728	58,0	1.249	42,0	2.977	100,0
Item010	317	10,6	434	14,6	372	12,5	605	20,3	1.015	34,1	234	7,9	434	14,6	2.543	85,4	2.977	100,0
Item011	504	16,9	411	13,8	1.223	41,1	115	3,9	636	21,4	88	3,0	1.223	41,1	1.754	58,9	2.977	100,0
Item012	370	12,4	186	6,2	1.230	41,3	302	10,1	743	25,0	146	4,9	743	25,0	2.234	75,0	2.977	100,0
Item013	110	3,7	209	7,0	130	4,4	78	2,6	2.385	80,1	65	2,2	2.385	80,1	592	19,9	2.977	100,0
Item014	981	33,0	198	6,7	377	12,7	926	31,1	408	13,7	87	2,9	926	31,1	2.051	68,9	2.977	100,0
Item015	805	27,0	569	19,1	375	12,6	843	28,3	338	11,4	47	1,6	569	19,1	2.408	80,9	2.977	100,0
Item016	250	8,4	290	9,7	562	18,9	524	17,6	1.100	36,9	251	8,4	1.100	36,9	1.877	63,1	2.977	100,0
Item017	152	5,1	1.616	54,3	263	8,8	79	2,7	820	27,5	47	1,6	1.616	54,3	1.361	45,7	2.977	100,0
Item018	1.175	39,5	225	7,6	661	22,2	71	2,4	787	26,4	58	1,9	1.175	39,5	1.802	60,5	2.977	100,0
Item019	77	2,6	219	7,4	335	11,3	2.070	69,5	179	6,0	97	3,3	2.070	69,5	907	30,5	2.977	100,0
Item020	247	8,3	804	27,0	1.039	34,9	800	26,9	44	1,5	43	1,4	1.039	34,9	1.938	65,1	2.977	100,0
Item021	504	16,9	1.032	34,7	198	6,7	385	12,9	793	26,6	65	2,2	1.032	34,7	1.945	65,3	2.977	100,0
Item022	621	20,9	78	2,6	50	1,7	2.132	71,6	59	2,0	37	1,2	2.132	71,6	845	28,4	2.977	100,0
Item023	49	1,6	156	5,2	237	8,0	555	18,6	1.943	65,3	37	1,2	1.943	65,3	1.034	34,7	2.977	100,0
Item024	1.290	43,3	729	24,5	416	14,0	131	4,4	347	11,7	64	2,1	729	24,5	2.248	75,5	2.977	100,0
Item025	2.125	71,4	143	4,8	224	7,5	396	13,3	36	1,2	53	1,8	2.125	71,4	852	28,6	2.977	100,0
Item026	64	2,1	123	4,1	122	4,1	2.253	75,7	356	12,0	59	2,0	2.253	75,7	724	24,3	2.977	100,0
Item027	32	1,1	102	3,4	178	6,0	39	1,3	2.592	87,1	34	1,1	2.592	87,1	385	12,9	2.977	100,0
Item028	843	28,3	23	0,8	773	26,0	232	7,8	1.067	35,8	39	1,3	773	26,0	2.204	74,0	2.977	100,0
Item029	119	4,0	396	13,3	156	5,2	118	4,0	2.101	70,6	87	2,9	2.101	70,6	876	29,4	2.977	100,0
Item030	960	32,2	568	19,1	184	6,2	963	32,3	197	6,6	105	3,5	568	19,1	2.409	80,9	2.977	100,0
Item031	1.065	35,8	48	1,6	162	5,4	1.560	52,4	64	2,1	78	2,6	1.065	35,8	1.912	64,2	2.977	100,0
Item032	230	7,7	835	28,0	637	21,4	170	5,7	982	33,0	123	4,1	982	33,0	1.995	67,0	2.977	100,0
Item033	1.045	35,1	233	7,8	451	15,1	1.060	35,6	85	2,9	103	3,5	1.060	35,6	1.917	64,4	2.977	100,0
Item034	331	11,1	435	14,6	440	14,8	367	12,3	1.313	44,1	91	3,1	1.313	44,1	1.664	55,9	2.977	100,0
Item035	404	13,6	746	25,1	557	18,7	672	22,6	390	13,1	208	7,0	672	22,6	2.305	77,4	2.977	100,0
Item036	1.687	56,7	225	7,6	281	9,4	171	5,7	510	17,1	103	3,5	1.687	56,7	1.290	43,3	2.977	100,0
Item037	1.419	47,7	97	3,3	238	8,0	502	16,9	653	21,9	68	2,3	238	8,0	2.739	92,0	2.977	100,0
Item038	28	0,9	32	1,1	920	30,9	888	29,8	1.028	34,5	81	2,7	1.028	34,5	1.949	65,5	2.977	100,0
Item039	1.916	64,4	98	3,3	257	8,6	431	14,5	208	7,0	67	2,3	1.916	64,4	1.061	35,6	2.977	100,0
Item040	92	3,1	169	5,7	291	9,8	1.666	56,0	668	22,4	91	3,1	1.666	56,0	1.311	44,0	2.977	100,0
Item041	62	2,1	120	4,0	2.161	72,6	281	9,4	302	10,1	51	1,7	2.161	72,6	816	27,4	2.977	100,0
Item042	116	3,9	955	32,1	442	14,8	775	26,0	333	11,2	356	12,0	775	26,0	2.202	74,0	2.977	100,0
Item043	183	6,1	1.389	46,7	297	10,0	730	24,5	231	7,8	147	4,9	1.389	46,7	1.588	53,3	2.977	100,0
Item044	709	23,8	286	9,6	559	18,8	993	33,4	276	9,3	154	5,2	993	33,4	1.984	66,6	2.977	100,0
Item045	81	2,7	161	5,4	276	9,3	310	10,4	2.050	68,9	99	3,3	2.050	68,9	927	31,1	2.977	100,0
Item046	241	8,1	159	5,3	191	6,4	1.140	38,3	1.011	34,0	235	7,9	1.011	34,0	1.966	66,0	2.977	100,0
Item047	280	9,4	155	5,2	200	6,7	300	10,1	1.869	62,8	173	5,8	1.869	62,8	1.108	37,2	2.977	100,0
Item048	2.155	72,4	218	7,3	246	8,3	142	4,8	136	4,6	80	2,7	2.155	72,4	822	27,6	2.977	100,0
Item049	667	22,4	265	8,9	544	18,3	948	31,8	418	14,0	135	4,5	948	31,8	2.029	68,2	2.977	100,0
Item050	646	21,7	696	23,4	414	13,9	616	20,7	398	13,4	207	7,0	646	21,7	2.331	78,3	2.977	100,0

Item051	258	8,7	249	8,4	1.205	40,5	<b>842</b>	<b>28,3</b>	352	11,8	71	2,4	842	28,3	2.135	71,7	2.977	100,0
Item052	196	6,6	329	11,1	369	12,4	573	19,2	<b>1.163</b>	<b>39,1</b>	347	11,7	1.163	39,1	1.814	60,9	2.977	100,0
Item053	126	4,2	<b>1.421</b>	<b>47,7</b>	347	11,7	650	21,8	355	11,9	78	2,6	1.421	47,7	1.556	52,3	2.977	100,0
Item054	233	7,8	371	12,5	<b>1.402</b>	<b>47,1</b>	476	16,0	277	9,3	218	7,3	1.402	47,1	1.575	52,9	2.977	100,0
Item055	862	29,0	437	14,7	249	8,4	272	9,1	<b>883</b>	<b>29,7</b>	274	9,2	883	29,7	2.094	70,3	2.977	100,0
Item056	419	14,1	<b>553</b>	<b>18,6</b>	1.473	49,5	291	9,8	159	5,3	82	2,8	553	18,6	2.424	81,4	2.977	100,0
Item057	232	7,8	114	3,8	615	20,7	<b>1.929</b>	<b>64,8</b>	30	1,0	57	1,9	1.929	64,8	1.048	35,2	2.977	100,0
Item058	<b>1.723</b>	<b>57,9</b>	182	6,1	398	13,4	429	14,4	114	3,8	131	4,4	1.723	57,9	1.254	42,1	2.977	100,0
Item059	199	6,7	749	25,2	<b>832</b>	<b>27,9</b>	533	17,9	364	12,2	300	10,1	832	27,9	2.145	72,1	2.977	100,0
Item060	368	12,4	300	10,1	<b>1.336</b>	<b>44,9</b>	356	12,0	339	11,4	278	9,3	1.336	44,9	1.641	55,1	2.977	100,0
Item061	409	13,7	599	20,1	721	24,2	<b>739</b>	<b>24,8</b>	196	6,6	313	10,5	739	24,8	2.238	75,2	2.977	100,0
Item062	<b>361</b>	<b>12,1</b>	935	31,4	341	11,5	536	18,0	439	14,7	365	12,3	361	12,1	2.616	87,9	2.977	100,0
Item063	<b>789</b>	<b>26,5</b>	239	8,0	473	15,9	584	19,6	731	24,6	161	5,4	789	26,5	2.188	73,5	2.977	100,0
Item064	641	21,5	174	5,8	420	14,1	104	3,5	<b>1.547</b>	<b>52,0</b>	91	3,1	1.547	52,0	1.430	48,0	2.977	100,0
Item065	447	15,0	<b>2.049</b>	<b>68,8</b>	237	8,0	112	3,8	60	2,0	72	2,4	2.049	68,8	928	31,2	2.977	100,0
Item066	271	9,1	213	7,2	<b>1.857</b>	<b>62,4</b>	256	8,6	149	5,0	231	7,8	1.857	62,4	1.120	37,6	2.977	100,0
Item067	51	1,7	142	4,8	206	6,9	<b>2.438</b>	<b>81,9</b>	109	3,7	31	1,0	2.438	81,9	539	18,1	2.977	100,0
Item068	476	16,0	358	12,0	<b>1.075</b>	<b>36,1</b>	329	11,1	442	14,8	297	10,0	1.075	36,1	1.902	63,9	2.977	100,0
Item069	<b>1.078</b>	<b>36,2</b>	581	19,5	350	11,8	501	16,8	292	9,8	175	5,9	1.078	36,2	1.899	63,8	2.977	100,0
Item070	303	10,2	602	20,2	<b>954</b>	<b>32,0</b>	527	17,7	212	7,1	379	12,7	954	32,0	2.023	68,0	2.977	100,0
Item071	766	25,7	291	9,8	231	7,8	935	31,4	<b>566</b>	<b>19,0</b>	188	6,3	566	19,0	2.411	81,0	2.977	100,0
Item072	308	10,3	558	18,7	<b>528</b>	<b>17,7</b>	713	24,0	560	18,8	310	10,4	528	17,7	2.449	82,3	2.977	100,0
Item073	236	7,9	512	17,2	<b>1.087</b>	<b>36,5</b>	257	8,6	630	21,2	255	8,6	1.087	36,5	1.890	63,5	2.977	100,0
Item074	400	13,4	607	20,4	534	17,9	<b>929</b>	<b>31,2</b>	295	9,9	212	7,1	929	31,2	2.048	68,8	2.977	100,0
Item075	328	11,0	<b>1.363</b>	<b>45,8</b>	257	8,6	373	12,5	438	14,7	218	7,3	1.363	45,8	1.614	54,2	2.977	100,0
Item076	56	1,9	204	6,9	<b>2.472</b>	<b>83,0</b>	118	4,0	31	1,0	96	3,2	2.472	83,0	505	17,0	2.977	100,0
Item077	382	12,8	<b>1.126</b>	<b>37,8</b>	607	20,4	382	12,8	202	6,8	278	9,3	1.126	37,8	1.851	62,2	2.977	100,0
Item078	216	7,3	430	14,4	<b>1.602</b>	<b>53,8</b>	334	11,2	148	5,0	247	8,3	1.602	53,8	1.375	46,2	2.977	100,0
Item079	<b>945</b>	<b>31,7</b>	451	15,1	379	12,7	627	21,1	235	7,9	340	11,4	945	31,7	2.032	68,3	2.977	100,0
Item080	354	11,9	214	7,2	272	9,1	654	22,0	<b>1.268</b>	<b>42,6</b>	215	7,2	1.268	42,6	1.709	57,4	2.977	100,0
Item081	911	30,6	261	8,8	<b>893</b>	<b>30,0</b>	250	8,4	309	10,4	353	11,9	893	30,6	2.084	70,0	2.977	100,0
Item082	208	7,0	<b>965</b>	<b>32,4</b>	371	12,5	1.109	37,3	105	3,5	219	7,4	965	32,4	2.012	67,6	2.977	100,0
Item083	241	8,1	541	18,2	519	17,4	<b>1.030</b>	<b>34,6</b>	194	6,5	452	15,2	1.030	34,6	1.947	65,4	2.977	100,0
Item084	457	15,4	<b>967</b>	<b>32,5</b>	564	18,9	344	11,6	257	8,6	388	13,0	967	32,5	2.010	67,5	2.977	100,0
Item085	970	32,6	360	12,1	520	17,5	<b>543</b>	<b>18,2</b>	133	4,5	451	15,1	543	18,2	2.434	81,8	2.977	100,0
Item086	<b>2.265</b>	<b>76,1</b>	171	5,7	187	6,3	108	3,6	31	1,0	215	7,2	2.265	76,1	712	23,9	2.977	100,0
Item087	<b>1.678</b>	<b>56,4</b>	627	21,1	161	5,4	143	4,8	154	5,2	214	7,2	1.678	56,4	1.299	43,6	2.977	100,0
Item088	176	5,9	209	7,0	302	10,1	<b>1.954</b>	<b>65,6</b>	62	2,1	274	9,2	1.954	65,6	1.023	34,4	2.977	100,0
Item089	204	6,9	1.259	42,3	546	18,3	<b>454</b>	<b>15,3</b>	167	5,6	347	11,7	454	15,3	2.523	84,7	2.977	100,0
Item090	141	4,7	<b>1.150</b>	<b>38,6</b>	901	30,3	327	11,0	132	4,4	326	11,0	1.150	38,6	1.827	61,4	2.977	100,0
Item091	<b>1.864</b>	<b>62,6</b>	128	4,3	209	7,0	530	17,8	97	3,3	149	5,0	1.864	62,6	1.113	37,4	2.977	100,0
Item092	164	5,5	156	5,2	64	2,1	86	2,9	<b>2.334</b>	<b>78,4</b>	173	5,8	2.334	78,4	643	21,6	2.977	100,0
Item093	81	2,7	426	14,3	159	5,3	<b>2.141</b>	<b>71,9</b>	29	1,0	141	4,7	2.141	71,9	836	28,1	2.977	100,0
Item094	104	3,5	92	3,1	<b>2.463</b>	<b>82,7</b>	86	2,9	52	1,7	180	6,0	2.463	82,7	514	17,3	2.977	100,0
Item095	180	6,0	<b>955</b>	<b>32,1</b>	193	6,5	180	6,0	1.227	41,2	242	8,1	955	32,1	2.022	67,9	2.977	100,0
Item096	379	12,7	429	14,4	<b>1.106</b>	<b>37,2</b>	567	19,0	164	5,5	332	11,2	1.106	37,2	1.871	62,8	2.977	100,0
Item097	301	10,1	<b>2.247</b>	<b>75,5</b>	100	3,4	56	1,9	82	2,8	191	6,4	2.247	75,5	730	24,5	2.977	100,0
Item098	285	9,6	337	11,3	494	16,6	<b>1.483</b>	<b>49,8</b>	45	1,5	333	11,2	1.483	49,8	1.494	50,2	2.977	100,0
Item099	967	32,5	64	2,1	61	2,0	75	2,5	<b>1.594</b>	<b>53,5</b>	216	7,3	1.594	53,5	1.383	46,5	2.977	100,0
Item100	<b>2.296</b>	<b>77,1</b>	51	1,7	63	2,1	324	10,9	37	1,2	206	6,9	2.296	77,1	681	22,9	2.977	100,0
<b>Total</b>	<b>57.365</b>	<b>19,3</b>	<b>47.546</b>	<b>16,0</b>	<b>57.664</b>	<b>19,4</b>	<b>63.680</b>	<b>21,4</b>	<b>54.426</b>	<b>18,3</b>	<b>17.019</b>	<b>5,7</b>	<b>134.291</b>	<b>45,1</b>	<b>163.409</b>	<b>54,9</b>	<b>297.700</b>	<b>100,0</b>

Tabla 3.6 Frecuencia de las categorías de respuesta de las variables de los ítems.

### **Propedéutico de Ingeniería y Ciencias**

- El ítem 3 que corresponde al temario sinónimos presenta el mayor porcentaje de aciertos (opción D) con el 93,4%, mientras que, el ítem 37 que corresponde al temario comprensión de lectura presenta el menor porcentaje de aciertos (opción C) con el 8,4%.
- El ítem 85 que corresponde al temario funciones cuadráticas presenta el mayor porcentaje de individuos que incurren en la opción otros (no contestó ninguna opción, contestó varias opciones, no rellenó bien el círculo, no usó el lápiz adecuado) con el 14,9%, mientras que, el ítem 3 que corresponde al temario sinónimos presenta el menor porcentaje de la opción otros con el 1,0%.
- Del total de respuestas del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias, las respuestas incorrectas tienen mayor porcentaje (54,4%) que las respuestas correctas (45,6%).

### **Propedéutico de Empresarial y Económicas**

- El ítem 3 que corresponde al temario sinónimos presenta el mayor porcentaje de aciertos (opción D) con el 94,2%, mientras que, el ítem 37 que corresponde al temario comprensión de lectura presenta el menor porcentaje de aciertos (opción C) con el 4,5%.
- El ítem 83 que corresponde al temario sistema de ecuaciones presenta el mayor porcentaje de individuos que incurren en la opción otros (no contestó ninguna opción, contestó varias opciones, no rellenó bien el círculo, no usó el lápiz adecuado) con el 18,9%, mientras que, el ítem 6 que corresponde al temario sinónimos presenta el menor porcentaje de la opción otros con el 0,7%.
- Del total de respuestas del Propedéutico de Empresarial y Económicas, las respuestas incorrectas tienen mayor porcentaje (59,4%) que las respuestas correctas (40,6%).

### **Total**

- El ítem 3 que corresponde al temario sinónimos presenta el mayor porcentaje de aciertos (opción D) con el 93,5%, mientras que, el ítem 37

que corresponde al temario comprensión de lectura presenta el menor porcentaje de aciertos (opción C) con el 8,0%.

- El ítem 83 que corresponde al temario sistema de ecuaciones presenta el mayor porcentaje de individuos que incurren en la opción otros (no contestó ninguna opción, contestó varias opciones, no rellenó bien el círculo, no usó el lápiz adecuado) con el 15,2%, mientras que, el ítem 3 que corresponde al temario sinónimos presenta el menor porcentaje de la opción otros con el 1,0%.
- Del total de respuestas de la PAAP, las respuestas incorrectas tienen mayor porcentaje (54,9%) que las respuestas correctas (45,1%).

### 3.3.3 VARIABLE DE RESPUESTA

La variable de respuesta de la PAAP contiene una lista de 100 respuestas correctas, la frecuencia de las categorías de respuesta se presenta en la Tabla 3.7.

<b>Categorías de respuesta</b>	<b>Frecuencia</b>	<b>%</b>
A	18	18,0
B	17	17,0
C	21	21,0
D	24	24,0
E	20	20,0
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100,0</b>
<b>Promedio</b>	<b>20</b>	

Tabla 3.7 Frecuencia de las categorías de respuesta de la variable de respuesta.

En la tabla anterior se observa que la frecuencia de las categorías de respuesta está distribuida homogéneamente tomando como referencia el promedio.

## 3.4 COMPROBACIÓN DEL MODELO DE TRI

### 3.4.1 DEFINICIÓN DE LA VARIABLE

Se definió que la variable a evaluar en la PAAP es la aptitud, definida como “La capacidad para el buen desempeño en las actividades académicas que los aspirantes deberán realizar al cursar las diferentes carreras de la EPN.” La prueba de ninguna manera mide el grado de conocimientos del individuo.

### **3.4.2 EXAMINACIÓN DE LOS ÍTEMS**

Se examinó los 100 ítems de la PAAP destinados a medir la aptitud. Los ítems de la PAAP son de opción múltiple (Anexo A) y se observa que:

- Se evitan palabras que puedan dar pistas sobre la solución correcta, tales como: siempre, ninguno, nunca, todos, a veces, usualmente, generalmente, típicamente, etc.
- No se repiten palabras o expresiones para cada una de las alternativas, se incluye en un enunciado general.
- Las alternativas incorrectas o distractores son excelentes y atractivas para los individuos que no conocen la respuesta correcta.
- Las alternativas tienen aproximadamente la misma longitud.
- No se utilizan como alternativas expresiones tales como “todas las anteriores” o “ninguna de las anteriores”.
- Se utilizan cinco alternativas para minimizar los aciertos al azar.
- Se evitan negaciones dobles, es decir, una en el enunciado general y otra en las alternativas.
- Las alternativas erróneas no se ocultan, no significan lo mismo o lo contrario.
- Las alternativas de los ítems son homogéneas.
- Las alternativas correctas están expresadas con el mismo detalle que las incorrectas.
- Se evitan los ítems que pueden contestarse por simple lógica o sentido común.
- Los enunciados presentados en los ítems no proporcionan pistas para responder a otros.
- Las alternativas incorrectas no son irrelevantes.
- La ubicación de las alternativas correctas están establecidas al azar.
- Cada uno de los ítems evalúa un solo problema.

### **3.4.3 COMPROBACIÓN DE LA UNIDIMENSIONALIDAD**

Se comprobó la unidimensionalidad de los ítems de la PAAP mediante el análisis factorial utilizando el paquete estadístico Statistical Package for the Social

Sciences (SPSS). Se realiza el análisis factorial<sup>9</sup> de las variables continuas (Cuesta & Muñiz, 1994), la base de datos de los 100 ítems de la PAAP está formada por unos y ceros, es decir, respuestas correctas e incorrectas respectivamente, obteniendo los siguientes resultados (Anexo H).

**Comunalidades.** Se observa la proporción de variabilidad de cada ítem explicada por el conjunto de los 34 primeros factores.

**Varianza total explicada.** La variabilidad total (48,25%) estará explicada por el conjunto de 34 factores y también lo estará la variabilidad de cada ítem en particular como se presenta en las comunalidades. El criterio de Kaiser-Guttman se utiliza para determinar el número de factores a extraer, pero se observa que el valor propio del factor 1 es notablemente superior al valor propio del factor 2 y éste no difiere mucho del resto, por tanto el factor 1 se podría considerar como un factor dominante, lo que llevaría a concluir que los ítems pueden considerarse aproximadamente unidimensionales<sup>10</sup>.

**Matriz de componentes.** Explica la contribución de cada uno de los ítems a los factores extraídos, por ejemplo los ítems que contribuyen más al factor 1 son los ítems 41, 43 y 88 que corresponden a ecuaciones lineales, ecuaciones lineales y regla de tres simple directa, respectivamente. Estos ítems componen la variable latente (factor 1) denominada “aptitud”.

### 3.4.4 ELECCIÓN DEL MODELO DE TRI

Se eligió uno de los modelos de TRI a priori, por el siguiente razonamiento (Tabla 3.8):

Modelo logístico	Elección	Razonamiento
Un parámetro	No	El modelo de Rasch se centra en la restricción del parámetro de discriminación, ya que los ítems presentan típicamente diversos grados de discriminación (Baker, 1992).

<sup>9</sup> Método de extracción: Análisis de componentes principales.

<sup>10</sup> Aun cuando se incumplan algunos de los supuestos del modelo, éste ajusta razonablemente a los datos (Muñiz, Rogers y Swaminathan, 1989) en (Cuesta & Muñiz, 1994).

Dos parámetros	Sí	El nivel de discriminación se establece a priori por el número de preguntas en las subsecciones que determinan la estructura de la PAAP (Unidad de Admisión).
		Se elige 100 preguntas de un banco de 5.000 aproximadamente, que ya fueron tomadas en otros países, se establece a priori un nivel de dificultad: fácil (30%), mediana (40%) y difícil (30%) (Unidad de Admisión).
Tres parámetros	No	En el modelo de tres parámetros la estimación del parámetro c no está lo bien resuelta que fuera de desear (Muñiz, 1997).

**Tabla 3.8 Elección del modelo logístico de TRI.**

El modelo logístico de dos parámetros elegido tiene los siguientes supuestos:

- Depende de la aptitud del individuo  $j$  ( $\theta_j$ ).
- Depende de la dificultad del ítem  $i$  ( $b_i$ ).
- Depende de la discriminación del ítem  $i$  ( $a_i$ ).
- Supone que los individuos no contestan ningún ítem al azar ( $c_i = 0$ ).

Su formulación matemática aplicando la ecuación (11) es:

$$P_i(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, 2977 \\ i = 1, \dots, 100 \end{array} \quad (127)$$

### 3.4.5 ESTIMACIÓN DE LOS PARÁMETROS

Se estimó los parámetros de cada uno de los ítems y la aptitud de cada uno de los individuos de la PAAP con el software de análisis estadístico Number Cruncher Statistical System (NCSS). Este programa utiliza el algoritmo de estimación de máxima verosimilitud marginal/maximización de la esperanza (marginal maximum likelihood estimation/expectation maximization MMLE/EM) de Bock-Aikin (1981).

#### 3.4.5.1 Número de parámetros a estimar

Con el modelo logístico de dos parámetros elegido, se calcula el número de parámetros a estimar en la PAAP (Tabla 2.9) y se presenta en la Tabla 3.9.

Modelo logístico	Parámetros a estimar	Número de parámetros a estimar	Total de parámetros a estimar
Dos parámetros	$a$ : Discriminación	100	3.177
	$b$ : Dificultad	100	
	$\theta$ : Aptitud	2.977	

**Tabla 3.9 Número de parámetros a estimar.**

### 3.4.5.2 Parámetros estimados de los ítems

Con el modelo logístico de dos parámetros elegido, se obtuvieron los parámetros estimados de discriminación ( $a_i$ ) y dificultad ( $b_i$ ) para los 100 ítems de la PAAP. La interpretación del parámetro de discriminación del ítem se realiza mediante los niveles de discriminación (Tabla 2.4) y los niveles de inclinación de la pendiente (Tabla 2.5) según los rangos de los valores del parámetro. La interpretación del parámetro de dificultad del ítem se realiza mediante los niveles de dificultad (Tabla 2.6) y la interrelación con los niveles de aptitud de los individuos (Tabla 2.7) según los rangos de los valores del parámetro, y se presenta en la Tabla 3.10.



Variable	Parámetro de discriminación del ítem $i$ ( $a_i$ )			Parámetro de dificultad del ítem $i$ ( $b_i$ )		
	Valor	Nivel de discriminación	Nivel de inclinación de la pendiente	Valor	Nivel de dificultad	Interrelaciona los individuos con nivel de aptitud...
Item001	0,391553	Bajo	Poco inclinada	1,182534	Difícil	Alto
Item002	0,440189	Bajo	Poco inclinada	0,229787	Mediana	Moderado
Item003	0,520683	Bajo	Poco inclinada	-5,336126	Muy fácil	Muy bajo
Item004	0,533804	Bajo	Poco inclinada	0,287705	Mediana	Moderado
Item005	0,370720	Bajo	Poco inclinada	-0,873715	Fácil	Bajo
Item006	0,748179	Moderado	Moderadamente inclinada	2,017358	Muy difícil	Muy alto
Item007	0,552829	Bajo	Poco inclinada	3,174877	Muy difícil	Muy alto
Item008	0,051662	Muy bajo	Muy poco inclinada	26,227699	Muy difícil	Muy alto
Item009	0,413262	Bajo	Poco inclinada	-0,813871	Fácil	Bajo
Item010	0,119007	Muy bajo	Muy poco inclinada	14,906202	Muy difícil	Muy alto
Item011	0,211996	Muy bajo	Muy poco inclinada	1,725775	Muy difícil	Muy alto
Item012	0,386606	Bajo	Poco inclinada	2,950032	Muy difícil	Muy alto
Item013	0,744296	Moderado	Moderadamente inclinada	-2,078396	Muy fácil	Muy bajo
Item014	0,155871	Muy bajo	Muy poco inclinada	5,137764	Muy difícil	Muy alto
Item015	0,469248	Bajo	Poco inclinada	3,224901	Muy difícil	Muy alto
Item016	0,174773	Muy bajo	Muy poco inclinada	3,086553	Muy difícil	Muy alto
Item017	0,716463	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,265876	Mediana	Moderado
Item018	0,681810	Moderado	Moderadamente inclinada	0,696667	Difícil	Alto
Item019	0,484113	Bajo	Poco inclinada	-1,792455	Muy fácil	Muy bajo
Item020	0,507933	Bajo	Poco inclinada	1,306133	Difícil	Alto
Item021	0,420545	Bajo	Poco inclinada	1,575572	Muy difícil	Muy alto
Item022	0,338255	Muy bajo	Muy poco inclinada	-2,804198	Muy fácil	Muy bajo
Item023	0,075791	Muy bajo	Muy poco inclinada	-8,328866	Muy fácil	Muy bajo
Item024	0,207380	Muy bajo	Muy poco inclinada	5,490252	Muy difícil	Muy alto
Item025	0,412984	Bajo	Poco inclinada	-2,295664	Muy fácil	Muy bajo
Item026	0,536646	Bajo	Poco inclinada	-2,244814	Muy fácil	Muy bajo
Item027	0,406807	Bajo	Poco inclinada	-4,833323	Muy fácil	Muy bajo
Item028	0,434216	Bajo	Poco inclinada	2,521999	Muy difícil	Muy alto
Item029	0,362297	Bajo	Poco inclinada	-2,484019	Muy fácil	Muy bajo
Item030	0,295843	Muy bajo	Muy poco inclinada	4,982974	Muy difícil	Muy alto
Item031	0,660795	Moderado	Moderadamente inclinada	0,976915	Difícil	Alto
Item032	0,461566	Bajo	Poco inclinada	1,617487	Muy difícil	Muy alto
Item033	0,676859	Moderado	Moderadamente inclinada	0,969481	Difícil	Alto
Item034	0,803774	Moderado	Moderadamente inclinada	0,338683	Mediana	Moderado

Item035	0,050208	Muy bajo	Muy poco inclinada	27,969854	Muy difícil	Muy alto
Item036	0,290414	Muy bajo	Muy poco inclinada	-0,938255	Fácil	Bajo
Item037	0,243456	Muy bajo	Muy poco inclinada	10,146791	Muy difícil	Muy alto
Item038	0,303297	Muy bajo	Muy poco inclinada	2,161822	Muy difícil	Muy alto
Item039	0,236223	Muy bajo	Muy poco inclinada	-2,530985	Muy fácil	Muy bajo
Item040	0,331021	Muy bajo	Muy poco inclinada	-0,738769	Fácil	Bajo
Item041	1,071513	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,114193	Fácil	Bajo
Item042	0,535492	Bajo	Poco inclinada	2,080297	Muy difícil	Muy alto
Item043	1,116350	Moderado	Moderadamente inclinada	0,149252	Mediana	Moderado
Item044	0,214613	Muy bajo	Muy poco inclinada	3,267182	Muy difícil	Muy alto
Item045	0,520742	Bajo	Poco inclinada	-1,615096	Muy fácil	Muy bajo
Item046	0,555640	Bajo	Poco inclinada	1,286785	Difícil	Alto
Item047	0,825638	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,726268	Fácil	Bajo
Item048	0,898977	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,249226	Fácil	Bajo
Item049	0,472458	Bajo	Poco inclinada	1,699484	Muy difícil	Muy alto
Item050	0,247215	Muy bajo	Muy poco inclinada	5,268207	Muy difícil	Muy alto
Item051	0,564415	Bajo	Poco inclinada	1,771642	Muy difícil	Muy alto
Item052	0,703825	Moderado	Moderadamente inclinada	0,705346	Difícil	Alto
Item053	0,745368	Moderado	Moderadamente inclinada	0,138896	Mediana	Moderado
Item054	0,750376	Moderado	Moderadamente inclinada	0,176614	Mediana	Moderado
Item055	0,536958	Bajo	Poco inclinada	1,718752	Muy difícil	Muy alto
Item056	0,040726	Muy bajo	Muy poco inclinada	36,305913	Muy difícil	Muy alto
Item057	0,930322	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,775078	Fácil	Bajo
Item058	0,881726	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,420698	Mediana	Moderado
Item059	0,573537	Bajo	Poco inclinada	1,778004	Muy difícil	Muy alto
Item060	0,658647	Moderado	Moderadamente inclinada	0,346225	Mediana	Moderado
Item061	0,440031	Bajo	Poco inclinada	2,633619	Muy difícil	Muy alto
Item062	0,126173	Muy bajo	Muy poco inclinada	15,752198	Muy difícil	Muy alto
Item063	0,755737	Moderado	Moderadamente inclinada	1,518770	Muy difícil	Muy alto
Item064	0,355166	Bajo	Poco inclinada	-0,223627	Mediana	Moderado
Item065	0,842072	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,081002	Fácil	Bajo
Item066	0,654025	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,846031	Fácil	Bajo
Item067	0,925703	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,894370	Muy fácil	Muy bajo
Item068	0,789669	Moderado	Moderadamente inclinada	0,824339	Difícil	Alto
Item069	0,555300	Bajo	Poco inclinada	1,097118	Difícil	Alto
Item070	0,102047	Muy bajo	Muy poco inclinada	7,390741	Muy difícil	Muy alto
Item071	0,584398	Bajo	Poco inclinada	2,663045	Muy difícil	Muy alto
Item072	0,077080	Muy bajo	Muy poco inclinada	19,937375	Muy difícil	Muy alto

Item073	0,693328	Moderado	Moderadamente inclinada	0,887643	Difícil	Alto
Item074	0,675697	Moderado	Moderadamente inclinada	1,292890	Difícil	Alto
Item075	0,729060	Moderado	Moderadamente inclinada	0,261917	Mediana	Moderado
Item076	1,018884	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,855409	Muy fácil	Muy bajo
Item077	0,830962	Moderado	Moderadamente inclinada	0,690543	Difícil	Alto
Item078	0,807776	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,215557	Mediana	Moderado
Item079	0,519257	Bajo	Poco inclinada	1,571030	Muy difícil	Muy alto
Item080	0,822547	Moderado	Moderadamente inclinada	0,418667	Mediana	Moderado
Item081	0,265110	Muy bajo	Muy poco inclinada	3,256099	Muy difícil	Muy alto
Item082	0,620567	Bajo	Poco inclinada	1,291529	Difícil	Alto
Item083	0,758733	Moderado	Moderadamente inclinada	0,948951	Difícil	Alto
Item084	0,539214	Bajo	Poco inclinada	1,452634	Difícil	Alto
Item085	0,392011	Bajo	Poco inclinada	3,958521	Muy difícil	Muy alto
Item086	0,865582	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,538342	Muy fácil	Muy bajo
Item087	0,913622	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,330493	Mediana	Moderado
Item088	1,285374	Moderado	Moderadamente inclinada	-0,664623	Fácil	Bajo
Item089	0,564818	Bajo	Poco inclinada	3,237643	Muy difícil	Muy alto
Item090	0,738039	Moderado	Moderadamente inclinada	0,706543	Difícil	Alto
Item091	0,477686	Bajo	Poco inclinada	-1,134107	Fácil	Bajo
Item092	0,721861	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,974575	Muy fácil	Muy bajo
Item093	0,663998	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,549816	Muy fácil	Muy bajo
Item094	0,981443	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,881467	Muy fácil	Muy bajo
Item095	0,422115	Bajo	Poco inclinada	1,856933	Muy difícil	Muy alto
Item096	0,437771	Bajo	Poco inclinada	1,260839	Difícil	Alto
Item097	0,734685	Moderado	Moderadamente inclinada	-1,701211	Muy fácil	Muy bajo
Item098	0,527108	Bajo	Poco inclinada	0,018490	Mediana	Moderado
Item099	0,562431	Bajo	Poco inclinada	-0,268215	Mediana	Moderado
Item100	0,637057	Bajo	Poco inclinada	-2,068476	Muy fácil	Muy bajo

**Tabla 3.10** Parámetros estimados de los ítems.

El ítem 88 correspondiente al temario regla de tres simple directa tiene el mayor valor del parámetro de discriminación ( $a_{88} = 1,29$ ), representa a un ítem con un nivel de discriminación moderado, la curva tiene una pendiente moderadamente inclinada y la probabilidad de acertar el ítem cambia suavemente a medida que el nivel de aptitud aumenta (Figura 3.3); mientras que, el ítem 56 correspondiente al temario inecuaciones no lineales tiene el menor valor del parámetro de discriminación ( $a_{56} = 0,04$ ), representa a un ítem con un nivel de discriminación muy bajo, la curva tiene una pendiente muy poco inclinada y la probabilidad de acertar el ítem cambia muy lentamente a medida que el nivel de aptitud aumenta (Figura 3.3).

El ítem 56 correspondiente al temario inecuaciones no lineales tiene el mayor valor del parámetro de dificultad ( $b_{56} = 36,31$ ), representa a un ítem muy difícil, e interrelaciona los individuos con nivel de aptitud muy alto, la probabilidad de acertar el ítem es muy baja para la mayoría de la escala de aptitud e incrementa sólo cuando los niveles de aptitud son muy altos (Figura 3.3); mientras que, el ítem 23 correspondiente al temario completar oraciones tiene el menor valor del parámetro de dificultad ( $b_{23} = -8,33$ ), representa a un ítem muy fácil, e interrelaciona los individuos con nivel de aptitud muy bajo, la probabilidad de acertar el ítem es alta para los individuos de nivel de aptitud muy bajo y se aproxima a uno para los individuos de nivel de aptitud moderado (Figura 3.3).

En la Tabla 3.11 se presenta la frecuencia de los niveles de discriminación de los 100 ítems de la PAAP.

Nivel de discriminación	Número de ítems	%
Muy bajo	22	22,0
Bajo	40	40,0
Moderado	38	38,0
Alto	0	0,0
Muy alto	0	0,0
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100,0</b>

**Tabla 3.11 Frecuencia de los niveles de discriminación de los ítems.**

En la tabla anterior se observa que los ítems con un nivel de discriminación bajo presentan el mayor porcentaje con el 40%, mientras que, los ítems con un nivel de discriminación alto y muy alto no tienen ninguno.

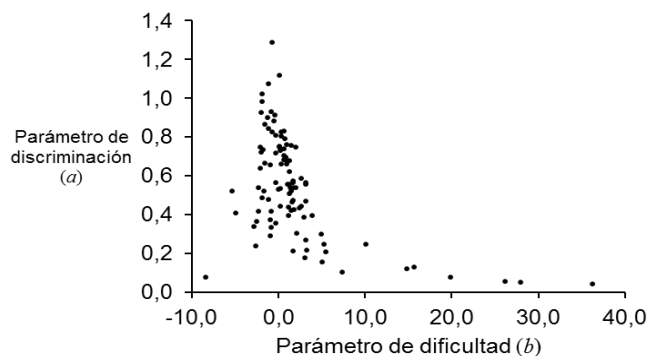
En la Tabla 3.12 se presenta la frecuencia de los niveles de dificultad de los 100 ítems de la PAAP.

Nivel de dificultad	Número de ítems	%
Muy fácil	19	19,0
Fácil	12	12,0
Mediana	16	16,0
Difícil	17	17,0
Muy difícil	36	36,0
<b>Total</b>	<b>100</b>	<b>100,0</b>

**Tabla 3.12 Frecuencia de los niveles de dificultad de los ítems.**

En la tabla anterior se observa que los ítems muy difíciles presentan el mayor porcentaje con el 36%, mientras que, los ítems fáciles presentan el menor porcentaje con el 12%.

En la Figura 3.2 se grafican los valores de los parámetros estimados de discriminación ( $a_i$ ) y dificultad ( $b_i$ ) de los 100 ítems de la PAAP.



**Figura 3.2 Parámetro de discriminación vs. parámetro de dificultad.**

En la figura anterior se observa que cuando se incrementa el valor del parámetro de discriminación ( $a_i$ ) disminuye el valor del parámetro de dificultad ( $b_i$ ) y viceversa.

### 3.4.5.2.1 Intervalos de confianza de los parámetros estimados

Intervalo de confianza para  $a$  de nivel 95%.

Aplicando la expresión (61):

$$\hat{a} \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j (\theta_j - \bar{\theta})^2}} Z_{0,025} \quad (128)$$

Intervalo de confianza para  $b$  de nivel 95%.

Aplicando la expresión (62):

$$\hat{b} \pm \sqrt{\frac{1}{\hat{a}^2} \left[ \frac{1}{\sum_{j=1}^k f_j P_j Q_j} + S_a^2 (\hat{b} - \bar{\theta})^2 \right]} Z_{0,025} \quad (129)$$

Se obtienen los intervalos de confianza de los parámetros estimados de discriminación ( $a_i$ ) y dificultad ( $b_i$ ) para los 100 ítems de la PAAP, y se presentan en la Tabla 3.13.

Variable	Parámetro de discriminación del ítem $i$ ( $a_i$ )			Parámetro de dificultad del ítem $i$ ( $b_i$ )		
	Valor	Intervalo de confianza al 95%		Valor	Intervalo de confianza al 95%	
		Límite inferior	Límite superior		Límite inferior	Límite superior
Item001	0,391553	0,318185	0,464921	1,182534	0,902082	1,462986
Item002	0,440189	0,367171	0,513207	0,229787	0,058678	0,400896
Item003	0,520683	0,373160	0,668206	-5,336126	-6,744274	-3,927978
Item004	0,533804	0,458607	0,609001	0,287705	0,143365	0,432045
Item005	0,370720	0,297988	0,443452	-0,873715	-1,129428	-0,618002
Item006	0,748179	0,653382	0,842976	2,017358	1,780158	2,254558
Item007	0,552829	0,455157	0,650501	3,174877	2,651091	3,698663
Item008	0,051662	-0,032826	0,136150	26,227699	-16,636833	69,092231
Item009	0,413262	0,339648	0,486876	-0,813871	-1,037533	-0,590209
Item010	0,119007	0,022366	0,215648	14,906202	2,850551	26,961853
Item011	0,211996	0,141617	0,282375	1,725775	1,068854	2,382696
Item012	0,386606	0,305102	0,468110	2,950032	2,332173	3,567891
Item013	0,744296	0,644615	0,843977	-2,078396	-2,333467	-1,823325
Item014	0,155871	0,081752	0,229990	5,137764	2,676288	7,599240
Item015	0,469248	0,378872	0,559624	3,224901	2,629032	3,820770
Item016	0,174773	0,103447	0,246099	3,086553	1,777140	4,395966
Item017	0,716463	0,635572	0,797354	-0,265876	-0,375155	-0,156597
Item018	0,681810	0,601575	0,762045	0,696667	0,564688	0,828646
Item019	0,484113	0,403641	0,564585	-1,792455	-2,105740	-1,479170
Item020	0,507933	0,430791	0,585075	1,306133	1,073703	1,538563
Item021	0,420545	0,345085	0,496005	1,575572	1,258610	1,892534
Item022	0,338255	0,259192	0,417318	-2,804198	-3,468361	-2,140035

Item023	0,075791	0,003816	0,147766	-8,328866	-16,281148	-0,376584
Item024	0,207380	0,127429	0,287331	5,490252	3,380657	7,599847
Item025	0,412984	0,332686	0,493282	-2,295664	-2,751017	-1,840311
Item026	0,536646	0,449294	0,623998	-2,244814	-2,603132	-1,886496
Item027	0,406807	0,299777	0,513837	-4,833323	-6,051751	-3,614895
Item028	0,434216	0,352881	0,515551	2,521999	2,049850	2,994148
Item029	0,362297	0,283632	0,440962	-2,484019	-3,035868	-1,932170
Item030	0,295843	0,207847	0,383839	4,982974	3,527402	6,438546
Item031	0,660795	0,580086	0,741504	0,976915	0,822579	1,131251
Item032	0,461566	0,384530	0,538602	1,617487	1,321106	1,913868
Item033	0,676859	0,595623	0,758095	0,969481	0,819073	1,119889
Item034	0,803774	0,720312	0,887236	0,338683	0,237960	0,439406
Item035	0,050208	-0,035531	0,135947	27,969854	-19,762026	75,701734
Item036	0,290414	0,219267	0,361561	-0,938255	-1,273273	-0,603237
Item037	0,243456	0,117670	0,369242	10,146791	4,994553	15,299029
Item038	0,303297	0,229634	0,376960	2,161822	1,601915	2,721729
Item039	0,236223	0,163280	0,309166	-2,530985	-3,355442	-1,706528
Item040	0,331021	0,259383	0,402659	-0,738769	-1,007167	-0,470371
Item041	1,071513	0,968104	1,174922	-1,114193	-1,222047	-1,006339
Item042	0,535492	0,452206	0,618778	2,080297	1,756543	2,404051
Item043	1,116350	1,020417	1,212283	0,149252	0,075553	0,222951
Item044	0,214613	0,141355	0,287871	3,267182	2,122641	4,411723
Item045	0,520742	0,439838	0,601646	-1,615096	-1,883525	-1,346667
Item046	0,555640	0,476985	0,634295	1,286785	1,075208	1,498362
Item047	0,825638	0,738514	0,912762	-0,726268	-0,838118	-0,614418
Item048	0,898977	0,803029	0,994925	-1,249226	-1,384672	-1,113780
Item049	0,472458	0,394602	0,550314	1,699484	1,397742	2,001226
Item050	0,247215	0,163613	0,330817	5,268207	3,503618	7,032796
Item051	0,564415	0,482275	0,646555	1,771642	1,505697	2,037587
Item052	0,703825	0,622825	0,784825	0,705346	0,576680	0,834012
Item053	0,745368	0,664060	0,826676	0,138896	0,035130	0,242662
Item054	0,750376	0,668896	0,831856	0,176614	0,072960	0,280268
Item055	0,536958	0,456403	0,617513	1,718752	1,447793	1,989711
Item056	0,040726	-0,047012	0,128464	36,305913	-41,871326	114,483152
Item057	0,930322	0,838237	1,022407	-0,775078	-0,877796	-0,672360
Item058	0,881726	0,794179	0,969273	-0,420698	-0,514936	-0,326460
Item059	0,573537	0,490932	0,656142	1,778004	1,515002	2,041006
Item060	0,658647	0,579947	0,737347	0,346225	0,225639	0,466811
Item061	0,440031	0,357508	0,522554	2,633619	2,144047	3,123191
Item062	0,126173	0,021757	0,230589	15,752198	2,778262	28,726134
Item063	0,755737	0,666994	0,844480	1,518770	1,338632	1,698908
Item064	0,355166	0,283657	0,426675	-0,223627	-0,433768	-0,013486
Item065	0,842072	0,751065	0,933079	-1,081002	-1,211842	-0,950162
Item066	0,654025	0,572844	0,735206	-0,846031	-0,992505	-0,699557
Item067	0,925703	0,816080	1,035326	-1,894370	-2,088565	-1,700175
Item068	0,789669	0,705052	0,874286	0,824339	0,702229	0,946449
Item069	0,555300	0,477556	0,633044	1,097118	0,904532	1,289704
Item070	0,102047	0,028753	0,175341	7,390741	2,060934	12,720548
Item071	0,584398	0,491525	0,677271	2,663045	2,264844	3,061246
Item072	0,077080	-0,012224	0,166384	19,937375	-3,124843	42,999593
Item073	0,693328	0,611918	0,774738	0,887643	0,746140	1,029146
Item074	0,675697	0,592501	0,758893	1,292890	1,115792	1,469988
Item075	0,729060	0,648236	0,809884	0,261917	0,153997	0,369837
Item076	1,018884	0,902983	1,134785	-1,855409	-2,031750	-1,679068
Item077	0,830962	0,745433	0,916491	0,690543	0,580412	0,800674
Item078	0,807776	0,723842	0,891710	-0,215557	-0,312862	-0,118252
Item079	0,519257	0,440348	0,598166	1,571030	1,311294	1,830766

Item080	0,822547	0,738258	0,906836	0,418667	0,317801	0,519533
Item081	0,265110	0,189356	0,340864	3,256099	2,311164	4,201034
Item082	0,620567	0,539531	0,701603	1,291529	1,100155	1,482903
Item083	0,758733	0,674591	0,842875	0,948951	0,814792	1,083110
Item084	0,539214	0,460242	0,618186	1,452634	1,216170	1,689098
Item085	0,392011	0,301372	0,482650	3,958521	3,072451	4,844591
Item086	0,865582	0,767160	0,964004	-1,538342	-1,703677	-1,373007
Item087	0,913622	0,825210	1,002034	-0,330493	-0,419764	-0,241222
Item088	1,285374	1,176661	1,394087	-0,664623	-0,738912	-0,590334
Item089	0,564818	0,464877	0,664759	3,237643	2,705803	3,769483
Item090	0,738039	0,655855	0,820223	0,706543	0,583251	0,829835
Item091	0,477686	0,401160	0,554212	-1,134107	-1,361619	-0,906595
Item092	0,721861	0,625564	0,818158	-1,974575	-2,220894	-1,728256
Item093	0,663998	0,576740	0,751256	-1,549816	-1,758731	-1,340901
Item094	0,981443	0,867803	1,095083	-1,881467	-2,065843	-1,697091
Item095	0,422115	0,345357	0,498873	1,856933	1,496337	2,217529
Item096	0,437771	0,362946	0,512596	1,260839	0,999077	1,522601
Item097	0,734685	0,641660	0,827710	-1,701211	-1,909511	-1,492911
Item098	0,527108	0,452102	0,602114	0,018490	-0,122711	0,159691
Item099	0,562431	0,486200	0,638662	-0,268215	-0,404861	-0,131569
Item100	0,637057	0,545155	0,728959	-2,068476	-2,354442	-1,782510

**Tabla 3.13 Intervalos de confianza de los parámetros estimados.**

Con el 95% de confianza el verdadero valor del parámetro de discriminación del ítem 1 ( $a_1$ ) se encuentra entre los dos límites 0,32 y 0,46. Análogamente se puede interpretar para cada uno de los parámetros de discriminación de los 100 ítems de la PAAP.

Con el 95% de confianza el verdadero valor del parámetro de dificultad del ítem 1 ( $b_1$ ) se encuentra entre los dos límites 0,90 y 1,46. Análogamente se puede interpretar para cada uno de los parámetros de dificultad de los 100 ítems de la PAAP.

### 3.4.5.3 Aptitudes estimadas de los individuos

Con el modelo logístico de dos parámetros elegido, se obtuvieron las aptitudes estimadas ( $\theta_j$ ) para los 2.977 individuos de la PAAP<sup>11</sup>. La interpretación se realiza mediante los niveles de aptitud (Tabla 2.3) según los rangos de los valores del parámetro, y se presenta en la Tabla 3.14.

<sup>11</sup> Se presentan las aptitudes estimadas de solo 100 individuos el resto se adjunta en el archivo (los valores tienen hasta 18 decimales).



Individuo	Propedéutico	Aptitud del individuo $j$ ( $\theta_j$ )	
		Valor	Nivel de aptitud
Individuo0001	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,288282	Bajo
Individuo0002	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,887603	Muy bajo
Individuo0003	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,235591	Moderado
Individuo0004	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,722469	Bajo
Individuo0005	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,335542	Moderado
Individuo0006	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,698821	Alto
Individuo0007	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,116722	Moderado
Individuo0008	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,439152	Muy bajo
Individuo0009	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,084918	Bajo
Individuo0010	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,003866	Moderado
Individuo0011	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,969638	Bajo
Individuo0012	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,288503	Moderado
Individuo0013	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,211591	Moderado
Individuo0014	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,417803	Bajo
Individuo0015	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,714577	Bajo
Individuo0016	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,500000	Muy bajo
Individuo0017	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,046845	Moderado
Individuo0018	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,075757	Moderado
Individuo0019	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,886789	Bajo
Individuo0020	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,226560	Moderado
Individuo0021	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,139853	Alto
Individuo0022	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,041124	Muy alto
Individuo0023	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,502940	Muy alto
Individuo0024	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,275558	Moderado
Individuo0025	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,599886	Muy bajo
Individuo0026	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,653583	Alto
Individuo0027	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,269462	Moderado
Individuo0028	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,093668	Moderado
Individuo0029	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-1,230286	Bajo
Individuo0030	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,622540	Muy bajo
Individuo0031	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,421312	Moderado
Individuo0032	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,185980	Alto
Individuo0033	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-1,487170	Bajo
Individuo0034	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,493928	Moderado
Individuo0035	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,173135	Bajo
Individuo0036	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,154807	Moderado
Individuo0037	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,058529	Moderado
Individuo0038	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,038126	Moderado
Individuo0039	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,149586	Moderado
Individuo0040	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,255786	Moderado
Individuo0041	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,871244	Alto
Individuo0042	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,442864	Muy alto
Individuo0043	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,761120	Alto
Individuo0044	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,310790	Muy alto
Individuo0045	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,000787	Muy alto
Individuo0046	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,088921	Moderado
Individuo0047	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,990482	Muy alto
Individuo0048	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,773207	Bajo
Individuo0049	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,152256	Moderado
Individuo0050	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,767098	Alto
Individuo0051	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,500000	Muy alto
Individuo0052	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,078684	Alto
Individuo0053	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,590013	Alto
Individuo0054	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,221749	Moderado
Individuo0055	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,227562	Moderado
Individuo0056	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,336133	Moderado
Individuo0057	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,500687	Bajo
Individuo0058	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,505096	Bajo
Individuo0059	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,697715	Muy alto

Individuo0060	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,076664	Bajo
Individuo0061	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,165355	Moderado
Individuo0062	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,153724	Moderado
Individuo0063	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,224853	Moderado
Individuo0064	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,115442	Muy bajo
Individuo0065	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,458980	Alto
Individuo0066	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-0,252105	Moderado
Individuo0067	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,778586	Bajo
Individuo0068	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,438478	Alto
Individuo0069	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,714286	Bajo
Individuo0070	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,341183	Moderado
Individuo0071	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,229625	Muy alto
Individuo0072	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,063502	Moderado
Individuo0073	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-1,334328	Bajo
Individuo0074	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,192347	Alto
Individuo0075	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,884983	Muy alto
Individuo0076	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,196688	Alto
Individuo0077	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,956985	Muy alto
Individuo0078	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,035534	Moderado
Individuo0079	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,131587	Moderado
Individuo0080	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,500000	Muy alto
Individuo0081	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,165623	Moderado
Individuo0082	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,083837	Moderado
Individuo0083	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,361148	Moderado
Individuo0084	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,714193	Bajo
Individuo0085	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,078613	Moderado
Individuo0086	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-0,136581	Moderado
Individuo0087	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,364763	Bajo
Individuo0088	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,625443	Muy bajo
Individuo0089	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,782410	Alto
Individuo0090	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,561471	Bajo
Individuo0091	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,269665	Moderado
Individuo0092	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,180929	Moderado
Individuo0093	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,985345	Muy alto
Individuo0094	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-0,461945	Moderado
Individuo0095	Propedéutico de Empresarial y Económicas	2,500000	Muy alto
Individuo0096	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,159727	Moderado
Individuo0097	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,038014	Muy bajo
Individuo0098	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,240113	Moderado
Individuo0099	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,372826	Muy alto
Individuo0100	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,065092	Moderado

**Tabla 3.14 Aptitudes estimadas de los individuos.**

En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias 44 individuos obtuvieron el mayor valor de aptitud ( $\theta_j = 2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy alto, mientras que, 23 individuos obtuvieron el menor valor de aptitud ( $\theta_j = -2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy bajo.

En el Propedéutico de Empresarial y Económicas el individuo 95 obtuvo el mayor valor de aptitud ( $\theta_j = 2,5$ ), representa a un individuo con nivel de aptitud muy alto,

mientras que, 7 individuos obtuvieron el menor valor de aptitud ( $\theta_j = -2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy bajo.

En total 45 individuos obtuvieron el mayor valor de aptitud ( $\theta_j = 2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy alto, mientras que, 30 individuos obtuvieron el menor valor de aptitud ( $\theta_j = -2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy bajo.

En la Tabla 3.15 se presenta la frecuencia de los niveles de aptitud de los 2.977 individuos de la PAAP.

Nivel de aptitud	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias		Propedéutico de Empresarial y Económicas		Total	
	Número de individuos	%	Número de individuos	%	Número de individuos	%
Muy bajo	181	6,7	34	11,7	215	7,2
Bajo	643	23,9	103	35,4	746	25,1
Moderado	1.005	37,4	102	35,1	1.107	37,2
Alto	604	22,5	45	15,5	649	21,8
Muy alto	253	9,4	7	2,4	260	8,7
<b>Total</b>	<b>2.686</b>	<b>100,0</b>	<b>291</b>	<b>100,0</b>	<b>2.977</b>	<b>100,0</b>

**Tabla 3.15 Frecuencia de los niveles de aptitud de los individuos.**

En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias los individuos con un nivel de aptitud moderado presentan el mayor porcentaje con el 37,4%, mientras que, los individuos con un nivel de aptitud muy bajo presentan el menor porcentaje con el 6,7%.

En el Propedéutico de Empresarial y Económicas los individuos con un nivel de aptitud bajo presentan el mayor porcentaje con el 35,4%, mientras que, los individuos con un nivel de aptitud muy alto presentan el menor porcentaje con el 2,4%.

En total los individuos con un nivel de aptitud moderado presentan el mayor porcentaje con el 37,2%, mientras que, los individuos con un nivel de aptitud muy bajo presentan el menor porcentaje con el 7,2%.

Comparando el nivel de aptitud muy alto, los individuos del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias (9,4), son mayores que, los individuos del Propedéutico de Empresarial y Económicas (2,4); mientras que, comparando el nivel de aptitud muy bajo, los individuos del Propedéutico de Empresarial y Económicas (11,7), son mayores que, los individuos del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias (6,7).

### 3.4.5.3.1 Intervalos de confianza de las aptitudes estimadas

Intervalo de confianza para  $\theta_j$  de nivel 95%.

Aplicando la expresión (74):

$$\hat{\theta}_j \pm \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^{100} a_i^2 P_{ij} Q_{ij}}} Z_{0,05/2} \quad (130)$$

Se obtienen los intervalos de confianza de las aptitudes estimadas ( $\theta_j$ ) para los 2.977 individuos de la PAAP<sup>12</sup>, y se presentan en la Tabla 3.16.

Individuo	Propedéutico	Aptitud del individuo $j$ ( $\theta_j$ )	Intervalo de confianza al 95%	
		Valor	Límite inferior	Límite superior
Individuo0001	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,288282	-2,037054	-0,539511
Individuo0002	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,887603	-2,693241	-1,081965
Individuo0003	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,235591	-0,491171	0,962354
Individuo0004	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,722469	-1,443851	-0,001087
Individuo0005	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,335542	-0,395058	1,066142
Individuo0006	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,698821	-0,050319	1,447960
Individuo0007	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,116722	-0,606220	0,839665
Individuo0008	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,439152	-3,324506	-1,553797
Individuo0009	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,084918	-1,821005	-0,348830
Individuo0010	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,003866	-0,723786	0,716053
Individuo0011	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,969638	-1,699967	-0,239309
Individuo0012	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,288503	-1,004863	0,427856
Individuo0013	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,211591	-0,514335	0,937516
Individuo0014	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,417803	-2,176364	-0,659243
Individuo0015	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,714577	-1,435749	0,006594
Individuo0016	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,500000	-3,395852	-1,604148
Individuo0017	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,046845	-0,765900	0,672210
Individuo0018	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,075757	-0,646061	0,797575
Individuo0019	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,886789	-1,613608	-0,159970
Individuo0020	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,226560	-0,943253	0,490132
Individuo0021	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,139853	0,359058	1,920648
Individuo0022	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,041124	1,165918	2,916330
Individuo0023	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,502940	0,688882	2,316997
Individuo0024	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,275558	-0,991967	0,440850

<sup>12</sup> Se presentan las aptitudes estimadas de solo 100 individuos el resto se adjunta en el archivo (los valores tienen hasta 18 decimales).

Individuo0025	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,599886	-2,374510	-0,825262
Individuo0026	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,653583	-0,092867	1,400033
Individuo0027	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,269462	-0,985896	0,446973
Individuo0028	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,093668	-0,628630	0,815965
Individuo0029	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-1,230286	-1,975108	-0,485464
Individuo0030	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,622540	-2,399353	-0,845726
Individuo0031	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,421312	-1,137820	0,295195
Individuo0032	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,185980	0,401316	1,970644
Individuo0033	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-1,487170	-2,251531	-0,722810
Individuo0034	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,493928	-0,243886	1,231742
Individuo0035	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,173135	-1,914326	-0,431945
Individuo0036	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,154807	-0,569270	0,878884
Individuo0037	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,058529	-0,662846	0,779904
Individuo0038	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,038126	-0,682747	0,758999
Individuo0039	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,149586	-0,867039	0,567868
Individuo0040	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,255786	-0,471706	0,983278
Individuo0041	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,871244	0,110891	1,631598
Individuo0042	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,442864	1,512594	3,373133
Individuo0043	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,761120	0,008104	1,514137
Individuo0044	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,310790	1,399530	3,222050
Individuo0045	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,000787	1,130659	2,870915
Individuo0046	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,088921	-0,807240	0,629398
Individuo0047	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,990482	1,121639	2,859326
Individuo0048	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,773207	-1,496054	-0,050360
Individuo0049	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,152256	-0,571742	0,876255
Individuo0050	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,767098	0,013699	1,520497
Individuo0051	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,500000	1,561228	3,438772
Individuo0052	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,078684	0,302858	1,854510
Individuo0053	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,590013	-0,152838	1,332863
Individuo0054	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,221749	-0,938477	0,494980
Individuo0055	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,227562	-0,944247	0,489123
Individuo0056	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,336133	-0,394491	1,066758
Individuo0057	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,500687	-1,217857	0,216483
Individuo0058	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,505096	-1,222316	0,212124
Individuo0059	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,697715	0,863168	2,532261
Individuo0060	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,076664	-1,812305	-0,341022
Individuo0061	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,165355	-0,559051	0,889761
Individuo0062	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,153724	-0,871127	0,563678
Individuo0063	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,224853	-0,941558	0,491852
Individuo0064	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,115442	-2,950699	-1,280186
Individuo0065	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,458980	0,649292	2,268669
Individuo0066	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-0,252105	-0,968630	0,464419
Individuo0067	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,778586	-1,501599	-0,055573
Individuo0068	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,438478	0,630795	2,246161
Individuo0069	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,714286	-1,435449	0,006878
Individuo0070	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,341183	-0,389650	1,072016
Individuo0071	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,229625	1,329603	3,129646
Individuo0072	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,063502	-0,782252	0,655249
Individuo0073	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-1,334328	-2,086425	-0,582231
Individuo0074	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,192347	0,407141	1,977554
Individuo0075	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,884983	1,028986	2,740980
Individuo0076	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,196688	0,411111	1,982265
Individuo0077	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,956985	1,092281	2,821690
Individuo0078	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,035534	-0,754806	0,683737
Individuo0079	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,131587	-0,849273	0,586099
Individuo0080	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,500000	1,561228	3,438772
Individuo0081	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,165623	-0,558792	0,890037
Individuo0082	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,083837	-0,802239	0,634565
Individuo0083	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,361148	-1,077441	0,355144
Individuo0084	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,714193	-1,435354	0,006968
Individuo0085	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,078613	-0,797102	0,639876
Individuo0086	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-0,136581	-0,854200	0,581038
Individuo0087	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,364763	-2,119152	-0,610374

Individuo0088	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-1,625443	-2,402540	-0,848345
Individuo0089	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,782410	0,028023	1,536797
Individuo0090	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,561471	-1,279446	0,156504
Individuo0091	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,269665	-0,986099	0,446769
Individuo0092	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,180929	-0,898026	0,536169
Individuo0093	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	1,985345	1,117140	2,853550
Individuo0094	Propedéutico de Empresarial y Económicas	-0,461945	-1,178737	0,254847
Individuo0095	Propedéutico de Empresarial y Económicas	2,500000	1,561228	3,438772
Individuo0096	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	0,159727	-0,564502	0,883957
Individuo0097	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-2,038014	-2,862692	-1,213336
Individuo0098	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,240113	-0,956711	0,476485
Individuo0099	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	2,372826	1,452749	3,292903
Individuo0100	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	-0,065092	-0,783814	0,653631

**Tabla 3.16 Intervalos de confianza de las aptitudes estimadas.**

Con el 95% de confianza el verdadero valor de la aptitud del individuo 1 ( $\theta_1$ ) se encuentra entre los dos límites -2,04 y -0,54. Análogamente se puede interpretar para cada una de las aptitudes de los 2.977 individuos de la PAAP.

#### 3.4.5.4 Probabilidades de los individuos a los ítems

Con los parámetros estimados de discriminación ( $a_i$ ) y dificultad ( $b_i$ ) de cada uno de los 100 ítems, y la aptitud estimada ( $\theta_j$ ) de los 2.977 individuos, se calculó mediante el modelo logístico de dos parámetros elegido, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$  ( $P_i(\theta_j)$ ), aplicando la ecuación (127):

$$P_i(\theta_j) = \frac{1}{1 + e^{-a_i(\theta_j - b_i)}} \quad \begin{array}{l} j = 1, \dots, 2977 \\ i = 1, \dots, 100 \end{array} \quad (131)$$

Se obtienen las probabilidades de los 2.977 individuos a los 100 ítems de la PAAP<sup>13</sup> (Tabla 3.17).

<sup>13</sup> Se presentan las probabilidades de solo 100 individuos y 20 ítems, el resto se adjunta en el archivo (los valores tienen hasta 18 decimales).

Individuo	Aptitud del individuo $(\theta_j)$	Probabilidad que el individuo $j$ con aptitud $\theta_j$ acierte el ítem $i$ $(P_i(\theta_j))$																			
		Item001	Item002	Item003	Item004	Item005	Item006	Item007	Item008	Item009	Item010	Item011	Item012	Item013	Item014	Item015	Item016	Item017	Item018	Item019	Item020
		Discriminación $(a_i)$	0,391553	0,440189	0,520683	0,533804	0,370720	0,748179	0,552829	0,051662	0,413262	0,119007	0,211996	0,386606	0,744296	0,155871	0,469248	0,174773	0,716463	0,681810	0,484113
Dificultad $(b_i)$	1,182534	0,229787	-5,336126	0,287705	-0,873715	2,017358	3,174877	26,227699	-0,813871	14,906202	1,725775	2,950032	-2,078396	5,137764	3,224901	3,086553	-0,265876	0,696667	-1,792455	1,306133	
Individuo0001	-1,288282	0,275387	0,338891	0,891645	0,301267	0,461653	0,077756	0,078177	0,194420	0,451142	0,127053	0,345479	0,162660	0,642925	0,268619	0,107377	0,317647	0,324642	0,205320	0,560718	0,211185
Individuo0002	-1,887603	0,231097	0,282507	0,857612	0,238450	0,407123	0,051095	0,057394	0,189617	0,390851	0,119351	0,317339	0,133510	0,535442	0,250667	0,083245	0,295389	0,238319	0,146541	0,488486	0,164900
Individuo0003	0,235591	0,408352	0,500639	0,947902	0,493046	0,601386	0,208649	0,164526	0,207048	0,606758	0,148563	0,421672	0,259335	0,848425	0,317754	0,197382	0,377946	0,588867	0,422049	0,727467	0,367312
Individuo0004	-0,722469	0,321712	0,396714	0,917000	0,368365	0,514014	0,114063	0,103904	0,199039	0,509442	0,134711	0,373081	0,194690	0,732867	0,286295	0,135602	0,339456	0,418938	0,275362	0,626679	0,263006
Individuo0005	0,335542	0,417841	0,511636	0,950413	0,506384	0,610235	0,221265	0,172262	0,207897	0,616569	0,150074	0,426847	0,268826	0,857746	0,321141	0,204918	0,382062	0,606088	0,438754	0,736954	0,379187
Individuo0006	0,698821	0,452791	0,551434	0,958605	0,554645	0,641752	0,271602	0,202807	0,211004	0,651387	0,155672	0,445786	0,295184	0,887663	0,333609	0,234089	0,397160	0,666228	0,500367	0,769602	0,423487
Individuo0007	0,116722	0,397157	0,487560	0,944759	0,477198	0,590777	0,194344	0,155691	0,206041	0,594978	0,146782	0,415539	0,250606	0,836693	0,313751	0,188694	0,373074	0,568104	0,402414	0,715910	0,353396
Individuo0008	-2,439152	0,194961	0,235980	0,818826	0,189139	0,358854	0,034413	0,042958	0,185277	0,338123	0,112622	0,292566	0,110710	0,433273	0,234867	0,065506	0,275728	0,174066	0,105454	0,422364	0,129841
Individuo0009	-1,084918	0,291557	0,359227	0,901459	0,324599	0,480436	0,089393	0,086673	0,196071	0,472026	0,129762	0,355292	0,173654	0,676875	0,274892	0,116872	0,325400	0,357366	0,228869	0,584805	0,228906
Individuo0010	-0,003666	0,385909	0,474310	0,941389	0,461168	0,579927	0,180606	0,147127	0,205024	0,582914	0,144994	0,409344	0,241953	0,824056	0,309718	0,180184	0,368158	0,546793	0,382811	0,703899	0,339528
Individuo0011	-0,969638	0,300967	0,370989	0,906664	0,338233	0,491111	0,096667	0,091852	0,197012	0,483912	0,131319	0,360909	0,180143	0,695350	0,278488	0,122572	0,329838	0,376549	0,243035	0,598289	0,239405
Individuo0012	-0,288503	0,359855	0,443209	0,932656	0,423705	0,554026	0,151202	0,128457	0,202638	0,554067	0,140845	0,394838	0,222346	0,791207	0,300314	0,161289	0,356664	0,495947	0,338116	0,674385	0,307896
Individuo0013	0,211591	0,406084	0,497998	0,947281	0,489844	0,599251	0,205699	0,162710	0,206844	0,604389	0,148202	0,420431	0,257557	0,846114	0,316944	0,195604	0,376961	0,584698	0,418062	0,725158	0,364483
Individuo0014	-1,417803	0,265383	0,326237	0,884955	0,286915	0,449744	0,071086	0,073170	0,193374	0,437926	0,125353	0,339297	0,155954	0,620502	0,264671	0,101689	0,312760	0,304636	0,191286	0,545220	0,200434
Individuo0015	-0,714577	0,322387	0,397546	0,917312	0,369345	0,514745	0,114661	0,104311	0,199104	0,510257	0,134820	0,373472	0,195169	0,734015	0,286547	0,136037	0,339766	0,420315	0,276437	0,627573	0,263784
Individuo0016	-2,500000	0,191249	0,231185	0,810479	0,184207	0,353680	0,032932	0,041596	0,184803	0,332518	0,111900	0,289903	0,108415	0,422187	0,233167	0,063780	0,273610	0,167887	0,101603	0,415194	0,126389
Individuo0017	-0,046845	0,381929	0,469595	0,940142	0,455472	0,576040	0,175896	0,144171	0,204662	0,578589	0,144361	0,407142	0,238918	0,819370	0,308288	0,177224	0,366413	0,539152	0,375912	0,699534	0,334650
Individuo0018	0,075757	0,393323	0,483056	0,943635	0,471745	0,587100	0,189590	0,152737	0,205695	0,590892	0,146173	0,413431	0,247644	0,832484	0,312378	0,185769	0,371401	0,560889	0,395717	0,711859	0,348656
Individuo0019	-0,866789	0,307836	0,379538	0,910252	0,348202	0,498788	0,102216	0,095745	0,197690	0,492467	0,132448	0,364970	0,184922	0,708253	0,281090	0,126815	0,333047	0,390583	0,253577	0,607889	0,247151
Individuo0020	-0,226560	0,365461	0,449948	0,934654	0,431798	0,559693	0,157246	0,132340	0,203155	0,560383	0,141740	0,397980	0,226515	0,798722	0,302347	0,165260	0,359152	0,507042	0,347631	0,680936	0,314641
Individuo0021	0,498822	0,458226	0,598833	0,966816	0,611800	0,678410	0,341518	0,245080	0,214823	0,691556	0,162696	0,468986	0,313850	0,916472	0,349063	0,273502	0,415753	0,732464	0,574973	0,805272	0,478898
Individuo0022	2,041124	0,983264	0,689404	0,978984	0,718289	0,746607	0,504445	0,348242	0,222781	0,574924	0,177841	0,516707	0,413045	0,955475	0,381620	0,364592	0,454448	0,839281	0,714363	0,961818	0,592623
Individuo0023	1,502940	0,531323	0,636552	0,972375	0,656718	0,707046	0,404951	0,284082	0,218004	0,722612	0,168669	0,488192	0,363673	0,934965	0,362029	0,308310	0,431245	0,780280	0,634073	0,831368	0,524971
Individuo0024	-0,275558	0,361024	0,444616	0,933079	0,425393	0,555211	0,152449	0,129260	0,202746	0,555388	0,141032	0,395494	0,223213	0,792795	0,300738	0,162112	0,357183	0,498266	0,340094	0,675760	0,309299
Individuo0025	-1,599886	0,251718	0,308870	0,874945	0,267448	0,433102	0,062599	0,066630	0,191911	0,419499	0,130698	0,330968	0,146911	0,588109	0,259185	0,094146	0,305961	0,277725	0,172813	0,523290	0,186021
Individuo0026	0,653583	0,448406	0,546503	0,957660	0,548673	0,637887	0,264958	0,198793	0,210616	0,647130	0,154966	0,443418	0,291559	0,884261	0,332043	0,230304	0,395268	0,658982	0,492657	0,765696	0,417887
Individuo0027	-0,269462	0,361574	0,445279	0,933276	0,426188	0,555770	0,153039	0,129640	0,202797	0,556010	0,141120	0,395803	0,223622	0,793539	0,300938	0,162501	0,357428	0,499358	0,341027	0,676406	0,309961
Individuo0028	0,093668	0,394998	0,485025	0,944129	0,474128	0,588709	0,191658	0,154023	0,205847	0,592680	0,146439	0,414352	0,248936	0,834335	0,312978	0,187044	0,372133	0,564047	0,398640	0,713635	0,350725
Individuo0029	-1,230286	0,279941	0,344634	0,894528	0,307823	0,467001	0,080926	0,080519	0,194890	0,457083	0,127821	0,348264	0,165737	0,652773	0,270399	0,110014	0,319848	0,333818	0,211848	0,567622	0,216134
Individuo0030	-1,622540	0,250051	0,306745	0,873649	0,265085	0,431041	0,061612	0,065855	0,191730	0,417220	0,122706	0,329636	0,145817	0,584019	0,258507	0,093243	0,305121	0,274481	0,170616	0,520553	0,184285
Individuo0031	-0,421312	0,347965	0,428834	0,928181	0,406494	0,541831	0,138886	0,120459	0,201531	0,540469	0,138943	0,388131	0,213595	0,774408	0,295982	0,153035	0,351356	0,472187	0,318157	0,660112	0,293710
Individuo0032	1,185980	0,500337	0,603701	0,967578	0,617631	0,682129	0,349321	0,249828	0,215225	0,695608	0,163445	0,471422	0,335816	0,919063	0,350698	0,277526	0,417712	0,738890	0,582640	0,808750	0,484747
Individuo0033	-1,487170	0,260121	0,319561	0,881227	0,279400	0,443388	0,067734	0,070612	0,192816	0,430883	0,124451	0,336008	0,152457	0,608271	0,262572	0,098754	0,310161	0,294211	0,184076	0,536881	0,194847
Individuo0034	0,493928	0,432999	0,529035	0,954158	0,527493	0,624107	0,242356	0,185108	0,209248	0,631921	0,152494	0,435081	0,278975	0,871533	0,326547	0,217293	0,388618	0,632830	0,465497	0,751546	0,398301
Individuo0035	-1,173135	0,284474	0,350338	0,897303	0,314361	0,472278	0,084164	0,082889	0,195354	0,462950	0,128581	0,351019	0,168815	0,662350	0,272160	0,112667	0,322025	0,342985	0,218427	0,574399	0,221093
Individuo0036	0,154807	0,400733	0,491749	0,945785	0,482272	0,594186	0,198845	0,158478	0,206363	0,598765	0,147351	0,417501	0,253382	0,840530	0,315031	0,191445	0,374633	0,574786	0,408674	0,719645	0,357829
Individuo0037	0,058529	0,391715	0,481162	0,943156	0,469454	0,585551	0,187618	0,151508	0,205550	0,589169	0,145917	0,412546	0,246405	0,830689	0,311801	0,184549	0,370699	0,557846	0,392911	0,710146	0,346671
Individuo0038	0,038126	0,389813	0,478921	0,942584	0,466742	0,583714	0,185302	0,150064	0,205378	0,587127	0,145615	0,411498	0,244943	0,828542	0,311119	0,183113	0,369867	0,554238	0,389598	0,708108	0,344328
Individuo0039	-0,149586	0,372478	0,458348	0,937060	0,441906	0,566713	0,165029	0,137303	0,203080	0,568204	0,142858	0,401896	0,231771	0,807775	0,304883	0,170303	0,362254	0,520218	0,359626	0,688977</	

Individuo0052	1,078684	0,489836	0,592347	0,965779	0,604017	0,673443	0,331302	0,238877	0,214290	0,686138	0,161707	0,465758	0,326627	0,912920	0,346899	0,267545	0,413158	0,723789	0,564751	0,800587	0,471150
Individuo0053	0,590013	0,442258	0,539559	0,956297	0,540256	0,632426	0,255799	0,193255	0,210070	0,641108	0,153978	0,440094	0,286508	0,879330	0,329849	0,225059	0,392616	0,648674	0,481828	0,760130	0,410054
Individuo0054	-0,221749	0,365898	0,450472	0,934807	0,432428	0,560132	0,157724	0,132646	0,203196	0,560872	0,141809	0,388224	0,226841	0,799297	0,302505	0,165571	0,359346	0,507903	0,348375	0,681442	0,315168
Individuo0055	-0,227562	0,365370	0,449839	0,934622	0,431667	0,559601	0,157147	0,132276	0,203147	0,560281	0,141725	0,397929	0,226447	0,798602	0,302314	0,165195	0,359112	0,506862	0,347476	0,680830	0,314531
Individuo0056	0,336133	0,417897	0,511701	0,950427	0,506463	0,610287	0,221342	0,172309	0,207902	0,616627	0,150083	0,426878	0,266871	0,857800	0,321161	0,204963	0,382086	0,606189	0,438853	0,737010	0,379258
Individuo0057	-0,500687	0,340947	0,420298	0,925377	0,396313	0,534517	0,131935	0,115887	0,200872	0,532312	0,137817	0,384142	0,208486	0,763920	0,293411	0,148270	0,348201	0,458040	0,306534	0,651438	0,285417
Individuo0058	-0,505096	0,340560	0,419826	0,925218	0,395751	0,534111	0,131557	0,115637	0,200836	0,531858	0,137755	0,383921	0,208205	0,763327	0,293268	0,148009	0,348026	0,457256	0,305895	0,650953	0,284960
Individuo0059	1,697715	0,550260	0,656147	0,974972	0,679761	0,721776	0,440495	0,306481	0,219724	0,738454	0,171944	0,498513	0,381271	0,943244	0,369070	0,328135	0,439613	0,803269	0,664303	0,844178	0,549561
Individuo0060	-1,076664	0,292225	0,360063	0,901841	0,325566	0,481199	0,089897	0,087035	0,196138	0,472876	0,129873	0,355692	0,174113	0,678217	0,275149	0,117273	0,325717	0,358725	0,229863	0,585775	0,229646
Individuo0061	0,165355	0,401725	0,492910	0,946066	0,483678	0,595128	0,200105	0,159258	0,206453	0,599811	0,147509	0,418045	0,254154	0,841579	0,315386	0,192213	0,375065	0,576632	0,410413	0,720264	0,359061
Individuo0062	-0,153724	0,372100	0,457895	0,936933	0,441362	0,566336	0,164603	0,137032	0,203765	0,567784	0,142797	0,401685	0,231486	0,807296	0,304747	0,170029	0,362087	0,520078	0,358977	0,688547	0,322673
Individuo0063	-0,224853	0,365616	0,450134	0,934708	0,432022	0,559849	0,157415	0,132448	0,203170	0,560556	0,141764	0,398066	0,226630	0,798926	0,302403	0,165370	0,359221	0,507347	0,347895	0,681115	0,314828
Individuo0064	-2,115442	0,215626	0,262629	0,842502	0,217071	0,386906	0,043435	0,050948	0,187815	0,368678	0,116530	0,306969	0,123645	0,493107	0,244056	0,075441	0,287169	0,209962	0,128159	0,460989	0,149574
Individuo0065	1,458980	0,527035	0,632064	0,971753	0,651408	0,703659	0,397051	0,279166	0,217617	0,718956	0,167936	0,485864	0,359749	0,932947	0,360448	0,303928	0,429361	0,774833	0,627091	0,828363	0,519399
Individuo0066	-0,252105	0,363145	0,447167	0,933837	0,428456	0,557358	0,154730	0,130727	0,202942	0,557780	0,141370	0,396683	0,224789	0,795648	0,301507	0,163613	0,358125	0,502467	0,343691	0,678243	0,311850
Individuo0067	-0,778586	0,316936	0,390817	0,914749	0,361423	0,508816	0,109888	0,101051	0,198578	0,503645	0,133934	0,370303	0,191311	0,724611	0,284511	0,132545	0,337260	0,409184	0,267793	0,620302	0,257519
Individuo0068	1,438478	0,525033	0,629962	0,971459	0,648919	0,702072	0,393384	0,276891	0,217436	0,717241	0,167596	0,484778	0,357925	0,931987	0,359712	0,301897	0,428484	0,772260	0,623816	0,826948	0,516799
Individuo0069	-0,714286	0,322412	0,397577	0,917324	0,369382	0,514772	0,114683	0,104326	0,199107	0,510287	0,134824	0,373487	0,195186	0,734058	0,286556	0,136053	0,339777	0,420366	0,276476	0,627606	0,263813
Individuo0070	0,341183	0,418378	0,512256	0,950551	0,507136	0,610732	0,221993	0,172708	0,207945	0,617120	0,150159	0,427140	0,267253	0,858258	0,321333	0,205350	0,382295	0,607052	0,439701	0,737483	0,379862
Individuo0071	2,229625	0,601087	0,706887	0,980911	0,738196	0,759598	0,539620	0,372252	0,224471	0,778642	0,181145	0,526678	0,430818	0,961077	0,388577	0,385318	0,462628	0,856675	0,739851	0,875136	0,615165
Individuo0072	-0,063502	0,380390	0,467769	0,939652	0,453268	0,574532	0,174097	0,143038	0,204522	0,576910	0,144117	0,406290	0,237749	0,817528	0,307735	0,176087	0,365737	0,536185	0,373251	0,697836	0,332769
Individuo0073	-1,334328	0,271804	0,334364	0,889307	0,296118	0,457414	0,075322	0,076362	0,194048	0,446435	0,126447	0,343275	0,160250	0,635019	0,267211	0,105324	0,315905	0,317451	0,200245	0,555221	0,207315
Individuo0074	1,192347	0,500961	0,604371	0,967682	0,618434	0,682641	0,350405	0,250489	0,215280	0,696164	0,163549	0,471759	0,336365	0,919414	0,350924	0,278126	0,417983	0,739769	0,583695	0,809226	0,485555
Individuo0075	1,884983	0,568332	0,674499	0,977245	0,701120	0,735500	0,475260	0,328915	0,221387	0,753124	0,175140	0,508437	0,398491	0,950261	0,375893	0,347792	0,447691	0,823613	0,692155	0,855735	0,572980
Individuo0076	1,196688	0,501386	0,604828	0,967753	0,618980	0,682990	0,351144	0,250940	0,215318	0,696544	0,163620	0,471988	0,336740	0,919653	0,351078	0,278535	0,418168	0,740368	0,584414	0,809551	0,486106
Individuo0077	1,956985	0,575235	0,681419	0,978064	0,709112	0,740660	0,488709	0,337760	0,222029	0,758614	0,176382	0,512252	0,405182	0,952734	0,378529	0,355495	0,450805	0,830983	0,702515	0,859985	0,581903
Individuo0078	-0,035534	0,382975	0,470835	0,940473	0,456970	0,577064	0,177126	0,144944	0,204758	0,579729	0,144528	0,407721	0,239714	0,820613	0,308664	0,177999	0,366872	0,541165	0,377723	0,700683	0,335931
Individuo0079	-0,131587	0,374127	0,460315	0,937610	0,444277	0,568350	0,166893	0,138486	0,203951	0,570028	0,143120	0,402813	0,233012	0,809846	0,305478	0,171500	0,362981	0,524035	0,362457	0,690841	0,325135
Individuo0080	2,500000	0,626179	0,730927	0,983376	0,765117	0,777423	0,589308	0,407794	0,226912	0,797300	0,185967	0,540942	0,456613	0,967944	0,398636	0,415770	0,474394	0,878858	0,773738	0,888751	0,647121
Individuo0081	0,165623	0,401750	0,492939	0,946073	0,483714	0,595152	0,200137	0,159277	0,206455	0,599838	0,147513	0,418059	0,254173	0,841606	0,315395	0,192232	0,375076	0,576679	0,410458	0,720700	0,359092
Individuo0082	-0,083837	0,378515	0,465541	0,939049	0,450579	0,572688	0,171920	0,141666	0,204352	0,574857	0,143818	0,405251	0,236328	0,815259	0,307060	0,174707	0,364913	0,532560	0,370014	0,695756	0,330480
Individuo0083	-0,361148	0,353329	0,435333	0,930241	0,414265	0,547363	0,144357	0,124028	0,202032	0,546638	0,139802	0,391164	0,217528	0,782135	0,297940	0,156731	0,353756	0,482942	0,327121	0,666616	0,300089
Individuo0084	-0,714193	0,322420	0,397586	0,917328	0,369393	0,514780	0,114690	0,104331	0,199108	0,510297	0,134826	0,373492	0,195192	0,734071	0,286559	0,136058	0,339781	0,420382	0,276489	0,627616	0,263822
Individuo0085	-0,078613	0,378997	0,466113	0,939204	0,451269	0,573162	0,172477	0,142017	0,204395	0,575385	0,143895	0,405518	0,236692	0,815844	0,307233	0,175061	0,365125	0,533492	0,370844	0,696291	0,331067
Individuo0086	-0,136581	0,373669	0,459769	0,937458	0,443619	0,567896	0,166375	0,138157	0,203909	0,569522	0,143047	0,402559	0,232667	0,809273	0,305313	0,171167	0,362779	0,523142	0,361671	0,690324	0,324579
Individuo0087	-1,364763	0,269451	0,331389	0,887737	0,292743	0,454615	0,073751	0,075184	0,193802	0,443328	0,126047	0,341822	0,158673	0,629753	0,266283	0,103986	0,314756	0,312745	0,196943	0,551579	0,204786
Individuo0088	-1,625443	0,249838	0,306474	0,873482	0,264783	0,430777	0,061486	0,065757	0,191707	0,416929	0,122669	0,329500	0,145677	0,583494	0,258420	0,093128	0,305014	0,274067	0,170336	0,520202	0,184064
Individuo0089	0,782410	0,460912	0,560517	0,960298	0,565638	0,648844	0,284150	0,210380	0,211724	0,659190	0,156984	0,450168	0,301952	0,893719	0,336512	0,241195	0,400663	0,679410	0,514611	0,776699	0,433885
Individuo0090	-0,561471	0,335620	0,413793	0,923162	0,388577	0,528907	0,126813	0,112488	0,200369	0,526053	0,136960	0,381098	0,204634	0,755663	0,291450	0,144704	0,345794	0,447251	0,297796	0,644727	0,279162
Individuo0091	-0,269665	0,361556	0,445257	0,933270	0,426162	0,555751	0,153019	0,129628	0,202795	0,555990	0,141117	0,395792	0,223608	0,793514	0,300931	0,162488	0,357420	0,499321	0,340996	0,676385	0,309939
Individuo0092	-0,180929	0,369614	0,454924	0,936090	0,437784	0,563857	0,161823	0,135264	0,203537	0,565023	0,142401	0,400300	0,229620	0,804126	0,303849	0,168235	0,360990	0,515211	0,354720	0,685716	0,319660
Individuo0093	1,985345	0,577945	0,684122	0,978378	0,712225	0,742675	0,494012	0,341276	0,222282	0,760754	0,176872	0,513754	0,407827	0,953675	0,379570	0,358550	0,452032	0,833817	0,706540	0,861630	0,585404
Individuo0094	-0,461945	0,344364	0,424459	0,926758	0,401272	0,538089	0,135290	0,118099	0,201194	0,536296	0,138366	0,3860									



En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias 44 individuos tienen el mayor valor de  $P_{76}(\theta_j) = 0,99$ , es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = 2,5$  acierte el ítem 76 es 0,99; mientras que, 23 individuos tienen el menor valor de  $P_6(\theta_j) = 0,03$ , es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = -2,5$  acierte el ítem 6 es 0,03.

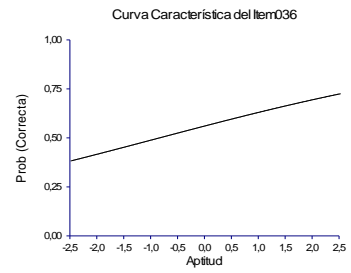
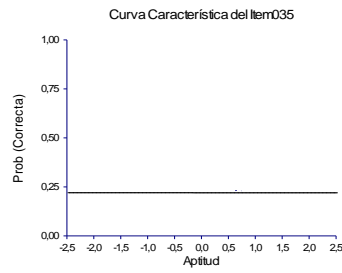
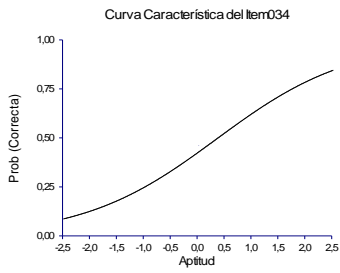
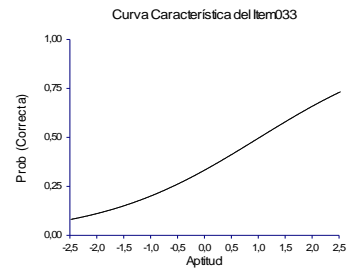
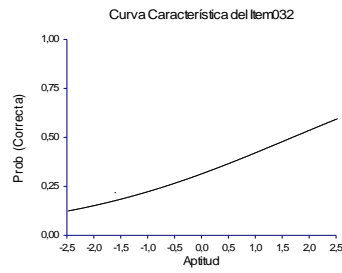
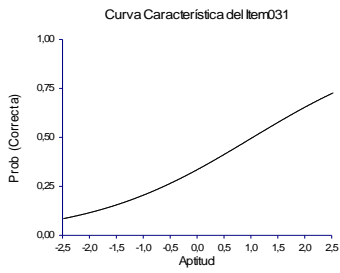
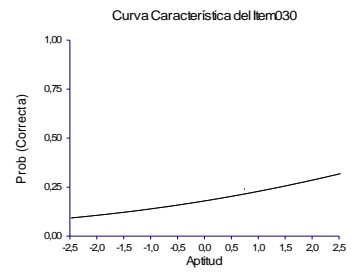
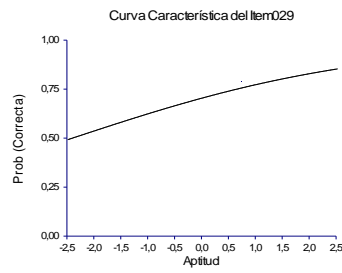
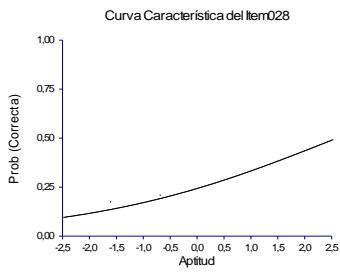
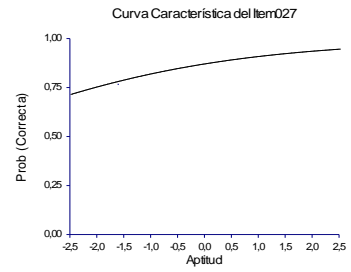
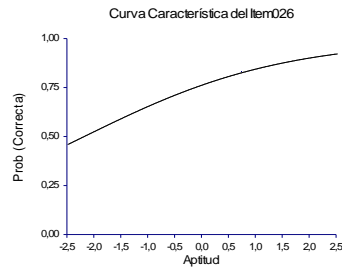
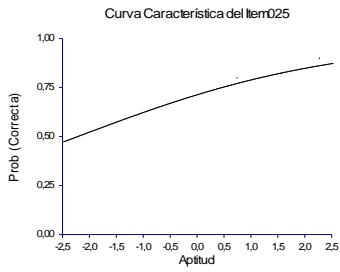
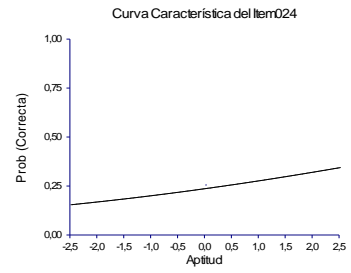
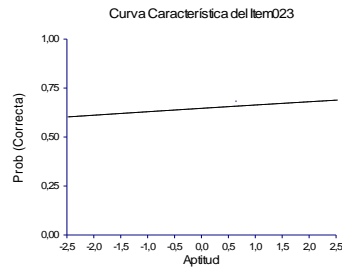
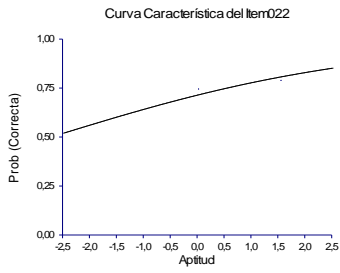
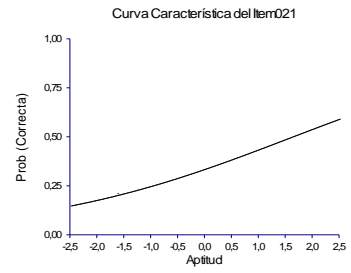
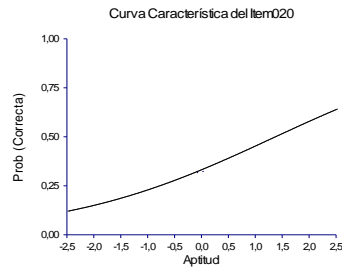
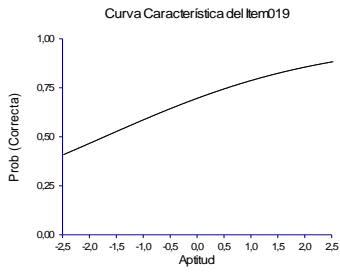
En el Propedéutico de Empresarial y Económicas el individuo 95 tiene el mayor valor de  $P_{76}(\theta_{95}) = 0,99$ , es decir, la probabilidad que el individuo 95 con aptitud  $\theta_j = 2,5$  acierte el ítem 76 es 0,99; mientras que, 7 individuos tienen el menor valor de  $P_6(\theta_j) = 0,03$ , es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = -2,5$  acierte el ítem 6 es 0,03.

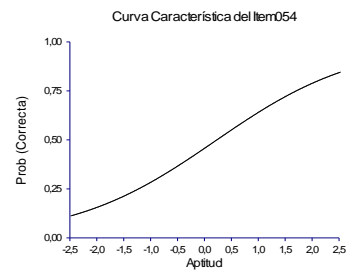
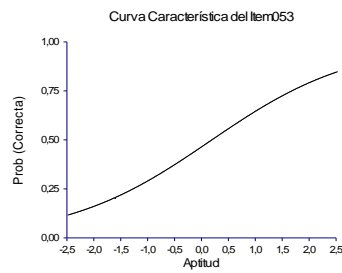
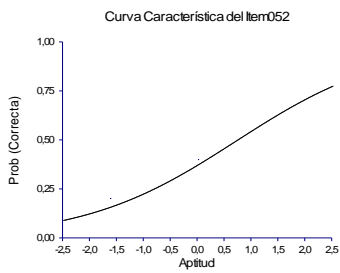
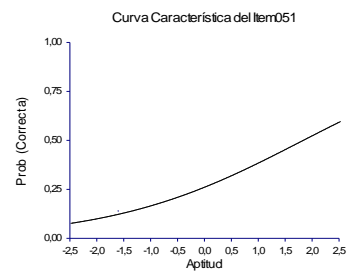
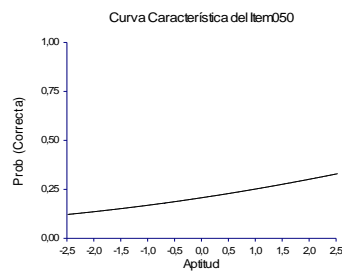
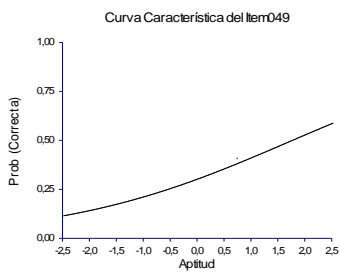
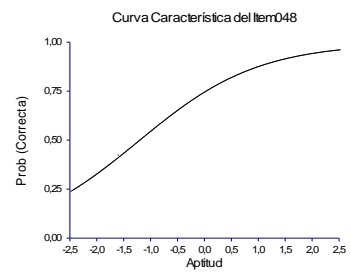
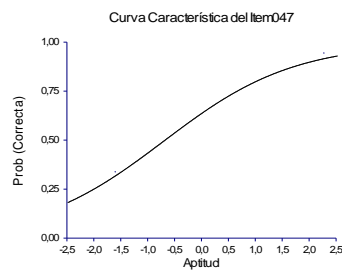
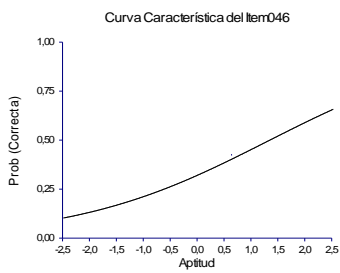
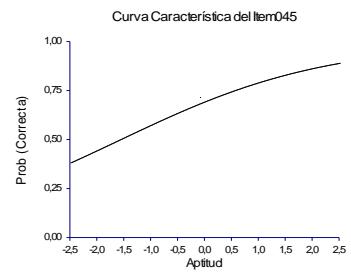
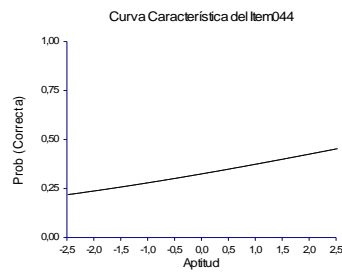
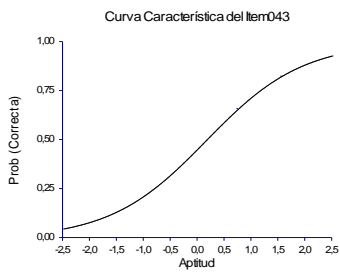
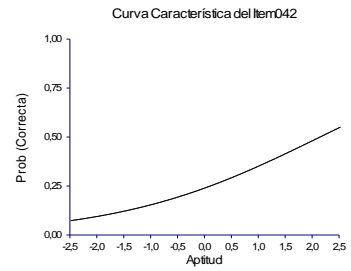
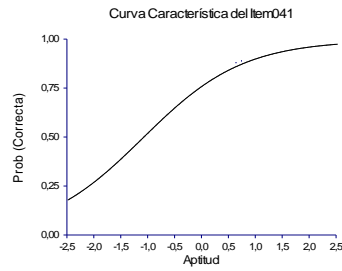
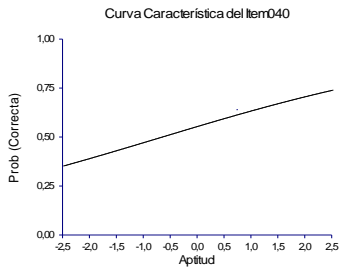
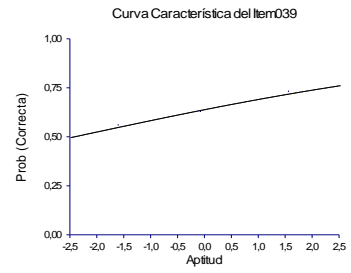
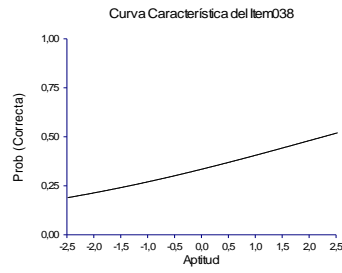
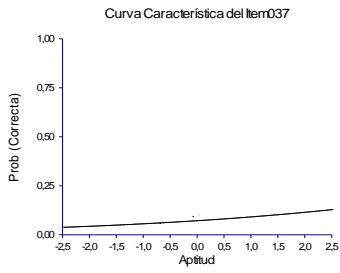
En total 45 individuos tienen el mayor valor de probabilidad ( $P_{76}(\theta_j) = 0,99$ ), es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = 2,5$  acierte el ítem 76 es 0,99; mientras que, 30 individuos tienen el menor valor de probabilidad ( $P_6(\theta_j) = 0,03$ ), es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = -2,5$  acierte el ítem 6 es 0,03.

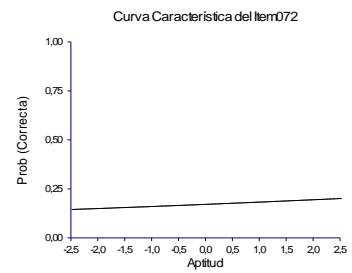
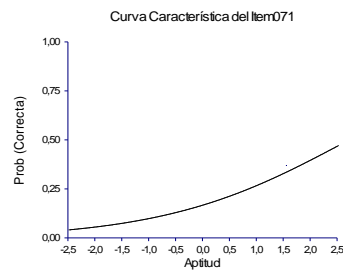
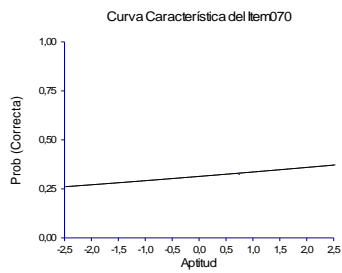
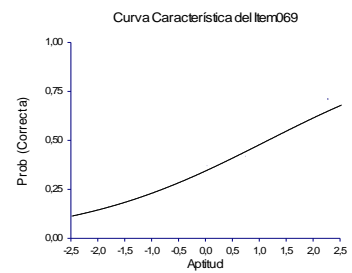
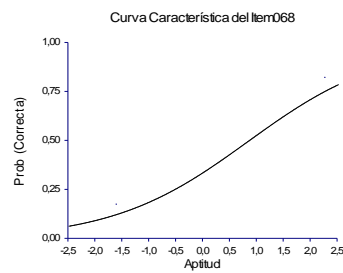
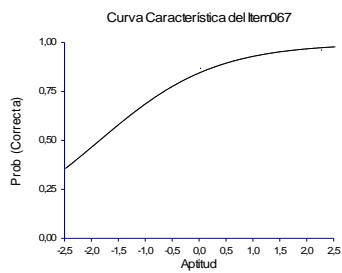
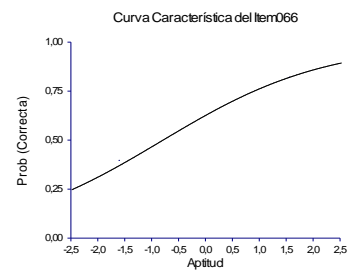
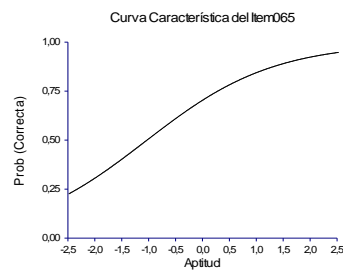
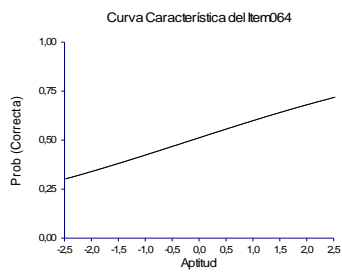
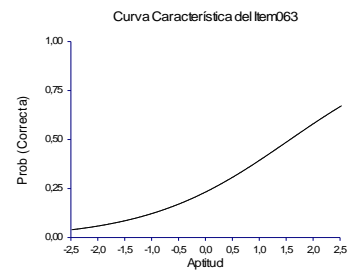
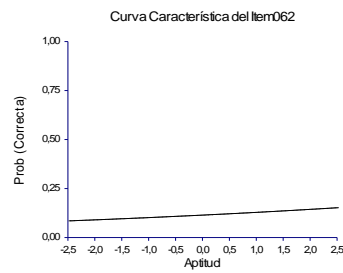
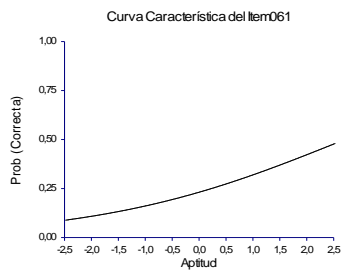
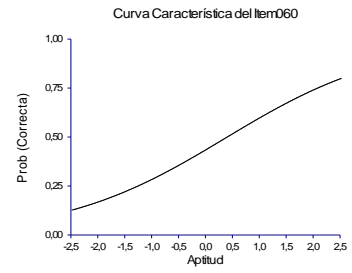
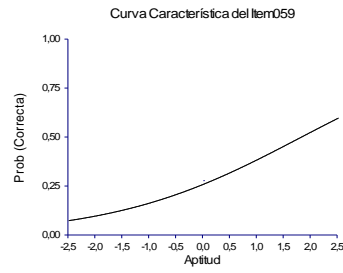
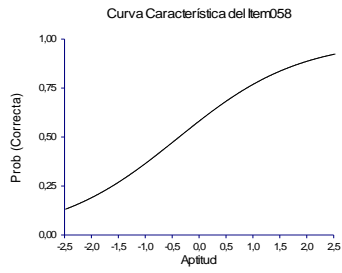
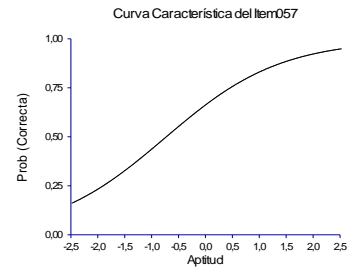
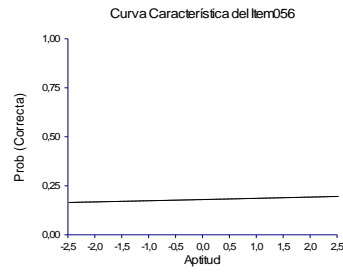
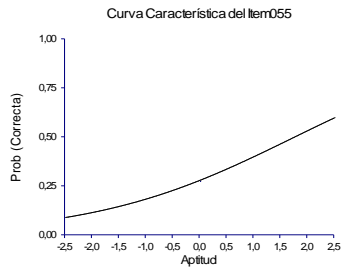
#### **3.4.5.5 Curvas características de los ítems**

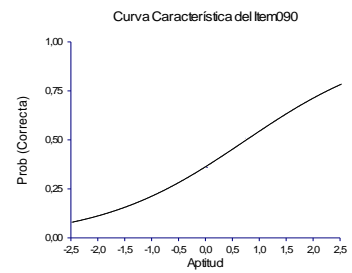
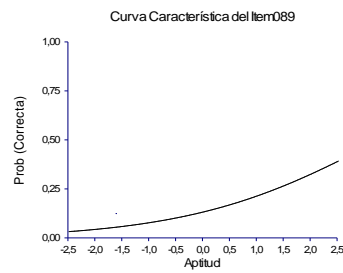
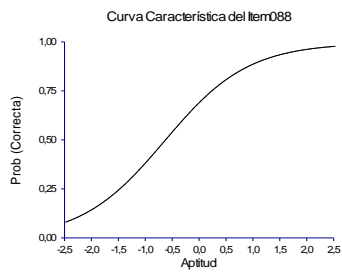
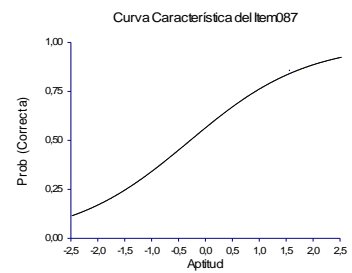
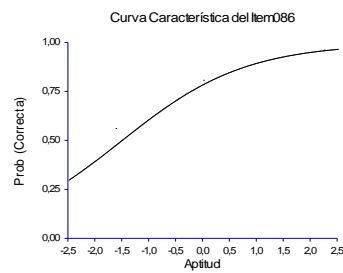
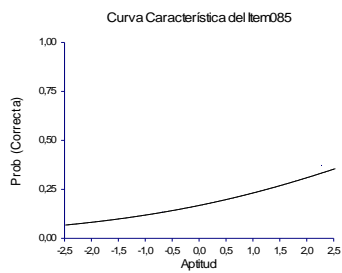
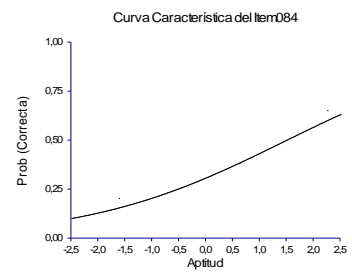
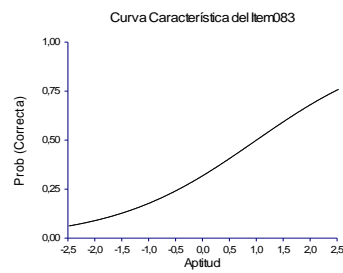
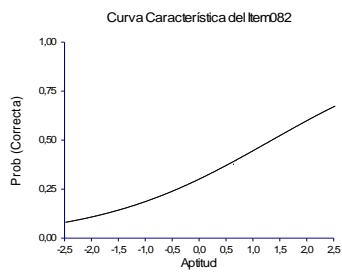
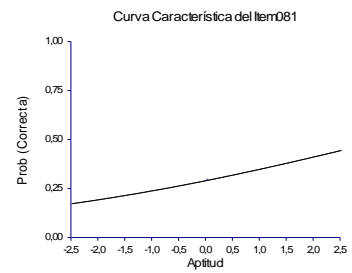
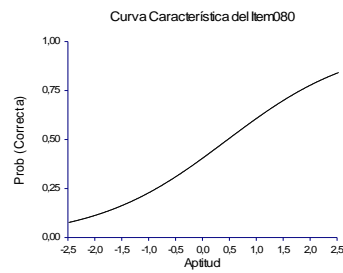
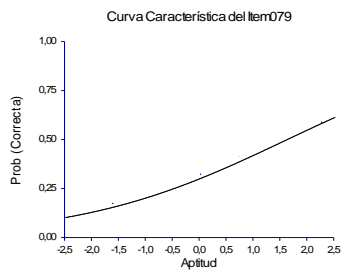
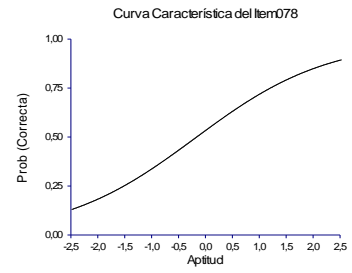
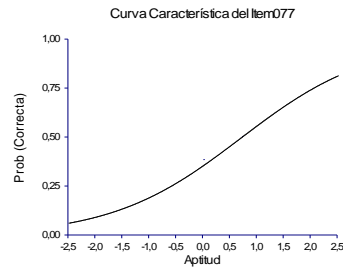
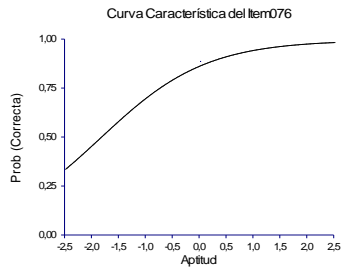
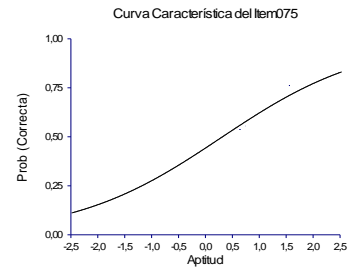
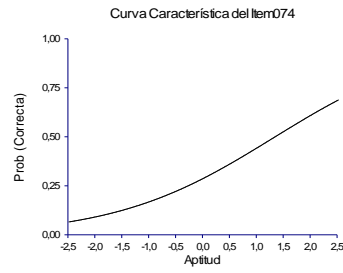
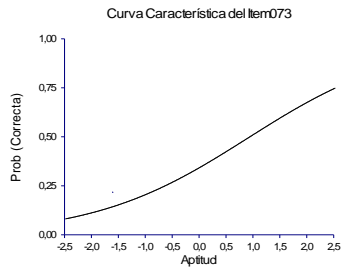
Con la aptitud estimada ( $\theta_j$ ) y las probabilidades ( $P_i(\theta_j)$ ) de los 2.977 individuos de cada uno de los 100 ítems de la PAAP, se graficaron las curvas características de los ítems (CCI) (Figura 3.3). Se representa en el eje de las abscisas la aptitud del individuo ( $\theta_j$ ) y en el eje de las ordenadas la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j$  acierte el ítem  $i$  ( $P_i(\theta_j)$ ).

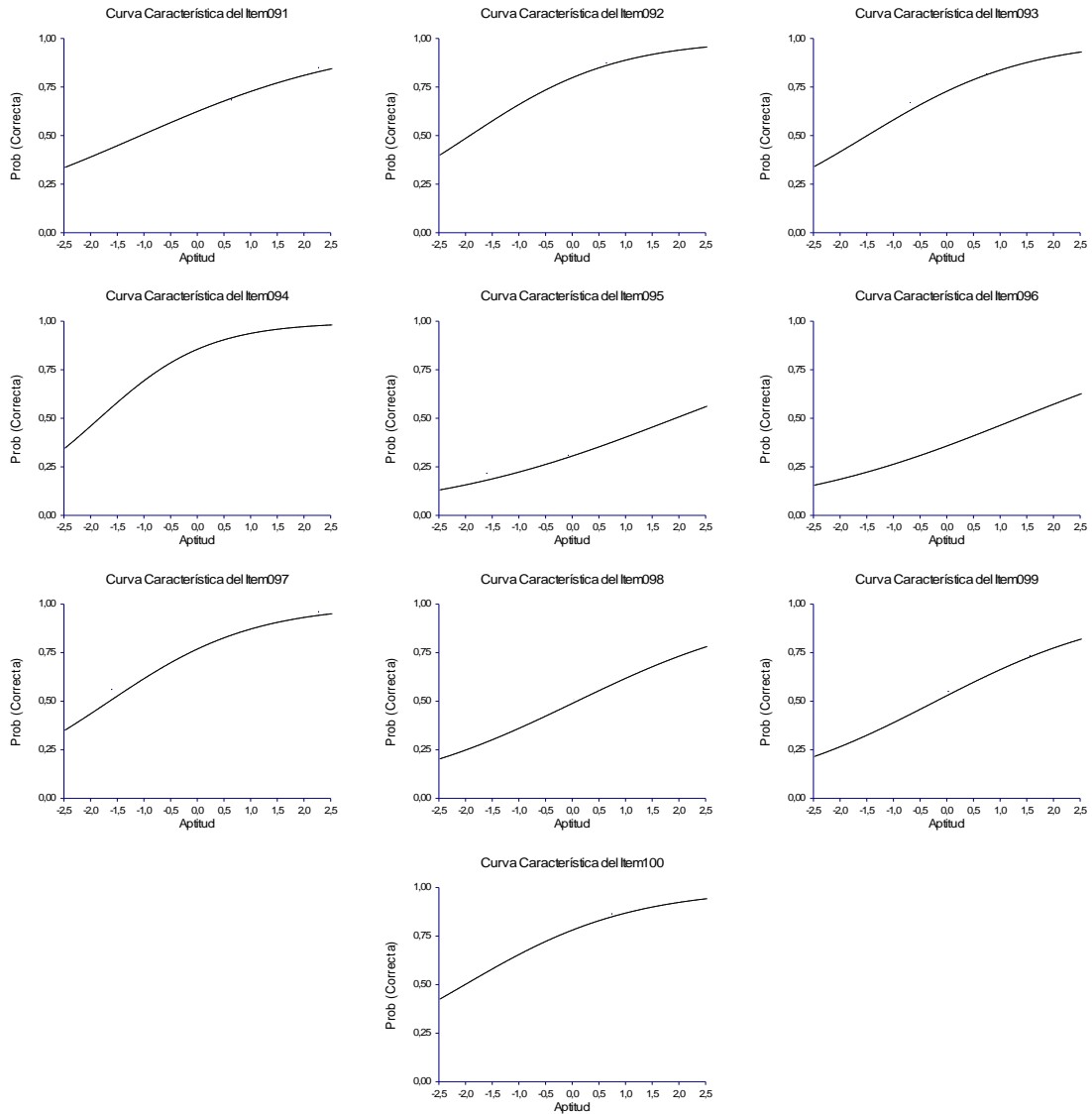












**Figura 3.3** Curvas características de los ítems.

En las figuras anteriores se puede observar que la mayoría de las CCI tienen la forma “S alargada”.

### 3.4.6 AJUSTE DEL MODELO

Se comprobó que el modelo se ajusta a los datos.

#### 3.4.6.1 Para cada ítem

Prueba de hipótesis al nivel de significación del 1%.

- 1) Hipótesis nula.  $H_0$  : El modelo se ajusta a los datos para el ítem 1.

2) Hipótesis alternativa.  $H_1$  : El modelo no se ajusta a los datos para el ítem 1.

3) Estadístico de prueba.

Se calcula el estadístico  $Q_1$  para el ítem 1 de la PAAP, aplicando la fórmula (119):

$$Q_1 = \sum_{j=1}^{10} \frac{f_{1j} [P_1(\theta_j) - p_1(\theta_j)]^2}{P_1(\theta_j) [1 - P_1(\theta_j)]} = 12,36 \quad (132)$$

4) Región de rechazo.

Como  $Q_1 \nlessdot \chi^2_{0,99}(10)$ , esto es  $12,36 \nlessdot 23,21$ , por tanto, al nivel de significación del 1% no rechazo  $H_0$ , es decir, el modelo estimado se ajusta a los datos para el ítem 1 de la PAAP.

Análogamente se realiza este proceso para cada uno de los 100 ítems de la PAAP, y se resume en la Tabla 3.18.

Variable	Estadístico ( $Q_1$ )	Distribución $\chi^2_{0,99}(10)$	Prueba de hipótesis	Modelo
Item001	12,36	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item002	21,22	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item003	12,99	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item004	9,49	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item005	16,41	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item006	8,40	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item007	11,08	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item008	7,42	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item009	8,03	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item010	4,94	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item011	15,54	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item012	11,80	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item013	6,64	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item014	8,73	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item015	9,05	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item016	13,75	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item017	6,75	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item018	6,94	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item019	12,01	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item020	14,45	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item021	9,85	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item022	7,95	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item023	8,27	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item024	10,62	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item025	7,06	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item026	8,99	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item027	11,58	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item028	10,06	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item029	20,56	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item030	7,44	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta



Item031	6,18	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item032	6,15	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item033	4,21	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item034	4,26	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item035	22,32	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item036	8,33	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item037	9,76	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item038	3,70	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item039	9,94	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item040	7,25	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item041	19,09	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item042	6,48	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item043	8,07	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item044	19,94	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item045	17,36	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item046	19,37	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item047	17,41	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item048	14,49	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item049	8,84	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item050	5,55	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item051	3,52	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item052	15,05	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item053	7,21	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item054	11,91	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item055	13,13	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item056	22,60	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item057	5,28	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item058	13,92	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item059	12,80	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item060	9,30	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item061	7,13	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item062	9,51	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item063	22,83	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item064	22,45	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item065	7,89	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item066	1,65	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item067	14,71	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item068	12,00	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item069	12,07	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item070	5,19	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item071	18,55	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item072	8,22	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item073	23,19	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item074	18,72	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item075	23,14	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item076	13,86	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item077	7,73	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item078	14,46	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item079	4,80	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item080	9,21	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item081	5,55	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item082	9,93	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item083	18,23	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item084	7,34	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item085	9,11	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item086	17,39	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item087	10,44	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta

Item088	13,11	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item089	23,20	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item090	10,27	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item091	16,88	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item092	17,35	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item093	7,10	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item094	19,34	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item095	12,29	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item096	7,43	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item097	13,86	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item098	6,76	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item099	7,64	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta
Item100	20,00	23,21	No rechazo Ho	Se ajusta

**Tabla 3.18 Ajuste del modelo para cada ítem.**

En la tabla anterior se puede observar que el modelo estimado se ajusta a los datos para cada ítem de la PAAP.

### 3.4.6.2 Para los 100 ítems

Prueba de hipótesis al nivel de significación del 1%.

- 1) Hipótesis nula.  $H_0$  : El modelo se ajusta a los datos.
- 2) Hipótesis alternativa.  $H_1$  : El modelo no se ajusta a los datos.
- 3) Estadístico de prueba.

Se calcula el estadístico  $Q_{2T}$  para los 100 ítems de la PAAP, aplicando la fórmula (122):

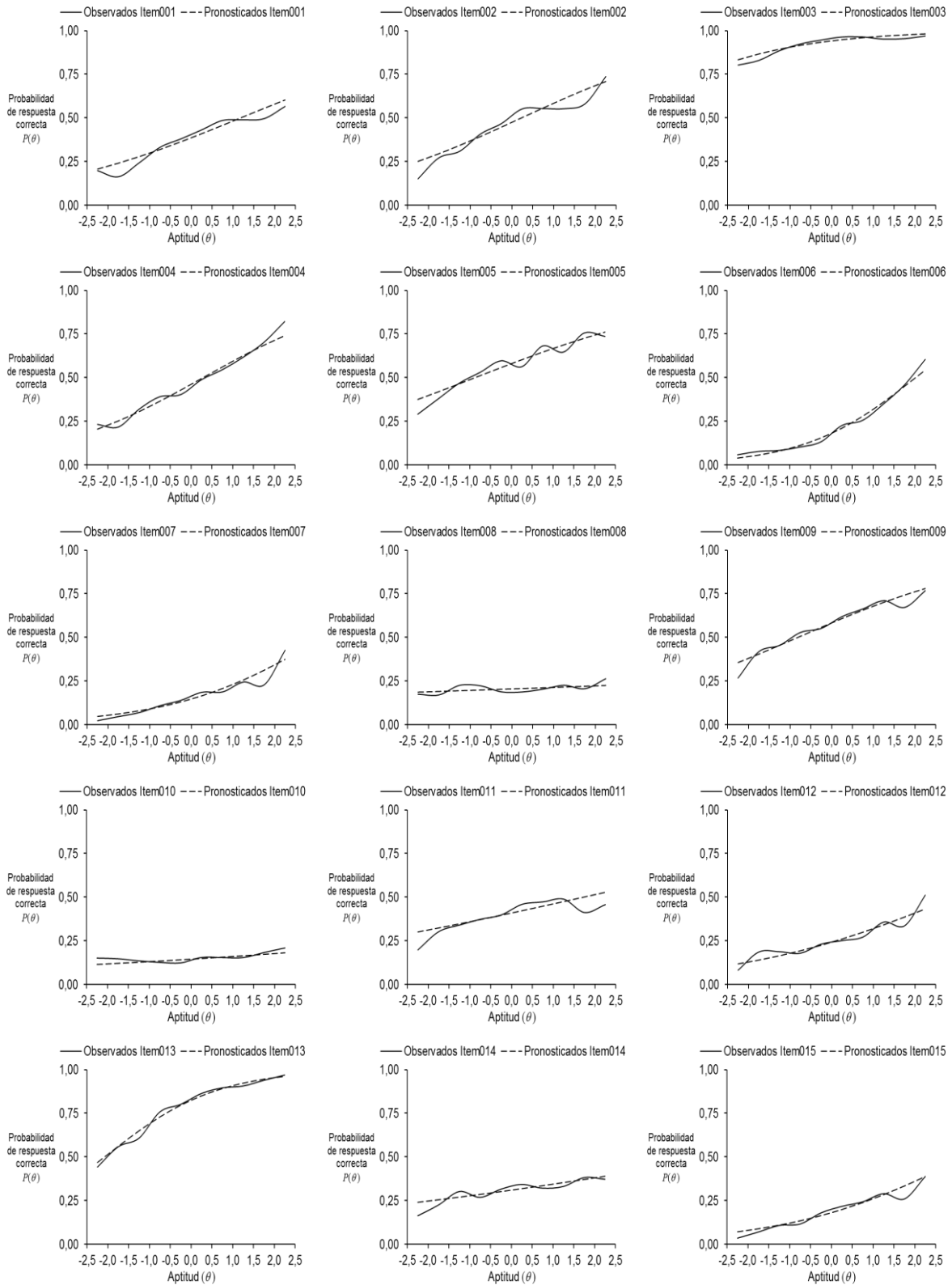
$$Q_{2T} = \sum_{j=1}^{10} \sum_{i=1}^{100} \frac{f_{ij} [P_i(\theta_j) - p_i(\theta_j)]^2}{P_i(\theta_j) [1 - P_i(\theta_j)]} = 1164,36 \quad (133)$$

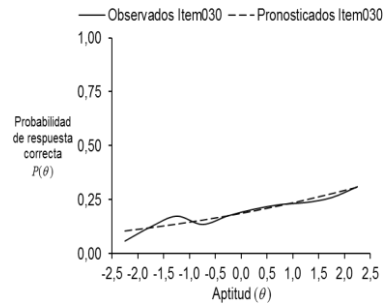
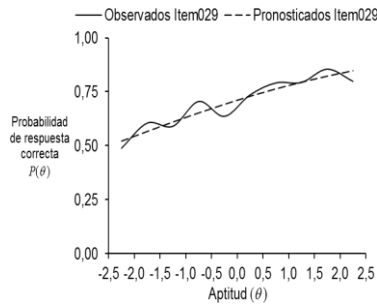
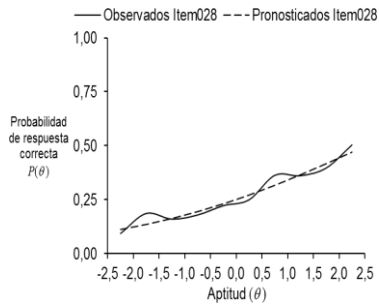
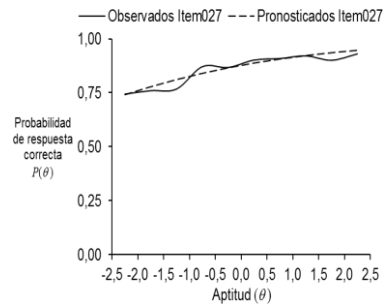
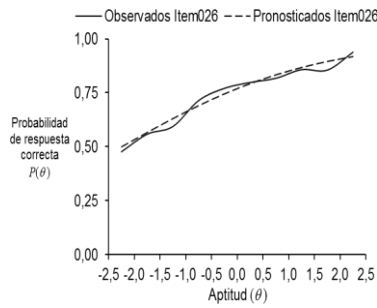
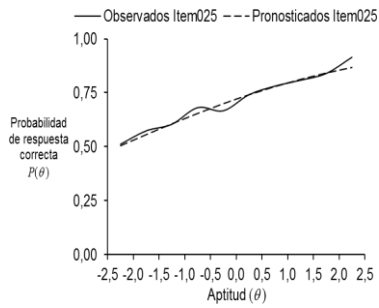
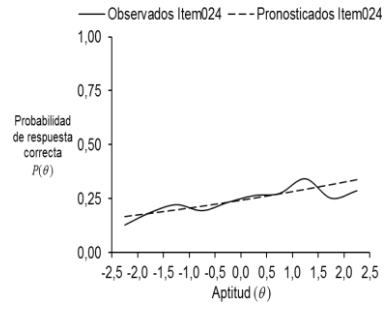
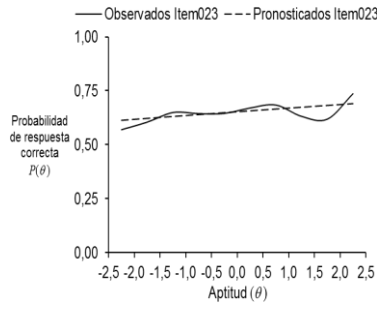
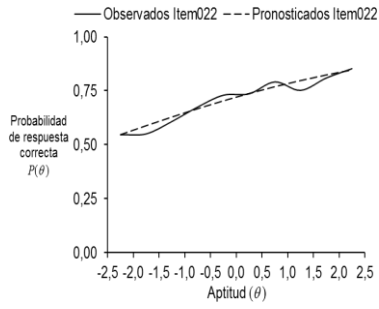
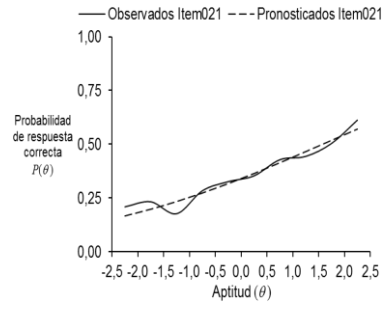
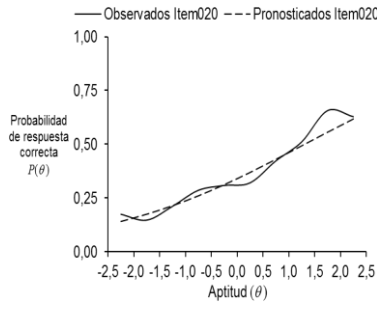
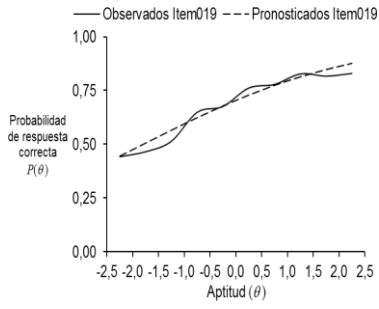
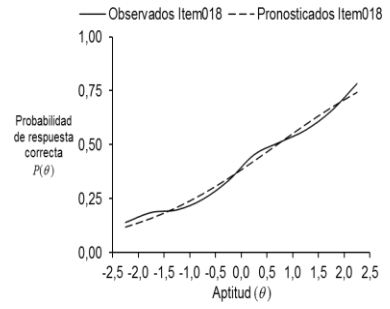
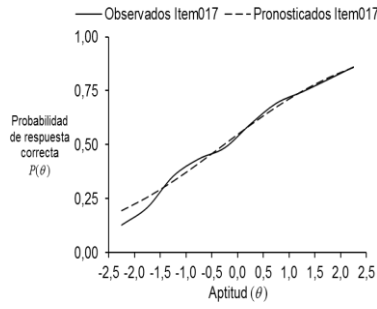
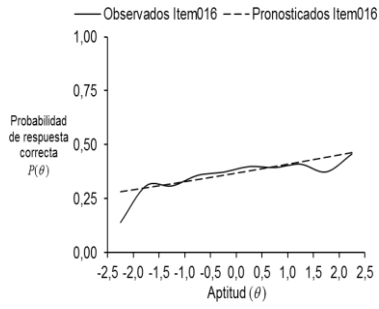
- 4) Región de rechazo.

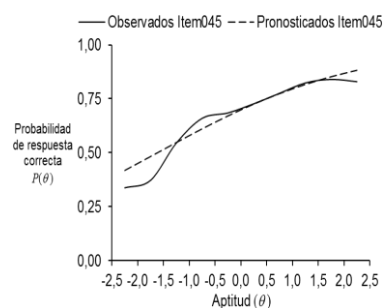
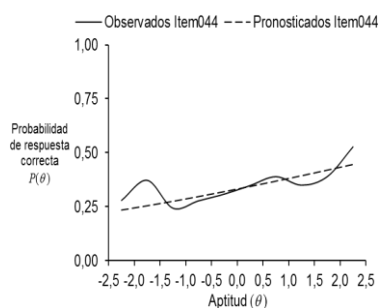
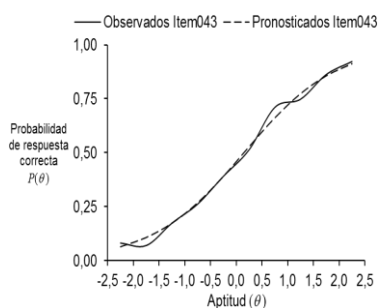
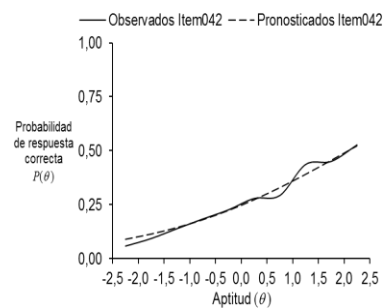
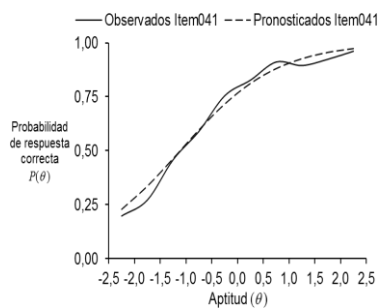
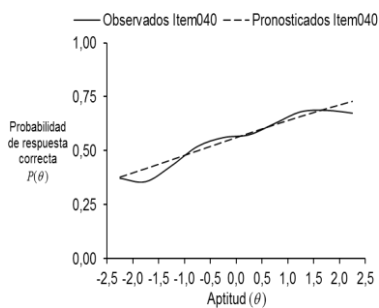
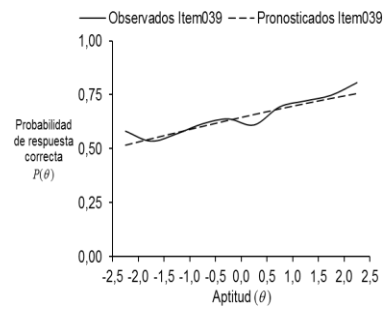
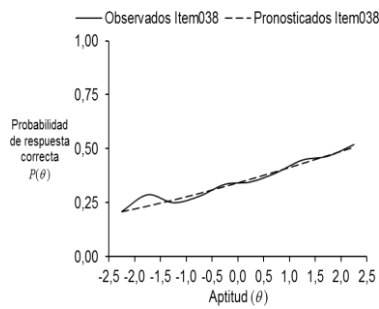
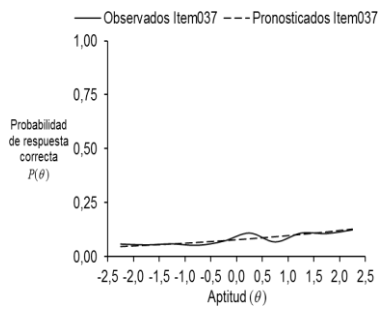
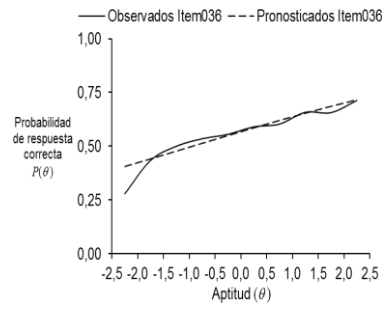
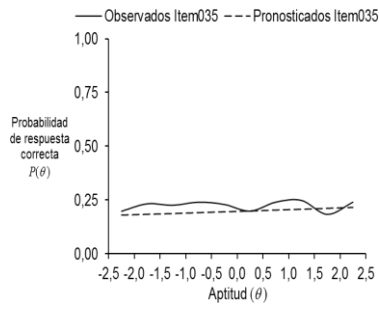
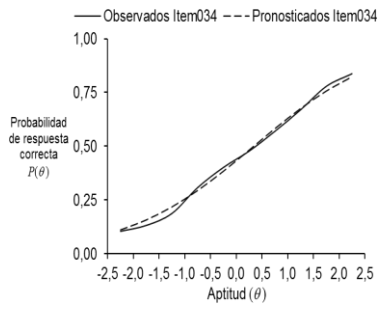
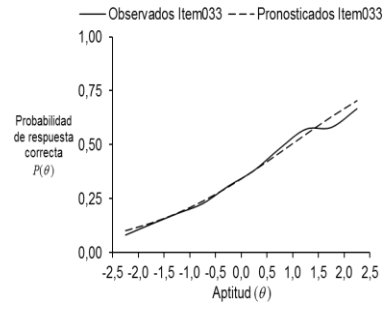
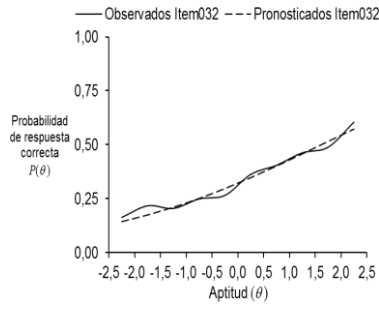
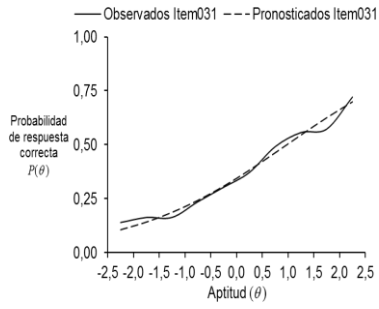
Como  $Q_{2T} \nlessgtr \chi^2_{0,99}(1089)$ , esto es  $1164,36 \nlessgtr 1200,50$ , por tanto, al nivel de significación del 1% no rechazo  $H_0$ , es decir, el modelo estimado se ajusta a los datos para los 100 ítems de la PAAP.

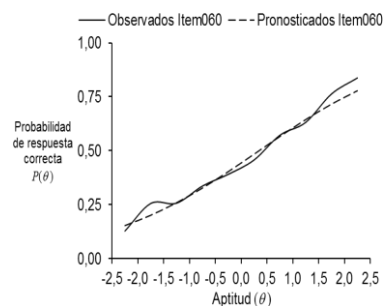
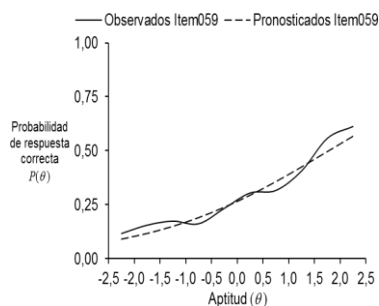
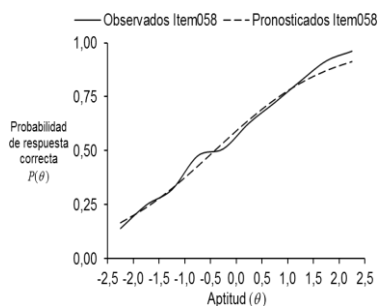
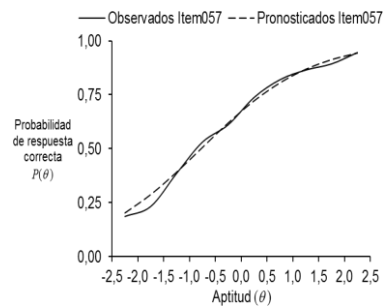
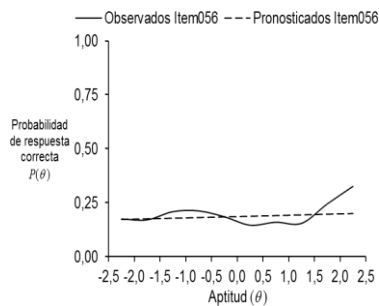
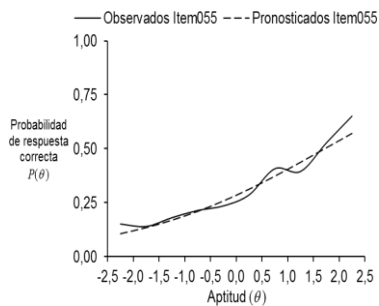
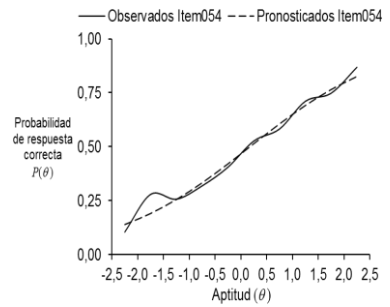
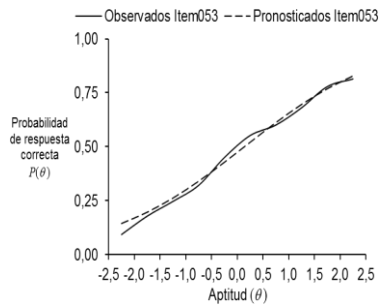
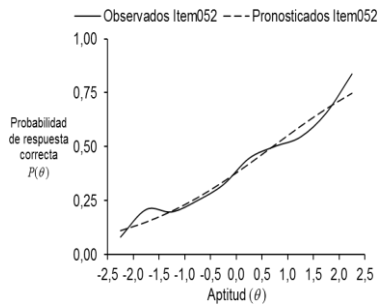
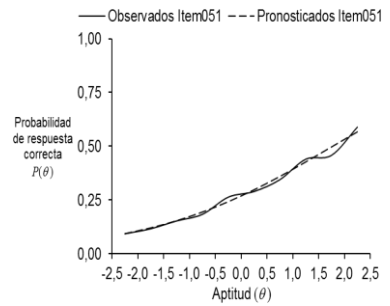
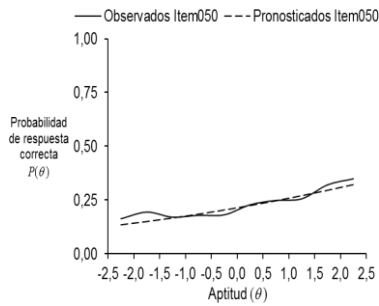
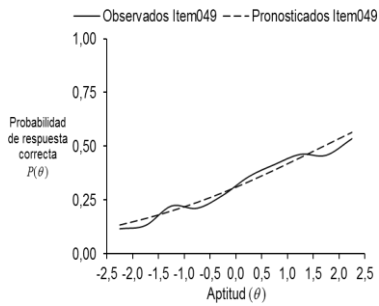
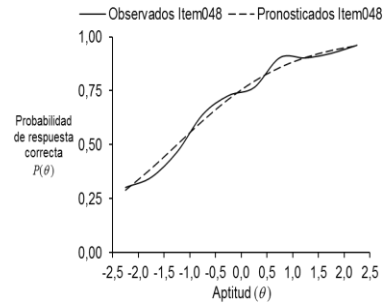
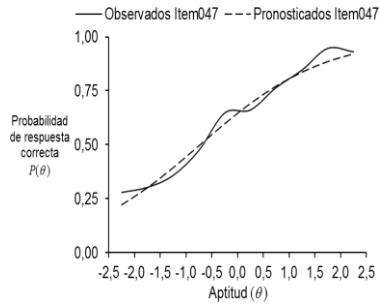
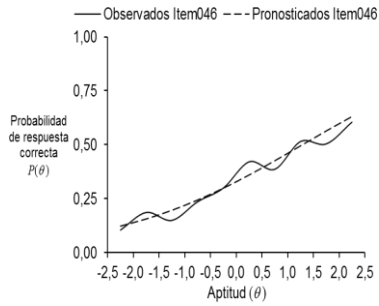
### 3.4.6.3 Valores pronosticados y valores observados

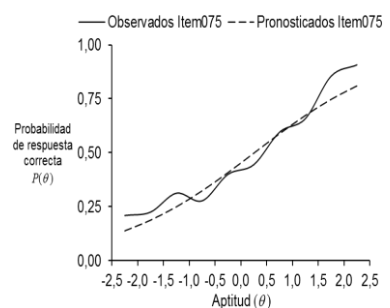
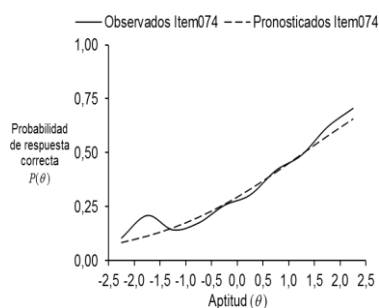
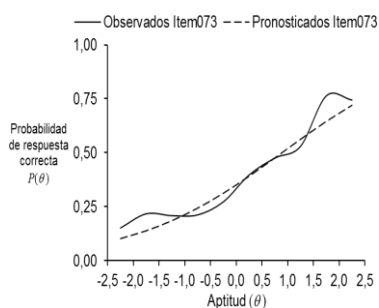
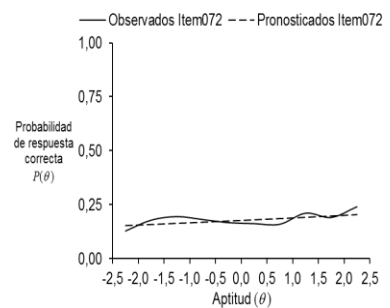
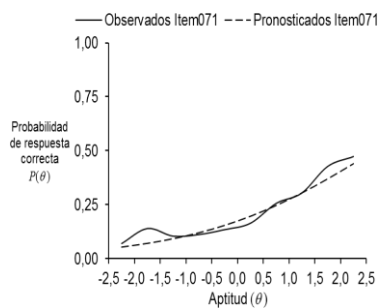
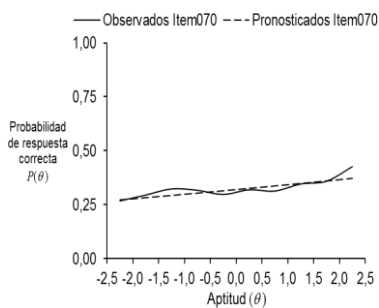
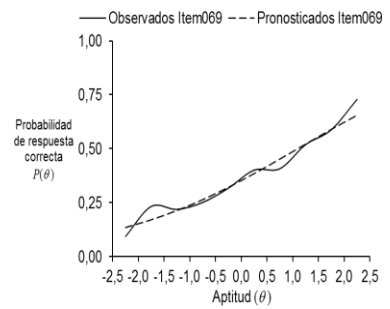
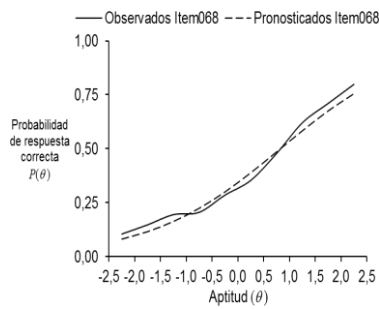
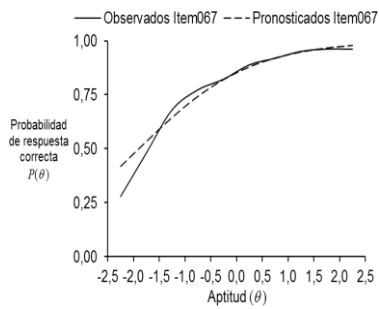
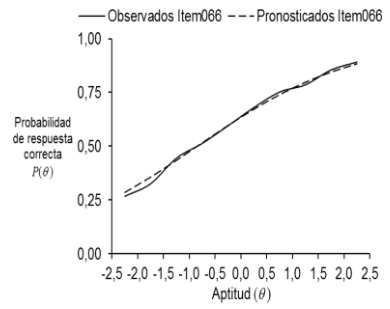
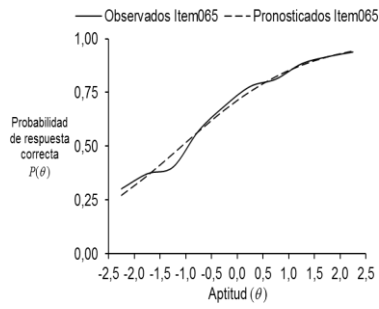
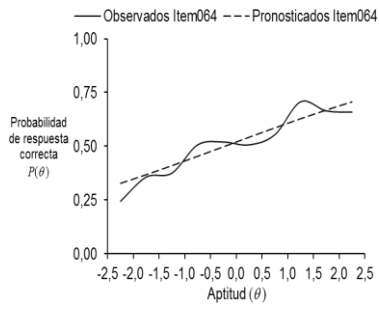
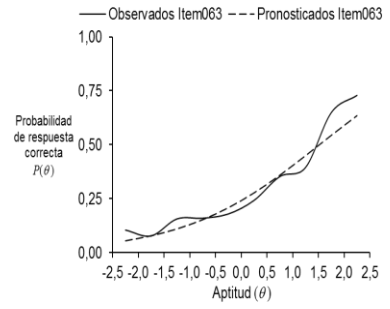
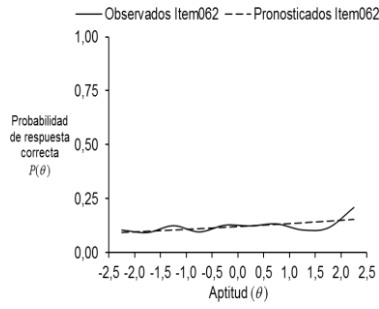
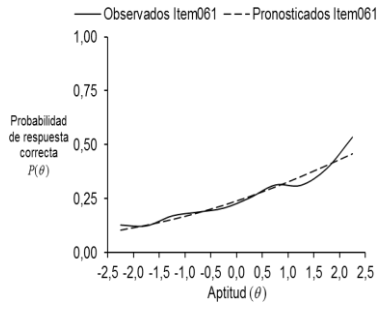
Se grafican los valores pronosticados por el modelo  $P_i(\theta_j)$  y los valores observados obtenidos  $p_i(\theta_j)$  para cada uno de los 100 ítems de la PAAP (Figura 3.4).

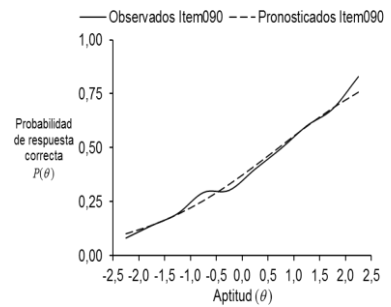
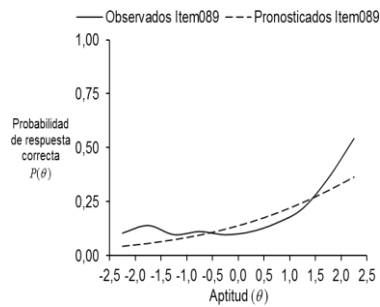
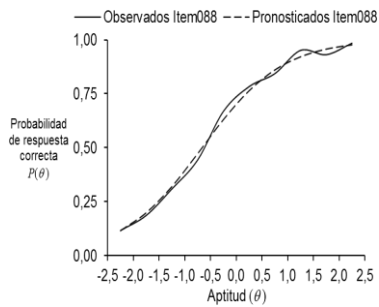
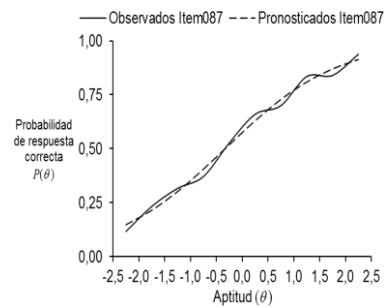
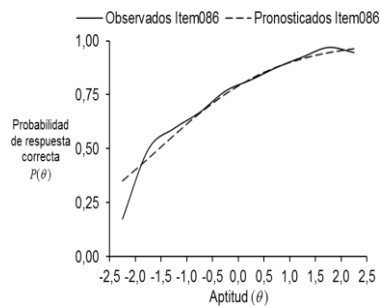
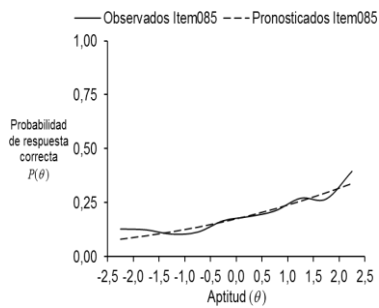
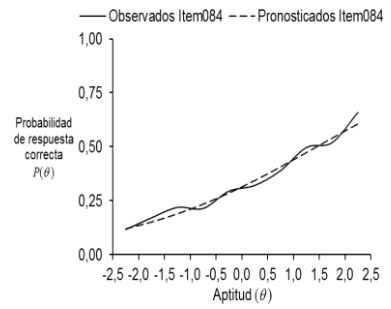
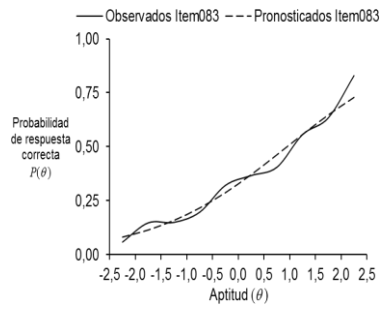
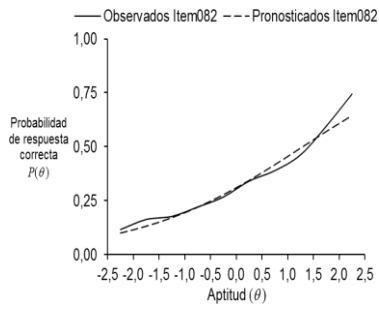
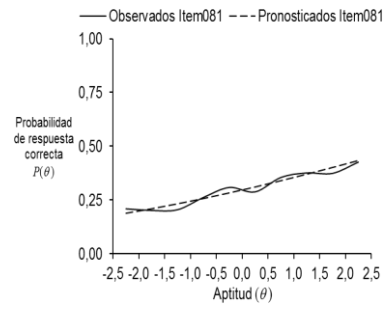
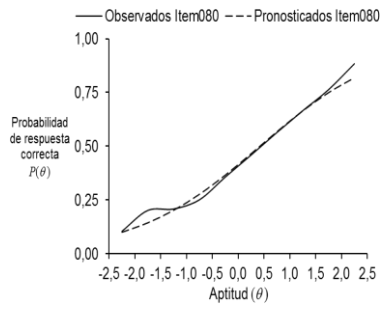
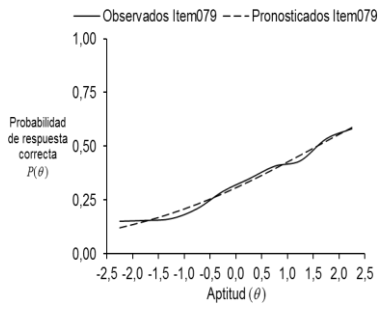
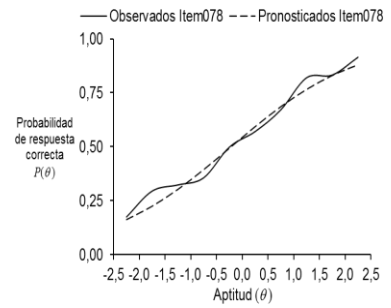
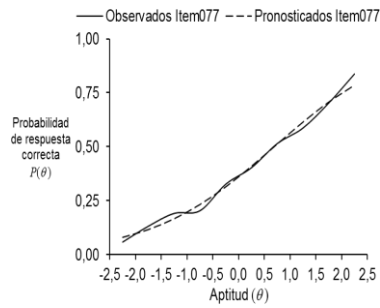
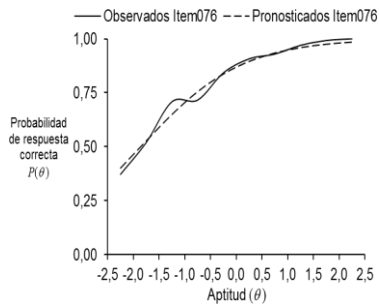




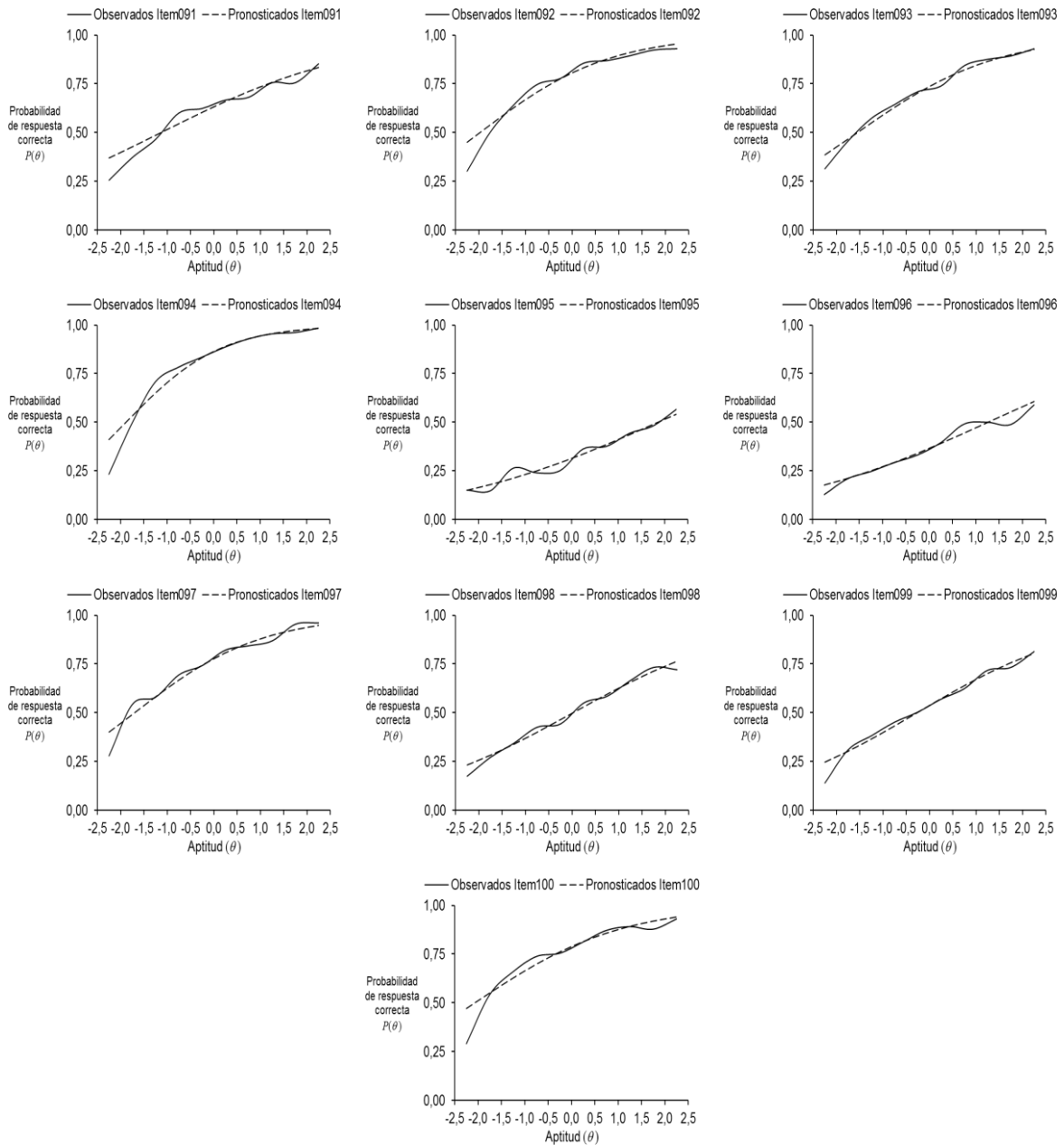












**Figura 3.4** Valores pronosticados por el modelo y valores observados obtenidos.

En las figuras anteriores se observa que los valores pronosticados por el modelo casi se superponen a los valores observados obtenidos, es decir, el modelo estimado se ajusta a los datos para cada ítem de la PAAP.

## CAPÍTULO 4

### COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En el cuarto capítulo se compara las puntuaciones observadas obtenidas mediante la metodología utilizada por la Unidad de Admisión (UA) de la Escuela Politécnica Nacional (EPN) y las puntuaciones verdaderas obtenidas mediante la metodología de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) mediante análisis descriptivo, histogramas, gráficos de las puntuaciones, evaluación del modelo y correlación.

#### 4.1 PUNTUACIONES OBSERVADAS DE LA UA

Aplicando la metodología utilizada por la Unidad de Admisión (UA) de la Escuela Politécnica Nacional (EPN) descrita en el primer capítulo, se asignan las *puntuaciones observadas* en la prueba a los individuos sobre 100 puntos, mediante la suma de las puntuaciones de los ítems, con la fórmula (2):

$$T_j = \sum_{i=1}^{100} u_{ij} \quad j = 1, \dots, 2977 \quad (134)$$

Se obtienen las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la Unidad de Admisión (UA) de los 2.977 individuos de la PAAP<sup>14</sup> (Tabla 4.1).

Individuo	Propedéutico	Puntuación observada del individuo $j$ ( $T_j$ )
Individuo0001	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30
Individuo0002	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	29
Individuo0003	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45
Individuo0004	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	36
Individuo0005	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	49
Individuo0006	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53
Individuo0007	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47
Individuo0008	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	21
Individuo0009	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	34
Individuo0010	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	49
Individuo0011	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	35
Individuo0012	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45
Individuo0013	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45

<sup>14</sup> Se presentan las puntuaciones observadas de solo 100 individuos, el resto se adjunta en el archivo.

Individuo0014	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30
Individuo0015	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38
Individuo0016	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	17
Individuo0017	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42
Individuo0018	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42
Individuo0019	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	35
Individuo0020	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41
Individuo0021	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	58
Individuo0022	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	64
Individuo0023	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	59
Individuo0024	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41
Individuo0025	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	26
Individuo0026	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	49
Individuo0027	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39
Individuo0028	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42
Individuo0029	Propedéutico de Empresarial y Económicas	37
Individuo0030	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30
Individuo0031	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38
Individuo0032	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	59
Individuo0033	Propedéutico de Empresarial y Económicas	26
Individuo0034	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50
Individuo0035	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	36
Individuo0036	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47
Individuo0037	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44
Individuo0038	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46
Individuo0039	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43
Individuo0040	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46
Individuo0041	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	55
Individuo0042	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	71
Individuo0043	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	54
Individuo0044	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	67
Individuo0045	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65
Individuo0046	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46
Individuo0047	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	67
Individuo0048	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	33
Individuo0049	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46
Individuo0050	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53
Individuo0051	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	72
Individuo0052	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	58
Individuo0053	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50
Individuo0054	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43
Individuo0055	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42
Individuo0056	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50
Individuo0057	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38
Individuo0058	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	40
Individuo0059	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65
Individuo0060	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	34
Individuo0061	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46
Individuo0062	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43
Individuo0063	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41
Individuo0064	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	23
Individuo0065	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60
Individuo0066	Propedéutico de Empresarial y Económicas	44
Individuo0067	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	37
Individuo0068	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60
Individuo0069	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39
Individuo0070	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	54
Individuo0071	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	62
Individuo0072	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41
Individuo0073	Propedéutico de Empresarial y Económicas	34
Individuo0074	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	57
Individuo0075	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	62
Individuo0076	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	56

Individuo0077	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	64
Individuo0078	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	48
Individuo0079	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45
Individuo0080	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	69
Individuo0081	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47
Individuo0082	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41
Individuo0083	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39
Individuo0084	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42
Individuo0085	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43
Individuo0086	Propedéutico de Empresarial y Económicas	44
Individuo0087	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	32
Individuo0088	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	28
Individuo0089	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	55
Individuo0090	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39
Individuo0091	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39
Individuo0092	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44
Individuo0093	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65
Individuo0094	Propedéutico de Empresarial y Económicas	42
Individuo0095	Propedéutico de Empresarial y Económicas	70
Individuo0096	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46
Individuo0097	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	31
Individuo0098	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43
Individuo0099	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	66
Individuo0100	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45

**Tabla 4.1 Puntuaciones observadas de la UA.**

En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias el individuo 625 obtuvo la mayor puntuación observada ( $T_{625} = 89$ ), mientras que, el individuo 155 obtuvo la menor puntuación observada ( $T_{155} = 4$ ).

En el Propedéutico de Empresarial y Económicas los individuos 95 y 631 obtuvieron la mayor puntuación observada ( $T_{95} = 70$ ) y ( $T_{631} = 70$ ) respectivamente, mientras que, el individuo 827 obtuvo la menor puntuación observada ( $T_{827} = 12$ ).

En total el individuo 625 obtuvo la mayor puntuación observada ( $T_{625} = 89$ ), mientras que, el individuo 155 obtuvo la menor puntuación observada ( $T_{155} = 4$ ).

## 4.2 PUNTUACIONES VERDADERAS DE LA TRI

Aplicando la metodología de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) descrita en el segundo capítulo, se asignan las *puntuaciones verdaderas* en la prueba a los individuos sobre 100 puntos, mediante la suma de las probabilidades del individuo a los ítems, con la fórmula (125):

$$V_j = \sum_{i=1}^{100} P_i(\theta_j) \quad j = 1, \dots, 2977 \quad (135)$$

Se obtienen las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) de los 2.977 individuos de la PAAP<sup>15</sup> (Tabla 4.2).

Individuo	Propedéutico	Puntuación verdadera del individuo $j$ ( $V_j$ )
Individuo0001	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	31,228146
Individuo0002	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	25,574163
Individuo0003	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47,702655
Individuo0004	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	37,145161
Individuo0005	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	48,797874
Individuo0006	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	52,712219
Individuo0007	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,393157
Individuo0008	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	21,090321
Individuo0009	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	33,302335
Individuo0010	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45,059274
Individuo0011	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	34,506463
Individuo0012	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41,904146
Individuo0013	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47,438802
Individuo0014	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	29,944592
Individuo0015	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	37,230502
Individuo0016	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	20,640930
Individuo0017	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,583030
Individuo0018	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45,940515
Individuo0019	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	35,382960
Individuo0020	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,590335
Individuo0021	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	57,264813
Individuo0022	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65,614889
Individuo0023	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60,798125
Individuo0024	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,047478
Individuo0025	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	28,195079
Individuo0026	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	52,231662
Individuo0027	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,115001
Individuo0028	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,138489
Individuo0029	Propedéutico de Empresarial y Económicas	31,812668
Individuo0030	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	27,982169
Individuo0031	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	40,436604
Individuo0032	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	57,725312
Individuo0033	Propedéutico de Empresarial y Económicas	29,270247
Individuo0034	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50,519005
Individuo0035	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	32,394265
Individuo0036	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,813409
Individuo0037	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45,749983
Individuo0038	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45,524230
Individuo0039	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43,443790
Individuo0040	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47,924420
Individuo0041	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	54,522275
Individuo0042	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	68,857573
Individuo0043	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53,370299
Individuo0044	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	67,825513
Individuo0045	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65,272363
Individuo0046	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,116545

<sup>15</sup> Se presentan las puntuaciones verdaderas de solo 100 individuos el resto se adjunta en el archivo (los valores tienen hasta 18 decimales).

Individuo0047	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65,184368
Individuo0048	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	36,597955
Individuo0049	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,785281
Individuo0050	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53,433201
Individuo0051	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	69,293711
Individuo0052	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	56,649238
Individuo0053	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	51,552709
Individuo0054	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,643664
Individuo0055	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,579235
Individuo0056	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	48,804338
Individuo0057	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39,563173
Individuo0058	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39,514765
Individuo0059	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	62,601975
Individuo0060	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	33,387912
Individuo0061	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,929689
Individuo0062	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43,397895
Individuo0063	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,609260
Individuo0064	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	23,633151
Individuo0065	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60,381880
Individuo0066	Propedéutico de Empresarial y Económicas	42,307264
Individuo0067	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	36,540094
Individuo0068	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60,186616
Individuo0069	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	37,233659
Individuo0070	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	48,859494
Individuo0071	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	67,174722
Individuo0072	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,398385
Individuo0073	Propedéutico de Empresarial y Económicas	30,768300
Individuo0074	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	57,788626
Individuo0075	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	64,272049
Individuo0076	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	57,831747
Individuo0077	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	64,896951
Individuo0078	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,708395
Individuo0079	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43,643399
Individuo0080	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	69,293711
Individuo0081	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,932644
Individuo0082	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,172924
Individuo0083	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41,100632
Individuo0084	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	37,234656
Individuo0085	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,230844
Individuo0086	Propedéutico de Empresarial y Económicas	43,588012
Individuo0087	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30,466466
Individuo0088	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	27,954961
Individuo0089	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53,594150
Individuo0090	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38,896809
Individuo0091	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,112752
Individuo0092	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43,096218
Individuo0093	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65,140422
Individuo0094	Propedéutico de Empresarial y Económicas	39,989075
Individuo0095	Propedéutico de Empresarial y Económicas	69,293711
Individuo0096	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46,867656
Individuo0097	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	24,278998
Individuo0098	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42,440139
Individuo0099	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	68,314432
Individuo0100	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44,380760

**Tabla 4.2 Puntuaciones verdaderas de la TRI.**

En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias 44 individuos obtuvieron la mayor puntuación verdadera ( $V_j = 69,29$ ), mientras que, 23 individuos obtuvieron la menor puntuación verdadera ( $V_j = 20,64$ ).

En el Propedéutico de Empresarial y Económicas el individuo 95 obtuvo la mayor puntuación verdadera ( $V_{95} = 69,29$ ), mientras que, 7 individuos obtuvieron la menor puntuación verdadera ( $V_j = 20,64$ ).

En total 45 individuos obtuvieron la mayor puntuación verdadera ( $V_j = 69,29$ ), mientras que, 30 individuos obtuvieron la menor puntuación verdadera ( $V_j = 20,64$ ).

### 4.3 ANÁLISIS DESCRIPTIVO

Se realiza un análisis descriptivo de las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI de los 2.977 individuos de la PAAP (Tabla 4.3).

Puntuación	Estadístico	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	Propedéutico de Empresarial y Económicas	Total
Puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA	Frecuencia	2.686	291	2.977
	Mínimo	4	12	4
	Máximo	89	70	89
	Rango	85	58	85
	Media	45,60	40,61	45,11
	Mediana	45	41	45
	Moda	43	37	44
	Varianza	130,57	113,51	131,06
	Desviación típica	11,43	10,65	11,45
	Asimetría	0,09	0,07	0,10
	Curtosis	-0,05	-0,17	-0,06
Puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI	Frecuencia	2.686	291	2.977
	Mínimo	20,64	20,64	20,64
	Máximo	69,29	69,29	69,29
	Rango	48,65	48,65	48,65
	Media	45,56	40,67	45,08
	Mediana	45,34	40,52	44,79
	Moda	69,29	20,64	69,29
	Varianza	121,36	107,28	122,05
	Desviación típica	11,02	10,36	11,05
	Asimetría	0,06	0,18	0,08
	Curtosis	-0,50	-0,32	-0,49

Tabla 4.3 Análisis descriptivo de las puntuaciones observadas y verdaderas.

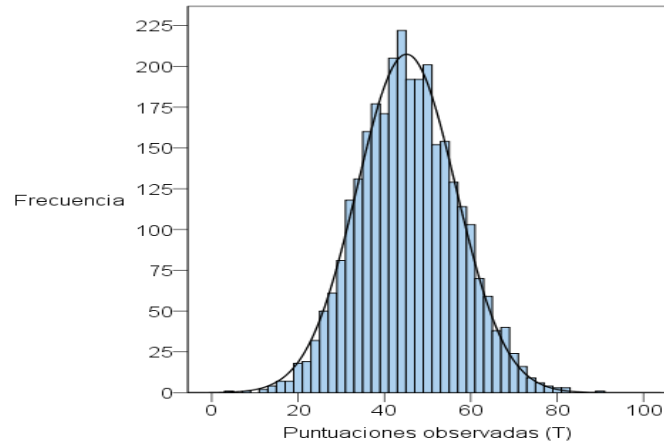
En la tabla anterior se observa que:

- La puntuación verdadera mínima (20,64), es mayor que, la puntuación observada mínima (4).
- La puntuación observada máxima (89), es mayor que, la puntuación verdadera máxima (69,29).
- El rango de la puntuación observada (85), es mayor que, el rango de la puntuación verdadera (48,65).
- La puntuación observada media (45,11), es mayor que, la puntuación verdadera media (45,08).
- El 50% de las puntuaciones observadas son menores que 45 puntos, mientras que, el 50% de las puntuaciones verdaderas son menores que 44,79 puntos y viceversa.
- La puntuación observada que más se repite es 44, mientras que, la puntuación verdadera que más se repite es 69,29.
- La varianza de las puntuaciones observadas (131,06), es mayor que, la varianza de las puntuaciones verdaderas (122,05).
- El 68,3% de las puntuaciones observadas están entre 34 y 57 puntos, mientras que, el 68,3% de las puntuaciones verdaderas están entre 34,03 y 56,13 puntos.
- Las puntuaciones observadas tienen asimetría positiva (0,10), es decir, hay puntuaciones que tienen valores extremos y estos están a la derecha, mientras que, las puntuaciones verdaderas tienen asimetría positiva (0,08) es decir, hay puntuaciones que tienen valores extremos y estos están a la derecha.
- Las puntuaciones observadas tienen curtosis platicúrtica (-0,06), es decir, la mayoría de las puntuaciones están alejadas al promedio, mientras que, las puntuaciones verdaderas tienen curtosis platicúrtica (-0,49), es decir, la mayoría de las puntuaciones están alejadas al promedio.

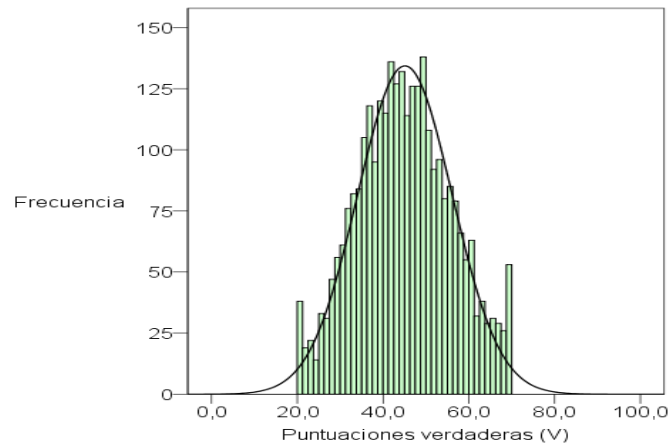


#### 4.4 HISTOGRAMAS

Se presenta el histograma de las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA (Figura 4.1) y el histograma de las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI (Figura 4.2) de los 2.977 individuos de la PAAP.



**Figura 4.1 Histograma de las puntuaciones observadas.**



**Figura 4.2 Histograma de las puntuaciones verdaderas.**

En las figuras anteriores se puede observar que tanto las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) como las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) se aproximan a la distribución normal<sup>16</sup>.

---

<sup>16</sup> La métrica de las puntuaciones de la aptitud se supone que tiene una media cero y desviación estándar uno.

## 4.5 CURVA CARACTERÍSTICA DEL TEST

En la curva característica del test (CCT) de los 2.977 individuos de la PAAP (Figura 4.3), se representa en el eje de las abscisas la aptitud del individuo ( $\theta_j$ ) y en el eje de las ordenadas la puntuación verdadera del individuo ( $V_j$ ) (valores de la CCT).

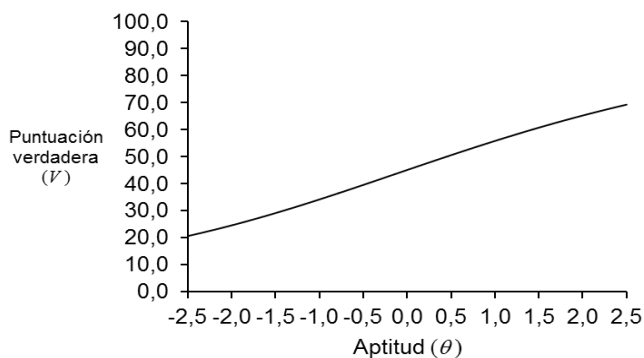


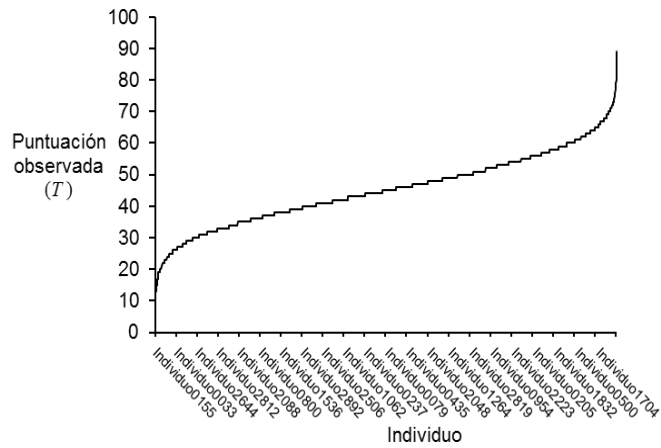
Figura 4.3 Curva característica del test.

En la figura anterior se observa que:

- La CCT de la PAAP es casi una línea recta en la mayor parte de la escala de aptitud.
- El valor asintótico de la CCT de la PAAP en el límite superior es  $n = 100$ .
- La aptitud  $\theta_{719} = 0,448110$  correspondiente a la puntuación verdadera media  $n/2 = 50$ , localiza la dificultad de la PAAP.
- Según el modelo logístico de dos parámetros elegido, la puntuación verdadera más baja ( $V_j = 20,64$ ) corresponde a un nivel de aptitud muy bajo ( $\theta_j = -2,5$ ), y la puntuación verdadera más alta ( $V_j = 69,29$ ) corresponde a un nivel de aptitud muy alto ( $\theta_j = 2,5$ ).

## 4.6 GRÁFICOS DE LAS PUNTUACIONES

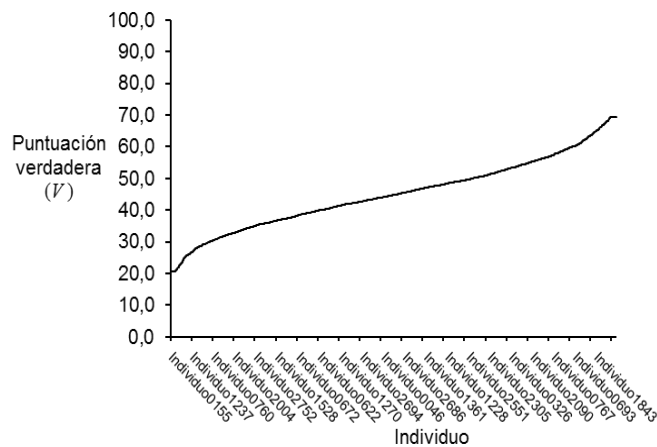
Se presenta las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA de los 2.977 individuos de la PAAP (Figura 4.4)



**Figura 4.4 Puntuaciones observadas de la UA.**

En la figura anterior se observa que las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) tienen una forma no lineal y aumentan rápidamente.

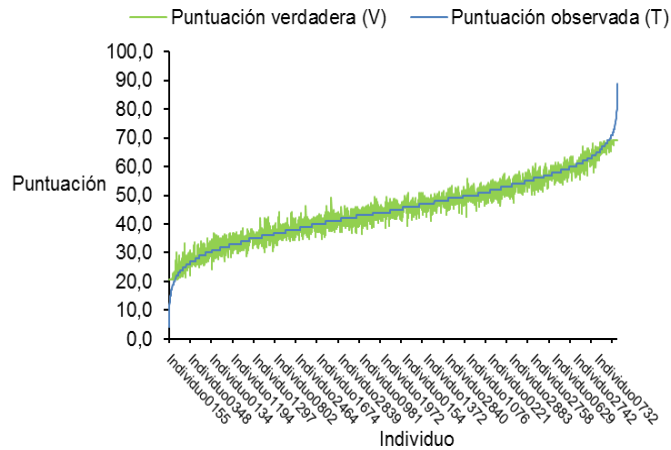
Se presenta las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI de los 2.977 individuos de la PAAP (Figura 4.5).



**Figura 4.5 Puntuaciones verdaderas de la TRI.**

En la figura anterior se observa que las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) tienen una forma casi lineal y aumentan lentamente.

Se presentan las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI de los 2.977 individuos de la PAAP (Figura 4.6).



**Figura 4.6 Puntuaciones observadas de la UA y verdaderas de la TRI.**

En la figura anterior el modelo de TRI indica que, en la cola inferior es menos probable que un individuo rinda la PAAP sin un conocimiento previo y en la cola superior es menos probable que un individuo rinda la PAAP perfectamente.

## 4.7 EVALUACIÓN DEL MODELO

### 4.7.1 CONDICIÓN DE ADMISIÓN

A las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI, se aplica la condición de admisión<sup>17</sup> mencionada en el capítulo 1: “Serán admitidos a la Escuela Politécnica Nacional los aspirantes que, habiendo alcanzado un puntaje superior a la media aritmética de todas las puntuaciones de las pruebas presentadas en cada convocatoria, hayan obtenido las mejores puntuaciones, hasta cubrir el cupo establecido por la Institución.” (Tabla 4.4).

Condición de admisión	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias		Propedéutico de Empresarial y Económicas		Total	
	Unidad de Admisión (UA)	Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)	Unidad de Admisión (UA)	Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)	Unidad de Admisión (UA)	Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)
Cupo	650	650	120	120	770	770
Puntuación de admisión	54	53,56	43	43,09		
Media aritmética	45,60	45,56	40,61	40,67	45,11	45,08

**Tabla 4.4 Condición de admisión.**

En la tabla anterior se observa que:

<sup>17</sup> Primer inciso del numeral 6 de Políticas de Admisión de la EPN.

- En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias en la UA el cupo es flexible porque la puntuación de admisión es un número entero (54), mientras que, en la TRI el cupo puede ser fijo porque la puntuación de admisión es un número decimal (53,56) (hasta 18 decimales).
- En el Propedéutico de Empresarial y Económicas en la UA el cupo es flexible porque la puntuación de admisión es un número entero (43), mientras que, en la TRI el cupo puede ser fijo porque la puntuación de admisión es un número decimal (43,09) (hasta 18 decimales).
- La puntuación de admisión para el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias es mayor que, para el Propedéutico de Empresarial y Económicas, tanto en la UA como en la TRI.
- La media aritmética del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias es mayor que, el Propedéutico de Empresarial y Económicas, tanto en la UA como en la TRI.

#### 4.7.2 PRUEBA DE AJUSTE

Se presenta en la Tabla 4.5 las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI de los 2.977 individuos de la PAAP<sup>18</sup>, las mismas que son evaluadas con su respectiva condición de admisión y los individuos son denominados como:

- **Admitido.** Cuando el individuo cumple la condición de admisión.
- **No admitido.** Cuando el individuo no cumple la condición de admisión.

Se comparan las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA con las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI, definiendo el *error de medida* como la diferencia entre ambas  $e_j = |T_j - V_j|$ . También se comparan las condiciones de admisión de la UA con la TRI y los individuos son denominados como:

- **Igual admitido.** Cuando el individuo es admitido con la UA y con la TRI.
- **Igual no admitido.** Cuando el individuo no es admitido con la UA y con la TRI.

---

<sup>18</sup> Se presentan las puntuaciones de solo 100 individuos el resto se adjunta en el archivo (los valores tienen hasta 18 decimales).

- **Beneficiado.** Cuando el individuo no es admitido con la UA pero si con la TRI.
- **No beneficiado.** Cuando el individuo es admitido con la UA pero no con la TRI.

Individuo	Propedéutico	Unidad de Admisión (UA)		Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)		Comparación	
		Puntuación observada del individuo $j$ ( $T_j$ )	Admisión	Puntuación verdadera del individuo $j$ ( $V_j$ )	Admisión	Error de medida	Admisión
Individuo0001	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30	No admitido	31,228146	No admitido	1,228146	Igual no admitido
Individuo0002	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	29	No admitido	25,574163	No admitido	3,425837	Igual no admitido
Individuo0003	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45	No admitido	47,702655	No admitido	2,702655	Igual no admitido
Individuo0004	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	36	No admitido	37,145161	No admitido	1,145161	Igual no admitido
Individuo0005	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	49	No admitido	48,797874	No admitido	0,202126	Igual no admitido
Individuo0006	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53	No admitido	52,712219	No admitido	0,287781	Igual no admitido
Individuo0007	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47	No admitido	46,393157	No admitido	0,606843	Igual no admitido
Individuo0008	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	21	No admitido	21,090321	No admitido	0,090321	Igual no admitido
Individuo0009	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	34	No admitido	33,302335	No admitido	0,697665	Igual no admitido
Individuo0010	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	49	No admitido	45,059274	No admitido	3,940726	Igual no admitido
Individuo0011	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	35	No admitido	34,506463	No admitido	0,493537	Igual no admitido
Individuo0012	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45	No admitido	41,904146	No admitido	3,095854	Igual no admitido
Individuo0013	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45	No admitido	47,438802	No admitido	2,438802	Igual no admitido
Individuo0014	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30	No admitido	29,944592	No admitido	0,055408	Igual no admitido
Individuo0015	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38	No admitido	37,230502	No admitido	0,769498	Igual no admitido
Individuo0016	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	17	No admitido	20,640930	No admitido	3,640930	Igual no admitido
Individuo0017	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42	No admitido	44,583030	No admitido	2,583030	Igual no admitido
Individuo0018	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42	No admitido	45,940515	No admitido	3,940515	Igual no admitido
Individuo0019	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	35	No admitido	35,382960	No admitido	0,382960	Igual no admitido
Individuo0020	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41	No admitido	42,590335	No admitido	1,590335	Igual no admitido
Individuo0021	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	58	Admitido	57,264813	Admitido	0,735187	Igual admitido
Individuo0022	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	64	Admitido	65,614889	Admitido	1,614889	Igual admitido
Individuo0023	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	59	Admitido	60,798125	Admitido	1,798125	Igual admitido
Individuo0024	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41	No admitido	42,047478	No admitido	1,047478	Igual no admitido
Individuo0025	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	26	No admitido	28,195079	No admitido	2,195079	Igual no admitido
Individuo0026	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	49	No admitido	52,231662	No admitido	3,231662	Igual no admitido
Individuo0027	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39	No admitido	42,115001	No admitido	3,115001	Igual no admitido
Individuo0028	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42	No admitido	46,138489	No admitido	4,138489	Igual no admitido
Individuo0029	Propedéutico de Empresarial y Económicas	37	No admitido	31,812668	No admitido	5,187332	Igual no admitido
Individuo0030	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	30	No admitido	27,982169	No admitido	2,017831	Igual no admitido
Individuo0031	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38	No admitido	40,436604	No admitido	2,436604	Igual no admitido
Individuo0032	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	59	Admitido	57,725312	Admitido	1,274688	Igual admitido

Individuo0033	Propedéutico de Empresarial y Económicas	26	No admitido	29,270247	No admitido	3,270247	Igual no admitido
Individuo0034	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50	No admitido	50,519005	No admitido	0,519005	Igual no admitido
Individuo0035	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	36	No admitido	32,394265	No admitido	3,605735	Igual no admitido
Individuo0036	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47	No admitido	46,813409	No admitido	0,186591	Igual no admitido
Individuo0037	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44	No admitido	45,749983	No admitido	1,749983	Igual no admitido
Individuo0038	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46	No admitido	45,524230	No admitido	0,475770	Igual no admitido
Individuo0039	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43	No admitido	43,443790	No admitido	0,443790	Igual no admitido
Individuo0040	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46	No admitido	47,924420	No admitido	1,924420	Igual no admitido
Individuo0041	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	55	Admitido	54,522275	Admitido	0,477725	Igual admitido
Individuo0042	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	71	Admitido	68,857573	Admitido	2,142427	Igual admitido
Individuo0043	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	54	Admitido	53,370299	No admitido	0,629701	No beneficiado
Individuo0044	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	67	Admitido	67,825513	Admitido	0,825513	Igual admitido
Individuo0045	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65	Admitido	65,272363	Admitido	0,272363	Igual admitido
Individuo0046	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46	No admitido	44,116545	No admitido	1,883455	Igual no admitido
Individuo0047	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	67	Admitido	65,184368	Admitido	1,815632	Igual admitido
Individuo0048	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	33	No admitido	36,597955	No admitido	3,597955	Igual no admitido
Individuo0049	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46	No admitido	46,785281	No admitido	0,785281	Igual no admitido
Individuo0050	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	53	No admitido	53,433201	No admitido	0,433201	Igual no admitido
Individuo0051	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	72	Admitido	69,293711	Admitido	2,706289	Igual admitido
Individuo0052	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	58	Admitido	56,649238	Admitido	1,350762	Igual admitido
Individuo0053	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50	No admitido	51,552709	No admitido	1,552709	Igual no admitido
Individuo0054	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43	No admitido	42,643664	No admitido	0,356336	Igual no admitido
Individuo0055	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42	No admitido	42,579235	No admitido	0,579235	Igual no admitido
Individuo0056	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	50	No admitido	48,804338	No admitido	1,195662	Igual no admitido
Individuo0057	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	38	No admitido	39,563173	No admitido	1,563173	Igual no admitido
Individuo0058	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	40	No admitido	39,514765	No admitido	0,485235	Igual no admitido
Individuo0059	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65	Admitido	62,601975	Admitido	2,398025	Igual admitido
Individuo0060	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	34	No admitido	33,387912	No admitido	0,612088	Igual no admitido
Individuo0061	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46	No admitido	46,929689	No admitido	0,929689	Igual no admitido
Individuo0062	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43	No admitido	43,397895	No admitido	0,397895	Igual no admitido
Individuo0063	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41	No admitido	42,609260	No admitido	1,609260	Igual no admitido
Individuo0064	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	23	No admitido	23,633151	No admitido	0,633151	Igual no admitido
Individuo0065	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60	Admitido	60,381880	Admitido	0,381880	Igual admitido
Individuo0066	Propedéutico de Empresarial y Económicas	44	Admitido	42,307264	No admitido	1,692736	No beneficiado
Individuo0067	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	37	No admitido	36,540094	No admitido	0,459906	Igual no admitido



Individuo0068	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	60	Admitido	60,186616	Admitido	0,186616	Igual admitido
Individuo0069	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39	No admitido	37,233659	No admitido	1,766341	Igual no admitido
Individuo0070	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	54	Admitido	48,859494	No admitido	5,140506	No beneficiado
Individuo0071	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	62	Admitido	67,174722	Admitido	5,174722	Igual admitido
Individuo0072	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41	No admitido	44,398385	No admitido	3,398385	Igual no admitido
Individuo0073	Propedéutico de Empresarial y Económicas	34	No admitido	30,768300	No admitido	3,231700	Igual no admitido
Individuo0074	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	57	Admitido	57,788626	Admitido	0,788626	Igual admitido
Individuo0075	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	62	Admitido	64,272049	Admitido	2,272049	Igual admitido
Individuo0076	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	56	Admitido	57,831747	Admitido	1,831747	Igual admitido
Individuo0077	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	64	Admitido	64,896951	Admitido	0,896951	Igual admitido
Individuo0078	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	48	No admitido	44,708395	No admitido	3,291605	Igual no admitido
Individuo0079	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45	No admitido	43,643399	No admitido	1,356601	Igual no admitido
Individuo0080	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	69	Admitido	69,293711	Admitido	0,293711	Igual admitido
Individuo0081	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	47	No admitido	46,932644	No admitido	0,067356	Igual no admitido
Individuo0082	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	41	No admitido	44,172924	No admitido	3,172924	Igual no admitido
Individuo0083	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39	No admitido	41,100632	No admitido	2,100632	Igual no admitido
Individuo0084	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	42	No admitido	37,234656	No admitido	4,765344	Igual no admitido
Individuo0085	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43	No admitido	44,230844	No admitido	1,230844	Igual no admitido
Individuo0086	Propedéutico de Empresarial y Económicas	44	Admitido	43,588012	Admitido	0,411988	Igual admitido
Individuo0087	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	32	No admitido	30,466466	No admitido	1,533534	Igual no admitido
Individuo0088	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	28	No admitido	27,954961	No admitido	0,045039	Igual no admitido
Individuo0089	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	55	Admitido	53,594150	Admitido	1,405850	Igual admitido
Individuo0090	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39	No admitido	38,896809	No admitido	0,103191	Igual no admitido
Individuo0091	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	39	No admitido	42,112752	No admitido	3,112752	Igual no admitido
Individuo0092	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	44	No admitido	43,096218	No admitido	0,903782	Igual no admitido
Individuo0093	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	65	Admitido	65,140422	Admitido	0,140422	Igual admitido
Individuo0094	Propedéutico de Empresarial y Económicas	42	No admitido	39,989075	No admitido	2,010925	Igual no admitido
Individuo0095	Propedéutico de Empresarial y Económicas	70	Admitido	69,293711	Admitido	0,706289	Igual admitido
Individuo0096	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	46	No admitido	46,867656	No admitido	0,867656	Igual no admitido
Individuo0097	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	31	No admitido	24,278998	No admitido	6,721002	Igual no admitido
Individuo0098	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	43	No admitido	42,440139	No admitido	0,559861	Igual no admitido
Individuo0099	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	66	Admitido	68,314432	Admitido	2,314432	Igual admitido
Individuo0100	Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	45	No admitido	44,380760	No admitido	0,619240	Igual no admitido

**Tabla 4.5 Comparación de las puntuaciones observadas de la UA y verdaderas de la TRI.**

#### 4.7.2.1 Propedéutico de Ingeniería y Ciencias

Se realiza la prueba de ajuste de la admisión de los individuos tanto de la UA como de la TRI (Tabla 4.6).

		Unidad de Admisión (UA)		
		Admitido	No admitido	Total
Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)	Admitido	600	50	<b>650</b>
	No admitido	64	1.972	<b>2.036</b>
	Total	<b>664</b>	<b>2.022</b>	<b>2.686</b>

Tabla 4.6 Prueba de ajuste del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.

El análisis de la prueba de ajuste del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias se presenta en la Tabla 4.7.

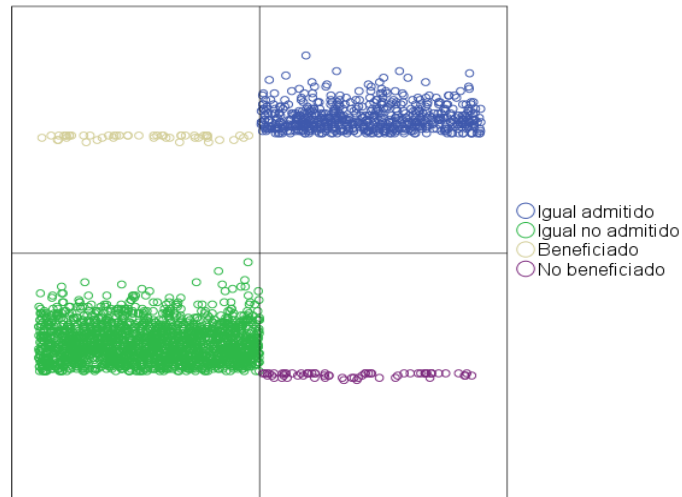
**Sensibilidad.** Es la probabilidad de que los individuos admitidos, el modelo los clasifique como admitidos, bajo un punto de corte determinado.

**Especificidad.** Es la probabilidad de que los individuos no admitidos, el modelo los clasifique como no admitidos, bajo un punto de corte determinado.

Descripción	%	Interpretación
Sensibilidad (Igual admitidos)	90,4	El modelo predice bien al 90,4% de los individuos que son admitidos.
Especificidad (Igual no admitidos)	97,5	El modelo predice bien al 97,5% de los individuos que no son admitidos.
Valor predictivo positivo	92,3	De los individuos que el modelo predice que son admitidos, el 92,3% en realidad son admitidos.
Valor predictivo negativo	96,9	De los individuos que el modelo predice que no son admitidos, el 96,9% en realidad no son admitidos.
Tasa de falsos positivos para el valor verdadero	2,5	Al 2,5% de individuos no admitidos el modelo no les detecta.
Tasa de falsos negativos para el valor verdadero	9,6	Al 9,6% de individuos que son admitidos el modelo les dice no son admitidos.
Tasa de falsos positivos para el valor estimado (Error tipo I) (Beneficiados)	7,7	Al 7,7% que el modelo predice que son admitidos en realidad no son admitidos.
Tasa de falsos negativos para el valor estimado (Error tipo II) (No beneficiados)	3,1	Al 3,1% de individuos que el modelo predice que no son admitidos en realidad son admitidos.
Poder de predicción	95,8	El 95,8% están correctamente clasificados.

Tabla 4.7 Análisis de la prueba de ajuste del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.

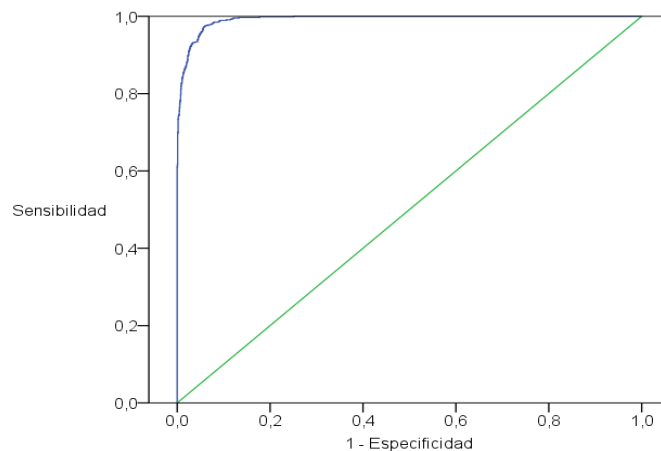
Se presenta en la Figura 4.7 el diagrama de dispersión del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias, en el eje de las abscisas se representan los individuos ( $j$ ) y en el eje de las ordenadas se representa la puntuación observada ( $T_j$ ).



**Figura 4.7 Diagrama de dispersión del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.**

En la figura anterior se observa que alrededor de la puntuación de admisión (54) los individuos admitidos con la UA tienen puntaje bajo, por esta razón el modelo no les beneficia, mientras que, los individuos admitidos con la TRI tienen puntaje alto, por esta razón el modelo les beneficia<sup>19</sup>. Además a la mayoría de individuos el modelo predice bien (igual admitidos e igual no admitidos), mientras que, pocos individuos, el modelo tiene error tipo I y II (beneficiados y no beneficiados respectivamente).

En la Figura 4.8 se presenta la curva ROC del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias, esta prueba permite analizar la especificidad y sensibilidad, para determinar el proceso de discriminación.



**Figura 4.8 Curva ROC del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.**

<sup>19</sup> Para la interpretación se deben tomar los valores absolutos.

En la figura anterior se observa que el área bajo la curva es igual a 0,99, por lo tanto, el modelo tiene una buena discriminación entre individuos admitidos y no admitidos en función de los diferentes valores de las probabilidades de corte.

#### 4.7.2.2 Propedéutico de Empresarial y Económicas

Se realiza la prueba de ajuste de la admisión de los individuos tanto de la UA como de la TRI (Tabla 4.8).

		Unidad de Admisión (UA)		
		Admitido	No admitido	Total
Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI)	Admitido	111	9	120
	No admitido	10	161	171
	Total	121	170	291

Tabla 4.8 Prueba de ajuste del Propedéutico de Empresarial y Económicas.

El análisis de la prueba de ajuste del Propedéutico de Empresarial y Económicas se presenta en la Tabla 4.9.

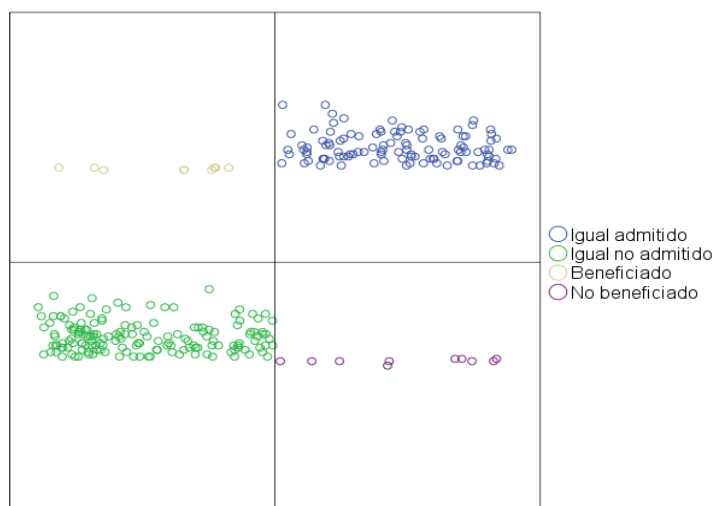
**Sensibilidad.** Es la probabilidad de que los individuos admitidos, el modelo los clasifique como admitidos, bajo un punto de corte determinado.

**Especificidad.** Es la probabilidad de que los individuos no admitidos, el modelo los clasifique como no admitidos, bajo un punto de corte determinado.

Descripción	%	Interpretación
Sensibilidad (Igual admitidos)	91,7	El modelo predice bien al 91,7% de los individuos que son admitidos.
Especificidad (Igual no admitidos)	94,7	El modelo predice bien al 94,7% de los individuos que no son admitidos.
Valor predictivo positivo	92,5	De los individuos que el modelo predice que son admitidos, el 92,5% en realidad son admitidos.
Valor predictivo negativo	94,2	De los individuos que el modelo predice que no son admitidos, el 94,2% en realidad no son admitidos.
Tasa de falsos positivos para el valor verdadero	5,3	Al 5,3% de individuos no admitidos el modelo no les detecta.
Tasa de falsos negativos para el valor verdadero	8,3	Al 8,3% de individuos que son admitidos el modelo les dice no son admitidos.
Tasa de falsos positivos para el valor estimado (Error tipo I) (Beneficiados)	7,5	Al 7,5% que el modelo predice que son admitidos en realidad no son admitidos.
Tasa de falsos negativos para el valor estimado (Error tipo II) (No beneficiados)	5,8	Al 5,8% de individuos que el modelo predice que no son admitidos en realidad son admitidos.
Poder de predicción	93,5	El 93,5% están correctamente clasificados.

Tabla 4.9 Análisis de la prueba de ajuste del Propedéutico de Empresarial y Económicas.

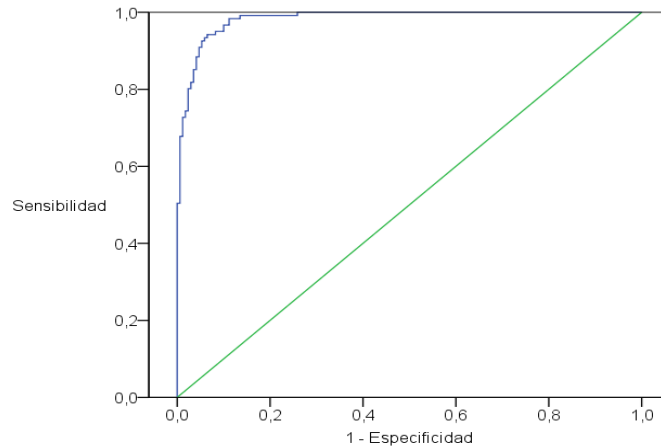
Se presenta en la Figura 4.9 el diagrama de dispersión del Propedéutico de Empresarial y Económicas, en el eje de las abscisas se representan los individuos ( $j$ ) y en el eje de las ordenadas se representa la puntuación observada ( $T_j$ ).



**Figura 4.9 Diagrama de dispersión del Propedéutico de Empresarial y Económicas.**

En la figura anterior se observa que alrededor de la puntuación de admisión (43) los individuos admitidos con la UA tienen puntaje bajo, por esta razón el modelo no les beneficia, mientras que, los individuos admitidos con la TRI tienen puntaje alto, por esta razón el modelo les beneficia. Además a la mayoría de individuos el modelo predice bien (igual admitidos e igual no admitidos), mientras que, pocos individuos, el modelo tiene error tipo I y II (beneficiados y no beneficiados respectivamente).

En la Figura 4.10 se presenta la curva ROC del Propedéutico de Empresarial y Económicas, esta prueba permite analizar la especificidad y sensibilidad, para determinar el proceso de discriminación.



**Figura 4.10 Curva ROC del Propedéutico de Empresarial y Económicas.**

En la figura anterior se observa que el área bajo la curva es igual a 0,98, por lo tanto, el modelo tiene una buena discriminación entre individuos admitidos y no admitidos en función de los diferentes valores de las probabilidades de corte.

## 4.8 CORRELACIÓN

### 4.8.1 CORRELACIÓN PUNTUACIONES Y CALIFICACIONES

#### 4.8.1.1 El coeficiente de correlación

Una medida de la relación que existe entre dos variables es el coeficiente de correlación lineal  $\rho$ . El estimador muestral para  $\rho$  es el coeficiente de correlación muestral  $r$  (Galindo, 1999).

Para determinar si existe relación lineal entre dos variables se utiliza el coeficiente de correlación lineal de Pearson  $r$ , se define como:

$$r = \frac{SC_{xy}}{\sqrt{SC_{xx}SC_{yy}}} = \frac{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2 \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2}} \quad (136)$$

donde:

$SC_{xy}$ : Suma de los cuadrados alrededor de la media de  $x$  e  $y$ .

$SC_{xx}$ : Suma de los cuadrados alrededor de la media de  $x$ .

$SC_{yy}$ : Suma de los cuadrados alrededor de la media de  $y$ .

El rango de variación de  $r$  está entre  $-1$  y  $1$ :

- Los valores de  $r$  cercanos a  $0$  indican que no existe o hay poca relación (lineal) entre las dos variables<sup>20</sup>.
- Los valores de  $r$  cercanos a  $1$  indican que existe una fuerte relación (lineal) positiva entre las dos variables, es decir, a medida que aumentan los valores de una de las dos variables, aumentan los de la otra.
- Los valores de  $r$  cercanos a  $-1$  indican que existe una fuerte relación (lineal) negativa entre las dos variables, es decir, a medida que aumentan los valores de una de las dos variables, disminuyen los de la otra.
- Los valores de  $r=1$  o  $r=-1$  indican que todos los valores caen exactamente en la recta y se tiene un modelo determinístico.

### Prueba de hipótesis para $\rho$

Prueba de hipótesis bilateral al nivel de significación  $\alpha$ .

- 1) Hipótesis nula.  $H_0: \rho = 0$  (No existe correlación entre las dos variables)
- 2) Hipótesis alternativa.  $H_1: \rho \neq 0$  (Existe correlación entre las dos variables)
- 3) Estadístico de prueba.

Puede realizarse pruebas sobre el valor de  $\rho$  utilizando el estadístico:

$$t_{obs} = \frac{r\sqrt{N-2}}{\sqrt{1-r^2}} \quad (137)$$

donde:

$r$ : Coeficiente de correlación lineal de Pearson.

$N$ : Número de individuos.

$t_{obs}$ : Sigue una ley  $t$  con  $(N-2)$  grados de libertad.

- 4) Región de rechazo.

Rechazo  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$  si:

$$t_{obs} < -t_{\alpha/2}(N-2) \quad \text{o} \quad t_{obs} > t_{\alpha/2}(N-2) \quad (138)$$

---

<sup>20</sup> En el caso que se tenga un valor de  $r$  cercano a cero puede existir una relación no lineal entre las dos variables.

O también, si el valor  $p$  ( $p$ -value) asociado es menor que el nivel de significación  $\alpha$ , es decir, si  $p\text{-value} < \alpha$  rechazo  $H_0$  al nivel de significación  $\alpha$ .

### Matriz de correlaciones

La matriz de correlaciones es una matriz simétrica respecto a la diagonal principal y con unos en dicha diagonal, por lo que basta con analizar los elementos situados por encima o por debajo de ella (Ferrán, 2001).

#### 4.8.1.1.1 Propedéutico de Ingeniería y Ciencias

Para obtener la relación entre las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI con las calificaciones de las materias del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias (PIC) del semestre 2012-A (Tabla 4.10), se analiza los resultados de la matriz de correlaciones, construida a partir del coeficiente de correlación de Pearson.

		Propedéutico de Ingeniería y Ciencias	
Admisión	Puntuación	Frecuencia	%
Igual admitido	Puntuación con calificaciones	510	85,0
	Puntuación sin calificaciones	90	15,0
	<b>Total</b>	<b>600</b>	<b>100,0</b>

Tabla 4.10 Individuos igual admitidos y puntuación con calificaciones del PIC.

En la tabla anterior se observa que los individuos igual admitidos y puntuación con calificaciones (ingresaron a la EPN) presentan el mayor porcentaje con el 85%, mientras que, los que no ingresaron a la EPN presentan el menor porcentaje con el 15%.

En la Tabla 4.11 se presenta la matriz de correlaciones entre las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI con las calificaciones de las materias del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.

Matriz de correlaciones									
		Puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA	Puntuación verdadera ( $V_j$ ) de la TRI	Fundamentos de la Matemática	Geometría y Dibujo	Fundamentos de Física	Fundamentos de Química	Promedio materias	Materias aprobadas
Puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA	Correlación de Pearson	1	,903**	,278**	,261**	,275**	,231**	,318**	,312**
	Sig. (bilateral)		,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000
	N	510	510	505	504	509	507	510	510
Puntuación verdadera ( $V_j$ ) de la TRI	Correlación de Pearson	,903**	1	,266**	,228**	,232**	,211**	,287**	,284**
	Sig. (bilateral)	,000		,000	,000	,000	,000	,000	,000
	N	510	510	505	504	509	507	510	510



Fundamentos de la Matemática	Correlación de Pearson	,278**	,266**	1	,665**	,612**	,606**	,877**	,833**
	Sig. (bilateral)	,000	,000		,000	,000	,000	,000	,000
	N	505	505	505	502	504	502	505	505
Geometría y Dibujo	Correlación de Pearson	,261**	,228**	,665**	1	,582**	,606**	,863**	,817**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000		,000	,000	,000	,000
	N	504	504	502	504	504	503	504	504
Fundamentos de Física	Correlación de Pearson	,275**	,232**	,612**	,582**	1	,469**	,793**	,761**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,000		,000	,000	,000
	N	509	509	504	504	509	507	509	509
Fundamentos de Química	Correlación de Pearson	,231**	,211**	,606**	,606**	,469**	1	,799**	,769**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,000	,000		,000	,000
	N	507	507	502	503	507	507	507	507
Promedio materias	Correlación de Pearson	,318**	,287**	,877**	,863**	,793**	,799**	1	,953**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,000	,000	,000		,000
	N	510	510	505	504	509	507	510	510
Materias aprobadas	Correlación de Pearson	,312**	,284**	,833**	,817**	,761**	,769**	,953**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,000	,000	,000	,000	
	N	510	510	505	504	509	507	510	510

\*\* La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

**Tabla 4.11 Correlaciones entre puntuaciones y calificaciones del PIC.**

**Para las variables: Puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática.**

Prueba de hipótesis bilateral al nivel de significación del 1% .

- 1) Hipótesis nula.  $H_0 : \rho = 0$  (No existe correlación entre la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática)
- 2) Hipótesis alternativa.  $H_1 : \rho \neq 0$  (Existe correlación entre la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática)
- 3) Valor  $p$  ( $p$ -value).

$$p\text{-value} = 0,000$$

- 4) Región de rechazo.

Como  $p\text{-value} < \alpha$ , esto es  $0,000 < 0,01$ , por tanto, rechazo  $H_0$  al nivel de significación del 1%, es decir, hay suficiente evidencia que indica que existe correlación entre la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática.

Análogamente, se repite este proceso para cada par de variables, con lo que se puede concluir:

- La puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA tiene correlación con las calificaciones de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y

Dibujo, Fundamentos de Física, Fundamentos de Química, el promedio de las calificaciones de las materias y el número de materias aprobadas.

- La puntuación verdadera ( $V_j$ ) de la TRI tiene correlación con las calificaciones de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo, Fundamentos de Física, Fundamentos de Química, el promedio de las calificaciones de las materias y el número de materias aprobadas.

#### 4.8.1.1.2 Propedéutico de Empresarial y Económicas

Para obtener la relación entre las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI con las calificaciones de las materias del Propedéutico de Empresarial y Económicas (PEE) del semestre 2012-A (Tabla 4.12), se analiza los resultados de la matriz de correlaciones, construida a partir del coeficiente de correlación de Pearson.

		Propedéutico de Empresarial y Económicas	
Admisión	Puntuación	Frecuencia	%
Igual admitido	Puntuación con calificaciones	98	88,3
	Puntuación sin calificaciones	13	11,7
	<b>Total</b>	<b>111</b>	<b>100,0</b>

Tabla 4.12 Individuos igual admitidos y puntuación con calificaciones del PEE.

En la tabla anterior se observa que los individuos igual admitidos y puntuación con calificaciones (ingresaron a la EPN) presentan el mayor porcentaje con el 88,3%, mientras que, los que no ingresaron a la EPN presentan el menor porcentaje con el 11,7%.

En la Tabla 4.13 se presenta la matriz de correlaciones entre las puntuaciones observadas ( $T_j$ ) de la UA y las puntuaciones verdaderas ( $V_j$ ) de la TRI con las calificaciones de las materias del Propedéutico de Empresarial y Económicas.

Matriz de correlaciones									
		Puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA	Puntuación verdadera ( $V_j$ ) de la TRI	Fundamentos de la Matemática	Geometría y Dibujo	Fundamentos de Física	Contabilidad	Promedio materias	Materias aprobadas
Puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA	Correlación de Pearson	1	,944**	,163	,091	,136	,084	,154	,179
	Sig. (bilateral)		,000	,113	,372	,181	,416	,130	,078
	N	98	98	96	98	98	97	98	98
Puntuación verdadera ( $V_j$ ) de la TRI	Correlación de Pearson	,944**	1	0,224	,108	,122	,040	,156	,191
	Sig. (bilateral)	,000		,028	,291	,230	,700	,124	,059
	N	98	98	96	98	98	97	98	98
Fundamentos de la Matemática	Correlación de Pearson	,163	0,224	1	,781**	,587**	,379**	,843**	,827**
	Sig. (bilateral)	,113	,028		,000	,000	,000	,000	,000

	N	96	96	96	96	96	96	96	96
Geometría y Dibujo	Correlación de Pearson	,091	,108	,781**	1	,523**	,321**	,807**	,766**
	Sig. (bilateral)	,372	,291	,000		,000	,001	,000	,000
	N	98	98	96	98	98	97	98	98
Fundamentos de Física	Correlación de Pearson	,136	,122	,587**	,523**	1	,511**	,801**	,795**
	Sig. (bilateral)	,181	,230	,000	,000		,000	,000	,000
	N	98	98	96	98	98	97	98	98
Contabilidad	Correlación de Pearson	,084	,040	,379**	,321**	,511**	1	,737**	,602**
	Sig. (bilateral)	,416	,700	,000	,001	,000		,000	,000
	N	97	97	96	97	97	97	97	97
Promedio materias	Correlación de Pearson	,154	,156	,843**	,807**	,801**	,737**	1	,928**
	Sig. (bilateral)	,130	,124	,000	,000	,000	,000		,000
	N	98	98	96	98	98	97	98	98
Materias aprobadas	Correlación de Pearson	,179	,191	,827**	,766**	,795**	,602**	,928**	1
	Sig. (bilateral)	,078	,059	,000	,000	,000	,000	,000	
	N	98	98	96	98	98	97	98	98

\*\* La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

**Tabla 4.13 Correlaciones entre puntuaciones y calificaciones del PEE.**

**Para las variables: Puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática.**

Prueba de hipótesis bilateral al nivel de significación del 1% .

- 1) Hipótesis nula.  $H_0: \rho = 0$  (No existe correlación entre la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática)
- 2) Hipótesis alternativa.  $H_1: \rho \neq 0$  (Existe correlación entre la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática)
- 3) Valor  $p$  ( $p$ -value).

$$p\text{-value} = 0,113$$

- 4) Región de rechazo.

Como  $p\text{-value} \nless \alpha$ , esto es  $0,113 \nless 0,01$ , por tanto, no rechazo  $H_0$  al nivel de significación del 1%, es decir, no hay suficiente evidencia que indique que existe correlación entre la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA y Fundamentos de la Matemática.

Análogamente, se repite este proceso para cada par de variables, con lo que se puede concluir:

- La puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA no tiene correlación con las calificaciones de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo, Fundamentos de Física, Contabilidad, el promedio de las calificaciones de las materias y el número de materias aprobadas.

- La puntuación verdadera ( $V_j$ ) de la TRI no tiene correlación con las calificaciones de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo, Fundamentos de Física, Contabilidad, el promedio de las calificaciones de las materias y el número de materias aprobadas.

## 4.8.2 CORRELACIÓN CALIFICACIONES Y BACHILLERATO

### 4.8.2.1.1 Propedéutico de Ingeniería y Ciencias

La frecuencia del número de individuos que aprueba la materia por el tipo de bachillerato se presenta en la Tabla 4.14.

Bachillerato	Fundamentos de la Matemática		Geometría y Dibujo		Fundamentos de Física		Fundamentos de Química		Total	
	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba
Administración y contabilidad	7	10	8	9	4	13	3	14	22	46
Bachiller técnico	21	62	21	62	16	70	12	72	70	266
Ciencias	30	45	27	49	20	56	23	53	100	203
Ciencias sociales	0	1	0	1	0	1	0	1	0	4
Físico matemático	139	131	122	147	75	195	69	201	405	674
Humanidades modernas	0	1	0	1	0	1	0	1	0	4
Informática	8	9	4	12	0	17	2	15	14	53
Polivalente	1	3	0	4	0	4	0	4	1	15
Químico biólogo	11	26	13	24	7	30	7	30	38	110
<b>Total</b>	<b>217</b>	<b>288</b>	<b>195</b>	<b>309</b>	<b>122</b>	<b>387</b>	<b>116</b>	<b>391</b>	<b>650</b>	<b>1.375</b>

Tabla 4.14 Frecuencia de las materias que aprueban por bachillerato del PIC.

Para obtener la relación entre las calificaciones de las materias y el tipo de bachillerato del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias (PIC) del semestre 2012-A, se realiza la prueba chi-cuadrado de Pearson (Tabla 4.15).

Bachillerato		Fundamentos de la Matemática	Geometría y Dibujo	Fundamentos de Física	Fundamentos de Química
	Chi cuadrado		23,645	17,377	11,508
gl		8	8	8	8
Sig.		0,003	0,026	0,017*	0,230

\*. El estadístico de chi-cuadrado es significativo en el nivel 0,05.

Tabla 4.15 Correlaciones entre calificaciones y bachillerato del PIC.

**Para las variables: Fundamentos de la Matemática y bachillerato.**

Prueba de hipótesis al nivel de significación del 5%.

- 1) Hipótesis nula.  $H_0$ : Fundamentos de la Matemática y bachillerato son independientes.

2) Hipótesis alternativa.  $H_1$ : Fundamentos de la Matemática y bachillerato no son independientes.

3) Valor  $p$  ( $p$ -value).

$$p\text{-value} = 0,003$$

4) Región de rechazo.

Como  $p\text{-value} < \alpha$ , esto es  $0,003 < 0,05$ , por tanto, rechazo  $H_0$  al nivel de significación del 5%, es decir, el tipo de bachillerato influye en la aprobación de la materia Fundamentos de la Matemática.

Análogamente, se repite este proceso para cada par de variables, con lo que se puede concluir que el tipo de bachillerato influye en la aprobación de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo y Fundamentos de Física pero no influye en Fundamentos de Química.

#### 4.8.2.1.2 Propedéutico de Empresarial y Económicas

La frecuencia del número de individuos que aprueba la materia por el tipo de bachillerato se presenta en la Tabla 4.16.

Bachillerato	Fundamentos de la Matemática		Geometría y Dibujo		Fundamentos de Física		Contabilidad		Total	
	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba	Aprueba	No aprueba
Administración y contabilidad	3	35	3	36	2	37	28	11	36	119
Bachiller técnico	1	3	1	3	1	3	2	2	5	11
Ciencias	3	8	3	8	0	11	7	4	13	31
Físico matemático	12	20	13	19	11	21	20	12	56	72
Informática	0	5	0	5	0	5	4	1	4	16
Químico biólogo	0	5	0	6	1	5	1	4	2	20
Secretariado	0	1	0	1	0	1	1	0	1	3
<b>Total</b>	<b>19</b>	<b>77</b>	<b>20</b>	<b>78</b>	<b>15</b>	<b>83</b>	<b>63</b>	<b>34</b>	<b>117</b>	<b>272</b>

**Tabla 4.16 Frecuencia de las materias que aprueban por bachillerato del PEE.**

Para obtener la relación entre las calificaciones de las materias y el tipo de bachillerato del Propedéutico de Empresarial y Económicas (PEE) del semestre 2012-A, se realiza la prueba de chi-cuadrado de Pearson (Tabla 4.17).

		Fundamentos de la Matemática	Geometría y Dibujo	Fundamentos de Física	Contabilidad
<b>Bachillerato</b>	Chi cuadrado	12,880	15,382	15,463	6,763
	gl	6	6	6	6
	Sig.	0,045*	0,017*	0,017*	0,343

\*. El estadístico de chi-cuadrado es significativo en el nivel 0,05.

**Tabla 4.17 Correlaciones entre calificaciones y bachillerato del PEE.**

**Para las variables: Fundamentos de la Matemática y bachillerato.**

Prueba de hipótesis al nivel de significación del 5% .

- 1) Hipótesis nula.  $H_0$  : Fundamentos de la Matemática y bachillerato son independientes.
- 2) Hipótesis alternativa.  $H_1$  : Fundamentos de la Matemática y bachillerato no son independientes.
- 3) Valor  $p$  ( $p$ -value).

$$p\text{-value} = 0,045$$

- 4) Región de rechazo.

Como  $p\text{-value} < \alpha$  , esto es  $0,045 < 0,05$  , por tanto, rechazo  $H_0$  al nivel de significación del 5%, es decir, el tipo de bachillerato influye en la aprobación de la materia Fundamentos de la Matemática.

Análogamente, se repite este proceso para cada par de variables, con lo que se puede concluir que el tipo de bachillerato influye en la aprobación de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo y Fundamentos de Física pero no influye en Contabilidad.

## **CAPÍTULO 5**

### **CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

En el quinto capítulo se enfatiza las conclusiones y recomendaciones como consecuencia de la ejecución de este proyecto.

#### **5.1 CONCLUSIONES**

La metodología de la Unidad de Admisión (UA) de la Escuela Politécnica Nacional (EPN) es una técnica matemática que asigna una puntuación en la prueba a un individuo mediante la suma de las puntuaciones de los ítems, en cambio, la metodología de la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI) es una técnica probabilística que asigna una puntuación en la prueba a un individuo mediante la suma de las probabilidades del individuo a los ítems, estas probabilidades son el resultado del modelo logístico de la curva característica del ítem con varios parámetros, la estimación de estos parámetros son el resultado de maximizar una función de verosimilitud.

Las puntuaciones observadas de la Unidad de Admisión (UA) son similares a las puntuaciones verdaderas obtenidas con la Teoría de Respuesta a los Ítems (TRI), pero la TRI entrega un valor agregado a estas puntuaciones relacionado con la probabilidad que un individuo con un nivel de aptitud acierte el ítem. La probabilidad está asociada a la puntuación verdadera, es decir, a mayor puntuación se tienen mayores probabilidades en cada uno de los ítems y viceversa.

Se aplicó el análisis de frecuencias a los 2.977 individuos que rindieron la Prueba de Aptitud Académica Politécnica (PAAP) que contiene 100 ítems. La sección de aptitud matemática representa el mayor porcentaje con el 50%, mientras que, la aptitud abstracta con el 10% constituye el menor porcentaje. El temario más frecuente corresponde a una regla de tres simple directa, mientras que, existen

varios temarios que se evalúan una sola vez (sucesiones de letras, ecuaciones radicales, inecuaciones lineales, funciones cuadráticas, longitudes de rectas, triángulos equiláteros, áreas de círculos, etc.). En total el ítem 3 que corresponde al temario sinónimos presenta el mayor porcentaje de aciertos (opción D) con el 93,5%, mientras que, el ítem 37 que corresponde al temario comprensión de lectura presenta el menor porcentaje de aciertos (opción C) con el 8,0%. Del total de respuestas de la PAAP, las respuestas incorrectas tienen mayor porcentaje (54,9%) que las respuestas correctas (45,1%).

Se aplicó el análisis de respuesta a los ítems, mediante el modelo de TRI el cual se realizó en varios pasos. Se definió que la variable a evaluar en la PAAP es la aptitud. Se examinó los 100 ítems de la PAAP destinados a medir la aptitud. Se comprobó la unidimensionalidad de los ítems de la PAAP mediante el análisis factorial. Se eligió el modelo logístico de dos parámetros: discriminación del ítem ( $a_i$ ) y dificultad del ítem ( $b_i$ ). Se estimó los parámetros de discriminación ( $a_i$ ) y dificultad ( $b_i$ ) para los 100 ítems y las aptitudes ( $\theta_j$ ) para los 2.977 individuos de la PAAP y finalmente se comprobó que el modelo se ajusta a los datos.

En cuanto a los parámetros estimados de los ítems, el ítem 88 correspondiente al temario regla de tres simple directa tiene el mayor valor del parámetro de discriminación ( $a_{88} = 1,29$ ), representa a un ítem con un nivel de discriminación moderado, mientras que, el ítem 56 correspondiente al temario inecuaciones no lineales tiene el menor valor del parámetro de discriminación ( $a_{56} = 0,04$ ), representa a un ítem con un nivel de discriminación muy bajo.

El ítem 56 correspondiente al temario inecuaciones no lineales tiene el mayor valor del parámetro de dificultad ( $b_{56} = 36,31$ ), representa a un ítem muy difícil, cuyo planteamiento es el siguiente:

56. ¿Cuál de los siguientes es verdadero para todos los valores negativos de  $x$  ?

- I.  $3x + 2 < 0$
- II.  $x^3 - 25 > 0$
- III.  $x^2 + 1 > 0$



- A. Ninguno      **B. Solo III**      C. Solo I y III      D. Solo II y III      E. I, II y III

Mientras que, el ítem 23 correspondiente al temario completar oraciones tiene el menor valor del parámetro de dificultad ( $b_{23} = -8,33$ ), representa a un ítem muy fácil, cuyo planteamiento es el siguiente:

23. La suerte nace de nuestra ..... y la sabia paciencia nos ayuda a ..... lo adverso.

- A. Vida-sufrir
- B. Angustia-resolver
- C. Desgracia-dominar
- D. Firmeza-soportar
- E. Decisión-superar**

Los ítems con un nivel de discriminación bajo presentan el mayor porcentaje con el 40%, mientras que, los ítems con un nivel de discriminación alto y muy alto no tienen ninguno. Los ítems muy difíciles presentan el mayor porcentaje con el 36%, mientras que, los ítems fáciles presentan el menor porcentaje con el 12%.

En cuanto a las aptitudes estimadas de los individuos, en total 45 individuos obtuvieron el mayor valor de aptitud ( $\theta_j = 2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy alto, mientras que, 30 individuos obtuvieron el menor valor de aptitud ( $\theta_j = -2,5$ ), representan a individuos con nivel de aptitud muy bajo. En total los individuos con un nivel de aptitud moderado presentan el mayor porcentaje con el 37,2%, mientras que, los individuos con un nivel de aptitud muy bajo presentan el menor porcentaje con el 7,2%.

En cuanto a las probabilidades de los individuos a los ítems, en total 45 individuos tienen el mayor valor de probabilidad ( $P_{76}(\theta_j) = 0,99$ ), es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = 2,5$  acierte el ítem 76 es 0,99; mientras que, 30 individuos tienen el menor valor de probabilidad ( $P_6(\theta_j) = 0,03$ ), es decir, la probabilidad que el individuo  $j$  con aptitud  $\theta_j = -2,5$  acierte el ítem 6 es 0,03.

En cuanto a las puntuaciones de los individuos, en total el individuo 625 obtuvo la mayor puntuación observada ( $T_{625} = 89$ ), mientras que, el individuo 155 obtuvo la menor puntuación observada ( $T_{155} = 4$ ). En total 45 individuos obtuvieron la mayor puntuación verdadera ( $V_j = 69,29$ ), mientras que, 30 individuos obtuvieron la menor puntuación verdadera ( $V_j = 20,64$ ).

En cuanto a la condición de admisión, en el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias en la UA el cupo es flexible porque la puntuación de admisión es un número entero (54), mientras que, en la TRI el cupo puede ser fijo porque la puntuación de admisión es un número decimal (53,56) (hasta 18 decimales). En el Propedéutico de Empresarial y Económicas en la UA el cupo es flexible porque la puntuación de admisión es un número entero (43), mientras que, en la TRI el cupo puede ser fijo porque la puntuación de admisión es un número decimal (43,09) (hasta 18 decimales). Esto constituye una ventaja de esta metodología respecto a la capacidad instalada (infraestructura) de la Institución.

En cuanto a la evaluación del modelo, en el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias el modelo predice bien al 90,4% de los individuos que son admitidos, mientras que, en el Propedéutico de Empresarial y Económicas el modelo predice bien al 91,7% de los individuos que son admitidos.

En cuanto a la correlación, en el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA tiene correlación con las calificaciones de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo, Fundamentos de Física, Fundamentos de Química, el promedio de las calificaciones de las materias y el número de materias aprobadas. Mientras que, en el Propedéutico de Empresarial y Económicas la puntuación observada ( $T_j$ ) de la UA no tiene correlación con las calificaciones de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo, Fundamentos de Física, Contabilidad, el promedio de las calificaciones de las materias y el número de materias aprobadas.

En el Propedéutico de Ingeniería y Ciencias el tipo de bachillerato influye en la aprobación de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo y Fundamentos de Física pero no influye en Fundamentos de Química. Mientras que, en el Propedéutico de Empresarial y Económicas el tipo de bachillerato influye en la aprobación de las materias: Fundamentos de la Matemática, Geometría y Dibujo y Fundamentos de Física pero no influye en Contabilidad.

## **5.2 RECOMENDACIONES**

Se recomienda considerar la metodología de la TRI que combinada con políticas adecuadas, pueda servir de referente para una implementación efectiva en la admisión de los aspirantes, debido a que las Instituciones de Educación Superior están empleando recursos que les permita evaluar la aptitud de los aspirantes.

Se recomienda considerar las puntuaciones verdaderas de la TRI como complemento de las puntuaciones observadas de la UA porque la TRI entrega un valor agregado a las puntuaciones relacionado con la probabilidad que un individuo con un nivel de aptitud acierte el ítem.

Se recomienda que los ítems con nivel de discriminación muy bajo no sean considerados en futuras pruebas de evaluación, ya que éstos no ayudan a establecer una diferencia entre individuos, y estos ítems a su vez no aportan en la elaboración de una prueba adecuada.

## REFERENCIAS

- Aiken, L. (2003). *Tests Psicológicos y Evaluación* (Undécima ed.). México: Pearson Educación.
- Alderson, J., Clapham, C., & Wall, D. (1995). *Language Test Construction and Evaluation*. New York: Cambridge University Press.
- Anastasi, A., & Urbina, S. (1998). *Tests Psicológicos* (Séptima ed.). México: Prentice-Hall.
- Andrade, J. (2005). *Materia Análisis de Datos Multivariantes*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Aristidesvara. (2008). *Introducción a la Teoría de la Respuesta al Ítem*. Obtenido de [http://www.aristidesvara.com/metodologia/psicometria/teoria\\_respuesta/intri\\_aristidesvara.pdf](http://www.aristidesvara.com/metodologia/psicometria/teoria_respuesta/intri_aristidesvara.pdf)
- Baker, F. (1992). *Item Response Theory: Parameter Estimation Techniques*. New York: Marcel Dekker.
- Baker, F. (2001). *The Basics of Item Response Theory*. Obtenido de <http://info.worldbank.org/etools/docs/library/117765/Item%20Response%20Theory%20-%20F%20Baker.pdf>
- Bandeira, W. (2005). *Detección del funcionamiento diferencial del ítem (DIF) en tests de rendimiento*. Obtenido de <http://site.ebrary.com/lib/bgeneralucesp/Doc?id=10086452&ppg=217>
- Buela-Casal, G., & Sierra, J. (1997). *Manual de evaluación psicológica: Fundamentos, técnicas y aplicaciones*. Madrid: Siglo Veintiuno de España Editores.
- Burbano, V. (1997). *Sistema de evaluación de exámenes en forma automática en la plataforma Windows 95*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Castro, A. (2003). *Materia Modelos lineales y diseño de experimentos*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Cortada, N. (2003). *Posibilidad de integración de las teorías cognitivas y la psicometría moderna*. Obtenido de [http://www.revneuropsi.com.ar/pdf/Posibilidad\\_de\\_integracion.pdf](http://www.revneuropsi.com.ar/pdf/Posibilidad_de_integracion.pdf)
- Cortada, N. (2004). *Teoría de Respuesta al Ítem: Supuestos básicos*. Obtenido de <http://www.revistaevaluar.com.ar/45.pdf>
- Cuesta, M., & Muñiz, J. (1994). *Utilización de modelos unidimensionales de Teoría de Respuesta a los Ítems con datos multifactoriales*. Obtenido de <http://www.psicothema.com/pdf/923.pdf>

- Daza, W., & Paz, G. (2000). *Compendio de Test de Aptitud*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Ferrán, M. (2001). *SPSS para Windows: Análisis estadístico*. Madrid: McGraw-Hill.
- Galindo, E. (1999). *Estadística para la Ingeniería y la Administración*. Quito: Gráficas Mediavilla Hnos.
- Galindo, E., & Gortaire, D. (2003). *Matemáticas Superiores: Teoría y Ejercicios*. Quito: Prociencia Editores.
- Hambleton, R., & Jones, R. (1993). *Comparison of Classical Test Theory and Item Response Theory and Their Applications to Test Development*. Obtenido de <http://www.ncme.org/pubs/items/24.pdf>
- Hintze, J. (2007). *Number Cruncher Statistical System (NCSS) User's Guide*. Obtenido de <http://www.ncss.com>
- Microsoft Encarta. (2009). Washington: Microsoft Corporation.
- Montero, E. (2000). *La Teoría de Respuesta a los Ítems*. San José: Universidad de Costa Rica.
- Muñiz, J. (1997). *Introducción a la Teoría de Respuesta a los Ítems*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Muñiz, J. (1998). *Teoría Clásica de los Tests*. Madrid: Ediciones Pirámide.
- Peña, D. (2002). *Análisis de Datos Multivariantes*. Madrid: McGraw-Hill.
- Peña, D. (2002). *Regresión y diseño de experimentos*. Madrid: Alianza Editorial.
- Preuniversitario "Stephen Hawking". (2010). *Exámenes de ingreso*. Quito.
- Sánchez, M. (2004). *Introducción a la Teoría de Respuesta al Ítem*. Obtenido de <http://www.asepelt.org/ficheros/File/Anales/2004%20-%20Leon/comunicaciones/S%E1nchez%20Rivero%20Texto.pdf>
- SENESCYT. (2012). *Examen Nacional para la Educación Superior*. Obtenido de <http://www.snaa.gob.ec>
- Unidad de Admisión. (2005). *Pruebas de Aptitud Académica*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Unidad de Admisión. (2011). *Pruebas de Aptitud Académica Parte II*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.
- Unidad de Admisión. (2012). *Pruebas de Aptitud Académica Parte IV*. Quito: Escuela Politécnica Nacional.

## **ANEXOS**

## ANEXO A. Preguntas de la PAAP

La estructura general de las preguntas se basa en una instrucción seguida de un planteamiento con cinco opciones de respuesta en donde sólo una es la correcta<sup>21</sup> (resaltada en negrilla) (Unidad de Admisión, 2012).

### APTITUD VERBAL

#### Sinónimos

Seleccione la alternativa que exprese el significado igual al de la palabra dada.

1. Encadenar

A. Ahilar      B. Eximir      **C. Subyugar**      D. Misionar      E. Salpicar

2. Opuesto

A. Similar      B. Timorato      C. Coludir      D. Anidado      **E. Antípoda**

3. Delirio

A. Delicia      B. Del rio      C. Braquicéfalo      **D. Alucinación**      E. Ponente

4. Cisma

A. Profundidad      B. Abismo      **C. Ruptura**      D. Sorteo      E. Conciso

5. Veto

A. Mina      B. Censura      **C. Prohibición**      D. Sufragio      E. Cédula

6. Averiguar

A. Buscar      B. Encuestar      C. Entrevistar      **D. Inquirir**      E. Chismear

7. Antiguo

**A. Secular**      B. Colonial      C. Feudal      D. Monacal      E. Gastado

#### Antónimos

Seleccione la alternativa que exprese el significado opuesto al de la palabra dada.

8. Exánime

**A. Vigoroso**      B. Enaltecido      C. Enervado      D. Acérrimo      E. Pulquérrimo

9. Holgado

A. Fastidioso      B. Dolor      C. Sufrimiento      **D. Ceñido**      E. Dilatación

10. Lisonja

---

<sup>21</sup> La resolución de cada pregunta se encuentra en el solucionario.

- A. Agresión      **B. Agravio**      C. Falta      D. Censura      E. Vituperar
11. Sutileza
- A. Ironía      B. Desidia      **C. Exageración**      D. Amplitud      E. Inmodestia
12. Esotérico
- A. Misterioso      B. Disminuido      C. Realista      D. Parco      **E. Evidente**
13. Titubear
- A. Recelar      B. Vacilar      C. Dudar      D. Desconfiar      **E. Decidir**
14. Fructífero
- A. Infructuoso      B. Inhóspito      C. Baldío      **D. Estéril**      E. Infecundo

### Analogías verbales

Seleccione la alternativa que mantiene una relación semejante a la original.

15. Fuego es a ceniza como:
- A. Fósforo es a llama  
**B. Azúcar es a melaza**  
 C. Tempestad es a relámpago  
 D. Cacao es a chocolate  
 E. Coca es a cocaína
16. Pundonor es a competencia como:
- A. Disco es a círculo  
 B. Estéril es a feraz  
 C. Maternidad es a abnegación  
 D. Ínculto es a adquirido  
**E. Obnubilación es a pasión**
17. Señor es a siervo como:
- A. Jurado es a juicio  
**B. Monarca es a vasallo**  
 C. Siervo es a noble  
 D. Capital es a trabajo  
 E. Propietario es a arrendatario
18. Vértice es a cono como:
- A. Epicentro es a sismo**  
 B. Geometría es a aritmética  
 C. Plano es a figura  
 D. Ciencia es a álgebra  
 E. Raíz es a flor
19. Rotación es a núcleo como:
- A. Limpieza es a escoba



- B. Natación es a piscina
- C. Flujo es a tránsito
- D. Oscilación es a péndulo**
- E. Gravitación es a marca

20. Protón es a átomo como:

- A. Peldaño es a escalera
- B. Célula es a núcleo
- C. Aminoácido es a proteína**
- D. Pétalo es a rosa
- E. Espaldar es a mueble

21. Occipital es a cráneo como:

- A. Asta es a venado
- B. Espaldar es a silla**
- C. Tomo es a lomo
- D. Anteojo es a lente
- E. Parachoques es a automóvil

### Completar oraciones

En estos ejercicios se da una oración incompleta, la cual se debe completar con una de las opciones presentadas, de modo que al final se obtenga un significado lógico y coherente.

22. Así como solemos apreciar más la salud cuando estamos enfermos, así, son los ..... quienes con frecuencia valoran más la .....

- A. Extranjeros-patria
- B. Dementes-lucidez
- C. Tímidos-audacia
- D. Presos-libertad**
- E. Solitarios-conversación

23. La suerte nace de nuestra ..... y la sabia paciencia nos ayuda a ..... lo adverso.

- A. Vida-sufrir
- B. Angustia-resolver
- C. Desgracia-dominar
- D. Firmeza-soportar
- E. Decisión-superar**

24. Si uno pasa los años sin informarse acerca de un tema que antes creía ....., se encuentra con la sorpresa de que ya está .....

- A. Conocer-desechado
- B. Dominar-superado**
- C. Aprender-atrasado
- D. Desarrollar-descartado
- E. Saber-invalida

25. El universo es una ..... que tiene todos los libros ..... y concebibles en todos los idiomas y donde cada palabra que se ..... es sagrada o tabú en algunas lenguas.

**A. Biblioteca-concebidos-pronuncia**

B. Feria-vendibles-escribe

C. Hemeroteca-verdaderos-observa

D. Librería-imposibles-traduce

E. Tienda-voluminosa-manifiesta

26. No se ve bien sino con el ....., lo esencial es invisible a los .....

A. Dinero-pobres

B. Pensamientos-ciegos

C. Sufrimiento-débiles

**D. Corazón-ojos**

E. Alma-hombres

27. No se sale adelante celebrando ..... sino superando .....

A. Cumpleaños-necesidades

B. Éxitos-penas

C. Alegrías-debilidades

D. Hechos-complejos

**E. Triunfos-fracasos**

28. El que desea alcanzar una meta distante debe dar muchos pasos .....

A. Largos

B. Medianos

**C. Cortos**

D. Avanzados

E. Adelante

### **Términos excluidos**

Seleccione la alternativa que exprese el significado diferente al de las palabras del grupo.

29.

A. Estrafalario    B. Ridículo    C. Estrambótico    D. Extravagante    **E. Profano**

30.

A. Pompa    **B. Arrogancia**    C. Ostentación    D. Lujo    E. Rimbombancia

31.

**A. Divagación**    B. Difamación    C. Deshonra    D. Afrenta    E. Infamia

32.

A. Abolir    B. Abrogar    C. Rescindir    D. Invalidar    **E. Deteriorar**

33.

A. Menoscabo    B. Avería    C. Estrago    **D. Exterminio**    E. Daño

34.

A. Verbosidad    B. Elocuencia    C. Labia    D. Locuacidad    **E. Discurso**

35.

A. Ceñudo    B. Husmeador    C. Misántropo    **D. Campechano**    E. Irascible

### Comprensión de lectura

Lea atentamente el fragmento e identifique la mejor respuesta entre las que aparecen después de cada pregunta.

“Imposible reunir en unas líneas el panorama de la conquista española, existen tantos y tantos capítulos marginados hasta este momento en nuestra historia que casi todos incluyendo a los más cultos se sorprenden cuando leen que la conquista costó muchas de ellas y que algunas fueron ganadas por los soldados del Tahuantinsuyo. Así mismo, escasas veces se ha tenido en consideración que la conquista, en gran parte, fue obra de los antiguos, pues numerosas confederaciones indígenas se aliaron al conquistador de ultramar, es el caso de los cañarís, huancas, chachapoyas, yauyos, chunches y yungas en general. No se ha visto todavía el papel desempeñado por los siervos yanaconas, quienes, revelados contra el poder imperial inca, se convirtieron en eficaces auxiliares de los europeos; o que todos los delincuentes y bandidos indígenas fueron igualmente, aceptados por los españoles en su lucha contra el imperio incaico.”

36. Las confederaciones no incas:

- A. Fueron, en cierto modo, socios de la conquista española**
- B. Se aliaron a los yanaconas
- C. Se unieron a bandidos y delincuentes
- D. Cayeron en el delito de traición a la patria
- E. Se unieron a bandidos

37. Se rebelaron contra los incas:

- A. Los yanaconas
- B. Los yanaconas, las naciones indígenas
- C. Los yanaconas, las naciones no incas, los bandidos**
- D. Los yanacona y los españoles, los bandidos indígenas, las naciones no incas
- E. Cañarís, huancas, chachapoyas, yauyos, yungas y chunches en general

38. Los españoles ganaron:

- A. Por cien contra quince
- B. Por trece contra doce millones
- C. Por sus auxiliares y aliados indígenas

- D. Con la ayuda de auxiliares y ayudantes indígenas
- E. Después de muchas batallas, con la ayuda de auxiliares y aliados indígenas**

39. Los yanaconas eran:

- A. Siervos**
- B. Aliados
- C. Rebeldes
- D. Auxiliares
- E. Indígenas

40. La sorpresa de la gente se debe:

- A. Que no son muy cultos
- B. Que no son muy cultos por lo general
- C. El hábito de la poca lectura
- D. Al saber una versión de la conquista española distinta a la oficial**
- E. Al enterarse el alto costo que significa para la nación la conquista

### APTITUD MATEMÁTICA

Resuelva los siguientes ejercicios y seleccione la alternativa correcta.

41. Si  $6k + 18 = 15$ . ¿Cuál es valor de  $2k + 6$ ?

- A. 9
- B. 6
- C. 5**
- D. 3
- E.  $-1/2$

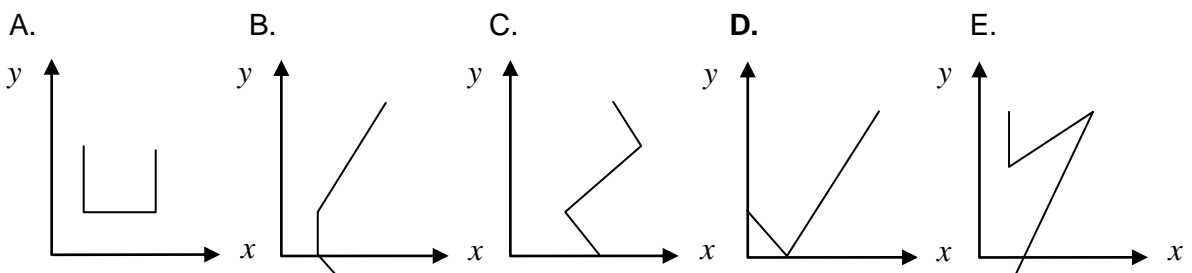
42. Si cada uno de 110 regalos va a ser decorados usando exactamente 2,5 dm. de cinta. ¿Cuál de los siguientes es en metros la más pequeña cantidad de cinta necesaria para decorar los paquetes sin comprar cinta extra?

- A. 83
- B. 27
- C. 10
- D. 28**
- E. 9

43. Cuatro más la mitad de un cierto número es siete menos que el número. ¿Cuál es el número?

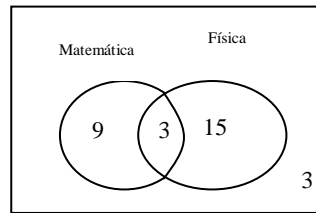
- A.  $14\frac{2}{3}$
- B. 22**
- C. 11
- D. 6
- E.  $5\frac{1}{2}$

44. Dos puntos del gráfico no tienen la misma coordenada  $x$ . ¿Cuál de los siguientes gráficos tiene la propiedad indicada?



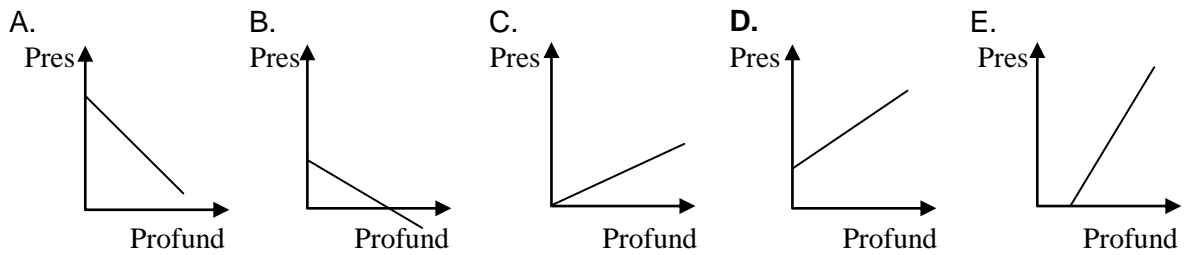
45. El diagrama de Ven muestra la distribución de un curso de 30 estudiantes quienes

asisten a las materias de Matemáticas, Física, ambas o ninguna. ¿Cuál es el porcentaje de estudiantes que estudian solo física?



- A. 10%      B. 20%      C. 30%      D. 40%      E. 50%
46. Un triángulo tiene dos lados de longitud 5 y 3 respectivamente. ¿Cuál podría ser la longitud del tercer lado?
- A. 15      B. 12      C. 10      D. 8      E. 6
47. En una cierta hora del día un árbol de 25 metros de alto proyecta una sombra de 7 metros. ¿Cuál es la sombra que proyectara una antena de radio de 90 metros de alto a la misma hora?
- A.  $3\frac{4}{7}$       B. 14      C.  $15\frac{1}{2}$       D. 18      E.  $25\frac{1}{5}$
48. El primer término de una secuencia de números es 1, si cada término siguiente después del primero es el producto de  $-2$  por el término precedente. ¿Cuál es el séptimo término de la secuencia?
- A. 64      B. 32      C. 16      D.  $-16$       E.  $-32$
49. En una tienda  $a$  compradores gastan en promedio de \$30 cada  $b$  horas. ¿Cuánto ingresara en dólares a la tienda en  $c$  horas?
- A.  $\frac{30c}{ab}$       B.  $\frac{bc}{30a}$       C.  $\frac{30bc}{a}$       D.  $\frac{30ac}{b}$       E.  $\frac{30b}{ac}$
50. Uno de los vértices de un triángulo rectángulo de lados 6 y 8 está en  $(-4;6)$  en un plano de coordenadas rectangular. ¿Cuál de los siguientes puntos podría ser otro de los vértices?
- A.  $(2;-2)$       B.  $(2;8)$       C.  $(-4;-10)$       D.  $(-4;-4)$       E.  $(-10;2)$
51. En la tabla se muestra la presión como una función de la profundidad para cada 15 m. de descenso en el océano, si la presión se incrementa a una razón constante por cada metro de descenso. ¿Cuál de los siguientes gráficos describe los datos dados?

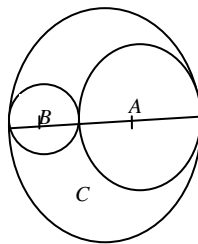
Profundidad (m)	Presión (Psi)
0	14,7
15	21,375
30	28,05
45	34,725



52. Si  $f(x) = 5x^2 - 2x + 8$  y  $g(x) = 6x - 4$ . ¿Cuál es  $g(f(x))$ ?

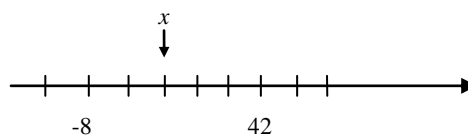
- A.  $11x^2 + 4x + 4$  B.  $11x^2 - 12x + 44$  C.  $18x^3 - 8x + 32$  D.  $30x^3 + 42x + 4$  E.  $30x^2 - 12x + 44$

53. En la figura los círculos son tangentes como se muestran, si el círculo  $A$  tiene el radio cuatro veces el círculo  $B$ . ¿Cuál es el valor del radio del círculo más grande  $C$  si el radio del círculo  $A$  es cuatro?



- A. 4 B. 5 C. 6 D. 10 E. 20

54. En la figura las marcas están separadas igual distancia en la recta numérica. ¿Cuál es el valor de  $x$ ?



- A. 4 B. 6 C. 12 D. 18 E. 22

55. Si  $d$  se divide por 7 se tiene un residuo de 1. ¿Cuál de los siguientes dividido por 7 da un residuo de 6?

- A.  $d - 6$  B.  $d - 5$  C.  $d - 4$  D.  $d - 3$  E.  $d - 2$

56. ¿Cuál de los siguientes es verdadero para todos los valores negativos de  $x$ ?

- I.  $3x + 2 < 0$   
 II.  $x^3 - 25 > 0$   
 III.  $x^2 + 1 > 0$

- A. Ninguno B. Solo III C. Solo I y III D. Solo II y III E. I, II y III

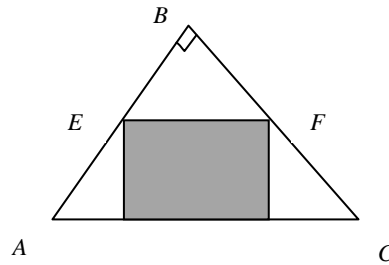
57. ¿Dónde definimos, ¿Cuál es el valor de 5 dividido por  $\frac{20}{3g}$  ?

- A.  $\frac{100g}{3}$       B.  $\frac{4g}{3}$       C.  $\frac{4}{3g}$       **D.  $\frac{3g}{4}$**       E.  $\frac{g}{12}$

58. Si  $3a+4b=b$ . ¿Cuál de los siguientes debe ser  $6a+6b$  ?

- A. 0**      B. 12      C.  $2b$       D.  $12b$       E.  $6b-8$

59. En el triángulo  $ABC$ ,  $AB=BC=10\sqrt{2}$  y  $EF \parallel AC$  y  $F$  es punto medio de  $BC$ .  
¿Cuál es el área de la región sombreada?



- A. 25      B.  $25\sqrt{2}$       **C. 50**      D.  $50\sqrt{2}$       E. 100

60. Si  $x \neq -3/2$ ,  $\frac{2x^3 - x^2 - 6x}{2x+3} = ?$

- A.  $x-2$       B.  $2x-2$       **C.  $x^2-2x$**       D.  $2x^2-2$       E.  $2x^2-2x$

61. En la tabla se muestra algunos valores para la función  $f$ . Si  $f(x) = ka^x$  para alguna constante  $k$  y  $a$ . ¿Cuál es el valor de  $a$  ?

$x$	-1	0	1
$f(x)$	1/8	1/2	2

- A. 1/2      B. 1/4      C. 2      **D. 4**      E. 16

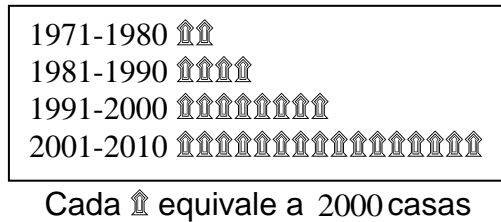
62. La pirámide tiene altura  $h$  y de base un cuadrado de lado  $m$ , las cuatro aristas de longitud  $e$  cada una se encuentran en  $V$  vértice de la pirámide, si  $e = m$ . ¿Cuál es el valor de  $h$  en términos de  $m$  ?

- A.  $\frac{m}{\sqrt{2}}$       B.  $\frac{m\sqrt{3}}{2}$       C.  $m$       D.  $\frac{2m}{\sqrt{3}}$       E.  $m\sqrt{2}$

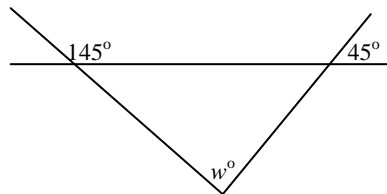
63. Un vendedor recibe por comisión  $k$  por ciento del precio vendido por carro. ¿Cuál de los siguientes representa la comisión, en dólares de dos carros que fueron vendidos a \$14000 cada uno?

- A.  $280k$**       B.  $7000k$       C.  $28000k$       D.  $\frac{14000}{100+2k}$       E.  $\frac{28000+k}{100}$

64. El pictograma muestra el número de casas nuevas construidas en una ciudad para cuatro décadas desde 1971 hasta 2010. ¿Cuántas casas nuevas fueron construidas desde 1971 hasta el 2000 ?



- A. 14                      B. 30                      C. 16000                      D. 20000                      E. **28000**
65. ¿Cuál es el valor de  $w$  en la figura? (la figura no está a escala).



- A. 90                      B. **100**                      C. 110                      D. 135                      E. 145
66. Un restaurante tiene 19 mesas que pueden dar cabida a 84 personas, algunas de las mesas tienen cabida para 4 personas y otras tienen cabida para 5 personas. ¿Cuántas mesas para cinco personas hay?

- A. 4                      B. 5                      C. **8**                      D. 7                      E. 6

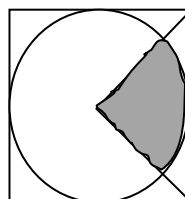
67. Si  $b = 4$ . ¿Cuál de los siguientes es equivalente a  $bm^2 + bm + b$  ?

- A.  $4(m^3 + 1)$     B.  $4(m+1)^2$     C.  $4(m^2 + m)$     D.  **$4(m^2 + m + 1)$**     E.  $4(4m^2 + m + 1)$

68. Dado el conjunto  $A = \{1; 2; 3; 6; 8; 12\}$ . ¿Cuál de los siguientes números cuando añadido al conjunto dado, haría que el promedio del nuevo conjunto sea igual a la mediana del nuevo conjunto?

- A. 6                      B. 8                      C. **10**                      D. 12                      E. 14

69. En la figura, el círculo está inscrito en el cuadrado de lado 2. ¿Cuál es el área de la porción sombreada del círculo?



- A.  $\pi/4$                       B.  $\pi/2$                       C.  $\pi$                       D.  $3\pi/2$                       E.  $2\pi$



70. En un plano  $x-y$  la ecuación de una línea es  $x+3y=12$ . ¿Cuál de las siguientes es la ecuación de una línea perpendicular a la dada?

- A.  $y=x+2$       B.  $y=-3x+2$       **C.  $y=3x-6$**       D.  $y=\frac{1}{3}x+6$       E.  $y=\frac{1}{2}x-3$

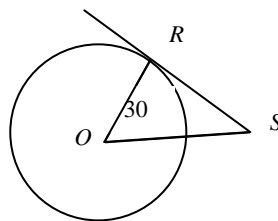
71. Dos lados de un triángulo tienen una longitud de 5 cada lado, todas las respuestas pueden ser la longitud del tercer lado, excepto?

- A. 1                  B. 3                  C. 4                  D.  $\sqrt{50}$               **E. 10**

72. En una elección, 2.8 millones de votos fueron repartidos entre el candidato I y el candidato II, el candidato I recibió 28.000 votos más que el candidato II. ¿Qué porcentaje de los 2.8 millones fueron repartidos al candidato I?

- A. 50,05%      B. 50,1%      **C. 50,5%**      D. 51%      E. 55%

73. La figura muestra un círculo tangente a  $RS$  en el punto  $R$ . Si  $O$  es el centro del círculo y  $RS=4$ . ¿Cuál es el radio del círculo?



- A. 4                  B.  $4\sqrt{2}$               **C.  $4\sqrt{3}$**               D. 8                  E. No se puede det.

74. Si  $a$  y  $b$  son enteros y su producto es  $-10$ . ¿Cuál es el valor más grande posible para  $a-b$ ?

- A. 3                  B. 7                  C. 9                  **D. 11**                  E. 25

75. Después del primer término en una secuencia, la razón de cada término al anterior es  $x$ , si el primer término es  $y$ . ¿Cuál es el tercer término?

- A.  $y/x$               **B.  $x^2y$**               C.  $x/y$               D.  $x^2/y$               E.  $x^3y$

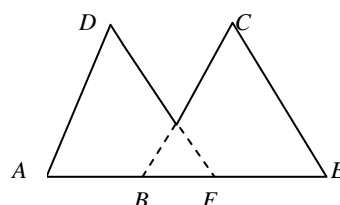
76. Si  $\sqrt{2p}=\sqrt{18}$ . ¿Cuál es el valor de  $p$ ?

- A.  $\sqrt{3}$               B.  $\sqrt{9}$               **C. 9**                  D. 6                  E.  $\sqrt{6}$

77. Cuando 1,783 es redondeado al entero más cercano. ¿Cuánto el resultado es más grande que cuando 1,783 es redondeado a la décima más cercana?

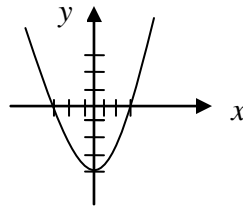
- A. 0,3              **B. 0,2**              C. 0,1              D. 0,25              E. 0,15

78. Samanta está empacando para un viaje. De las toallas que tiene en el closet 6 son de color café. Ella aleatoriamente coge una para empacar, si la probabilidad es  $\frac{2}{5}$  de que ella coja la toalla café. ¿Cuántas toallas hay en el closet?
- A. 9                      B. 12                      **C. 15**                      D. 18                      E. 21
79. Cinco puntos diferentes  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  y  $E$  están en una línea recta en ese orden. La longitud de  $AD$  es 4,5 y la longitud de  $BE$  es 3,5. Si la longitud de  $CD$  es 2. ¿Cuál es un posible valor para la longitud de  $BC$ ?
- A. 1,4**                      B. 1,6                      C. 1,8                      D. 2                      E. 2,2
80. En los treinta días de abril, por cada tres días que llovió hubo dos que no llovió. ¿Cuál es la diferencia en días entre los días que llovió y los que no llovió?
- A. 2                      B. 3                      C. 4                      D. 5                      **E. 6**
81. Cada término de una secuencia es más grande que el anterior, la diferencia entre dos términos consecutivos es siempre el mismo número. Si el tercero y el sexto término son 17 y 77 respectivamente. ¿Cuál es el octavo término?
- A. 97                      B. 110                      **C. 117**                      D. 140                      E. 157
82. Dada la siguiente expresión  $|x-3|=1/2$ . ¿Cuál es el menor valor de  $x$  que satisface la ecuación dada?
- A.  $1/2$                       **B.  $5/2$**                       C.  $3/2$                       D.  $7/2$                       E.  $9/2$
83. Un entero de 4 dígitos  $WXYZ$  en la cual  $W$ ,  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , cada uno representa un dígito diferente está formado de acuerdo a la siguiente regla:
1.  $X = W + Y + Z$
  2.  $W = Y + 1$
  3.  $Z = W - 5$
- ¿Cuál es el cuarto dígito entero?
- A. 4590                      B. 4950                      C. 5490                      **D. 5940**                      E. 9490
84. La figura mostrada está hecha sobreponiendo dos triángulos equiláteros  $ADF$  y  $BCE$ . Si  $AB = BF = EF = 10$  cm. ¿Cuál es la longitud en centímetros del perímetro de la figura formada en línea continua? (la figura no está a escala).



- A. 80                      **B. 90**                      C. 100                      D. 110                      E. 120

85. El gráfico muestra la función  $g$ , donde  $g(x) = k(x+3)(x-3)$  para alguna constante  $k$ . Si  $g(a-1, 2) = 0$  y  $a > 0$ . ¿Cuál es el valor de  $a$ ?

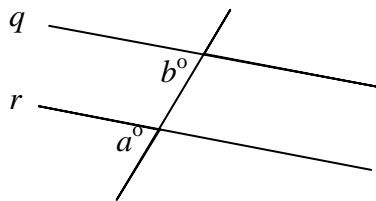


- A. 1,2                      B. 2,2                      C. 3                      **D. 4,2**                      E. 5

86. Si  $5x + 2x + 6 = 3x + x + 12$ . ¿Cuál es el valor de  $x$ ?

- A. 2**                      B. 4                      C. 6                      D. 8                      E. 10

87. En la figura si las líneas  $q$  y  $r$  no son paralelas. ¿Cuál de los siguientes debe ser verdadero? (la figura no está a escala).



- A.  $a \neq b$**                       B.  $a = b$                       C.  $a > b$                       D.  $a < b$                       E.  $a \leq b$

88. 18. ¿Qué porcentaje es de 45?

- A. 15%                      B. 20%                      C. 25%                      **D. 40%**                      E. 50%

89. Si  $3 < |x| < 5$  y  $4 < |y| < 6$ . ¿Cuál de los siguientes debe ser verdadero?

- A.  $y < x$                       B.  $x < y$                       C.  $xy > 0$                       **D.  $|xy| > 12$**                       E.  $|x + y| > 7$

90. En la suma dada,  $J$ ,  $K$  y  $L$  representan distintos dígitos. ¿Cuál es el valor del dígito  $L$ ?

$$\begin{array}{r} J \quad K \\ + \quad K \quad J \\ \hline 1 \quad 8 \quad L \end{array}$$

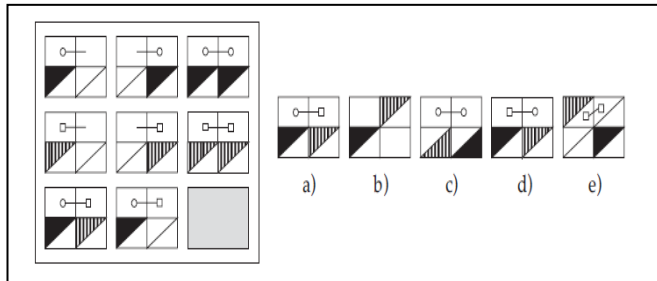
- A. 5                      **B. 7**                      C. 8                      D. 9                      E. 6

**APTITUD ABSTRACTA**

**Matrices gráficas**

Seleccione la mejor alternativa que establezca la secuencia.

91.



A.

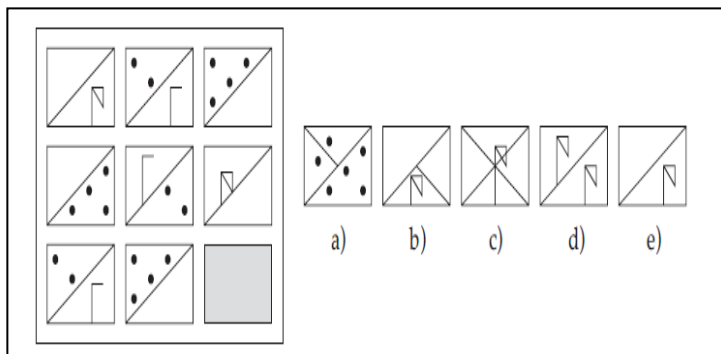
B.

C.

D.

E.

92.



A.

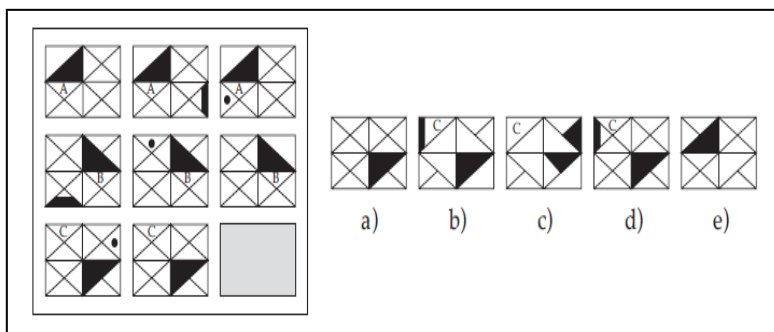
B.

C.

D.

E.

93.



A.

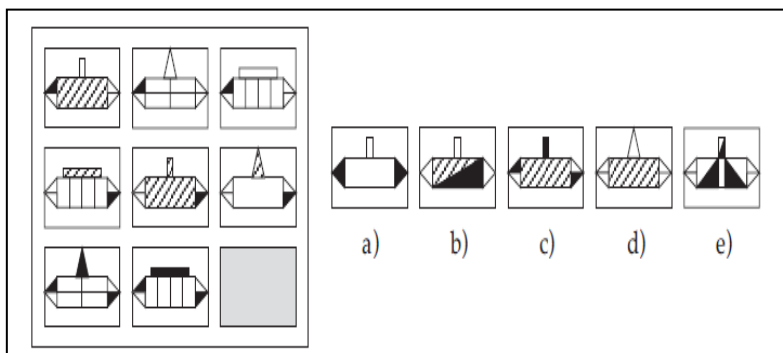
B.

C.

D.

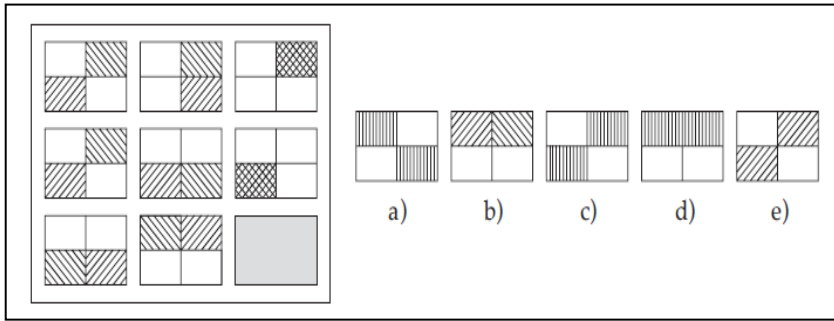
E.

94.



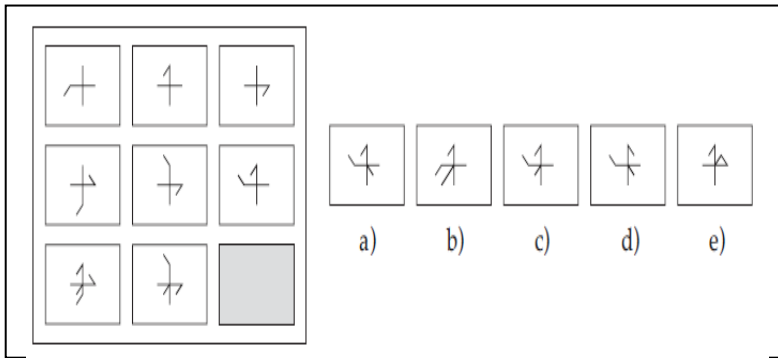
A.                      B.                      C.                      D.                      E.

95.



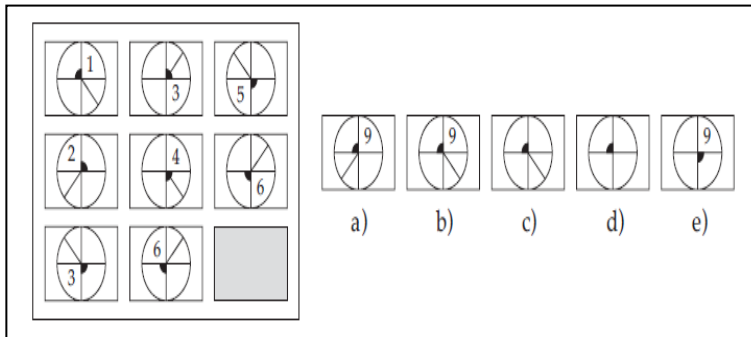
A.                      B.                      C.                      D.                      E.

96.



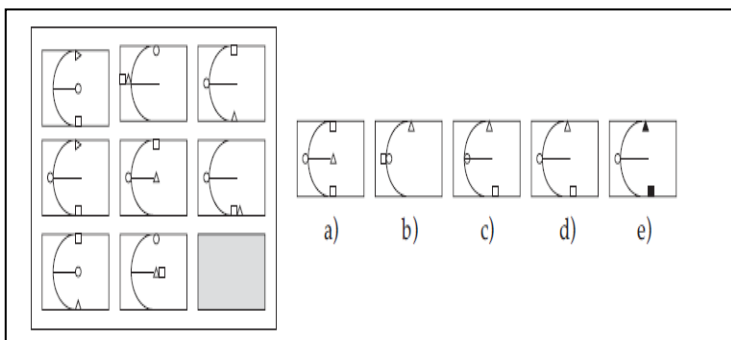
A.                      B.                      C.                      D.                      E.

97.



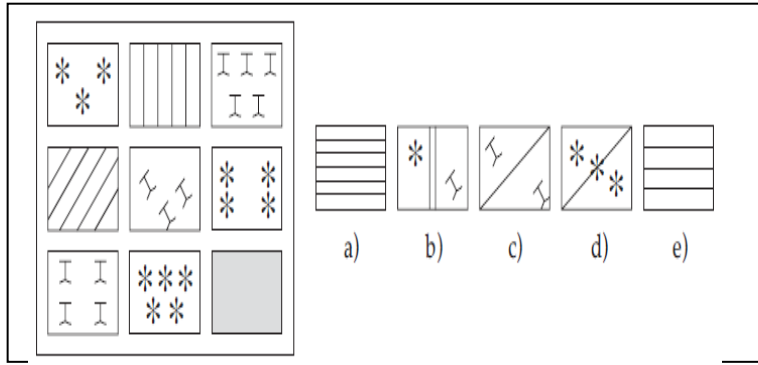
A.                      B.                      C.                      D.                      E.

98.



A.                      B.                      C.                      D.                      E.

99.



A.

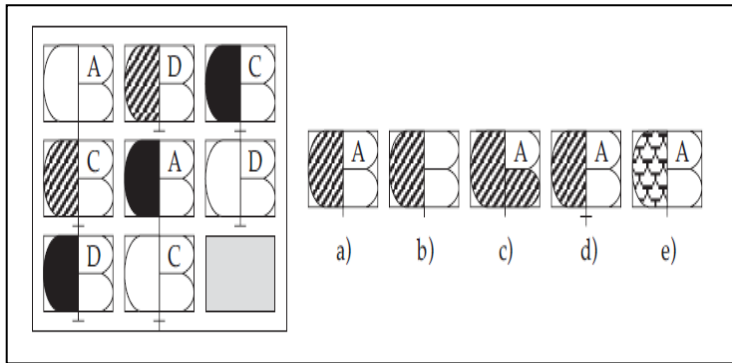
B.

C.

D.

E.

100.



A.

B.

C.

D.

E.

## **ANEXO B. Solucionario de la PAAP**

### **APTITUD VERBAL**

#### **Sinónimos**

1. Encadenar significa “esclavizar”; mientras que ahilar (A) significa “desmayar”, eximir (B) significa “librar”, subyugar (C) significa “dominar”, misionar (D) significa “predicar” y salpicar (E) significa “rociar”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).
2. Opuesto significa “contrario”; mientras que similar (A) significa “análogo”, timorato (B) significa “tímido”, coludir (C) significa “cometer pactos ilícitos en daños de terceros”, anidado (D) significa “habitado” y antípoda (E) significa “opuesto”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).
3. Delirio significa “alucinación”; mientras que delicia (A) significa “agrado”, del rio (B) no hay un significado coherente, braquicéfalo (C) significa “cráneo casi redondo”, alucinación (D) significa “deslumbramiento” y ponente (E) significa “orador”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).
4. Cisma significa “rompimiento”; mientras que profundidad (A) significa “hondura”, abismo (B) significa “precipicio”, ruptura (C) significa “rompimiento”, sorteo (D) significa “rifa” y conciso (E) significa “breve”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).
5. Veto significa “impedir”; mientras que mina (A) significa “yacimiento”, censura (B) significa “reprobación”, prohibición (C) significa “impedir”, sufragio (D) significa “voto” y cédula (E) significa “documento”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).
6. Averiguar significa “inquirir la verdad hasta descubrirla”; mientras que buscar (A) significa “investigar”, encuestar (B) significa “interrogar”, entrevistar (C) significa “conversar”, inquirir (D) significa “averiguar cuidadosamente algo” y chismear (E) significa “intrigar”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).
7. Antiguo significa “viejo”; mientras que secular (A) significa “antiguo”, colonial (B) significa “conquistado”, feudal (C) significa “medieval”, monacal (D) significa “religioso” y gastado (E) significa “usado”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

## Antónimos

8. Exánime significa “desmayado”; mientras que vigoroso (A) significa “fornido”, enaltecido (B) significa “alabado”, enervado (C) significa “debilitado”, acérrimo (D) significa “tenaz” y pulquísimo (E) significa “bellísimo”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).
9. Holgado significa “cómodo”; mientras que fastidioso (A) significa “enfadoso”, dolor (B) significa “sufrimiento”, sufrimiento (C) significa “padecimiento”, ceñido (D) significa “apretado” y dilatación (E) significa “ampliación”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).
10. Lisonja significa “alabanza”; mientras que agresión (A) significa “ataque”, agravio (B) significa “ofensa”, falta (C) significa “infracción”, censura (D) significa “reprobación” y vituperar (E) significa “criticar”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).
11. Sutileza significa “discreción”; mientras que ironía (A) significa “burla”, desidia (B) significa “negligencia”, exageración (C) significa “ponderación”, amplitud (D) significa “extensión” y inmodestia (E) significa “ostentación”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).
12. Esotérico significa “oscuro”; mientras que misterioso (A) significa “tenebroso”, disminuido (B) significa “reducido”, realista (C) significa “objetivo”, parco (D) significa “sobrio” y evidente (E) significa “claro”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).
13. Titubear significa “dudar”; mientras que recelar (A) significa “temer”, vacilar (B) significa “titubear”, dudar (C) significa “desconfiar”, desconfiar (D) significa “dudar” y decidir (E) significa “resolver”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).
14. Fructífero significa “productivo”; mientras que infructuoso (A) significa “inútil”, inhóspito (B) significa “desértico”, baldío (C) significa “seco”, estéril (D) significa “improductivo” y Infecundo (E) significa “infértil”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

## Analogías verbales

15. Del **fuego** queda residuo la **ceniza**, como, del **azúcar** queda residuo la **melaza**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).



16. Con **pundonor** se engrandece la **competencia**, como, con **obnubilación** se engrandece la **pasión**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).
17. **Señor** es el jefe del **siervo**, como, **monarca** es el jefe del **vasallo**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).
18. **Vértice** es donde se centraliza el **cono**, como, **epicentro** es donde se centraliza el **sismo**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).
19. **Rotación** es el movimiento del **núcleo**, como, **oscilación** es el movimiento del **péndulo**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).
20. **Protón** es el componente del **átomo**, como, **aminoácido** es el componente de la **proteína**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).
21. **Occipital** es la parte posterior del **cráneo**, como, **espaldar** es la parte posterior de la **silla**. Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

### Completar oraciones

22. La opción (D) proporciona un significado coherente a la oración: Así como solemos apreciar más la salud cuando estamos enfermos, así, son los **presos** quienes con frecuencia valoran más la **libertad**.
23. La opción (E) proporciona un significado coherente a la oración: La suerte nace de nuestra **decisión** y la sabia paciencia nos ayuda a **superar** lo adverso.
24. La opción (B) proporciona un significado coherente a la oración: Si uno pasa los años sin informarse acerca de un tema que antes creía **dominar**, se encuentra con la sorpresa de que ya está **superado**.
25. La opción (A) proporciona un significado coherente a la oración: El universo es una **biblioteca** que tiene todos los libros **concebidos** y concebibles en todos los idiomas y donde cada palabra que se **pronuncia** es sagrada o tabú en algunas lenguas.
26. La opción (D) proporciona un significado coherente a la oración: No se ve bien sino con el **corazón**, lo esencial es invisible a los **ojos**.
27. La opción (E) proporciona un significado coherente a la oración: No se sale adelante celebrando **triumfos** sino superando **fracasos**.

28. La opción (C) proporciona un significado coherente a la oración: El que desea alcanzar una meta distante debe dar muchos pasos **cortos**.

### **Términos excluidos**

29. Estrafalario (A) significa “extravagante”, ridículo (B) significa “extravagante”, estrambótico (C) significa “extravagante”, extravagante (D) y profano (E) significa “deshonesto”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

30. Pompa (A) significa “ostentación”, **arrogancia** (B) significa “altanería”, ostentación (C), lujo (D) significa “ostentación” y rimbombancia (E) significa “ostentación”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

31. Divagación (A) significa “vagancia”, difamación (B) significa “deshonra”, deshonra (C), afrenta (D) significa “deshonra”, infamia (E) significa “deshonra”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

32. Abolir (A) significa “invalidar”, abrogar (B) significa “invalidar”, rescindir (C) significa “invalidar”, invalidar (D), deteriorar (E) significa “estropear”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

33. Menoscabo (A) significa “daño”, avería (B) significa “daño”, estrago (C) significa “daño”, exterminio (D) significa “destrucción”, daño (E); por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

34. Verbosidad (A) significa “labia”, elocuencia (B) significa “labia”, labia (C), locuacidad (D) significa “labia”, discurso (E) significa “exposición”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

35. Ceñudo (A) significa “enfadado”, husmeador (B) significa “indagador”, misántropo (C) significa “persona que por su humor tétrico manifiesta aversión al trato humano”, campechano (D) significa “alegre”, irascible (E) significa “irritable”; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

### **Comprensión de lectura**

36. La opción (A) establece la idea secundaria del fragmento: Las confederaciones no incas: fueron, en cierto modo, socios de la conquista española.

37. La opción (C) establece la idea principal del fragmento: Se rebelaron contra los incas: los yanaconas, las naciones no incas, los bandidos.

38. La opción (E) establece la idea principal del fragmento: Los españoles ganaron: después de muchas batallas, con la ayuda de auxiliares y aliados indígenas.

39. La opción (A) establece la idea principal del fragmento: Los yanaconas eran: siervos.

40. La opción (D) establece la idea secundaria del fragmento: La sorpresa de la gente se debe: al saber una versión de la conquista española distinta a la oficial.

### APTITUD MATEMÁTICA

41.

$$6k + 18 = 15$$

$$3(2k + 6) = 15$$

$$2k + 6 = 5$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

42.

$$\begin{array}{l} 1 \text{ m} \quad \text{---} \quad 10 \text{ dm} \\ x \quad \text{---} \quad 2,5 \text{ dm} \end{array} \quad x = \frac{1\text{m} \times 2,5\text{dm}}{10\text{dm}} = 0,25\text{m}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ reg} \quad \text{---} \quad 0,25 \text{ m} \\ 110 \text{ reg} \quad \text{---} \quad x \end{array} \quad x = \frac{110\text{reg} \times 0,25\text{m}}{1\text{reg}} = 27,5\text{m} \approx 28\text{m}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

43.

$$4 + \frac{x}{2} = x - 7$$

$$\frac{x}{2} = 11$$

$$x = 22$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

44. La opción (D) tiene dos puntos del gráfico que no tienen la misma coordenada  $x$ .

45.

$$\begin{array}{l} 30 \text{ estudiantes} \quad \text{---} \quad 100\% \\ 15 \text{ estudiantes} \quad \text{---} \quad x \end{array} \quad x = \frac{15 \text{ estudiantes} \times 1}{30 \text{ estudiantes}} = 0,50 \approx 50\%$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

46.

$$\hat{C}_A = \cos^{-1} \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{5^2 + 3^2 - 15^2}{2(5)(3)} \right) = \cos^{-1}(-6,4) = \cancel{A}$$

$$\hat{C}_B = \cos^{-1} \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{5^2 + 3^2 - 12^2}{2(5)(3)} \right) = \cos^{-1}(-3,7) = \cancel{B}$$

$$\hat{C}_C = \cos^{-1} \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{5^2 + 3^2 - 10^2}{2(5)(3)} \right) = \cos^{-1}(-2,2) = \cancel{C}$$

$$\hat{C}_D = \cos^{-1} \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{5^2 + 3^2 - 8^2}{2(5)(3)} \right) = \cos^{-1}(-1) = 180^\circ \Rightarrow \text{No forma un } \Delta$$

$$\hat{C}_E = \cos^{-1} \left( \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right) = \cos^{-1} \left( \frac{5^2 + 3^2 - 6^2}{2(5)(3)} \right) = \cos^{-1}(-0,07) = 93,8^\circ \Rightarrow \text{Forma un } \Delta$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

47.

$$\begin{array}{l} 25 \text{ m} \quad \text{---} \quad 7 \text{ m} \\ 90 \text{ m} \quad \text{---} \quad x \end{array} \quad x = \frac{90 \text{ m} \times 7 \text{ m}}{25 \text{ m}} = 25,2 \text{ m}$$

$$25 \frac{1}{5} = \frac{126}{5} = 25,2$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

48.

$$1^\circ = 1$$

$$2^\circ = (-2)(1) = -2$$

$$3^\circ = (-2)(-2) = 4$$

$$4^\circ = (-2)(4) = -8$$

$$5^\circ = (-2)(-8) = 16$$

$$6^\circ = (-2)(16) = -32$$

$$7^\circ = (-2)(-32) = 64$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

49.

$$\text{promedio} = \frac{\text{ingreso}}{\text{número de compradores}}$$

$$\$30 = \frac{\text{ingreso}}{a}$$

$$\$30a = \text{ingreso}$$

$$\begin{array}{l} \$30a \text{ (ingreso)} \quad \text{---} \quad b \text{ horas} \\ x \quad \quad \quad \quad \quad \text{---} \quad c \text{ horas} \end{array} \quad x = \frac{\$30a \times c \text{ horas}}{b \text{ horas}} = \$ \frac{30ac}{b}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

50.

$$b = 6$$

$$c = 8$$

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10$$

$$P = (x_0, y_0) = (-4, 6)$$

$$A = (x_1, y_1) = (2, -2)$$

$$B = (x_2, y_2) = (2, 8)$$

$$C = (x_3, y_3) = (-4, -10)$$

$$D = (x_4, y_4) = (-4, -4)$$

$$E = (x_5, y_5) = (-10, 2)$$

$$d(P, A) = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (-2 - 6)^2} = 10 \quad (\text{cumple})$$

$$d(P, B) = \sqrt{(x_2 - x_0)^2 + (y_2 - y_0)^2} = \sqrt{(2 - (-4))^2 + (8 - 6)^2} = 6,3 \quad (\text{no cumple})$$

$$d(P, C) = \sqrt{(x_3 - x_0)^2 + (y_3 - y_0)^2} = \sqrt{(-4 - (-4))^2 + (-10 - 6)^2} = 16 \quad (\text{no cumple})$$

$$d(P, D) = \sqrt{(x_4 - x_0)^2 + (y_4 - y_0)^2} = \sqrt{(-4 - (-4))^2 + (-4 - 6)^2} = 10 \quad (\text{cumple})$$

$$d(P, E) = \sqrt{(x_5 - x_0)^2 + (y_5 - y_0)^2} = \sqrt{(-10 - (-4))^2 + (2 - 6)^2} = 7,2 \quad (\text{no cumple})$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

51. La opción (D) describe los datos dados.

52.

$$f(x) = 5x^2 - 2x + 8$$

$$g(x) = 6x - 4$$

$$g(f(x)) = g(5x^2 - 2x + 8) = 6(5x^2 - 2x + 8) - 4 = 30x^2 - 12x + 48 - 4 = 30x^2 - 12x + 44$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

53.

$$r_C = r_A + r_B = 4 + 1 = 5$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

54.

$$42 - (-8) = 50 \div 5 = 10$$

$$-8 + 10 = 2$$

$$2 + 10 = 12$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

55.

$$\frac{d}{1} \cdot \frac{7}{1} = \frac{15}{1} \cdot \frac{7}{2} \Rightarrow d = 15$$

$$\text{A. } d - 6 = 15 - 6 = 9 \rightarrow \frac{9}{2} \cdot \frac{7}{1} \quad (\text{no cumple})$$

$$\text{B. } d - 5 = 15 - 5 = 10 \rightarrow \frac{10}{3} \cdot \frac{7}{1} \quad (\text{no cumple})$$

$$\text{C. } d - 4 = 15 - 4 = 11 \rightarrow \frac{11}{4} \cdot \frac{7}{1} \quad (\text{no cumple})$$

$$\text{D. } d - 3 = 15 - 3 = 12 \rightarrow \frac{12}{5} \cdot \frac{7}{1} \quad (\text{no cumple})$$

$$\text{E. } d - 2 = 15 - 2 = 13 \rightarrow \frac{13}{6} \cdot \frac{7}{1} \quad (\text{cumple})$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

56.

$$\text{I. } 3x + 2 < 0 \qquad \text{II. } x^3 - 25 > 0 \qquad \text{III. } x^2 + 1 > 0$$

$$3x < -2$$

$$x^3 > 25$$

$$x < -0,7$$

$$x > 2,9$$

$$x \in -\infty; -0,7$$

$$x \in 2,9; +\infty$$

$$x \in -\infty; 0$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

57.

$$\frac{5}{20} = \frac{15g}{20} = \frac{3g}{4}$$
$$\frac{5}{3g}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

58.

$$3a + 4b = b$$

$$3a + 3b = 0$$

$$6a + 6b = 0$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

59.

$$AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = \sqrt{(10\sqrt{2})^2 + (10\sqrt{2})^2} = \sqrt{400} = 20$$

$$EF = \sqrt{EB^2 + BF^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 + (5\sqrt{2})^2} = \sqrt{100} = 10$$

$$DE = \sqrt{AE^2 - AD^2} = \sqrt{(5\sqrt{2})^2 - 5^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{Área} = EF \times DE = 10 \times 5 = 50$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

60.

$$\frac{2x^3 - x^2 - 6x}{2x + 3} = \frac{x(2x^2 - x - 6)}{2x + 3} = \frac{x \left[ \frac{(2x-4)(2x+3)}{2} \right]}{2x+3} = \frac{x \left[ \frac{\cancel{2}(x-2)(2x+3)}{\cancel{2}} \right]}{(2x+3)\cancel{2}} = x^2 - 2x$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

61.

$$f(x) = ka^x \quad f(x) = ka^x$$

$$\frac{1}{2} = ka^0 \quad 2 = \frac{1}{2}a^1$$

$$\frac{1}{2} = k \quad 4 = a$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

62.

$$a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{m^2 + m^2} = \sqrt{2m^2} = \sqrt{2}m$$

$$h = \sqrt{e^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \sqrt{m^2 - \left(\frac{\sqrt{2}m}{2}\right)^2} = \sqrt{m^2 - \frac{m^2}{2}} = \frac{m}{\sqrt{2}}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

63.

$$\begin{array}{r} \$14000 \text{ --- } 100 \% \\ x \text{ --- } k \% \end{array} \quad x = \frac{\$14000 \times \frac{k}{100}}{1} = \$140k$$

$$\text{Comisión} = \$140k \times 2 = \$280k$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

64.

$$1971 \text{ a } 2000 \rightarrow (2 + 4 + 8)(2000) = 28000$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

65.

$$180^\circ - 145^\circ = 35^\circ \quad (\text{ángulos suplementarios})$$

$$45^\circ = 45^\circ \quad (\text{ángulos opuestos})$$

$$35^\circ + 45^\circ + w^\circ = 180^\circ$$

$$w^\circ = 100^\circ$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

66.

$$11 \text{ mesas} \times 4 \text{ personas} = 44 \text{ personas}$$

$$8 \text{ mesas} \times 5 \text{ personas} = 40 \text{ personas}$$

$$\hline 19 \text{ mesas} \qquad \qquad \qquad 84 \text{ personas}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

67.

$$bm^2 + bm + b = 4m^2 + 4m + 4 = 4(m^2 + m + 1)$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).



68.

$$A = \{1; 2; 3; 6; 8; 12; ?\}$$

$$\bar{x}_A = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} (1+2+3+6+8+12+6) = 5,4$$

$$\bar{x}_B = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} (1+2+3+6+8+12+8) = 5,7$$

$$\bar{x}_C = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} (1+2+3+6+8+12+10) = 6$$

$$\bar{x}_D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} (1+2+3+6+8+12+12) = 6,3$$

$$\bar{x}_E = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{1}{7} (1+2+3+6+8+12+14) = 6,6$$

$$\text{Me} = \frac{n+1}{2} = \frac{7+1}{2} = 4 \text{ (posición)} \Rightarrow 6$$

$$\therefore \bar{x}_C = \text{Me} = 6$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

69.

$$r = \frac{l}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\text{Área} = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi(1^2)}{4} = \frac{\pi}{4}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

70.

$$x_1 + 3y_1 = 12$$

$$y_2 = 3x_2 - 6$$

$$y_1 = -\frac{1}{3}x_1 + 4$$

$$y_2 = m_2x_2 + b_2$$

$$y_1 = m_1x_1 + b_1$$

$$m_1m_2 = -1 \text{ (perpendicularidad)}$$

$$\left(-\frac{1}{3}\right)(3) = -1$$

$$-1 = -1$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

71.

$$\hat{C}_A = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 5^2 - 1^2}{2(5)(5)}\right) = 11,5^\circ$$

$$\hat{C}_B = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 5^2 - 3^2}{2(5)(5)}\right) = 34,9^\circ$$

$$\hat{C}_C = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 5^2 - 4^2}{2(5)(5)}\right) = 47,2^\circ$$

$$\hat{C}_D = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 5^2 - (\sqrt{50})^2}{2(5)(5)}\right) = 90^\circ$$

$$\hat{C}_E = \cos^{-1}\left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5^2 + 5^2 - 10^2}{2(5)(5)}\right) = 180^\circ \Rightarrow \text{No forma un } \Delta$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

72.

$$2'800.000 \div 2 = 1'400.000 \text{ votos}$$

$$28.000 \div 2 = 14.000 \text{ votos}$$

$$\text{Candidato I} \rightarrow 1'400.000 + 14.000 = 1'414.000 \text{ votos}$$

$$\text{Candidato II} \rightarrow 1'400.000 - 14.000 = 1'386.000 \text{ votos}$$

$$\begin{array}{l} 2'800.000 \text{ votos} \text{ --- } 100\% \\ 1'414.000 \text{ votos} \text{ --- } x \end{array} \quad x = \frac{1'414.000 \text{ votos} \times 1}{2'800.000 \text{ votos}} = 0,505 \approx 50,5\%$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

73.

Círculo tangente a  $RS$  en el punto  $R \Rightarrow \Delta ORS$  rectángulo

$$\tan \hat{O} = \frac{RS}{OR}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{4}{OR}$$

$$OR = \frac{4}{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$OR = 4\sqrt{3}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

74.

$$\begin{aligned} a \times b &= -10 \rightarrow a - b = ? \\ (2) \times (-5) &= -10 \rightarrow (2) - (-5) = 7 \\ (-2) \times (5) &= -10 \rightarrow (-2) - (5) = -7 \\ (1) \times (-10) &= -10 \rightarrow (1) - (-10) = 11 \text{ (Máximo)} \\ (-1) \times (10) &= -10 \rightarrow (-1) - (10) = -11 \end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

75.

$$\begin{aligned} 1^\circ &= y \\ 2^\circ &= y \cdot x = xy \\ 3^\circ &= xy \cdot x = x^2y \end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

76.

$$\begin{aligned} \sqrt{2p} &= \sqrt{18} \\ 2p &= 18 \\ p &= 9 \end{aligned}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

77.

$$\begin{aligned} 1,783 &\approx 2 \\ 1,783 &\approx 1,8 \\ 2 - 1,8 &= 0,2 \end{aligned}$$

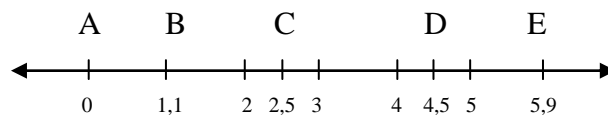
Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

78.

$$\begin{array}{l} 6 \text{ toallas} \text{ --- } \frac{2}{5} \text{ (prob)} \\ x \text{ --- } 1 \text{ (prob)} \end{array} \quad x = \frac{6 \text{ toallas} \times 1}{\frac{2}{5}} = 15 \text{ toallas}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

79.



$$AC = AD - CD = 4,5 - 2 = 2,5$$

$$AB_{\max} = 2,4$$

$$BC_{\min} = AC - AB_{\max} = 2,5 - 2,4 = 0,1$$

$$AB_{\min} = AE_{\min} - BE = 4,6 - 3,5 = 1,1$$

$$BC_{\max} = AC - AB_{\min} = 2,5 - 1,1 = 1,4$$

Los posibles valores de  $BC$  son desde 0,1 hasta 1,4

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

80.

$$3 \text{ días} \times 6 = 18 \text{ días} \quad (\text{días que llovió})$$

$$2 \text{ días} \times 6 = \underline{12 \text{ días}} \quad (\text{días que no llovió})$$

$$30 \text{ días}$$

$$18 - 12 = 6 \text{ días}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

81.

$$77 - 17 = 60 \div 3 = 20$$

$$1^\circ = -43 + 20 = -23$$

$$2^\circ = -23 + 20 = -3$$

$$3^\circ = -3 + 20 = 17$$

$$4^\circ = 17 + 20 = 37$$

$$5^\circ = 37 + 20 = 57$$

$$6^\circ = 57 + 20 = 77$$

$$7^\circ = 77 + 20 = 97$$

$$8^\circ = 97 + 20 = 117$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

82.

$$|x-3| = \frac{1}{2}$$

$$-(x-3) = \frac{1}{2} \quad \text{si } x < 3$$

$$x-3 = \frac{1}{2} \quad \text{si } x \geq 3$$

$$x = \frac{5}{2} \quad (\text{menor})$$

$$x = \frac{7}{2} \quad (\text{mayor})$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

83.

$$X = W + Y + Z = (Y + 1) + Y + (Y - 4) = 3Y - 3 \rightarrow X = 3(4) - 3 = 9$$

$$W = Y + 1 \rightarrow W = 4 + 1 = 5 \rightarrow WXYZ = 5940$$

$$Z = W - 5 = (Y + 1) - 5 = Y - 4 \rightarrow Z = 4 - 4 = 0$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

84.

$$AF = AB + BF = 10 + 10 = 20 = AD = DF \quad (\Delta ADF \text{ equilátero})$$

$$BE = BF + EF = 10 + 10 = 20 = BC = CE \quad (\Delta BCE \text{ equilátero})$$

$$\hat{F} = 60^\circ \quad (\Delta ADF \text{ equilátero})$$

$$\hat{B} = 60^\circ \quad (\Delta BCE \text{ equilátero})$$

$$\hat{O} = 180^\circ - \hat{F} - \hat{B} = 180^\circ - 60^\circ - 60^\circ = 60^\circ$$

$$\frac{OF}{\text{Sen } \hat{B}} = \frac{BF}{\text{Sen } \hat{O}} \quad \frac{BO}{\text{Sen } \hat{F}} = \frac{BF}{\text{Sen } \hat{O}}$$

$$\frac{OF}{\text{Sen } 60^\circ} = \frac{10}{\text{Sen } 60^\circ} \quad \frac{BO}{\text{Sen } 60^\circ} = \frac{10}{\text{Sen } 60^\circ}$$

$$OF = 10 \quad BO = 10$$

$$DO = DF - OF = 20 - 10 = 10$$

$$OC = BC - BO = 20 - 10 = 10$$

$$p = AD + DO + OC + CE + EF + BF + AB = 20 + 10 + 10 + 20 + 10 + 10 + 10 = 90$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

85.

$$g(x) = k(x+3)(x-3)$$

$$0 = k[(a-1,2)+3][(a-1,2)-3]$$

$$0 = (a+1,8)(a-4,2)$$

$$0 = a+1,8$$

$$a = -1,8 \quad (a < 0)$$

$$0 = a-4,2$$

$$a = 4,2 \quad (a > 0)$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

86.

$$5x + 2x + 6 = 3x + x + 12$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

87.

- A.  $a \neq b$  (Verdadero porque  $q$  y  $r$  no son paralelas)
- B.  $a = b$  (Falso porque  $q$  y  $r$  no son paralelas)
- C.  $a > b$  (Falso porque puede ser  $a < b$ )
- D.  $a < b$  (Falso porque puede ser  $a > b$ )
- E.  $a \leq b$  (Falso porque es incoherente)

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

88.

$$\frac{45}{18} = \frac{100\%}{x} \quad x = \frac{18 \times 1}{45} = 0,40 \approx 40\%$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

89.

- A.  $y < x$     B.  $x < y$     C.  $xy > 0$     D.  $|xy| > 12$     E.  $|x + y| > 7$
- $5 \not< 4,9$      $4,2 \not< 4,1$      $(-3,1)(4,1) > 0$      $|(-3,1)(4,1)| > 12$      $|-3,1+4,1| > 7$   
 $-12,71 \not> 0$      $12,71 > 12$      $1 \not> 7$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

90.

$$\begin{array}{r} J \quad K \quad 8 \quad 9 \\ + \quad K \quad J = + \quad 9 \quad 8 \\ \hline 1 \quad 8 \quad L \quad 1 \quad 8 \quad 7 \end{array}$$

Por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

## APTITUD ABSTRACTA

### Matrices gráficas

91. La secuencia de la figura es, horizontalmente: los extremos de la barra (redondo o cuadrado) cambian de izquierda a derecha o ambos, los triángulos (negro o rayado) cambian de izquierda a derecha o ambos; verticalmente: los extremos de la barra cambian de forma redonda a cuadrada o ambos, los triángulos cambian de negro a rayado o ambos; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).

92. La secuencia de la figura es, horizontalmente: en el triángulo superior o inferior los puntos cambian de cero a dos a cinco y viceversa, en el triángulo inferior o superior los dibujos cambian de bandera a ángulo recto a vacío y viceversa; verticalmente: los

puntos cambian de cero a cinco a dos y viceversa alternando triángulo superior e inferior, los dibujos cambian de bandera a vacío a ángulo recto y viceversa alternando triángulo inferior y superior; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).

93. La secuencia de la figura es, horizontalmente: los triángulos negros (superior izquierda, superior derecha o inferior derecha) no cambian de posición, las letras (A, B o C) no cambian de posición; verticalmente: los triángulos negros giran de posición superior izquierda a superior derecha a inferior derecha, las letras cambian de izquierda a derecha u arriba; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).

94. La secuencia de la figura es, horizontalmente: los dibujos superiores cambian de forma de barra a triángulo a rectángulo (blanco, rayado o negro), los triángulos (superior izquierdo o inferior derecho) no cambian de posición (negro o blanco), las formas centrales cambian de líneas inclinadas a una línea vertical a varias líneas verticales; verticalmente: las figuras superiores cambian de forma de barra a rectángulo a triángulo alternando de blanco a rayado a negro respectivamente, los triángulos (superior izquierdo o inferior derecho) cambian de negro a blanco y viceversa, las formas centrales cambian de líneas inclinadas a varias líneas verticales a una línea vertical; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

95. La secuencia de la figura es, horizontalmente: si los cuadros rayados están inclinados a  $45^\circ$  giran en sentido antihorario, si los cuadros rayados están inclinados a  $135^\circ$  giran en sentido horario; verticalmente: si los cuadros rayados están inclinados a  $45^\circ$  giran en sentido antihorario, si los cuadros rayados están inclinados a  $135^\circ$  giran en sentido horario; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

96. La secuencia de la figura es, horizontalmente: las líneas extremas inclinadas (1, 2 o 3) giran en sentido horario o antihorario cada  $90^\circ$ ; verticalmente: las líneas extremas inclinadas giran en sentido horario o antihorario cada  $90^\circ$  y aumentando líneas extremas; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (C).

97. La secuencia de la figura es, horizontalmente: los números giran en sentido horario sumando 2 o 3 respectivamente, las manecillas giran en sentido antihorario cada  $90^\circ$ ; verticalmente: los números giran en sentido antihorario sumando 1, 2 o 3 respectivamente, las manecillas giran en sentido horario cada  $90^\circ$ , por lo tanto la respuesta correcta es la opción (B).

98. La secuencia de la figura es, horizontalmente: el triángulo gira en sentido antihorario cada  $90^\circ$  o baja o sube en forma vertical, el cuadrado gira en sentido horario cada  $90^\circ$  o baja o sube en forma vertical, el círculo gira en sentido antihorario; verticalmente: el triángulo se mantiene, baja o sube en forma vertical, el cuadrado se mantiene, baja o sube en forma vertical, el círculo cambia y vuelve a su posición; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (D).
99. La secuencia de la figura es, horizontalmente: los dibujos cambian de forma (flores, líneas verticales o inclinadas y letras I) y sumando las cantidades 3, 4 o 5; verticalmente: los dibujos cambian de forma (flores, líneas verticales o inclinadas y letras I) y sumando las cantidades 3, 4 o 5; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (E).
100. La secuencia de la figura es, horizontalmente: las letras cambian de A a D a C y se repiten, la parte izquierda cambia de blanco a rayado a negro y se repiten, la barra inferior no hay en una de las tres; verticalmente: las letras cambian de A a C a D y se repiten, la parte izquierda cambia de blanco a rayado a negro y se repiten, la barra inferior no hay en una de las tres; por lo tanto la respuesta correcta es la opción (A).



## ANEXO C. Preguntas del ENES

La estructura general de los ítems se basa en una instrucción seguida de un planteamiento con cuatro opciones de respuesta en donde sólo una es la correcta (resaltada en negrilla o subrayada) (SENESCYT, 2012).

### APTITUD VERBAL

#### Sinónimos

Elija la palabra con significado similar a la escrita con letra mayúscula.

Planteamiento: ATENTO

- A. **Enfocado**                      B. Distráido                      C. Estudioso                      D. Abrigado

Planteamiento: DORMIR

- A. Despertar                      B. Desvelar                      **C. Pernoctar**                      D. Madrugar

Planteamiento: INFORMAR

- A. Callar                      **B. Comunicar**                      C. Desinformar                      D. Preguntar

#### Antónimos

Elija la palabra de significado opuesto a la escrita con letra mayúscula.

Planteamiento: CAPCIOSO

- A. **Claro**                      B. Calmoso                      C. Vanidoso                      D. Piadoso

Planteamiento: RESTRINGIR

- A. Delimitar                      **B. Permitir**                      C. Ajustar                      D. Establecer

Planteamiento: PONER

- A. **Quitar**                      B. Colocar                      C. Plantar                      D. Ostentar

#### Analogías verbales

Seleccione la alternativa que establezca la misma relación que hay entre las dos primeras palabras.

.....es a fruta como clavel es a.....

- A. **Manzana-flor**                      B. Piña-planta                      C. Adorno-flor                      D. Suave-fragancia

.....es a playa como río es a.....

- A. **Mar-ribera**                      B. Marea-balneario                      C. Bote-crucero                      D. Torrente-marea

.....es a Pekinés como gato es a.....

- A. Gato-perro      B. Bobino-Equino      **C. Perro-Angora**      D. Pato-Samoyedo

### **Frases incompletas**

Elija la opción que mejor complete la oración.

No se sale adelante celebrando.....sino superando.....

- A. Alegrías-debilidades
- B. Hechos-complejos
- C. Triunfos-fracasos**
- D. Dichas-problemas

Cuando un.....bueno comete un crimen, sigue siendo hombre, pero deja de ser.....

- A. Ladrón-respetable
- B. Hombre-bueno**
- C. Trabajador-persona
- D. Criminal-libre

Criticar a otra persona es....., por el contrario, revisar nuestros propios errores se vuelve.....

- A. Fácil-difícil**
- B. Posible-sencillo
- C. Difícil-complicado
- D. Rápido-posible

### **Términos excluidos**

Seleccione el término que no se relacione con las mismas.

Planteamiento: DIVORCIO

- A. Cisma      B. Conflicto      C. Enemistad      **D. Incisión**

Planteamiento: ELEVAR

- A. Honrar      B. Enaltecer      C. Celebrar      **D. Felicitar**

Planteamiento: DONCEL

- A. Mozo      **B. Senil**      C. Joven      D. Muchacho

### **Lectura comprensiva**

Lea con atención para escoger una de las cuatro opciones de respuesta.

EL PAÍS DE LOS COLORES Y TEXTURAS. “El Ecuador presenta un matiz exuberante de culturas, las mismas que se encuentran distribuidas en espacios geográficamente establecidos, permitiendo de esta manera crear un bagaje rico de ritos y costumbres en

cada una de sus regiones. Fruto de esta coexistencia, la interculturalidad exige el respeto mutuo de los saberes propios de cada grupo étnico, en un proceso dinámico donde el diálogo es un instrumento básico que permite generar aprendizajes mutuos. De esta manera, la intolerancia a las diferencias grupales será abolida y mancomunadamente se generará una sociedad más armónica y justa.”

De acuerdo al texto, las culturas en el Ecuador se encuentran:

- A. Distribuidas históricamente
- B. En espacios geográficos establecidos**
- C. En lugares inaccesibles
- D. Aisladas en sus espacios geográficos

De acuerdo al texto, el respeto mutuo de los saberes de cada grupo étnico se genera a través de:

- A. El diálogo**
- B. La imposición
- C. La intolerancia
- D. La coerción

### Orden de oraciones

Seleccione la opción que ordene todas las palabras en una oración con sentido lógico.

chicos/los/una/mariposa/atraparon/azul

- A. Los chicos atraparon una mariposa azul.**
- B. Una mariposa azul atrapada por los chicos.
- C. Azul era la mariposa que atraparon los chicos.
- D. Los chicos una mariposa azul atraparon.

creación/los/inspiran/colores/mi/arcoíris/del

- A. Del arcoíris mi creación los colores inspiran.
- B. Los colores del arcoíris mi creación inspiraron.
- C. Los colores del arcoíris inspiran mi creación.**
- D. Mi creación del arcoíris los colores inspiran.

una/árbol/posee/de/fragancia/el/primaverál/eucalipto

- A. De una primaverál fragancia posee el árbol de eucalipto.
- B. El árbol primaverál de eucalipto posee fragancia.
- C. Primaverál es la fragancia del árbol de eucalipto.
- D. El árbol de eucalipto posee una fragancia primaverál.**

### Refranes

Seleccione la opción que muestre el significado del refrán.

Cuando el río suena piedras trae.

- A. La corriente del río es demasiado fuerte para arrastrar piedras.
- B. Los comentarios y rumores llevan una parte de verdad.**
- C. Los comentarios de una persona siempre son verdad.
- D. Las personas se convencen fácilmente de lo que escuchan.

Del dicho al hecho, hay mucho trecho.

- A. Todos los propósitos siempre se pueden cumplir.
- B. La distancia entre el hecho y el trecho es muy corta.
- C. No siempre se cumplen los propósitos que se declaran.**
- D. Las intenciones son más importantes que las acciones.

Más sabe el diablo por viejo que por diablo.

- A. Los diablos son muy listos.
- B. Las personas mayores olvidan hechos recientes, pero recuerdan mejor lo pasado.
- C. Las personas mayores van acumulando sabiduría a lo largo del tiempo.**
- D. El diablo es sabio por su edad.

## RAZONAMIENTO NUMÉRICO

Resuelva los siguientes ejercicios y escoja la respuesta correcta.

Si Andrés presta la mitad del dinero que tiene a Pablo y Pablo cancela el préstamo devolviéndole 55 dólares pagándole 5 USD de interés. ¿Cuánto dinero tenía Andrés?

- A. 60 USD                      **B. 100 USD**                      C. 75 USD                      D. 120 USD

El promedio aritmético de las edades de 4 hombres es de 48. Ninguno de ellos es menor de 45 años. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener uno de ellos?

- A. 50                              B. 53                              **C. 57**                              D. 59

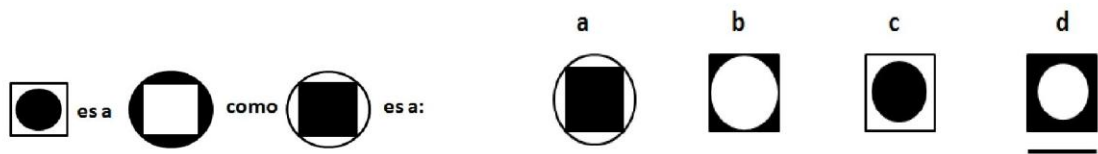
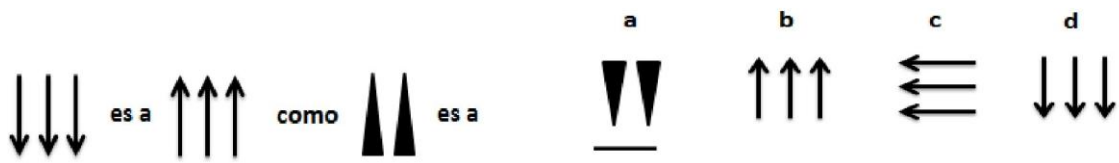
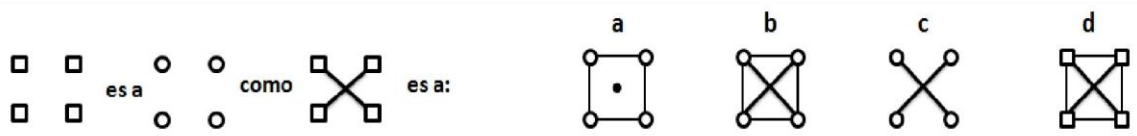
En un salón de clase, el número de mujeres equivale al 80% del total de sus asistentes, si se retiran el 20% de dichas mujeres. ¿Qué porcentaje del resto son hombres?

- A. 23,8%**                      B. 22,5%                      C. 25,5%                      D. 20%

## RAZONAMIENTO ABSTRACTO

### Analogías gráficas

Seleccione la alternativa que establezca la misma relación que hay entre el primer par de figuras.



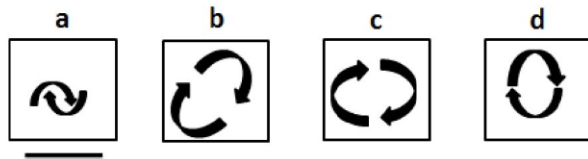
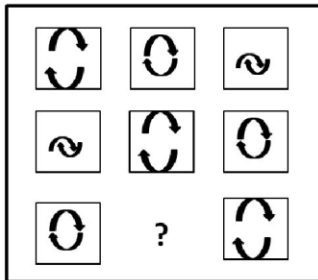
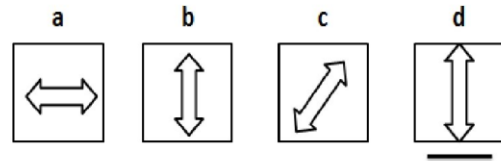
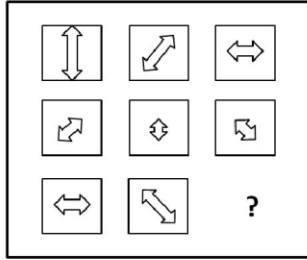
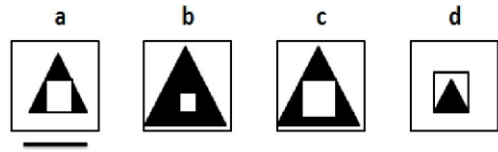
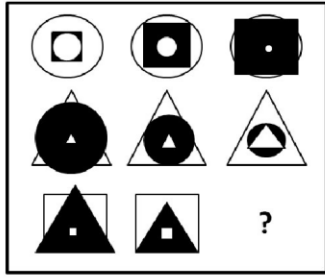
### Secuenciación

Seleccione la alternativa que establezca la secuencia.



### Matrices gráficas

Seleccione la mejor alternativa que establezca la secuencia.



## ANEXO D. Análisis factorial

El análisis factorial tiene por objeto explicar un conjunto de variables observadas por un pequeño número de variables *latentes* o no observadas, que llamaremos factores; los factores se construyen para explicar las covarianzas o correlaciones entre las variables observadas (Peña, 2002).

### Modelo Factorial Ortogonal (Andrade, 2005)

Consideramos el vector aleatorio, con  $n$  variables continuas:

$$X = \begin{bmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_i \\ \vdots \\ X_n \end{bmatrix} \quad E[X] = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_i \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \mu \quad V[X] = \sum_{n \times n}$$

El modelo factorial postula que  $X$  es linealmente dependiente de unas pocas variables aleatorias no observables  $F_1, \dots, F_m$  llamadas factores comunes y de  $n$  adicionales fuentes de variación  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$  llamadas unicidades.

Así el modelo lineal factorial es:

$$\begin{aligned} X_1 &= \mu_1 + l_{11}F_1 + l_{12}F_2 + \dots + l_{1m}F_m + \varepsilon_1 \\ X_2 &= \mu_2 + l_{21}F_1 + l_{22}F_2 + \dots + l_{2m}F_m + \varepsilon_2 \\ &\vdots \\ X_n &= \mu_n + l_{n1}F_1 + l_{n2}F_2 + \dots + l_{nm}F_m + \varepsilon_n \end{aligned}$$

Es decir:

$$\begin{matrix} X & - & \mu & = & L & F & + & \varepsilon \\ n \times 1 & & n \times 1 & & n \times m & m \times 1 & & n \times 1 \end{matrix}$$

donde:

- $X$ : Vector aleatorio.
- $\mu$ : Media de las variables  $X$ .
- $L$ : Matriz de cargas (pesos) factoriales.
- $F$ : Factores comunes.
- $\varepsilon$ : Unicidades.

**Hipótesis básicas:**

- $E F = O_{m \times 1}$
- $V F = E FF' = I$
- $E \varepsilon = O_{n \times 1}$
- $V \varepsilon = E \varepsilon \varepsilon' = \Psi = \begin{bmatrix} \psi_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \psi_i & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \psi_n \end{bmatrix}$
- $Cov F, \varepsilon = E \varepsilon F' = O_{n \times m}$

Además:

- $F \rightarrow N_m \quad O, I$
- $\varepsilon \rightarrow N_n \quad O, \Psi$
- $X \rightarrow N_n \quad \mu, \Sigma$

Tenemos que:

- $V[X] = \Sigma = LL' + \Psi$
- $Cov[X, F] = L$

Así la estructura de covarianza del modelo factorial ortogonal:

- $V X = \Sigma = LL' + \Psi$
- $V X_i = \ell_{i1}^2 + \dots + \ell_{im}^2 + \psi_i$
- $Cov[X_i, X_j] = \ell_{i1}\ell_{j1} + \dots + \ell_{im}\ell_{jm}$

- $Cov X, F = L$

$$Cov[X_i, F_j] = \ell_{ij}$$

$$\sigma_{ii} = V X_i = \underbrace{\ell_{i1}^2 + \dots + \ell_{im}^2}_{\text{Comunalidad}} + \underbrace{\psi_i}_{\text{Varianza específica}}$$

$$\sigma_{ii} = h_i^2 + \psi_i \quad i = 1, \dots, n$$

$$\sigma_{ij} = \ell_{ij}$$



**Comunalidad.** Es la porción de varianza de la  $i$ -ésima variable a la que contribuyen los  $m$  factores comunes.

**Varianza específica (Unicidad).** Es la porción de varianza de la  $i$ -ésima variable a la que contribuye el factor específico.

## MÉTODOS DE ESTIMACIÓN

Existen varios métodos de estimación, entre otros, el método de componentes principales es el más utilizado.

### *Método de componentes principales*

Se utiliza la descomposición espectral.

Sean:

$$\sum_{(\lambda_i, u_i)} \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq 0$$

Sabemos que:

$$\Sigma = \lambda_1 u_1 u_1' + \dots + \lambda_n u_n u_n' = \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} u_1 & \dots & \sqrt{\lambda_n} u_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{\lambda_1} u_1' \\ \vdots \\ \sqrt{\lambda_n} u_n' \end{bmatrix}$$

Si:

$$m = n \rightarrow \psi_i = 0$$

Se tiene:

$$\Sigma = LL'$$

## DETERMINACIÓN DEL NÚMERO DE FACTORES A RETENER

Existe una diversidad de métodos para determinar el número de factores a retener después de realizada la factorización.

### *El criterio de Kaiser-Guttman*

El criterio consiste en retener aquellos factores que posean valores propios mayores que uno; la justificación para su uso se fundamenta en la idea de que si un factor ha de ser común, debe contener al menos la varianza equivalente a una variable (Bandeira, 2005). Si el valor propio es mayor que uno explica más la variabilidad total.

# ANEXO E. Hoja de respuestas de la PAAP

## ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL

### HOJA DE RESPUESTAS

FORMA  A  B  C  D

LADO 1

#### COMO MARCAR LAS RESPUESTAS

- Usar solamente lápiz N°2.
- No usar bolígrafo ni lápiz de minas.
- Borrar completamente cualquier marca que se quisiera cambiar.
- Llenar completamente el círculo como sigue:

**CORRECTO**  
●

**INCORRECTO**  
⊗ ⊙ ⊖ ⊕

NOTA: De no ser así, su examen quedará anulado y sin posibilidad de reclamos.

#### Código de Inscripción

A	1	1	1	1	1	1	1	1	1
B	2	2	2	2	2	2	2	2	2
C	3	3	3	3	3	3	3	3	3
D	4	4	4	4	4	4	4	4	4
E	5	5	5	5	5	5	5	5	5
F	6	6	6	6	6	6	6	6	6
G	7	7	7	7	7	7	7	7	7
H	8	8	8	8	8	8	8	8	8
I	9	9	9	9	9	9	9	9	9
J									
K									
L									
M									
N									
O									
P									
Q									
R									
S									
T									
U									
V									
W									
X									
Y									
Z									

#### Cédula de Identidad ó Pasaporte

0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9



1	A B C D E	22	A B C D E	43	A B C D E	64	A B C D E	85	A B C D E	106	A B C D E
1	1 2 3 4 5	22	1 2 3 5	43	1 3 4 5	64	1 2 3 4	85	1 2 3 5	106	1 2 3 4 5
2	A B C D E	23	A B C D E	44	A B C D E	65	A B C D E	86	A B C D E	107	A B C D E
2	1 2 3 4 5	23	1 2 3 4 5	44	1 2 3 5	65	1 3 4 5	86	2 3 4 5	107	1 2 3 4 5
3	A B C D E	24	A B C D E	45	A B C D E	66	A B C D E	87	A B C D E	108	A B C D E
3	1 2 3 5	24	1 3 4 5	45	1 2 3 4 5	66	1 2 4 5	87	2 3 4 5	108	1 2 3 4 5
4	A B C D E	25	A B C D E	46	A B C D E	67	A B C D E	88	A B C D E	109	A B C D E
4	1 2 4 5	25	2 3 4 5	46	1 2 3 4 5	67	1 2 3 5	88	1 2 3 5	109	1 2 3 4 5
5	A B C D E	26	A B C D E	47	A B C D E	68	A B C D E	89	A B C D E	110	A B C D E
5	1 2 4 5	26	1 2 3 5	47	1 2 3 4 5	68	1 2 4 5	89	1 2 3 5	110	1 2 3 4 5
6	A B C D E	27	A B C D E	48	A B C D E	69	A B C D E	90	A B C D E	111	A B C D E
6	1 2 3 5	27	1 2 3 4 5	48	2 3 4 5	69	2 3 4 5	90	1 3 4 5	111	1 2 3 4 5
7	A B C D E	28	A B C D E	49	A B C D E	70	A B C D E	91	A B C D E	112	A B C D E
7	2 3 4 5	28	1 2 3 4 5	49	1 2 3 5	70	1 2 3 4 5	91	2 3 4 5	112	1 2 3 4 5
8	A B C D E	29	A B C D E	50	A B C D E	71	A B C D E	92	A B C D E	113	A B C D E
8	2 3 4 5	29	1 2 3 4 5	50	2 3 4 5	71	1 2 3 4 5	92	1 2 3 4 5	113	1 2 3 4 5
9	A B C D E	30	A B C D E	51	A B C D E	72	A B C D E	93	A B C D E	114	A B C D E
9	1 2 3 5	30	1 3 4 5	51	1 2 3 5	72	1 2 3 4 5	93	1 2 3 5	114	1 2 3 4 5
10	A B C D E	31	A B C D E	52	A B C D E	73	A B C D E	94	A B C D E	115	A B C D E
10	1 3 4 5	31	2 3 4 5	52	1 2 3 4 5	73	1 2 4 5	94	1 2 4 5	115	1 2 3 4 5
11	A B C D E	32	A B C D E	53	A B C D E	74	A B C D E	95	A B C D E	116	A B C D E
11	1 2 4 5	32	1 2 3 4 5	53	1 3 4 5	74	1 2 3 5	95	1 3 4 5	116	1 2 3 4 5
12	A B C D E	33	A B C D E	54	A B C D E	75	A B C D E	96	A B C D E	117	A B C D E
12	1 2 3 4 5	33	1 2 3 5	54	1 2 4 5	75	1 3 4 5	96	1 2 4 5	117	1 2 3 4 5
13	A B C D E	34	A B C D E	55	A B C D E	76	A B C D E	97	A B C D E	118	A B C D E
13	1 2 3 4 5	34	1 2 3 4 5	55	1 2 3 4 5	76	1 2 4 5	97	1 3 4 5	118	1 2 3 4 5
14	A B C D E	35	A B C D E	56	A B C D E	77	A B C D E	98	A B C D E	119	A B C D E
14	1 2 3 5	35	1 2 3 5	56	1 3 4 5	77	1 3 4 5	98	1 2 3 5	119	1 2 3 4 5
15	A B C D E	36	A B C D E	57	A B C D E	78	A B C D E	99	A B C D E	120	A B C D E
15	1 3 4 5	36	2 3 4 5	57	1 2 3 5	78	1 2 3 4 5	99	1 2 3 4 5	120	1 2 3 4 5
16	A B C D E	37	A B C D E	58	A B C D E	79	A B C D E	100	A B C D E	121	A B C D E
16	1 2 3 4 5	37	1 2 4 5	58	2 3 4 5	79	2 3 4 5	100	2 3 4 5	121	1 2 3 4 5
17	A B C D E	38	A B C D E	59	A B C D E	80	A B C D E	101	A B C D E	122	A B C D E
17	1 3 4 5	38	1 2 3 4 5	59	1 2 3 4 5	80	1 2 3 4 5	101	1 2 3 4 5	122	1 2 3 4 5
18	A B C D E	39	A B C D E	60	A B C D E	81	A B C D E	102	A B C D E	123	A B C D E
18	2 3 4 5	39	2 3 4 5	60	1 2 4 5	81	1 2 4 5	102	1 2 3 4 5	123	1 2 3 4 5
19	A B C D E	40	A B C D E	61	A B C D E	82	A B C D E	103	A B C D E	124	A B C D E
19	1 2 3 5	40	1 2 3 5	61	1 2 3 5	82	1 3 4 5	103	1 2 3 4 5	124	1 2 3 4 5
20	A B C D E	41	A B C D E	62	A B C D E	83	A B C D E	104	A B C D E	125	A B C D E
20	1 2 4 5	41	1 2 4 5	62	2 3 4 5	83	1 2 3 5	104	1 2 3 4 5	125	1 2 3 4 5
21	A B C D E	42	A B C D E	63	A B C D E	84	A B C D E	105	A B C D E	126	A B C D E
21	1 3 4 5	42	1 2 3 5	63	2 3 4 5	84	1 3 4 5	105	1 2 3 4 5	126	1 2 3 4 5

# ANEXO F. Base de datos de la PAAP

	Item001	Item002	Item003	Item004	Item005	Item006	Item007	Item008	Item009	Item010	Item011	Item012	Item013	Item014	Item015	Item016	Item017	Item018	Item091	Item092	Item093	Item094	Item095	Item096	Item097	Item098	Item099	Item100	Respuesta	Individuo	
1	3	1	4	1	3	1	2	4	4	5	2	3	5	4	4	3	2	1	3	5	4	4	4	2	1	1	5	1	3	Individuo0001	
2	2	3	4	1	3	3	5	1	4	2	5	3	5	5	2	5	3	3	1	5	4	1	5	3	2	4	4	1	5	Individuo0002	
3	3	5	4	3	3	1	3	5	1	3	3	1	5	1	3	3	2	5	4	5	4	3	-1	3	2	4	1	4	4	Individuo0003	
4	2	1	5	3	2	2	5	1	5	4	2	1	5	3	4	3	1	3	1	5	4	3	5	1	2	3	5	1	3	Individuo0004	
5	3	5	4	3	3	1	1	2	4	3	3	5	5	1	4	3	5	1	1	5	4	3	5	4	1	3	5	1	3	Individuo0005	
6	4	3	4	2	3	1	5	4	4	3	4	3	5	4	4	3	-1	-1	4	1	3	2	4	4	1	-1	-1	-1	4	Individuo0006	
7	2	4	4	3	3	4	1	4	4	4	3	5	5	4	4	5	2	1	1	5	4	3	2	3	2	4	5	1	1	Individuo0007	
8	1	5	4	2	4	1	2	1	1	2	3	2	3	2	1	2	3	3	3	3	5	3	3	2	2	2	1	1	1	Individuo0008	
9	1	5	4	2	3	2	5	1	5	4	1	5	5	4	2	1	1	2	4	2	4	3	1	1	2	2	5	4	4	Individuo0009	
10	3	5	4	5	3	4	5	4	4	5	3	3	5	1	1	5	2	3	4	5	4	3	1	2	2	2	1	2	2	Individuo0010	
11	1	2	4	3	3	1	5	1	2	5	5	3	5	4	5	3	4	3	1	5	4	3	2	2	2	3	1	1	3	Individuo0011	
12	2	5	4	3	3	3	3	3	3	2	3	3	5	5	4	4	3	1	1	5	4	3	2	3	2	1	5	1	5	Individuo0012	
13	1	3	4	5	3	1	2	1	4	4	1	1	5	2	4	3	1	3	1	5	4	3	5	3	2	5	5	1	5	Individuo0013	
14	3	-1	4	3	3	1	-1	4	1	-1	3	-1	-1	1	1	1	2	1	1	4	4	5	5	2	2	3	5	1	4	Individuo0014	
15	2	4	4	-1	3	1	5	1	-1	-1	5	4	5	4	1	4	5	2	1	5	4	3	2	3	1	-1	5	1	2	Individuo0015	
16	3	4	4	2	4	1	5	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	2	3	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	5	Individuo0016	
17	2	3	4	1	3	1	1	5	5	5	2	3	5	4	1	5	2	1	1	5	4	3	-1	1	1	1	1	1	1	2	Individuo0017
18	1	3	4	2	2	1	2	5	3	5	2	1	-1	1	-1	4	1	3	1	5	4	3	2	3	2	1	5	1	1	Individuo0018	
19	3	1	3	3	4	1	2	3	3	3	5	3	2	1	5	2	1	5	1	5	4	3	1	4	2	4	5	4	4	Individuo0019	
20	1	1	4	4	3	1	-1	1	3	3	3	3	5	4	1	-1	-1	2	3	1	4	4	3	5	2	2	3	5	1	3	Individuo0020
21	1	4	4	3	3	4	2	3	4	3	5	5	5	3	3	5	2	2	3	5	3	4	1	1	2	1	5	2	2	Individuo0021	
22	1	2	4	3	3	4	5	5	1	4	5	5	5	1	4	1	2	1	3	5	4	3	5	3	2	4	5	1	4	Individuo0022	
23	1	5	4	3	3	3	5	3	5	5	1	3	5	-1	1	5	2	1	1	5	4	3	3	5	2	4	5	1	5	Individuo0023	
24	1	4	4	-1	3	1	-1	3	1	5	3	3	5	3	4	-2	2	3	1	5	2	3	3	5	2	1	4	5	4	2	Individuo0024
25	2	1	2	5	2	1	2	2	1	3	4	2	5	1	1	5	2	3	4	5	4	3	5	3	2	3	1	1	1	Individuo0025	
26	1	2	4	3	3	1	5	3	4	5	3	1	5	5	1	4	5	5	4	5	4	3	5	3	2	3	1	1	4	Individuo0026	
27	1	4	4	4	4	1	2	5	1	5	1	2	5	3	4	5	5	5	4	5	4	3	5	4	2	3	5	1	5	Individuo0027	
28	1	5	4	3	4	1	5	3	5	5	1	3	5	4	3	4	2	1	1	5	4	3	3	3	2	2	5	1	3	Individuo0028	
29	2	5	4	2	3	1	2	1	4	2	3	2	5	2	3	1	2	4	1	5	4	3	5	1	2	3	4	1	5	Individuo0029	
30	2	3	4	1	2	1	2	-1	1	4	1	5	5	1	5	5	5	3	1	-1	4	3	5	4	2	4	5	1	2	Individuo0030	
31	1	1	4	2	2	3	2	5	5	1	4	1	4	1	1	-1	3	1	1	5	4	3	-1	3	2	-1	5	1	1	Individuo0031	
32	3	3	4	3	3	1	4	1	4	2	2	3	5	4	2	3	2	1	3	5	4	3	5	3	2	4	5	4	5	Individuo0032	
33	1	1	3	1	1	1	3	2	4	3	5	1	4	2	1	4	5	5	1	5	4	3	4	4	1	1	1	1	4	Individuo0033	
34	2	2	4	3	3	1	2	1	4	2	5	3	5	1	1	3	2	1	2	2	4	3	5	4	2	4	2	4	5	Individuo0034	
2944	3	5	4	1	2	4	5	2	4	5	3	3	5	4	1	5	2	5	1	5	4	3	2	3	2	5	3	5	3	Individuo2944	
2945	4	4	1	2	4	1	2	3	4	5	1	1	3	1	4	5	1	3	1	5	4	3	5	1	1	2	5	5	1	Individuo2945	
2946	3	4	4	3	2	4	2	4	4	1	5	1	5	4	4	3	2	1	4	2	4	2	1	1	1	3	5	1	1	Individuo2946	
2947	1	5	4	5	3	1	3	5	3	5	2	2	3	4	4	5	2	1	1	-1	4	3	5	3	2	-1	1	1	1	Individuo2947	
2948	1	3	4	3	3	4	1	3	4	2	4	3	5	-1	2	-1	2	1	1	5	4	3	-1	-1	2	3	5	1	4	Individuo2948	
2949	1	-1	4	3	-1	-1	2	-1	3	-1	-1	1	5	3	1	4	-1	3	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	1	Individuo2949	
2950	1	4	4	2	3	1	5	5	1	4	5	3	5	3	4	1	1	2	3	5	4	3	3	1	2	2	5	1	1	Individuo2950	
2951	1	3	2	2	3	2	2	3	3	4	3	1	3	1	1	3	3	3	5	1	5	5	5	4	3	1	1	2	1	Individuo2951	
2952	3	5	1	1	1	1	2	2	4	3	2	4	5	5	4	4	1	4	1	5	4	1	5	1	2	4	1	1	2	Individuo2952	
2953	3	5	4	3	3	1	5	1	4	5	3	1	5	1	1	1	3	4	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	-1	Individuo2953	
2954	2	1	4	2	4	2	2	3	4	4	1	5	3	4	4	5	2	1	1	5	4	3	1	4	2	2	5	1	1	Individuo2954	
2955	3	5	4	2	4	1	2	5	4	4	1	4	5	5	2	3	5	2	1	5	4	3	5	3	2	4	5	1	1	Individuo2955	
2956	1	5	4	2	3	1	5	5	4	5	3	5	5	1	3	3	2	5	4	5	4	3	3	2	3	2	4	-1	1	Individuo2956	
2957	3	5	4	1	-1	4	1	5	1	1	-1	-1	5	5	1	5	2	5	1	5	2	3	2	1	2	4	5	1	1	Individuo2957	
2958	3	-1	4	2	3	4	5	-1	4	1	-1	-1	3	1	2	-1	2	2	4	5	4	3	2	2	2	4	5	1	1	Individuo2958	
2959	2	1	4	3	3	4	1	5	4	5	5	4	5	4	2	5	2	1	1	5	4	3	5	4	2	4	5	1	1	Individuo2959	
2960	1	2	4	3	3	1	5	3	1	5	5	3	5	3	3	5	5	5	1	5	4	3	5	4	2	-1	5	1	1	Individuo2960	
2961	3	2	4	2	1	2	2	5	4	1	2	3	5	4	4	5	2	1	1	5	4	3	2	2	3	4	5	4	1	Individuo2961	
2962	3	5	4	3	3	1	2	5	4	4	3	3	5	4	4	5	2	1	1	5	4	3	2	2	2	4	5	1	1	Individuo2962	
2963	3	5	4	2	3	3	1	2	4	5	1	3	5	4	2	5	4	1	1	5	4	3	2	4	2	2	1	1	1	Individuo2963	
2964	1	5	4	3	2	4	2	1	5	1	2	3	5	1	4	2	4	5	1	2	5	4	3	1	2	-1	5	1	1	Individuo2964	
2965	1	2	4	4	3	1	2	3	5	4	3	5	2	4	4	2	5	1	3	5	4	3	5	3	2	4	5	1	4	Individuo2965	
2966	3	2	4	3	2	1	5	3	1	5	3	5	5	4	3	4	2	1	1	5	4	3	2	4	3	1	4	1	1	Individuo2966	
2967	1	2	4	1	2	1	5	3	1	4	1	3	4	1	1	5	3	2	3	4	2	1	4	3	6	2	3	5	1	Individuo2967	
2968	1	2	4	3	3	1	3	1	4	5	2	4	5	3	3	4	1	2	1	5	2	3	2	3	2	3	1	1	1	Individuo2968	
2969	2	1	2	4	1	5	1	4	3	5	5	3	5	5	1	4	3	1	1	1	4	1	5	4	1	4	1	1	1	Individuo2969	
2970	1	5	4	1	4	1	5	3	4	5																					

## ANEXO G. Temarios de las variables de los ítems de la PAAP

Variable	Sección	Subsección 1	Subsección 2	Subsección 3
Item001	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item002	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item003	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item004	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item005	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item006	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item007	Aptitud verbal	Sinónimos		
Item008	Aptitud verbal	Antónimos		
Item009	Aptitud verbal	Antónimos		
Item010	Aptitud verbal	Antónimos		
Item011	Aptitud verbal	Antónimos		
Item012	Aptitud verbal	Antónimos		
Item013	Aptitud verbal	Antónimos		
Item014	Aptitud verbal	Antónimos		
Item015	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item016	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item017	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item018	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item019	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item020	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item021	Aptitud verbal	Analogías verbales		
Item022	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item023	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item024	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item025	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item026	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item027	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item028	Aptitud verbal	Completar oraciones		
Item029	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item030	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item031	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item032	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item033	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item034	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item035	Aptitud verbal	Términos excluidos		
Item036	Aptitud verbal	Comprensión de lectura		
Item037	Aptitud verbal	Comprensión de lectura		
Item038	Aptitud verbal	Comprensión de lectura		
Item039	Aptitud verbal	Comprensión de lectura		
Item040	Aptitud verbal	Comprensión de lectura		
Item041	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Lineales
Item042	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item043	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Lineales
Item044	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Funciones	Representaciones gráficas
Item045	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item046	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Escalenos
Item047	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item048	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Sucesiones	Numéricas
Item049	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item050	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Rectángulos
Item051	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Funciones	Representaciones gráficas
Item052	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Funciones	Composición de funciones
Item053	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Círculos	Radios
Item054	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Sucesiones	Numéricas
Item055	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	División
Item056	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Inecuaciones	No lineales
Item057	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	División
Item058	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Lineales
Item059	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Rectángulos
Item060	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Racionales
Item061	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Funciones	Exponenciales
Item062	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Rectángulos
Item063	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item064	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Adición
Item065	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Obtusángulos
Item066	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Multiplicación

Item067	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Cuadráticas
Item068	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Adición
Item069	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Círculos	Áreas
Item070	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Perpendicularidad
Item071	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Isósceles
Item072	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item073	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Círculos	Radios
Item074	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Multipliación
Item075	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Sucesiones	Letras
Item076	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Radicales
Item077	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Sustracción
Item078	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item079	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Rectas	Longitudes
Item080	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Sustracción
Item081	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Sucesiones	Numéricas
Item082	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Lineales
Item083	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Sistema de ecuaciones
Item084	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Triángulos	Equiláteros
Item085	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Funciones	Cuadráticas
Item086	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Ecuaciones	Lineales
Item087	Aptitud matemática	Razonamiento geométrico	Rectas	Paralelismo
Item088	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Regla de tres	Simple directa
Item089	Aptitud matemática	Razonamiento algebraico	Inecuaciones	Lineales
Item090	Aptitud matemática	Razonamiento numérico	Operaciones aritméticas	Adición
Item091	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item092	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item093	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item094	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item095	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item096	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item097	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item098	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item099	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		
Item100	Aptitud abstracta	Matrices gráficas		

## ANEXO H. Análisis factorial (aplicación)

Comunalidades		
Variable	Inicial	Extracción
Item001	1,000	0,616
Item002	1,000	0,556
Item003	1,000	0,536
Item004	1,000	0,442
Item005	1,000	0,525
Item006	1,000	0,460
Item007	1,000	0,476
Item008	1,000	0,628
Item009	1,000	0,476
Item010	1,000	0,599
Item011	1,000	0,572
Item012	1,000	0,476
Item013	1,000	0,463
Item014	1,000	0,588
Item015	1,000	0,461
Item016	1,000	0,549
Item017	1,000	0,410
Item018	1,000	0,410
Item019	1,000	0,482
Item020	1,000	0,492
Item021	1,000	0,435
Item022	1,000	0,495
Item023	1,000	0,557
Item024	1,000	0,528
Item025	1,000	0,451
Item026	1,000	0,465
Item027	1,000	0,505
Item028	1,000	0,457
Item029	1,000	0,425
Item030	1,000	0,657
Item031	1,000	0,420
Item032	1,000	0,437
Item033	1,000	0,464
Item034	1,000	0,414
Item035	1,000	0,574
Item036	1,000	0,443
Item037	1,000	0,607
Item038	1,000	0,496
Item039	1,000	0,497
Item040	1,000	0,406
Item041	1,000	0,436
Item042	1,000	0,416
Item043	1,000	0,424
Item044	1,000	0,619
Item045	1,000	0,501
Item046	1,000	0,479
Item047	1,000	0,428
Item048	1,000	0,449
Item049	1,000	0,472
Item050	1,000	0,585
Item051	1,000	0,537
Item052	1,000	0,400

Item053	1,000	0,351
Item054	1,000	0,454
Item055	1,000	0,465
Item056	1,000	0,560
Item057	1,000	0,420
Item058	1,000	0,395
Item059	1,000	0,490
Item060	1,000	0,402
Item061	1,000	0,501
Item062	1,000	0,563
Item063	1,000	0,436
Item064	1,000	0,455
Item065	1,000	0,417
Item066	1,000	0,468
Item067	1,000	0,435
Item068	1,000	0,349
Item069	1,000	0,459
Item070	1,000	0,603
Item071	1,000	0,498
Item072	1,000	0,579
Item073	1,000	0,480
Item074	1,000	0,472
Item075	1,000	0,423
Item076	1,000	0,461
Item077	1,000	0,480
Item078	1,000	0,501
Item079	1,000	0,532
Item080	1,000	0,402
Item081	1,000	0,534
Item082	1,000	0,484
Item083	1,000	0,405
Item084	1,000	0,453
Item085	1,000	0,493
Item086	1,000	0,552
Item087	1,000	0,457
Item088	1,000	0,519
Item089	1,000	0,491
Item090	1,000	0,442
Item091	1,000	0,379
Item092	1,000	0,512
Item093	1,000	0,420
Item094	1,000	0,539
Item095	1,000	0,545
Item096	1,000	0,528
Item097	1,000	0,435
Item098	1,000	0,417
Item099	1,000	0,391
Item100	1,000	0,503

Varianza total explicada						
Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	7,213	7,213	7,213	7,213	7,213	7,213
2	2,496	2,496	9,709	2,496	2,496	9,709
3	2,130	2,130	11,839	2,130	2,130	11,839
4	1,743	1,743	13,582	1,743	1,743	13,582
5	1,543	1,543	15,125	1,543	1,543	15,125
6	1,474	1,474	16,599	1,474	1,474	16,599
7	1,388	1,388	17,987	1,388	1,388	17,987
8	1,319	1,319	19,306	1,319	1,319	19,306
9	1,285	1,285	20,591	1,285	1,285	20,591
10	1,254	1,254	21,845	1,254	1,254	21,845
11	1,233	1,233	23,078	1,233	1,233	23,078
12	1,219	1,219	24,296	1,219	1,219	24,296
13	1,203	1,203	25,499	1,203	1,203	25,499
14	1,185	1,185	26,684	1,185	1,185	26,684
15	1,181	1,181	27,865	1,181	1,181	27,865
16	1,161	1,161	29,026	1,161	1,161	29,026
17	1,140	1,140	30,166	1,140	1,140	30,166
18	1,125	1,125	31,291	1,125	1,125	31,291
19	1,120	1,120	32,411	1,120	1,120	32,411
20	1,112	1,112	33,523	1,112	1,112	33,523
21	1,100	1,100	34,623	1,100	1,100	34,623
22	1,096	1,096	35,720	1,096	1,096	35,720
23	1,088	1,088	36,808	1,088	1,088	36,808
24	1,078	1,078	37,885	1,078	1,078	37,885
25	1,075	1,075	38,961	1,075	1,075	38,961
26	1,065	1,065	40,026	1,065	1,065	40,026
27	1,051	1,051	41,076	1,051	1,051	41,076
28	1,048	1,048	42,124	1,048	1,048	42,124
29	1,039	1,039	43,163	1,039	1,039	43,163
30	1,030	1,030	44,194	1,030	1,030	44,194
31	1,022	1,022	45,216	1,022	1,022	45,216
32	1,019	1,019	46,235	1,019	1,019	46,235
33	1,009	1,009	47,244	1,009	1,009	47,244
34	1,003	1,003	48,247	1,003	1,003	48,247
35	0,993	0,993	49,240			
36	0,984	0,984	50,223			
37	0,978	0,978	51,201			
38	0,970	0,970	52,171			
39	0,961	0,961	53,133			
40	0,956	0,956	54,088			
41	0,954	0,954	55,043			
42	0,947	0,947	55,990			
43	0,941	0,941	56,931			
44	0,939	0,939	57,870			
45	0,924	0,924	58,793			
46	0,919	0,919	59,712			
47	0,915	0,915	60,627			
48	0,909	0,909	61,536			
49	0,902	0,902	62,438			
50	0,892	0,892	63,330			
51	0,882	0,882	64,212			
52	0,881	0,881	65,093			



53	0,877	0,877	65,971			
54	0,866	0,866	66,836			
55	0,857	0,857	67,694			
56	0,855	0,855	68,549			
57	0,849	0,849	69,398			
58	0,840	0,840	70,238			
59	0,836	0,836	71,075			
60	0,832	0,832	71,907			
61	0,828	0,828	72,735			
62	0,819	0,819	73,554			
63	0,810	0,810	74,364			
64	0,808	0,808	75,172			
65	0,802	0,802	75,974			
66	0,793	0,793	76,767			
67	0,788	0,788	77,555			
68	0,784	0,784	78,339			
69	0,779	0,779	79,118			
70	0,771	0,771	79,889			
71	0,761	0,761	80,650			
72	0,759	0,759	81,409			
73	0,757	0,757	82,166			
74	0,748	0,748	82,914			
75	0,740	0,740	83,654			
76	0,738	0,738	84,392			
77	0,729	0,729	85,121			
78	0,717	0,717	85,838			
79	0,709	0,709	86,547			
80	0,703	0,703	87,251			
81	0,703	0,703	87,954			
82	0,699	0,699	88,653			
83	0,693	0,693	89,347			
84	0,686	0,686	90,033			
85	0,681	0,681	90,714			
86	0,674	0,674	91,389			
87	0,667	0,667	92,056			
88	0,663	0,663	92,719			
89	0,658	0,658	93,377			
90	0,652	0,652	94,029			
91	0,639	0,639	94,668			
92	0,636	0,636	95,305			
93	0,632	0,632	95,937			
94	0,626	0,626	96,563			
95	0,616	0,616	97,179			
96	0,604	0,604	97,782			
97	0,593	0,593	98,375			
98	0,573	0,573	98,949			
99	0,545	0,545	99,493			
100	0,507	0,507	100,000			

Matriz de componentes																																		
Variable	Componentes																																	
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
Item001	.205	.080	.153	.032	.049	-.106	-.049	-.142	.047	.157	.049	-.138	.244	-.020	-.061	-.022	.192	.089	-.086	.109	-.089	.117	.198	-.043	-.082	-.104	-.079	-.112	-.012	.110	-.119	-.027	.082	.444
Item002	.230	.028	.101	-.191	.018	.053	.145	-.060	-.199	.088	-.060	.003	.211	.066	.138	-.049	.097	.305	-.033	-.066	-.051	-.124	.117	-.110	.103	-.262	.128	-.033	.132	.034	-.131	.057	.069	-.120
Item003	.141	.004	.205	-.130	.006	-.001	.147	.176	.036	.108	.105	.068	.143	.167	.063	-.055	-.184	.233	.210	.057	.002	.126	-.191	-.026	.089	.034	-.106	.088	.195	.119	.215	-.028	-.019	.069
Item004	.273	.082	.089	.266	-.035	-.065	.001	.088	-.184	.082	.034	.051	.087	-.107	.123	-.211	.111	.139	.031	-.101	-.064	-.132	-.047	.037	-.050	-.083	.094	-.020	.197	-.106	.060	.046	-.048	-.012
Item005	.199	.065	.199	-.001	.103	.001	.052	-.063	.272	-.009	-.007	-.084	.008	.184	-.100	.067	-.176	.188	-.074	.075	-.057	.106	-.106	-.076	-.135	.016	.144	.004	.097	-.329	.072	-.123	-.005	-.090
Item006	.308	.151	.120	.371	-.024	.024	-.094	-.133	-.136	.068	-.214	.138	.052	-.011	.005	-.160	.007	.074	-.033	.068	.073	.028	.033	.005	.052	.022	.060	.075	.065	-.047	-.036	-.003	-.020	.084
Item007	.215	.107	.136	.186	.110	.054	-.265	-.256	.106	-.097	-.149	.174	-.038	-.106	.153	-.150	.086	.047	-.002	.019	.081	.029	.128	-.070	.018	.005	.087	.115	.007	.014	.130	-.046	.001	-.060
Item008	.021	-.045	.010	.019	.099	.016	.059	.192	.151	.087	.128	.228	.010	.175	-.017	-.186	-.154	.209	.053	-.036	.171	-.314	.140	.168	.099	-.161	-.219	-.015	-.046	-.153	-.093	.144	-.152	.030
Item009	.216	.103	.217	-.104	.040	-.047	.102	-.075	-.215	.133	.019	-.079	.094	.157	.188	-.003	-.088	-.110	-.098	.026	.124	-.010	-.015	-.180	-.017	.189	-.009	-.078	.155	-.152	-.165	.079	.019	-.028
Item010	.044	-.010	-.008	.008	.133	.093	.155	-.082	.044	-.125	.089	.025	-.174	.297	.057	-.092	.120	-.249	.000	.282	-.081	-.163	.092	.118	-.038	-.226	.114	.051	.129	-.021	.205	-.030	-.020	.209
Item011	.117	.031	.199	-.143	.090	-.069	-.008	-.081	-.023	.197	.214	-.100	.011	.033	-.120	.092	-.060	-.015	.135	-.334	-.031	-.022	.081	.011	-.130	-.061	.287	.020	.062	.281	.078	-.114	-.088	-.062
Item012	.180	.064	.106	.224	.100	-.085	-.097	-.035	.025	.029	.245	.214	-.104	-.080	-.008	.046	-.069	-.004	.092	.118	.219	-.033	-.017	.037	-.127	-.088	.188	.077	.070	.232	-.023	.075	-.122	.025
Item013	.295	.141	.323	-.108	-.092	-.098	-.080	-.038	.012	.136	.025	-.130	.172	.015	.047	.049	-.170	-.070	-.073	-.065	.104	.039	-.018	.115	.067	-.044	.017	.012	.042	.013	.191	.092	-.141	-.015
Item014	.079	.058	.021	.044	.140	-.112	-.088	.001	.151	.023	.145	-.007	.106	-.286	-.313	.060	-.114	-.106	.205	-.056	-.141	-.008	-.048	.000	.062	.018	.070	.163	.051	-.178	-.198	.009	.112	.289
Item015	.202	.058	.149	-.051	-.071	.192	.014	-.205	-.097	.021	-.034	.062	-.036	.179	-.224	-.103	.123	.049	.224	.058	.012	.119	-.013	-.093	.193	.085	-.030	-.082	.082	-.019	-.056	.002	-.182	-.097
Item016	.092	-.071	.109	-.020	.017	-.120	.180	-.075	.038	.278	-.176	-.079	-.014	-.107	-.015	.125	.198	.026	.198	-.069	-.009	-.064	.091	-.068	.160	.091	-.195	.289	-.067	-.005	.023	.030	.187	-.175
Item017	.348	.163	.190	.099	-.103	-.136	.105	-.143	.074	.029	-.114	.041	.016	.065	-.053	.001	.029	.000	-.033	.094	-.077	-.071	-.045	.015	-.121	-.169	-.105	-.035	-.151	-.077	.033	.121	.033	.058
Item018	.332	.119	.109	.179	-.124	-.059	.020	-.127	.037	-.023	-.111	-.027	-.015	-.008	-.024	.030	-.004	.081	.107	.120	-.233	.042	.005	.103	.056	-.028	-.125	-.053	.070	.173	-.059	-.096	.128	-.066
Item019	.234	.019	.152	-.146	-.199	-.105	.214	-.016	-.229	.022	-.022	-.016	-.026	.064	-.044	-.237	.001	-.056	-.120	.114	-.220	-.011	-.006	-.050	.049	.209	-.042	.057	-.124	-.037	.057	-.114	-.094	-.089
Item020	.255	.061	.045	.159	-.229	-.074	.197	-.185	-.182	.036	.039	.103	-.093	-.022	-.020	-.160	-.072	.033	.032	.122	-.077	.062	-.165	.105	.106	-.031	.001	-.113	-.214	-.103	.071	.031	.163	-.015
Item021	.212	.006	-.023	.229	-.241	-.046	.117	-.105	-.153	-.139	-.115	.201	.066	.117	.067	.034	.036	-.070	-.032	-.118	.052	.013	.134	.043	-.036	.092	.204	.030	-.024	.135	-.107	.017	.043	.061
Item022	.167	.002	.070	.009	-.156	-.245	.228	.128	.065	.059	-.041	.150	.010	-.031	.026	-.025	-.224	-.122	.024	.107	-.024	.102	-.057	-.061	-.208	-.169	.147	.058	.005	.214	-.062	.007	-.146	-.113
Item023	.041	.080	.240	-.039	.012	-.062	.051	.260	.068	.030	.207	.013	-.018	-.087	.160	-.079	.027	-.044	-.030	.048	.033	.081	.233	.284	.225	.107	-.015	-.034	-.061	.016	-.186	-.193	.079	-.183
Item024	.098	-.010	.072	-.059	.188	-.011	-.140	.105	-.227	-.095	-.177	.198	-.077	.035	-.252	.074	-.066	.012	.049	.115	.077	-.020	.042	.072	.196	.210	.180	.126	-.003	.148	.156	.150	.048	.017
Item025	.197	.066	.135	-.004	-.045	-.027	.167	.145	-.144	-.202	-.152	.031	-.161	-.010	-.086	.162	-.072	-.001	-.018	-.162	-.099	-.106	.163	-.136	.144	-.180	.074	.021	.110	.049	.107	.000	.096	-.024
Item026	.238	.113	.205	-.109	-.065	-.221	.186	.148	.013	.030	-.150	.047	-.054	.002	-.075	.105	-.065	-.043	.060	-.125	.025	-.167	.162	.054	-.182	.183	.005	-.023	-.045	.008	-.082	-.020	-.064	.153
Item027	.145	.051	.211	-.131	-.049	-.173	.197	.177	.071	-.063	-.057	.031	.066	-.235	.049	-.031	.071	-.201	.056	-.055	.216	.066	.031	.032	.106	-.114	-.108	.154	-.034	.047	.010	-.189	-.163	.108
Item028	.207	.090	.141	.192	.155	.075	-.188	.111	-.029	-.018	-.160	-.042	-.117	-.073	-.181	.047	-.122	-.031	.032	.053	.063	.142	.027	-.156	-.136	-.061	-.153	.000	.100	-.085	.111	.032	-.069	-.198
Item029	.177	.148	.372	.063	.072	-.085	-.062	.144	-.001	.029	.144	-.179	-.008	.006	.135	.005	.030	.113	-.161	.089	-.070	-.115	-.048	.075	.039	.104	.010	-.020	-.045	-.006	.090	.152	-.016	.013
Item030	.129	.116	.138	.112	.093	.028	-.081	-.062	.269	.032	.157	.102	-.004	.119	.138	.016	-.064	-.004	-.168	-.039	.261	-.016	-.212	-.284	.161	.047	-.027	-.011	-.124	.135	-.179	.027	.329	.040
Item031	.322	.214	.281	.014	.134	.090	-.093	-.035	-.027	-.023	.094	-.058	.098	.070	-.047	.013	.098	-.051	-.056	-.151	-.054	.061	-.035	-.041	.013	.001	-.056	-.076	-.238	.105	.018	-.018	.003	.007
Item032	.230	.168	.247	.133	.039	.066	.122	-.106	.295	-.087	-.007	.027	-.144	.002	-.016	.095	.109	.052	-.147	-.034	.013	-.088	-.089	.130	-.003	.050	-.067	.033	.068	-.025	-.107	-.093	-.097	-.085
Item033	.327	.141	.196	.050	.009	.119	.128	-.126	.142	-.044	-.062	.070	-.106	.093	-.084	.069	.115	-.026	-.098	-.189	-.100	.019	-.011	.046	-.087	-.031	-.079	.166	-.009	-.025	-.204	-.034	-.071	-.154
Item034	.383	.247	.320	.071	.116	.081	-.137	-.087	-.007	-.111	.057	-.037	.027	-.027	.015	.039	-.013	-.094	.058	-.043	-.027	-.076	-.003	.037	-.020	-.053	-.062	.013	.005	.022	.000	.037	-.025	.021
Item035	.002	.002	.101	.120	.148	.001	-.081	.168	.184	.017	.057	-.089	-.095	.031	-.052	.198	.082	.103	.273	.300	-.116	-.135	.084	.013	.250	-.054	.185	-.164	.027	-.053	-.106	.103	.072	-.133
Item036	.156	.089	.230	-.177	.212	.072	.012	.212	-.058	-.305	.003	-.115	-.116	-.084	.024	-.035	.069	.054	-.016	.061	-.022	-.082	-.035	-.098	-.136	.116	-.034	-.032	.014	.000	.145	-.011	.098	.063
Item037	.074	.081	.039	.028	.130	.162	-.039	.029	.019	.101	.054	.323	.014	.043	.195	-.023	-.245	-.019	-.104	.068	-.299	.193	.202	.064	-.086	.064	-.023	.111	-.066	-.039	.105	.263	.175	-.004
Item038	.157	.107	.112	-.116	.192	.168	.067	.138	-.161	-.047	-.031	.302	.054	.042	.021	.056	-.052	-.150	.171	-.181	.055	.095	-.181	.059	.016	.087	-.070	.012	-.079	-.152	.031	.016	.155	.116
Item039	.124	.040	.061	.116	-.154	-.192	.232	.121	.056	-.226	.090	.018	-.104	-.269	.025	.006	.148	.033	-.036	.131	.137	.026	.114	-.141	-.116	-.004	.106	-.116	.071	-.053	.060	.105	.165	-.077
Item040	.181	.153	.260	-.042	.049	-.061	-.021	.135	-.130	-.180	.007	-.115	.015	-.161	-.035	.029	.028	-.055	-.003	.013	-.104	.062	-.174	.036	-.009	.025	-.135	-.188	-.081	.006	-.026	.070	-.181	.125
Item041	.420																																	

Item051	,262	,110	-,076	-,125	-,005	,247	,010	-,071	-,072	-,079	,117	-,001	,049	-,187	-,080	-,127	-,118	,224	,016	,140	,110	-,139	-,067	,149	-,042	,067	-,085	,160	-,200	,193	-,024	,128	,029	-,088
Item052	,337	,047	-,054	-,056	-,047	,150	,067	,056	,067	,043	,047	,026	-,161	,051	,099	-,036	-,128	-,215	,060	-,163	-,018	-,064	-,052	,025	,205	,070	,153	-,059	,095	,000	-,052	,103	,015	-,006
Item053	,357	,144	-,134	-,194	-,134	-,010	-,089	,104	-,067	,041	-,065	,034	-,065	-,020	-,112	-,056	-,137	,010	-,058	-,029	-,017	,003	-,057	-,020	,121	-,068	,013	-,012	,064	,028	-,158	-,037	,000	,053
Item054	,356	,083	-,166	-,118	,034	,180	,095	,056	,010	-,002	,055	-,024	-,026	-,168	-,204	-,056	,003	-,021	-,218	,007	-,002	,057	,190	,038	,034	-,050	-,095	-,040	,061	-,045	-,085	,123	,151	-,046
Item055	,255	,062	-,087	,050	-,013	,043	,030	,228	-,042	,235	,014	-,116	-,217	,020	-,216	-,005	,011	,029	-,154	,009	,094	,190	,095	,008	-,056	-,142	,112	,042	-,195	-,088	,034	,043	-,027	-,029
Item056	,015	-,001	-,018	,018	,187	,062	,116	,084	-,112	-,067	-,235	,089	,165	-,043	,335	,216	,238	,023	,215	,104	,124	,160	-,073	,007	-,107	,026	,074	,080	-,053	-,092	-,165	,075	-,039	,035
Item057	,400	,144	-,091	-,152	-,258	,059	-,110	-,042	-,042	-,095	,109	,092	-,023	-,068	,034	,056	,006	,054	,013	,093	,152	-,040	-,073	,122	,060	-,010	,095	,040	-,027	,032	-,028	-,095	,015	
Item058	,395	,063	-,177	-,048	-,248	,069	-,062	-,002	,078	-,016	,033	,032	-,062	-,014	,100	,024	,034	-,030	,035	,057	,022	,027	-,042	,010	,035	-,036	-,156	,027	,017	-,080	,070	,150	-,166	,099
Item059	,264	,053	-,196	,079	-,043	,202	,033	,112	,159	-,062	-,048	,074	,224	-,211	,065	,023	-,024	-,009	-,026	-,096	-,187	,059	-,087	,016	,034	-,142	-,093	-,040	,143	,008	,101	,138	-,177	-,101
Item060	,321	,030	-,203	,068	-,204	-,027	,029	,073	,097	,113	,059	,046	-,031	,121	,006	,087	,155	,132	,035	-,090	,126	,018	-,058	,071	-,018	,035	,061	-,040	-,242	,053	,017	,002	-,058	,074
Item061	,200	,067	-,115	-,004	,053	,171	-,010	,167	,059	-,259	-,195	-,091	-,276	,126	,009	-,023	-,009	,195	-,043	-,065	,157	,103	,026	,009	-,016	-,093	,033	-,149	-,195	,093	,065	-,043	,035	-,081
Item062	,045	-,015	-,035	,039	,033	,162	,137	,245	,180	-,186	,103	,168	,305	,147	-,113	-,100	,181	-,017	-,042	-,015	-,041	-,085	,108	-,162	-,041	,024	,145	,074	-,217	-,102	,105	-,124	-,114	-,034
Item063	,328	,131	-,159	,013	,031	,122	-,013	-,063	-,031	,019	-,119	-,060	-,088	,056	,170	,148	-,235	-,113	-,034	,171	,064	-,179	-,025	,127	-,014	,001	-,041	,017	-,018	,043	-,003	,075	-,016	,153
Item064	,186	,013	-,014	-,246	,104	-,082	,120	-,017	-,020	,089	-,122	-,116	-,117	,151	-,014	,098	,168	,013	-,096	,118	,242	,033	-,060	-,062	-,058	-,161	-,135	,124	,108	,080	,116	-,099	,055	-,055
Item065	,364	,089	-,086	-,133	-,098	,004	-,119	,071	,041	-,125	,034	,115	-,043	-,014	,097	,183	,003	,154	,060	,072	-,225	,040	-,001	-,137	-,027	-,053	-,089	,090	,048	,103	-,014	-,051	,029	,077
Item066	,312	,022	-,066	-,285	,094	-,041	-,043	,157	,037	,150	-,230	,010	,072	,049	-,024	,041	,047	,002	-,029	,205	,073	,042	-,039	,205	-,067	-,066	,033	-,052	,040	,050	-,168	-,134	,038	,012
Item067	,332	,040	-,102	-,234	-,138	-,166	-,130	,019	,137	-,209	-,001	-,087	-,051	,116	,102	-,042	,051	,047	-,001	,013	-,019	,097	,096	,052	,067	,015	,077	,072	,144	-,073	,003	-,067	,082	,127
Item068	,364	,034	-,115	,236	-,027	-,022	-,057	,165	,054	,125	-,066	-,063	-,020	,013	,004	-,001	-,005	,069	,015	,030	,021	-,007	,128	,124	,125	,000	,028	,030	-,002	-,117	,030	-,090	-,063	,042
Item069	,270	,064	-,102	,052	,024	,092	-,120	,069	,036	,130	-,049	-,153	,185	-,111	,171	,019	,137	-,115	-,169	,001	-,069	-,086	,098	,173	,011	,130	,029	,228	,115	-,052	,145	,025	-,004	-,019
Item070	,051	-,075	-,031	,044	,116	,156	,326	-,035	,155	,024	,103	,101	-,193	-,076	-,067	-,177	,115	,058	-,117	-,127	,150	,175	,064	,128	-,106	,188	-,059	-,118	,257	,100	,120	,092	,162	,119
Item071	,240	,069	-,147	,024	,109	,234	,197	-,233	,113	-,026	-,163	-,215	-,124	-,195	,093	-,044	-,095	,072	,152	-,065	-,028	,072	,063	,119	-,019	-,036	,025	-,016	-,091	-,009	,053	-,076	-,096	,094
Item072	,029	-,038	-,100	,102	-,074	-,070	,265	-,011	,265	,047	-,164	-,066	,160	,041	-,103	,211	-,071	,226	-,026	-,011	-,062	,056	-,181	,102	-,037	,259	,192	,044	,037	,065	,111	,204	,063	,110
Item073	,328	,018	-,215	,304	-,097	-,117	-,005	,121	-,084	-,019	,241	-,110	,020	,008	-,066	,075	,068	,060	,028	-,001	,038	,085	-,016	-,071	-,004	,045	-,106	,154	,073	,101	-,051	-,132	,004	-,110
Item074	,314	,012	-,120	,298	-,053	,023	-,051	,197	-,111	-,003	,027	-,237	-,056	,202	-,045	,010	,033	-,057	,064	-,012	-,008	,009	,027	,124	,005	,054	-,156	,143	-,063	,090	-,113	-,060	,098	,013
Item075	,352	,057	-,192	,133	,010	-,015	,006	,069	-,099	-,026	,076	-,124	,091	,145	-,040	-,017	-,177	-,090	,062	-,153	-,007	-,006	,030	,030	-,085	,145	,028	-,025	,126	-,180	-,032	-,054	,148	-,028
Item076	,351	-,044	-,147	-,097	,051	-,184	-,072	-,045	-,007	-,206	,073	-,024	,008	,150	,107	-,165	-,078	,075	,151	-,145	-,002	-,013	,101	,091	-,036	,062	-,102	,041	,211	,067	-,029	,096	,026	-,017
Item077	,382	,058	-,106	,005	,074	,036	,176	-,095	,122	-,129	,002	-,061	,187	,114	-,156	-,117	,013	-,270	,120	-,013	,005	-,048	-,006	-,089	,058	-,081	-,060	,104	,026	-,059	-,081	,113	,063	-,045
Item078	,376	,035	-,150	,027	,070	-,119	-,075	-,059	,153	,023	-,062	-,144	,217	,072	-,039	-,075	-,047	-,179	,060	,049	,002	-,016	,190	-,035	-,126	,119	,081	,063	-,043	,089	-,022	,207	-,040	-,160
Item079	,251	-,029	-,085	,023	,193	-,096	-,073	,065	,092	,009	-,120	-,056	,123	,068	-,007	-,338	,044	-,095	,164	,004	-,058	,054	,095	-,297	,058	,061	-,016	-,107	-,147	,194	-,010	,079	-,077	,112
Item080	,380	-,039	-,185	-,126	,249	-,071	-,013	-,031	,081	,066	-,197	,101	-,055	-,012	,004	-,040	-,027	-,087	,057	,032	-,011	-,071	-,068	,058	-,036	,039	-,092	-,098	-,019	-,028	-,074	-,048	,022	-,133
Item081	,132	-,062	-,106	-,071	,184	-,080	,081	,161	,106	,238	,043	,145	,066	-,090	-,003	-,263	,168	-,128	-,073	,139	-,253	,132	-,215	-,054	,051	,035	,081	-,029	,058	,129	,061	,122	,001	-,040
Item082	,291	-,060	-,155	,100	,109	,030	,063	-,020	,011	,082	,131	-,006	-,141	-,105	,237	,145	-,061	-,016	-,132	,025	,022	-,060	,028	-,228	,048	,242	-,062	-,030	-,031	,015	-,002	-,022	-,253	-,044
Item083	,349	-,074	-,115	-,003	,319	-,052	,115	-,042	-,063	,190	,021	,020	-,002	-,117	,109	,049	-,063	,027	-,024	-,005	-,020	-,076	-,040	-,195	-,021	-,020	,066	,004	-,023	-,089	,050	-,072	-,036	-,052
Item084	,259	-,069	-,170	,040	,148	-,065	,222	-,108	-,106	-,021	,123	,134	,041	-,050	-,022	,275	-,024	-,059	-,027	,031	-,117	-,250	,048	,084	,077	-,024	,000	-,061	-,154	-,014	,104	,018	-,026	-,031
Item085	,163	-,056	-,116	,066	,105	,104	,169	-,177	-,133	,051	,266	-,051	,150	,075	-,098	,163	,182	-,053	,083	,084	,078	,070	-,042	,012	,172	-,022	-,107	-,130	,099	,043	,124	-,198	-,125	,051
Item086	,342	-,274	-,131	-,068	,227	-,392	-,008	-,131	-,011	-,171	,093	,086	,001	,028	,039	,042	,041	,081	-,073	-,098	-,046	,063	-,079	,050	,038	-,054	-,040	,029	-,092	-,080	-,004	-,012	-,077	-,022
Item087	,407	-,171	-,110	,018	,202	-,213	-,021	-,082	-,108	-,241	,057	-,015	-,027	,021	-,063	,026	,031	,148	-,137	-,128	-,033	-,051	-,078	,018	,035	,017	-,012	-,056	-,005	,040	,034	,024	-,001	-,025
Item088	,489	-,176	-,131	-,106	,203	-,285	-,121	-,138	-,060	-,025	,005	,048	,051	-,035	-,025	,027	,002	,017	-,135	-,021	,011	,042	,041	,096	-,007	,023	-,002	-,111	-,016	,055	,014	-,066	,010	-,024
Item089	,210	,009	-,077	,407	,012	,003	,135	,189	-,040	-,038	-,073	-,187	-,025	,025	,152	,010	-,160	-,106	,071	-,036	,014	,040	-,132	-,018	,085	-,077	,012	-,212	,004	,067	-,027	-,130	,076	,066
Item090	,346	-,125	-,069	,197	,179	-,132	-,042	,079	-,023	,153	-,126	,114	-,132	,014	-,134	-,096	-,015	,148	-,034	-,119	,042	,055	-,059	,093	,049	-,089	-,018	,018	,012	-,081	-,025	-,142	-,078	,096
Item091	,238	-,347	,133	,027	-,086	,080	-,085	-,003	,016	-,055	-,047	-,014	-,007	-,172	-,019	-,054	-,008	,028	-,154	-,045	,023	-,056	,002	-,023	,183	-,026	,119	,078	,025	-,077				

## LISTA DE FIGURAS

### FIGURAS CAPÍTULO 2

Figura 2.1 Curva característica del ítem. ....	26
Figura 2.2 Curvas características del ítem para las respuestas correcta e incorrecta a un ítem. ....	26
Figura 2.3 Parámetros de la CCI. ....	27
Figura 2.4 Tres CCI con el mismo nivel de dificultad pero con diferentes niveles de discriminación. ....	29
Figura 2.5 Ítem con discriminación negativa. ....	30
Figura 2.6 Tres CCI con el mismo nivel de discriminación pero con diferentes niveles de dificultad. ....	31
Figura 2.7 Tres CCI con el mismo nivel de discriminación y dificultad pero con diferentes niveles de azar. ....	33
Figura 2.8 Tipos de CCI no utilizados en la TRI. ....	34
Figura 2.9 Curva característica del ítem basada en el modelo de ojiva normal. ....	37
Figura 2.10 Transformación de la desviación normal de la curva característica del ítem. ....	38
Figura 2.11 Curvas características del ítem basadas en los modelos normal y logístico. ....	41
Figura 2.12 Transformación de la desviación logística de la curva característica del ítem. ....	43
Figura 2.13 Área bajo una curva. ....	81
Figura 2.14 Curva característica del test. ....	94

### FIGURAS CAPÍTULO 3

Figura 3.1 Secciones de las variables de los ítems. ....	102
Figura 3.2 Parámetro de discriminación vs. parámetro de dificultad. ....	120
Figura 3.3 Curvas características de los ítems. ....	138
Figura 3.4 Valores pronosticados por el modelo y valores observados obtenidos. ....	148

### FIGURAS CAPÍTULO 4

Figura 4.1 Histograma de las puntuaciones observadas. ....	156
Figura 4.2 Histograma de las puntuaciones verdaderas. ....	156
Figura 4.3 Curva característica del test. ....	157
Figura 4.4 Puntuaciones observadas de la UA. ....	158
Figura 4.5 Puntuaciones verdaderas de la TRI. ....	158
Figura 4.6 Puntuaciones observadas de la UA y verdaderas de la TRI. ....	159
Figura 4.7 Diagrama de dispersión del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias. ....	166
Figura 4.8 Curva ROC del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias. ....	166
Figura 4.9 Diagrama de dispersión del Propedéutico de Empresarial y Económicas. ....	168
Figura 4.10 Curva ROC del Propedéutico de Empresarial y Económicas. ....	169

## LISTA DE TABLAS

### TABLAS CAPÍTULO 1

Tabla 1.1 Estructura de la PAAP.....	5
Tabla 1.2 Estructura del ENES.....	12
Tabla 1.3 Comparación entre la PAAP y el ENES.....	16

### TABLAS CAPÍTULO 2

Tabla 2.1 Cronología de los modelos de TRI.....	20
Tabla 2.2 Algunas diferencias entre la TCT y la TRI.....	21
Tabla 2.3 Niveles de habilidad del individuo.....	27
Tabla 2.4 Niveles del parámetro de discriminación del ítem.....	28
Tabla 2.5 Niveles de inclinación de la pendiente según el parámetro de discriminación del ítem.....	28
Tabla 2.6 Niveles del parámetro de dificultad del ítem.....	30
Tabla 2.7 Niveles de habilidad que interrelaciona el parámetro de dificultad del ítem.....	31
Tabla 2.8 Tabla de contingencia.....	53
Tabla 2.9 Número de parámetros a estimar.....	91

### TABLAS CAPÍTULO 3

Tabla 3.1 Número de individuos inscritos.....	99
Tabla 3.2 Inconsistencias en la validación de los individuos.....	100
Tabla 3.3 Categorías de respuesta.....	101
Tabla 3.4 Inconsistencias en la validación de las variables de los ítems.....	101
Tabla 3.5 Frecuencia de los temarios de las variables de los ítems.....	103
Tabla 3.6 Frecuencia de las categorías de respuesta de las variables de los ítems.....	109
Tabla 3.7 Frecuencia de las categorías de respuesta de la variable de respuesta.....	111
Tabla 3.8 Elección del modelo logístico de TRI.....	114
Tabla 3.9 Número de parámetros a estimar.....	115
Tabla 3.10 Parámetros estimados de los ítems.....	118
Tabla 3.11 Frecuencia de los niveles de discriminación de los ítems.....	119
Tabla 3.12 Frecuencia de los niveles de dificultad de los ítems.....	120
Tabla 3.13 Intervalos de confianza de los parámetros estimados.....	123
Tabla 3.14 Aptitudes estimadas de los individuos.....	125
Tabla 3.15 Frecuencia de los niveles de aptitud de los individuos.....	126
Tabla 3.16 Intervalos de confianza de las aptitudes estimadas.....	129
Tabla 3.17 Probabilidades de los individuos a los ítems.....	131
Tabla 3.18 Ajuste del modelo para cada ítem.....	141

### TABLAS CAPÍTULO 4

Tabla 4.1 Puntuaciones observadas de la UA.....	151
Tabla 4.2 Puntuaciones verdaderas de la TRI.....	153
Tabla 4.3 Análisis descriptivo de las puntuaciones observadas y verdaderas.....	154
Tabla 4.4 Condición de admisión.....	159
Tabla 4.5 Comparación de las puntuaciones observadas de la UA y verdaderas de la TRI.....	164
Tabla 4.6 Prueba de ajuste del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.....	165
Tabla 4.7 Análisis de la prueba de ajuste del Propedéutico de Ingeniería y Ciencias.....	165
Tabla 4.8 Prueba de ajuste del Propedéutico de Empresarial y Económicas.....	167
Tabla 4.9 Análisis de la prueba de ajuste del Propedéutico de Empresarial y Económicas.....	167
Tabla 4.10 Individuos igual admitidos y puntuación con calificaciones del PIC.....	171
Tabla 4.11 Correlaciones entre puntuaciones y calificaciones del PIC.....	172
Tabla 4.12 Individuos igual admitidos y puntuación con calificaciones del PEE.....	173
Tabla 4.13 Correlaciones entre puntuaciones y calificaciones del PEE.....	174
Tabla 4.14 Frecuencia de las materias que aprueban por bachillerato del PIC.....	175

Tabla 4.15 Correlaciones entre calificaciones y bachillerato del PIC. ....	175
Tabla 4.16 Frecuencia de las materias que aprueban por bachillerato del PEE.....	176
Tabla 4.17 Correlaciones entre calificaciones y bachillerato del PEE. ....	177