

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA

TESIS DE GRADO

**"PROCESAMIENTO DIGITAL
DE SEÑALES UTILIZANDO
EL PAQUETE MATLAB"**

TESIS PREVIA A LA OBTENCION DEL TITULO DE
INGENIERO EN ELECTRONICA Y CONTROL

RODOLFO DONOSO MENESES

MARZO, 1995

Dedicatoria

A mi esposa Dominic y a mi hijo Rodolfo Ignacio, por la inmensa felicidad de estar a su lado. A mis padres que me apoyaron en todo momento.

Agradecimiento

Mi especial agradecimiento al
Ing. Patricio Burbano R. por su
ayuda y acertada dirección en
la presente tesis.

Certifico que el presente trabajo
ha sido desarrollado en su totali-
dad por el Sr. Rodolfo Donoso M.

A handwritten signature in black ink, appearing to read "Burbano R.", with a stylized flourish at the end.

Ing. Patricio Burbano R.
Director

CONTENIDO

		Pág.
1.	INTRODUCCION.....	1
1.1.	Introducción.....	1
1.2.	Procesamiento digital de señales.....	4
1.3.	Modelación polinomial de señales digitales.....	8
1.3.1.	Aplicaciones del ajuste polinomial de señales.....	10
1.3.1.1.	Pérdida de datos.....	10
1.3.1.2.	Interpolación.....	11
1.3.1.3.	Extrapolación.....	15
1.3.1.4.	Diferenciación e integración.....	15
1.3.2.	Modelación polinomial de mínimos cuadrados.....	14
2.	FILTROS DIGITALES Y SUS APLICACIONES.....	17
2.1.	Filtros recursivos.....	25
2.1.1.	Técnicas de diseño de filtros recursivos.....	27
2.1.1.1.	Invariancia a los pulsos.....	27
2.1.1.2.	Transformación lineal.....	29
2.1.1.3.	Técnicas de diseño directo.....	33
2.1.1.3.1.	Minimización del error medio cuadrático (MSE).....	33
2.1.1.4.	Método de diseño de Yule-Walker.....	35
2.2.	Filtros no recursivos.....	36
2.2.1.	Técnicas de diseño de filtros no recursivos.....	37
2.2.1.1.	Técnicas de la transformada de Fourier: aplicación de ventanas.....	37
2.2.1.2.	Diseño de muestreo en frecuencia.....	42
2.2.1.3.	Diseño óptimo de filtros.....	43
2.2.2.	Retardo ideal.....	45
2.3.	Filtros más utilizados.....	48
2.3.1.	Filtros diseñados por la transformada bilineal.....	48
2.3.1.1.	Filtro de Butterworth.....	49
2.3.1.2.	Filtro de Chebyshev.....	54
2.3.1.3.	Filtro elíptico.....	57
2.3.2.	Filtro diseñado por el método de Yule-Walker.....	58
2.3.3.	Filtro diseñado por invariancia a los pulsos.....	59
2.3.4.	Filtro realizado mediante técnica de diseño directo.....	59
2.3.5.	Filtros diseñados por aplicación de ventanas.....	60

2.3.5.1.	Ventana rectangular.....	60
2.3.5.2.	Ventana triangular (Fejér-Bartlett).....	62
2.3.5.3.	Ventana de Hanning.....	62
2.3.5.4.	Ventana de Hamming.....	64
2.3.5.5.	Ventana de Kaiser.....	66
2.3.5.6.	Ventana de Bartlett.....	69
2.3.5.7.	Ventana de Blackman.....	69
2.3.5.8.	Ventana de Chebyshev.....	70
2.3.6.	Filtros diseñados por aplicación de ventanas con respuesta de frecuencia especificada.....	70
2.3.7.	Técnica de diseño óptico de filtros.....	70
2.4.	Respuesta a la función impulso.....	71
2.4.1.	Respuesta impulso de un filtro no recursivo.....	71
2.4.2.	Respuesta impulso de un filtro recursivo.....	72
2.4.3.	Respuesta impulso y la relación entrada-salida.....	73
2.5.	Aplicaciones.....	75
3.	ANÁLISIS DEL ESPECTRO DE FRECUENCIA DE SEÑALES.....	80
3.1.	Transformada discreta de Fourier.....	80
3.1.1.	La TDF y la transformada z.....	86
3.2.	Transformada rápida de Fourier.....	89
3.3.	Espectro de frecuencia.....	96
3.3.1.	Espectro de energía.....	100
3.4.	Aplicaciones.....	102
3.4.1.	La TDF y el filtrado.....	102
3.4.2.	La TDF y la convolución.....	103
3.4.3.	La TDF y la frecuencia.....	105
3.4.4.	La TDF y las ventanas.....	106
4.	RUTINAS DEL MATLAB.....	107
4.1.	Implementación de software para procesamiento digital de señales.....	107
4.1.1.	Simulación de plantas.....	109
4.1.2.	Análisis espectral.....	111
4.1.3.	Diseño de filtros digitales.....	113
4.1.3.1.	Transformada bilineal.....	113
4.1.3.2.	Método de Yule-Walker.....	117
4.1.3.3.	Método de Prony.....	117
4.1.3.4.	Método de minimización del error medio cuadrático.....	119
4.1.3.5.	Método de fase lineal.....	119
4.1.3.6.	Método de fase lineal en el dominio de la frecuencia.....	124

4.1.3.7.	Método de diseño de Parks-McClellan.....	127
4.1.4.	Métodos de filtrado de las señales.....	129
4.1.5.	Ajuste polinomial de señales digitales.....	131
4.2.	Librería de procesamiento de señales del MATLAB.....	133
4.2.1.	Diseño de filtros digitales.....	133
4.2.2.	Filtrado de señales, utilizando los filtros del numeral 4.2.1.....	135
4.2.3.	Análisis espectral.....	135
4.2.4.	Ajuste polinómico de señales digitales.....	136
4.3.	Rutinas para filtros.....	136
4.3.1.	Rutinas para diseño de filtros recursivos.....	136
4.3.1.1.	Método de la transformada bilineal.....	136
4.3.1.1.1.	Aproximación de Butterworth.....	137
4.3.1.1.2.	Aproximación de Chebyshev.....	138
4.3.1.1.3.	Aproximación Elíptica.....	141
4.3.1.2.	Método de Yule-Walker.....	142
4.3.1.3.	Método de Prony.....	142
4.3.1.4.	Método del error mínimo cuadrado.....	143
4.3.2.	Rutinas para diseño de filtros no recursivos.....	143
4.3.2.1.	Método de diseño de fase lineal con ventanas.....	143
4.3.2.2.	Método de diseño de fase lineal en frecuencia.....	145
4.3.2.3.	Algoritmo de Parks-McClellan.....	146
4.3.3.	Filtrado digital de señales contaminadas.....	146
4.3.3.1.	Filtrado mediante filtros recursivos.....	146
4.3.3.1.1.	Filtrado de fase cero.....	146
4.3.3.1.2.	Filtrado en forma directa transpuesta.....	147
4.3.3.2.	Filtrado mediante filtros no recursivos.....	147
4.3.4.	Respuesta de frecuencia de filtros digitales.....	147
4.4.	Rutinas para el análisis del espectro.....	148
4.5.	Rutinas adicionales.....	150
4.5.1	Rutinas utilizadas en la simulación de plantas.....	150
4.5.2.	Rutinas utilizadas para el ajuste polinomial.....	151
5.	RESULTADOS Y CONCLUSIONES.....	152
5.1.	Resultados.....	152
5.1.1.	Simulación de plantas.....	152
5.1.1.1.	Simulación de una planta de segundo orden.....	152
5.1.1.2.	Simulación de una planta de segundo orden con retardo.....	154
5.1.1.3.	Simulación de una planta de primer orden.....	156
5.1.2.	Análisis espectral.....	156
5.1.2.1.	Análisis espectral de la señal contaminada de la planta del numeral 5.1.1.1....	158

5.1.2.2.	Análisis espectral de la señal contaminada de la planta de segundo orden sin retardo.....	161
5.1.2.3.	Análisis espectral de la señal contaminada de la planta de primer orden sin retardo.....	161
5.1.2.4.	Espectro del ruido de distribución Gaussiana (normal).....	161
5.1.2.5.	Espectro de la señal binaria pseudo aleatoria.....	170
5.1.2.6.	Espectro de una suma de tres señales sinusoidales.....	170
5.1.2.7.	Espectro de una señal compuesta de componentes de continua y alterna.....	178
5.1.2.8.	Espectro de potencia de una señal con cuatro componentes de frecuencia.....	178
5.1.3.	Diseño de filtros.....	184
5.1.3.1.	Diseño de filtro recursivo por el método de la transformada bilineal (aproximación elíptica).....	184
5.1.3.2.	Diseño de un filtro no recursivo mediante el método de fase lineal.....	184
5.1.3.3.	Diseño de filtro recursivo mediante la transformada bilineal (aproximación de Butterworth).....	187
5.1.3.4.	Diseño de filtro pasa banda por el método de Yule-Walker.....	192
5.1.3.5.	Diseño de filtro no recursivo elimina banda por el método de Parks-McClellan...	192
5.1.3.6.	Diseño de filtro no recursivo pasa alto de fase lineal usando la ventana de Hamming.....	195
5.1.3.7.	Diseño de filtro no recursivo de fase lineal en el dominio de la frecuencia con ventana de Bartlett.....	195
5.1.4.	Filtrado de señales.....	198
5.1.4.1.	Filtrado de la señal contaminada del numeral 5.1.1.1. con filtro recursivo, método de fase cero.....	198
5.1.4.2.	Filtrado de la señal contaminada del numeral 5.1.1.1. con filtro no recursivo, método de la TRF.....	198
5.1.4.3.	Filtrado de la señal contaminada del numeral 5.1.1.2. con filtro recursivo, método de fase cero.....	198
5.1.4.4.	Filtrado de la señal contaminada de 5.1.1.3. con filtro recursivo, método de fase cero.....	202
5.1.4.5.	Filtrado de la señal con 3 componentes de frecuencia mediante un filtro pasa banda.....	202
5.1.4.6.	Filtrado de la señal con 3 componentes de frecuencia mediante un filtro elimina banda.....	202
5.1.4.7.	Filtrado de la señal compuesta de continua y alterna por un filtro pasa altos..	206
5.1.4.8.	Filtrado de una señal con 4 componentes de frecuencia mediante un filtro multibanda.....	206
5.1.5.	Ajuste polinomial.....	209
5.1.5.1.	Ajuste.....	209
5.1.5.2.	Interpolación.....	212

3.1.5.3.	Extrapolación.....	214
3.1.6.	Relación entre un filtro digital y uno análogo.....	216
3.1.7.	Variación del número de puntos de la TDF en el cálculo de un espectro.....	217
3.2.	Conclusiones.....	217
BIBLIOGRAFIA.....		225

APENDICES

Apéndice A: Manual de uso (en el anexo anillado).

Apéndice E: Listado de rutinas (en el anexo anillado).

- 1. INTRODUCCION
- 1.1. Introducción
- 1.2. Procesamiento digital de señales
- 1.3. Modelación polinomial de señales digitales
 - 1.3.1. Aplicaciones del ajuste polinomial de señales
 - 1.3.2. Modelación polinomial de mínimos cuadrados

1.1. INTRODUCCION.

Como se sabe, en la actualidad el creciente avance de la tecnología computacional permite el uso de diversos paquetes que facilitan y/o realizan análisis matemáticos que posibilitan en forma muy eficiente la tarea de simulación de sistemas como la respuesta a cierta excitación de entrada y/o perturbación que dicho sistema pueda tener. Por lo tanto, el objetivo de este trabajo de tesis, es el de realizar un estudio de los métodos de procesamiento digital de señales, para su aplicación en sistemas de control.

Para cumplir este objetivo, se utilizará la potencialidad del paquete MATLAB, poniéndose énfasis en el uso del software especializado del MATLAB en las librerías de procesamiento de señales que dispone el mencionado paquete, trabajando a nivel de simulación, resaltando los procedimientos y algoritmos a utilizarse, creados para el efecto, así como también el uso de las rutinas, subrutinas y funciones propias que provee el paquete MATLAB.

Para dicho fin, se profundizará en los métodos de procesamiento digital de señales, como son la modelación polinomial de señales digitales; los filtros digitales y sus distintas aplicaciones; y, el análisis del espectro de frecuencia y sus aplicaciones. El trabajo a realizarse, permitirá explotar la gran potencialidad del paquete MATLAB en cuanto al procesamiento digital de señales y sus aplicaciones.

Cabe mencionar que el paquete MATLAB contiene varios módulos de simulación, como son: análisis de sistemas multivariables, identificación de sistemas, diseño de sistemas de control, procesamiento digital de señales, el cual es utilizado en este trabajo, entre otros, por lo cual se utilizará apenas sólo una parte de éste paquete completo de software de alta eficiencia en cálculo numérico y análisis de datos. Posee una interface interactiva, con base algorítmica y de fácil extensibilidad.

Los problemas y soluciones son expresados como son escritos matemáticamente, sin la necesidad de utilizar programación tradicional, con la ventaja adicional de que el MATLAB posee un diseño de sistema abierto que permite ver los algoritmos e implementaciones y aún cambiar éstos para satisfacer requerimientos específicos.

Este trabajo de tesis, consta de los siguientes capítulos los cuales han sido estructurados de la siguiente manera:

- El primer capítulo realiza una ligera introducción; alcance y objetivos que se persiguen y una visión general del procesamiento digital de señales, específicamente del filtrado digital, ajuste polinomial de datos digitales; y, la técnica de procesamiento digital de señales mediante la transformada discreta de Fourier con su implementación eficiente, la transformada rápida de Fourier. En este capítulo introductorio se pone énfasis en la modelación polinomial de señales digitales.

- El siguiente capítulo trata sobre los filtros digitales y sus aplicaciones; se resume todos los filtros digitales en una de sus dos formas: recursivos y no recursivos, como una clasificación general y como una clasificación particular se estudia a los filtros más utilizados, y que están disponibles en el paquete MATLAB, como son: Butterworth, Chebyshev, Elíptico, Yule-Walker, Prony, Parks-McClellan, Kaiser, Hamming, Hanning, entre otros.

Se realiza también una revisión de los distintos métodos de diseño de los filtros digitales, según su clasificación general, y que también constan en el módulo de procesamiento digital del MATLAB, entre los que se pueden mencionar la transformada Z y la transformada bilineal para los filtros recursivos y el método de diseño de Fourier y truncado de filtros por medio de ventanas (rectangular, Bartlett, Hanning, Hamming, Kaiser, etc.) para los filtros no recursivos. El capítulo termina con un análisis de la respuesta a la función impulso de los filtros y su relación

con la recursividad o no recursividad de los mismos, y la aplicación de filtros digitales en general.

- El capítulo tres, realiza un enfoque teórico, al igual que el anterior capítulo, pero sobre el espectro de frecuencia de señales, el cual es una medida de la energía a varias frecuencias (densidad espectral de potencia), utilizando la transformada discreta de Fourier y su implementación computacional, la transformada rápida de Fourier. Finalmente se presenta algunas aplicaciones prácticas del análisis del espectro de frecuencia de señales en general.

Para este caso se estudian las rutinas propias del MATLAB relacionadas con lo anteriormente expuesto.

- El capítulo cuatro trata específicamente sobre las rutinas del MATLAB, es un capítulo donde se presenta la librería de procesamiento de señales del paquete, con explicación breve de la función de cada una de ellas y los parámetros necesarios para su correcta utilización. Adicionalmente se presentan las distintas rutinas para filtros con selección de tipo de filtro (recursivo y no recursivo) utilizando para el efecto métodos de transformada bilineal, el método de Yule-Walker, Prony, minimización de errores cuadrados, para los recursivos; y, los métodos de la transformada de Fourier y truncado por medio de ventanas, algoritmo de Parks-McClellan, para los no recursivos.

Para el análisis del espectro se utilizan la transformada discreta y rápida de Fourier; y, densidad espectral. Las rutinas adicionales se presentan al final de este capítulo y constan de todas las creadas en este trabajo con funciones del MATLAB que pueden no pertenecer al módulo de procesamiento digital de señales y que han sido necesarias para lograr objetivos ya mencionados. Este es un capítulo donde se presenta todo el software desarrollado con funciones del MATLAB.

- El quinto y último capítulo corresponde a los resultados

que se han observado en el desarrollo de este trabajo y sobre el uso del MATLAB, el alcance que se ha logrado y la versatilidad y utilidad del paquete. Finalmente se sintetiza el trabajo en las conclusiones que se han obtenido sobre las aplicaciones que se pueden dar y su aprovechamiento.

Se anexan dos apéndices; el primero es un manual de uso del software realizado con la inclusión de comandos y funciones importantes del MATLAB para su utilización y el segundo es un listado de las rutinas creadas para cumplir con los objetivos fijados a lo largo de este trabajo, es decir estudiar los métodos de procesamiento digital de señales, para su aplicación en el Laboratorio de Control.

1.2. PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES.

La tecnología computacional recientemente ha sido capaz, en forma eficiente, de implementar filtros digitales como una alternativa económica de los filtros análogos. Generalmente la principal aplicación de los filtros digitales es el uso en aquellos sistemas sofisticados que demandan las ventajas de los filtros y pueden justificar su costo. Sin embargo, como la tecnología de computadores y circuitos integrados avanza, estos filtros están encontrando una gran variedad de aplicaciones.

Los filtros digitales están siendo utilizados en muchos sistemas electrónicos de medida y hasta en algunas aplicaciones a nivel del hogar; su utilidad está incrementándose debido a las siguientes propiedades:

- Estos pueden ser implementados con software que corra en un computador de propósito general. Entonces, pueden ser relativamente fáciles de construir y probar.

- Están basados solamente en operaciones aritméticas de suma y multiplicación, por lo tanto son extremadamente estables en cuanto a que no cambian con el tiempo o la temperatura.

- Son más fáciles de modificar que sus homólogos análogos.
- Son muy sencillos para entenderlos.

Aunque esto no significa que los filtros digitales son la respuesta a todos los problemas de filtrado. Los filtros análogos continúan dominando el mundo del filtrado. Sin embargo, el filtro digital prevalecerá y proporcionará al ingeniero herramientas que eran irrealizables hace pocos años atrás.

Los filtros análogos y digitales difieren por la naturaleza de la señal de entrada y de salida. Un filtro análogo procesa entradas análogas y genera salidas análogas. Un filtro digital procesa y genera datos digitales. Estas diferencias en los datos de entrada y salida hacen la diferencia en las técnicas de procesamiento. Los filtros análogos están basados en el operador matemático de diferenciación, y el filtro digital no requiere más que adición, multiplicación y ecuaciones de diferencias.

Los datos digitales están caracterizados por una variable independiente discreta. Todos los datos pueden ser convertidos a digitales por muestreo de la variable independiente; son representados por una secuencia ordenada y cada término de la secuencia posee su propio subíndice que facilita la manipulación de ellos. Estos índices representan el rango sobre un intervalo finito o infinito de valores según sea el caso.

En rasgos generales, se puede decir que un filtro es, una caja negra con una o varias entradas y una o varias salidas, que contiene de alguna manera un procesador que generará salidas a partir de sus entradas para cumplir con cualquiera de los dos objetivos siguientes:

- Mejorar la calidad de señal de las salidas con relación a las entradas.

- Procesar o extraer información de las entradas (predictores).

Hasta ahora se ha analizado el procesamiento digital de señales exclusivamente por medio de filtros digitales, pero los filtros representan una porción de los algoritmos de procesamiento digital de señales posibles. Una vez que se tiene una señal dentro de un computador, los algoritmos están limitados solo por la capacidad computacional, es así que los algoritmos de procesamiento digital de señales, también pueden orientarse a la modelación de una señal digital mediante un polinomio.

Se podría decir que la modelación puede definirse como una réplica de una realidad mediante una descripción matemática de una entidad, un estado, o de ambos. Por lo tanto, se puede modelar señales digitales con polinomios, los cuales son más fáciles de entender y manipular que las señales digitales. El polinomio es la forma más simple de modelar una señal digital, pero no es la única, por ejemplo en señales de lenguaje son reemplazadas las señales por modelos de la pista oral que produce el lenguaje.

Un polinomio puede ser usado, cuando es ajustado exactamente a los puntos de datos digitales, para estimar datos perdidos y realizar interpolación y extrapolación de datos. También una modelación polinomial es una forma de suavizar datos digitales.

Finalmente, en el procesamiento digital de señales se debe considerar la transformada discreta de Fourier (TDF) y su implementación eficiente, la transformada rápida de Fourier (TRF). Ambas técnicas pueden ser desarrolladas, por ejemplo, de una forma computarizada para calcular la respuesta impulso de un filtro no recursivo desde su respuesta de frecuencia y viceversa.

Al aplicar la TDF a señales se puede observar también que hay aplicaciones aún más útiles que calcular respuestas de

frecuencia e impulso de filtros digitales, y éstas pueden ser por ejemplo, identificar los componentes de frecuencia de una señal contaminada con ruido en el dominio del tiempo y es donde encuentra aplicación el análisis espectral, el cual es tan útil y necesario.

Se puede decir entonces que la TDF y la TRF son técnicas digitales para ir en cualquier sentido entre los dominios del tiempo y la frecuencia.

De esta manera, se ha querido dar una visión clara de lo que representa el procesamiento digital de señales y de qué maneras se lo puede realizar, haciendo incapié en las funciones que posee el módulo de procesamiento digital del paquete MATLAB y que se relaciona en definitiva, con los siguientes temas:

- Ajuste polinomial de señales digitales.
- Diseño de filtros digitales.
- Filtrado de señales contaminadas con ruido.
- Transformadas discreta y rápida de Fourier con aplicación a filtros digitales y análisis espectral de frecuencia.

No se hace un desarrollo matemático exhaustivo de los distintos métodos tratados en el Procesamiento Digital de Señales (PDS), ni de la implementación computacional de cada método en particular, ya que no es el propósito de la tesis, sino la comprensión del PDS en base a las bondades que presenta el paquete MATLAB.

Se va a desarrollar un software mediante algunos menús que utilizan directamente la base algorítmica del paquete MATLAB, para facilitar el uso del mismo en el laboratorio a una persona que no posea un conocimiento profundo del Procesamiento Digital de Señales y del MATLAB.

1.3. MODELACION POLINOMIAL DE SEÑALES DIGITALES.

La modelación polinomial de señales digitales merece atención debido a que es una técnica de procesamiento digital muy útil, que se utiliza en algunas aplicaciones, como se verá más adelante.

El objetivo del ajuste polinomial es reemplazar una señal digital o una porción de ésta, con un polinomio que preserve muchas características de la señal. Una vez que el polinomio es hallado, se usa este "modelo" polinomial en lugar de la señal digital.

Para hallar un polinomio que se ajuste exactamente a una señal digital particular, se debe satisfacer el hecho de que el polinomio vaya a través de los puntos de datos, es decir, que el polinomio evaluado a $t=k$ ($k=0,1,2,\dots$) sea igual a los datos de la señal digital x_k . Sea el polinomio:

$$p(t) = p_0 + p_1t + p_2t^2 + \dots + p_Mt^M \quad (1.1)$$

El polinomio de la ecuación (1.1), de orden M , lleva al siguiente grupo de ecuaciones simultáneas:^[2]

$$p_0 + p_1 \cdot 0 + \dots + p_{N-1} 0^{N-1} = x_0$$

$$p_0 + p_1 \cdot 1 + \dots + p_{N-1} 1^{N-1} = x_1$$

$$p_0 + p_1(N-1) + \dots + p_{N-1}(N-1)^{N-1} = x_{N-1} \quad (1.2)$$

donde: $p(0) = x_0$; $p(1) = x_1$; $p(2) = x_2$; ... etc.

El valor de N corresponde al número de puntos de datos existentes, y el valor de M es el número de incógnitas del polinomio buscado. Si $M = N - 1$, siempre existe una solución y el orden del polinomio es uno menos que el número de

puntos a ser modelados.

La ecuación (1.2) es un grupo de N ecuaciones simultáneas con N incógnitas, p_0, p_1, \dots, p_{N-1} .

La solución es única cuando el número de incógnitas es igual al número de ecuaciones; y, por ejemplo, un polinomio de orden 10, ajusta 11 puntos de datos, por lo cual es muy útil al trabajar con gran cantidad de puntos, el truncar éstos en cadenas de datos pequeñas, antes de modelar dichos datos con un polinomio.

Si el orden del polinomio es más grande que el número de puntos de datos a ser ajustados, se dice que el polinomio tiene muchos grados de libertad y existirían muchas soluciones de ajuste de los datos. Tales circunstancias, llevan a los polinomios a ir a través de los puntos de datos con un comportamiento peculiar entre los puntos. Si el orden del polinomio es menor que $N-1$, el sistema de ecuaciones no tendría una solución, es decir no existiría un polinomio de este orden que pueda ir a través de todos los datos.

Se puede también, mediante ciertas técnicas de ajuste de polinomios a señales digitales, como se verá posteriormente, hallar polinomios de bajo orden en relación a largas secuencias de datos, en cuyo caso no son ajustes exactos, pero que poseen ciertas ventajas.

Una última generalización de la modelación polinomial, que se debe considerar antes de mirar las aplicaciones, consiste en usar polinomios con orígenes arbitrarios. Previamente se utilizó la forma polinomial (1.1), sin embargo, un polinomio puede ser originado a $t=K$, por simple substracción de K en todos los términos del polinomio (1.1). El polinomio desplazado es:

$$p_k(t) = p_0 + p_1(t-k) + p_2(t-k)^2 + \dots + p_M(t-k)^M \quad (1.3)$$

El polinomio (1.3) es a menudo más conveniente para modelar datos digitales. En resumen, se puede modelar exactamente un grupo de N puntos de datos con un polinomio de orden $(N-1)$. Los coeficientes del polinomio son encontrados por cualquier técnica para resolver un grupo de ecuaciones simultáneas. La técnica más útil es la eliminación Gaussiana, en la cual el grupo de ecuaciones es reducido sistemáticamente a pocas ecuaciones con pocas incógnitas hasta llegar a una sola ecuación con una sola incógnita. Los otros coeficientes son hallados por sustitución sucesiva de los coeficientes hallados en las ecuaciones restantes.

1.3.1. APLICACIONES DEL AJUSTE POLINOMIAL DE SEÑALES.

Como se dijo anteriormente, se considera la modelación polinomial de señales digitales, debido a su amplia aplicación en procesamiento digital de señales. Por lo tanto, a continuación se presenta la mayor área de aplicación de la modelación polinomial: estimación de datos no existentes, lo cual incluye pérdida de datos, interpolación y extrapolación.

1.3.1.1. Pérdida de datos.

Muchos experimentos demandan la adquisición de medidas a intervalos regulares. Sin embargo, debido a muchas causas, la persona que realiza las mediciones puede perder o registrar indebidamente una o más medidas. En tal caso, se tiene dos opciones que son: volver a medir los datos faltantes o erróneos, o a su vez estimarlos a partir de los datos confiables que se tienen a la mano. Muchas veces se debe recurrir a la estimación de los datos, ya que el experimento puede ser muy costoso o difícil de repetir, además que se podría volver a repetir alguna falla en la segunda medición, lo cual no se puede garantizar que no pueda volver a suceder.

Existen muchas maneras de estimar datos perdidos, sin embargo la modelación polinomial provee una aproximación

rigurosa a la estimación de datos.

Los datos perdidos son estimados por extracción de algún patrón desde los datos existentes y extender éste patrón a los puntos faltantes. Si los datos son completamente aleatorios sin un patrón discernible, la estimación de los datos perdidos, es imposible. La mayoría de datos tienen un patrón en puntos sucesivos, es decir, los datos cambian gradualmente entre puntos sucesivos. Si los datos son tomados en incrementos suficientemente pequeños, ellos parecen estar sobre una curva de variación lenta, lo cual sugiere inmediatamente un modelo polinomial como un primer paso en la estimación de datos perdidos.

Suponiendo que se tiene medidas de datos con un punto perdido en $t=k$, no se sabe qué valor tendrá x_k . Los datos obtenidos sugieren un patrón de curva suavizada para los datos. Para modelar los datos existentes con un polinomio y evaluar el polinomio a $t=k$ como un estimado del punto de dato perdido, se asume que los datos precedentes del punto perdido, x_{k-1} , x_{k-2} , ..., tienen el mismo patrón. Por lo tanto, se ajusta un polinomio a los N puntos precedentes a x_k y a los N puntos siguientes a x_k , entonces, se crea un modelo con los $2N$ puntos vecinos de x_k con un polinomio de orden $(2N - 1)$.

Generalmente se usa un número igual de puntos antes y después del elemento de dato perdido, lo cual es razonable ya que los vecinos antes y después deberían tener el mismo impacto sobre los datos perdidos. Pero algunas situaciones demandan un agrupamiento desigual de puntos para el modelo. De todas maneras la modelación polinomial es una herramienta poderosa para la estimación de datos perdidos, ya que el modelo polinomial provee un valor para cualquier t .

1.3.1.2. Interpolación.

Una de las mayores restricciones de las señales digitales es que las señales no proporcionan datos del comportamiento

entre elementos o puntos de datos; es decir, si se obtienen mediciones en un experimento cada hora, no se sabe qué es lo que sucede cada 15 minutos. Si los datos varían suavemente, se puede utilizar la modelación polinomial para interpolar los valores entre los datos disponibles.

Suponiendo que se tiene los datos en puntos $x_k = x(kT)$, donde k es un entero. El problema de la interpolación es estimar los datos en cualquier lugar entre los puntos de datos existentes, $x(kT + lT)$, donde $0 < l < 1$. Esta es una aplicación especial de la técnica de datos perdidos, por lo que se puede enfocar el problema de la misma forma, es decir, ajustar un polinomio a N puntos de datos antes y N puntos después del intervalo de interpolación y entonces evaluar el polinomio para hallar un estimado de $x(kT + lT)$.

Si se escoge $t=k$, como el origen de un polinomio de orden $(2N - 1)$, el polinomio es ajustado a $2N$ puntos de datos resolviendo las siguientes ecuaciones:[2]

$$\begin{aligned}
 p_0 + p_1(-N) + \dots + p_{2N-1}(-N)^{2N-1} &= x_{k-N+1} \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 p_0 + p_1(0) + \dots + p_{2N-1}(0)^{2N-1} &= x_k \\
 &\vdots \\
 &\vdots \\
 p_0 + p_1(N) + \dots + p_{2N-1}(N)^{2N-1} &= x_{k+N} \quad (1.4)
 \end{aligned}$$

Y los datos se interpolan, evaluando el polinomio a $t = k+l$.

$$x(kT+lT) = p_0 + p_1l + \dots + p_{2N-1}l^{2N-1} \quad (1.5)$$

La precisión de la interpolación es determinada por la precisión del ajuste del modelo polinomial a los datos disponibles, ya que si los datos están fluctuando entre los puntos de datos, el polinomio es un modelo pobre y los valores interpolados son inútiles. La interpolación requiere que se seleccione el orden del polinomio (el número de puntos de datos a modelar, menos uno) y determinar cuales

puntos son incluidos en el ajuste de la curva.

1.3.1.3. Extrapolación.

La interpolación estima datos entre mediciones. La extrapolación estima datos antes o después de los datos que se han obtenido por medio de mediciones. Este es otro caso especial de pérdida de datos, y por lo tanto, todos los conceptos desarrollados previamente pueden ser aplicados.

Suponiendo que se han tomado lecturas de datos x_0, \dots, x_{N-1} , y prematuramente se termina el experimento. Podría suceder, que luego se necesita saber los puntos de datos x_N y x_{N+1} , y si los datos varían suavemente, se puede modelar satisfactoriamente con un polinomio y usar este modelo para extender los datos. Se comienza modelando los puntos de datos existentes con un polinomio. Dependiendo de la aplicación, se modelará solamente los pocos datos finales o se generará un modelo global por cada diez o aún cien puntos de datos, seleccionando el orden del polinomio y cuales puntos de datos deberían ser modelados como parte de la extrapolación.

1.3.1.4. Diferenciación e integración.

Hay muchas situaciones en las cuales la derivada o integral de datos es requerida. Si los datos son continuos, $x(t)$, no hay problema en calcular su derivada o la integral de $x(t)$. Pero los datos digitales presentan un problema porque la diferenciación e integración no están definidas sobre datos digitales. Afortunadamente, se puede aproximar las operaciones de cálculo usando modelación polinomial de los datos digitales. Así, los datos son modelados por un polinomio, el cual produce una representación continua de los datos, debido a que el polinomio es continuo puede ser derivado o integrado según el caso. En esta aplicación se usa el polinomio como un puente entre los sistemas continuos y discretos.

1.3.2. MODELACION POLINOMIAL DE MINIMOS CUADRADOS. [2]

Una reproducción exacta es el resultado de ajustar N puntos de datos con un polinomio de orden $(N-1)$, pero hay también aplicaciones, donde es deseable ajustar un polinomio de bajo orden a los puntos de datos. En general, esto no permite una reproducción exacta, por lo cual se debe buscar un polinomio que proporcione la mejor reproducción de los datos, es decir, con un "error mínimo cuadrado".

Suponiendo que se tiene N puntos de datos y se desea encontrar un polinomio de orden M que reproduzca de la mejor manera a los datos; si M es mayor o igual a N , habrán muchos polinomios que reproducen exactamente los datos. Si $M=N-1$, hay solamente un polinomio que representa exactamente a los datos. En cualquier caso, se encuentran los coeficientes del polinomio, forzando al polinomio a reproducir estos datos. Si el orden del polinomio es más pequeño, $M < N-1$, sería imposible reproducir exactamente con las técnicas precedentes los datos con el polinomio, ya que un polinomio de bajo orden no podría ir a través de todos los puntos de datos.

Una solución a este problema, es minimizar el error entre todos los puntos de datos, lo cual es fácilmente alcanzable mediante la utilización de errores mínimos cuadrados, con lo cual se puede hallar un polinomio que sea tan aproximado a los datos como sea posible, objetivo que se alcanza realizando un monitoreo del error entre el polinomio a $t=k$ y x_k .

$$e_k = x_k - p(k) \quad (1.6)$$

El problema se localiza en encontrar los coeficientes del polinomio que hacen los N errores tan cercanos a cero como sea posible. Este es un problema complicado, y obliga a una búsqueda entre todos los coeficientes polinomiales para encontrar los mejores. En lugar de tratar con los errores individuales, se combinan los errores dentro de un error global para los N puntos. Esto sugiere inmediatamente que se

suman los N errores juntos y se trata de hacer la suma tan cercana a cero como fuera posible, pero la realización presente, posee una traba: existen errores negativos muy grandes que pueden cancelar igualmente errores positivos muy grandes también, por lo cual podría darse suma de errores cercana a cero, existiendo errores individuales considerables. Para prevenir la cancelación de errores, se elevan al cuadrado los errores individuales antes de sumarlos, lo cual fuerza a todos los errores distintos de cero a incrementar la suma. El error cuadrado de la suma polinomial es definido de la siguiente manera:

$$\epsilon = \sum_{k=0}^{N-1} e_k^2 = \sum_{k=0}^{N-1} [x_k - p(k)]^2 \quad (1.7)$$

donde ϵ es positivo. El problema se reduce a hallar los coeficientes del polinomio p_0, \dots, p_M , que minimizan el error cuadrado. En otras palabras, se busca el polinomio que produce el error mínimo cuadrado. De esta manera, el problema de ajuste se convierte en un problema de minimización.

El coeficiente p_0 que resulta del error mínimo cuadrado, es encontrado por diferenciación de ϵ con respecto a p_0 e igualando la derivada a cero.

$$\frac{d}{dp_0} \epsilon = \sum_{k=0}^{N-1} 2(x_k - p(k)) \frac{d}{dp_0} [x_k - p(k)] = 0 \quad (1.8)$$

Los puntos de datos son independientes de p_0 , por lo que la derivada de x_k con respecto a p_0 es cero. Más adelante, los otros coeficientes del polinomio son independientes de p_0 , por consiguiente la ecuación (1.8) se convierte en una ecuación algebraica:

$$\sum_{k=0}^{N-1} 2[x_k - p(k)](-1) = 0 \quad (1.9)$$

es decir:

$$\sum_{k=0}^{N-1} p(k) = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (1.10)$$

Este resultado se hace más comprensible, escribiendo el polinomio extendido, y tomando en cuenta que los coeficientes polinomiales son independientes de k , por lo que la ecuación (1.10) es realmente una ecuación en coeficientes:

$$p_0 \sum_{k=0}^{N-1} 1 + p_1 \sum_{k=0}^{N-1} k + p_2 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 + \dots + p_M \sum_{k=0}^{N-1} k^M = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \quad (1.11)$$

Como se quiere encontrar un grupo de coeficientes polinomiales que minimicen la suma de error cuadrado, se procede a diferenciar el error con respecto a cada coeficiente e igualar los resultados a cero. Esto produce un grupo de $M+1$ ecuaciones (una por cada coeficiente) con $M+1$ incógnitas (p_0, \dots, p_M): [2]

$$p_0 \sum_{k=0}^{N-1} 1 + p_1 \sum_{k=0}^{N-1} k + \dots + p_M \sum_{k=0}^{N-1} k^M = \sum_{k=0}^{N-1} x_k$$

$$p_0 \sum_{k=0}^{N-1} k + p_1 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 + \dots + p_M \sum_{k=0}^{N-1} k^{M+1} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot k$$

$$p_0 \sum_{k=0}^{N-1} k^2 + p_1 \sum_{k=0}^{N-1} k^3 + \dots + p_M \sum_{k=0}^{N-1} k^{M+2} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot k^2$$

-
-

$$p_0 \sum_{k=0}^{N-1} k^M + p_1 \sum_{k=0}^{N-1} k^{M+1} + \dots + p_M \sum_{k=0}^{N-1} k^{2M} = \sum_{k=0}^{N-1} x_k \cdot k^M \quad (1.12)$$

Entonces, el ajuste de mínimos cuadrados no es más que desarrollar los sumatorios en las ecuaciones simultáneas (1.12) y resolver el sistema de ecuaciones para hallar los

coeficientes polinomiales.

De esta manera, se ha realizado una introducción a la modelación polinomial de señales digitales, parte muy importante del procesamiento digital de señales, razón por la cual se realiza dicha introducción. Además dentro del paquete MATLAB se utilizan dos funciones de ajuste polinomial, en las rutinas utilizadas en el módulo de procesamiento de señales.

- 2. FILTROS DIGITALES Y SUS APLICACIONES
- 2.1. Filtros recursivos
- 2.1.1. Técnicas de diseño de filtros recursivos
- 2.2. Filtros no recursivos
- 2.2.1. Técnicas de diseño de filtros no recursivos
- 2.2.2. Retardo ideal
- 2.3. Filtros más utilizados
- 2.3.1. Filtros diseñados por la transformada bilineal
- 2.3.2. Filtro diseñado por el método de Yule-Walker
- 2.3.3. Filtro diseñado por invariancia a los pulsos
- 2.3.4. Filtro realizado mediante técnica de diseño directo
- 2.3.5. Filtros diseñados por aplicación de ventanas
- 2.3.6. Filtros diseñados por aplicación de ventanas con respuesta de frecuencia especificada
- 2.3.7. Técnica de diseño óptimo de filtros
- 2.4. Respuesta a la función impulso
- 2.4.1. Respuesta impulso de un filtro no recursivo
- 2.4.2. Respuesta impulso de un filtro recursivos
- 2.4.3. Repuesta impulso y la relación entrada-salida
- 2.5. Aplicaciones

2. FILTROS DIGITALES Y SUS APLICACIONES.

Un filtro digital es un sistema para filtrar señales muestreadas cuyas muestras se representan en forma numérica. La operación de filtrado se realiza por medio de cálculos directos con las señales muestreadas, cálculos que provienen de ecuaciones que describen o caracterizan la operación del filtro (es decir, el filtro realiza las operaciones aritméticas reales especificadas por las ecuaciones).

Los filtros digitales presentan varias ventajas sobre sus contrapartes analógicos:

- Intervalo dinámico:

El límite superior es fijado por el tamaño del número que el hardware digital puede representar, y el límite inferior es fijado por el ruido de cuantización y errores de redondeo. El intervalo entre estos límites depende únicamente de las longitudes de palabras utilizadas o sea del número de bits usados en la representación binaria de la señal. Si las longitudes de palabra se pueden hacer lo suficientemente grandes, en principio el intervalo dinámico no tiene límite.

Los límites son impuestos en la práctica, adaptándose de manera conveniente a los requisitos de velocidad, rendimiento y costo.

- Ausencia de problemas de componentes.

Los parámetros de los filtros se representan por medio de números binarios y no derivan con el tiempo. Al aumentar la longitud de la palabra se hace posible la obtención de cualquier grado de exactitud deseado. Dentro de los límites de esa exactitud, el filtro funciona tal y como se diseñó. No hay problemas de tolerancias o deriva de componentes, y ninguno asociado con un comportamiento no ideal de resistencias, capacitores, inductores o amplificadores. Tampoco existen problemas de impedancia de entrada o salida

ni efectos de carga entre etapas.

- Conmutabilidad.

Si los parámetros del filtro se conservan en registros (no conectados físicamente), el contenido de estos registros se puede cambiar a voluntad y en forma instantánea. Por tanto, los filtros se pueden hacer perfectamente conmutables. Un solo filtro conmutable también se puede multicanalizar en el tiempo para procesar entradas múltiples.

- Adaptabilidad.

Un filtro digital puede implementarse en hardware o bien como un programa de computadora. Los filtros digitales de hardware también se adaptan sin dificultad para el control por computadora de sus parámetros.

A continuación, para una mejor comprensión de los filtros digitales, se presentan algunas propiedades de los mismos:

a) Superposición:

Un filtro exhibe la propiedad de superposición si y solamente si la entrada de $x+u$ genera una salida de $y+v$, donde y es la salida generada por x , sola, y v es la salida generada por u . Esto debe mantenerse para toda entrada x y toda entrada u .

b) Homogeneidad:

Un filtro exhibe la propiedad de homogeneidad si y solamente si la entrada de $a \cdot x_k$ genera una salida $a \cdot y_k$, donde y_k es la salida generada por x_k . Esto debe cumplirse para todo x_k y todas las constantes a .

c) Invariancia al desplazamiento:

Un filtro presenta la propiedad de la invariancia al

desplazamiento si y solamente si la entrada x_{k+1} genera la salida de y_{k+1} , donde y_k es la salida generada por x_k . Esto debe cumplirse para todas las entradas y enteros l .

De las anteriores propiedades, se define a un filtro lineal invariante en el tiempo como aquel filtro que presenta las propiedades de superposición, homogeneidad e invariancia de desplazamiento.

Los filtros digitales son miembros de una clase de sistemas conocidos como sistemas de datos muestreados. Un sistema recibe una o más señales de entrada y produce una o más salidas. La complejidad de los sistemas reales se aborda buscando sistemas simples cuyo comportamiento se asemeje al del sistema en consideración, para lo cual se hacen dos simplificaciones principales de interés, que son la suposición de linealidad y el uso del muestreo.

Otras dos simplificaciones comunes con los sistemas lineales son la invariancia en el tiempo y la causalidad. Todas estas suposiciones normalmente son aplicables a los filtros digitales, con las siguientes excepciones:

- Los sistemas no causales pueden modelarse en computadora hasta cierto límite.

- El hecho de que los parámetros de los filtros digitales se puedan conmutar arbitrariamente a voluntad significa que los filtros pueden variar en el tiempo si así se desea. La conmutación suele implicar la selección de valores de parámetros de un repertorio limitado; en este caso, cada conjunto de parámetros se puede analizar por separado como un sistema invariante en el tiempo, aunque el comportamiento transitorio después de la conmutación de parámetros suele requerir estudio especial.

- Las limitaciones en precisión e intervalo dinámico inherentes a la representación digital de números puede restringir la posibilidad de aplicar la suposición de

linealidad.

Un sistema de datos muestreados puede visualizarse como un sistema de tiempo continuo que se observa sólo en tiempos discretos t_i ; y, por tanto, se debe tratar como un sistema de tiempo discreto. Los tiempos t_i suelen ser equiespaciados, donde $t_i = i.T$, siendo T el intervalo entre muestras. La frecuencia de muestreo f_s , es igual a $1/T$.

La elección de la frecuencia de muestreo es un problema fundamental en el diseño de sistemas de datos muestreados. Conviene muestrear los datos a la menor frecuencia posible; sin embargo, si la frecuencia es demasiado baja, puede ser imposible reconstruir la función continua correspondiente a partir de las muestras.

El teorema de muestreo establece que cualquier señal de tiempo continuo se puede caracterizar por completo y reconstruir satisfactoriamente a partir de muestras equiespaciadas siempre que se cumpla que f_s sea mayor o a lo más igual a $2*f_m$, donde f_m es la componente de frecuencia más alta presente en la señal original. Esta frecuencia mínima se conoce comúnmente como frecuencia de Nyquist.

Si una función continua se muestrea a una frecuencia menor a la de Nyquist, está "submuestreada", lo cual implica que cualquier componente con frecuencia $f > f_s/2$ parecerá estar a una frecuencia más baja $f' = f_s - f$, fenómeno que se conoce como "aliasing".

En la figura 2.1 se puede observar el efecto del teorema de muestreo sobre una señal continua cualquiera, a la cual se toman muestras para $f_s > 2*f_m$, para $f_s = 2*f_m$, y para $f_s = f_m$; dando como resultado respectivamente, una señal muestreada que puede reconstruir la función inicial con toda su información; una señal en el límite de muestreo para poder reconstruir la señal original; y, finalmente una señal muestreada en la que se pierde la información de la señal original.

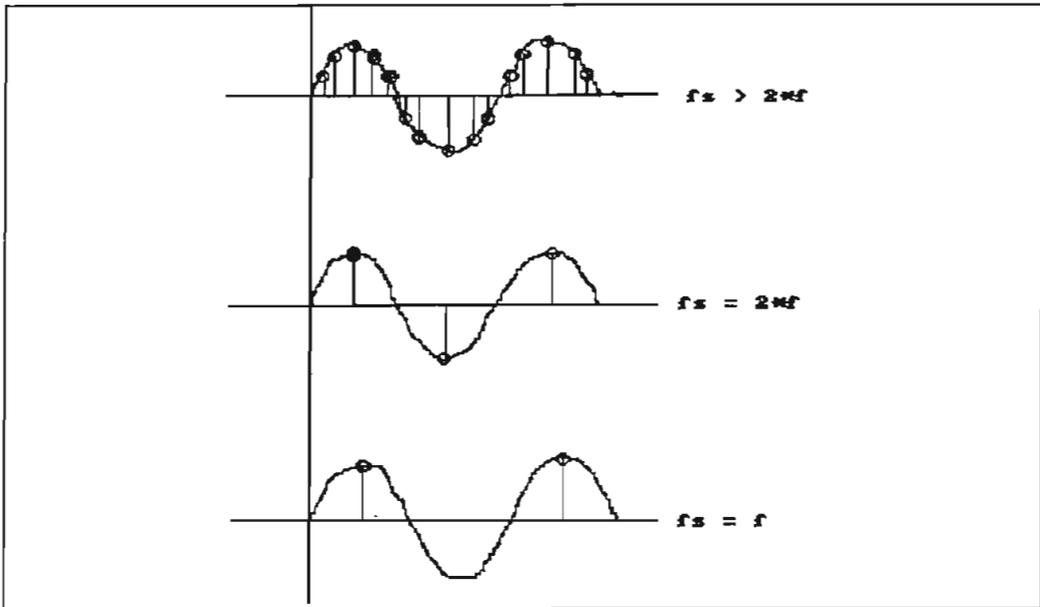


Fig. 2.1 Reconstrucción de señales.

Los sistemas de datos muestreados pueden caracterizarse en el dominio del tiempo por medio de una ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes:

$$y(k) + a_1*y(k-1) + a_2*y(k-2) + \dots + a_p*y(k-p) = b_0*x(k) + \dots + b_q*x(k-q) \quad (2.1)$$

Si sólo se tiene acceso a la entrada y la salida del sistema, éste puede caracterizarse por su respuesta a una entrada estándar. La función de "pulso unitario" $\delta(k)$ es igual a 1 cuando $k=0$ e igual a 0 en otro caso. Por lo tanto, la "respuesta de pulso" $h(k)$ es la respuesta del sistema a una entrada $\delta(k)$. Si $x(k)$ es cualquier otra señal de entrada, entonces la respuesta a $x(k)$ se obtiene con la ayuda de $h(k)$:

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot h(k-n) = x(k) * h(k) \quad (2.2)$$

La operación $x(k)*h(k)$ se conoce como la convolución de $x(k)$ y $h(k)$. El resultado es que si se conoce la respuesta de

pulso de un sistema lineal, es posible determinar su respuesta a cualquier otra entrada. Así, el comportamiento de entrada/salida del sistema se caracteriza por completo por su respuesta de pulso.

Para el análisis en el dominio de la frecuencia de sistemas de datos muestreados, conviene utilizar la representación de la transformada Z. Empleando las propiedades de desplazamiento y linealidad de la transformada Z, la ecuación lineal en diferencias con coeficientes constantes puede expresarse de la siguiente manera:

$$Y(z) * \sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i} = X(z) * \sum_{j=0}^q b_j \cdot z^{-j} \quad (2.3)$$

Si la función de transferencia del sistema se define como:

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} \quad (2.4)$$

entonces $H(z)$ es un cociente de polinomios en Z:

$$H(z) = \frac{N(z)}{D(z)} \quad (2.5)$$

donde:

$$N(z) = \sum_{j=0}^q b_j \cdot z^{-j} \quad D(z) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{-i} \quad (2.6)$$

$N(z)$ tiene q raíces, para cada una de las cuales $H(z) = 0$; estas raíces se llaman los ceros de H . De modo similar, $D(z)$ tiene p raíces para las cuales $H(z) = \text{infinito}$; éstas se denominan los polos de H . Dado que un polinomio está definido por sus raíces, H se caracteriza por sus polos y ceros.

Si se expresa a la ecuación (2.4) como:

$$Y(z) = X(z) \cdot H(z) \quad (2.7)$$

se obtiene la ecuación (2.2) debido a la propiedad de convolución de la transformada z. Se tiene a $h(k)$ como la respuesta de pulso del sistema, por lo tanto, $H(z)$ es la transformada z de la respuesta de pulso.

El objetivo del diseño de filtros suele ser visualizar alguna respuesta de frecuencia especificada. La respuesta de frecuencia de un sistema puede encontrarse evaluando $H(z)$ en el círculo unitario:

$$H(e^{j\omega}) = H(z) \Big|_{z=e^{j\omega}} \quad (2.8)$$

donde:

$$\omega = 2\pi f / f_s \quad (2.9)$$

Las distancias angulares alrededor del círculo unitario se mapean linealmente en la frecuencia, desde el punto $(1 + j0)$ hasta el punto $(-1 + j0)$ que corresponde a $f_s/2$. Como resultado de esta definición, la respuesta de frecuencia es periódica, con periodo 2π , que corresponde a una periodicidad en f de f_s .

La ecuación (2.8) se puede expresar como:

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h(k) \cdot e^{-j\omega k} \quad (2.10)$$

y es posible considerar $h(k)$ como el desarrollo en serie de Fourier de la función periódica $H(e^{j\omega})$, así:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) \cdot e^{j\omega k} d\omega \quad (2.11)$$

La ecuación 2.11 se podría utilizar como posible punto de partida para el diseño de un filtro digital.

Existen muchas aplicaciones del procesamiento de señales en las cuales las relaciones de fases son importantes y no deben ser perturbadas por el filtrado. Para ello sería ideal.

un filtro con desfaseamiento cero; en la práctica se debe buscar un filtro cuyo desfaseamiento sea proporcional a la frecuencia. Este filtro se denomina de fase lineal. Si la fase de la respuesta de frecuencia es proporcional a la frecuencia, entonces debe ser posible factorizar $H(e^{j\omega})$ en una función real pura $R(\omega)$ y un factor de fase lineal $e^{j\omega\tau}$.

$$H(e^{j\omega}) = R(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} \quad (2.12)$$

Por la teoría de la transformada de Fourier, si la respuesta de frecuencia de un filtro es $R(\omega)$, entonces su respuesta de pulso $r(k)$ será una función par del tiempo, siendo el filtro no causal, sin embargo, si $r(k)$ tiene duración finita, el filtro se puede hacer causal desplazando $r(k)$ a la derecha, como se observa en la figura 2.2.

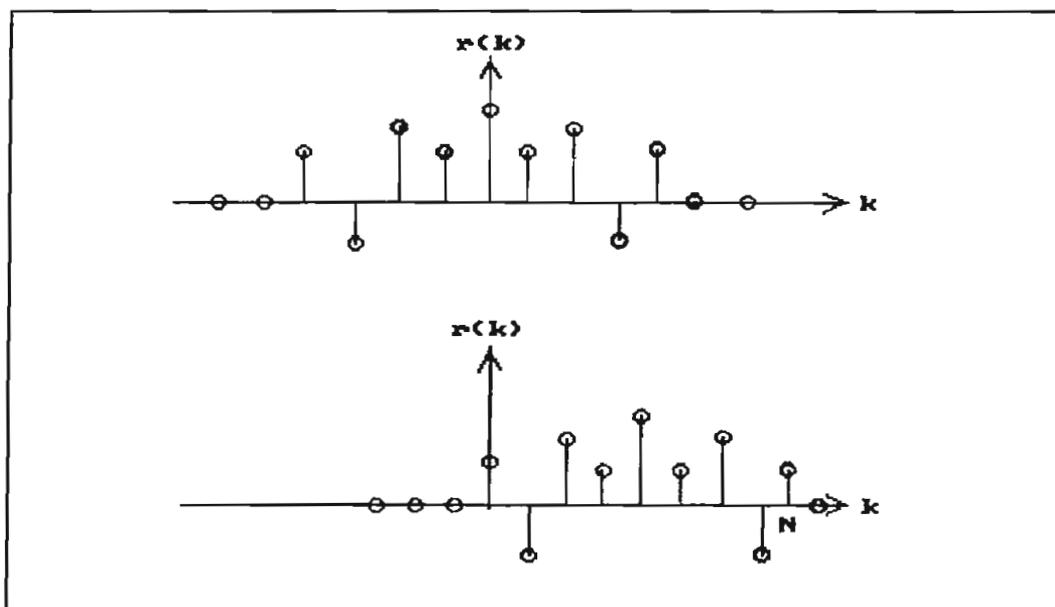


Fig. 2.2 Respuesta pulso original y desplazada.

Pero el factor de fase lineal corresponde a un desplazamiento de $r(k)$ en el tiempo, por tanto, el filtro de fase lineal se puede considerar como el filtro de fase cero ideal desplazado para hacerlo causal. $h(k)$, (el $r(k)$ desplazado), ya no es una función par, pero sigue siendo simétrica en el siguiente sentido: si la respuesta de pulso tiene longitud de N muestras y k toma valores desde cero hasta $N-1$, entonces: (1)

$$h(k) = h(N - 1 - k) \quad (2.13)$$

Esta simetría es la condición necesaria y suficiente para la linealidad de fase.

Una distinción fundamental en los sistemas de datos muestreados; y, particularmente en los filtros digitales, es la duración de la respuesta de pulso. Se habla de sistemas de respuesta de pulso finita (FIR), y de sistemas de respuesta de pulso infinita (IIR), los cuales se revisarán posteriormente en el numeral 2.4.

2.1. FILTROS RECURSIVOS.

En los filtros recursivos, la salida del filtro no es solamente una función de las entradas, sino que también depende de las salidas pasadas, por lo tanto a un filtro digital recursivo se puede definir de la siguiente manera:

$$y_k = \sum_{i=-m}^m c_i \cdot x_{k-i} + \sum_{j=1}^n d_j \cdot y_{k-j} \quad (2.14)$$

El primer sumatorio, como se podrá ver más adelante, es la representación de un filtro no recursivo, y el segundo sumatorio es denominado la porción recursiva del filtro. Este segundo sumatorio muestra como la salida está relacionada con salidas anteriores. Los coeficientes recursivos son denotados d_j y son usados para dimensionar las salidas pasadas, y_{k-j} .

La operación de un filtro recursivo es complicada por el hecho de que la salida a un tiempo k depende de las salidas previas como también de las entradas. Entonces, estos filtros deben ser operados secuencialmente, es decir, la salida para un índice k debe ser calculada antes de la salida para el índice $k+1$.

El filtro debe tener salidas iniciales asumidas antes de comenzar a calcular salidas subsiguientes, caso contrario no se puede saber donde comenzar el cálculo. Estas salidas iniciales son llamadas condiciones iniciales. Generalmente, el filtro es asumido en "reposo" antes de que la entrada comience a afectar la salida; se puede decir entonces, que las entradas y las salidas son consideradas nulas para índices muy negativos. Si se asume que el filtro está en reposo, se puede calcular las salidas cuando la primera entrada distinta de cero entra a la parte no recursiva del filtro. Luego de esto, se puede calcular las salidas secuencialmente, debido a que ellas serán usadas en salidas sucesivas del filtro.

La respuesta de frecuencia se expresa en magnitud y fase:

$$H(\omega) = |H(\omega)| e^{j\phi(\omega)} \quad (2.15)$$

Los filtros recursivos poseen una respuesta de frecuencia complicada debido a que ésta es representada como una razón. Por lo tanto, no se puede aplicar directamente las definiciones de magnitud y fase a una razón de funciones complejas, para ello se procede a convertir al numerador y al denominador individualmente en representación de magnitud y fase. La respuesta de frecuencia es entonces la razón de las magnitudes, con una fase resultante de la diferencia de las fases parciales.

Si $N(\omega)$ es la magnitud del numerador con una fase de $e^{j\alpha(\omega)}$ y similarmente la magnitud del denominador es $D(\omega)$ con fase $e^{j\beta(\omega)}$, la respuesta de frecuencia será:

$$H(\omega) = \frac{N(\omega) e^{j\alpha(\omega)}}{D(\omega) e^{j\beta(\omega)}} \quad (2.16)$$

donde:

$$|H(\omega)| = \frac{N(\omega)}{D(\omega)} \quad (2.17)$$

$$\phi(w) = \alpha(w) - \delta(w) \quad (2.18)$$

2.1.1. TECNICAS DE DISEÑO DE FILTROS RECURSIVOS.

Los diseños de filtros digitales generalmente se agrupan en dos categorías. Existen los que se hacen a mano, con sólo la ayuda de una calculadora, y los que requieren una computadora. La primera categoría es más simple; las ecuaciones de diseño son breves y directas, por ejemplo una caja registradora es probablemente el mejor caso de un filtro, satisfaciendo todas sus propiedades, es decir, acepta entradas (el precio de cada producto) y produce una salida (el costo total más el I.V.A); este procedimiento de la caja registradora se puede representar por medio de la siguiente ecuación de diferencias, en la cual se toma en cuenta un 10% de I.V.A:[2]

$$y_k = y_{k-1} + 1.1x_k$$

Los diseños auxiliados por computadora son difíciles de describir de manera concisa y, en términos generales, para ello es necesario hacer referencia a los programas que se utilizan.

Existen dos métodos generales para diseñar filtros digitales recursivos. El primero consiste en comenzar con un filtro analógico conocido que cumpla los requisitos de diseño y determinar un filtro digital correspondiente. El segundo consiste en aproximarse al funcionamiento del filtro deseado directamente en el dominio digital o, de manera equivalente, en el dominio de la transformada Z. Estos métodos de aproximación requieren la solución de conjuntos de ecuaciones no lineales y son los que mejor se adaptan para el diseño auxiliado por computadora. Se comienza analizando los métodos con los que se da inicio a un diseño analógico equivalente.

2.1.1.1. Invariancia a los pulsos.

Como un sistema lineal está especificado completamente por su respuesta de pulso, una forma de diseño consiste en deducir un filtro digital cuya respuesta de pulso sea una versión muestreada de la respuesta de pulso de un filtro analógico dado, es decir si $g(t)$ es la respuesta de pulso analógica y $h(n)$ es la respuesta de pulso digital, entonces:

$$h(n) = g(nT) \quad (2.19)$$

donde T es el intervalo de muestreo. Sin embargo, como en una operación de muestreo cualquiera, se debe considerar en forma muy cuidadosa la relación entre frecuencia de muestreo y ancho de banda. La operación de muestreo de $g(t)$ se puede considerar como una multiplicación por un tren de pulsos con espaciamiento $T = 1/f_s$. No obstante, en base a la teoría de la transformada de Fourier, esta operación convolucionna la respuesta de frecuencia $G(f)$ con otro tren de pulsos con frecuencia de muestreo $f_s = 1/T$. A menos que $G(f)$ sea limitado en banda en forma adecuada, estas reproducciones producirán "aliasing" (la respuesta de pulso se submuestra), como se puede ver en la figura 2.3. Por tanto, la utilidad de este método de diseño se limita a filtros cuya respuesta de frecuencia tenga un descenso brusco hasta quedar muy por debajo de $f_s/2$. Su principal atractivo es su sencillez de cálculo.

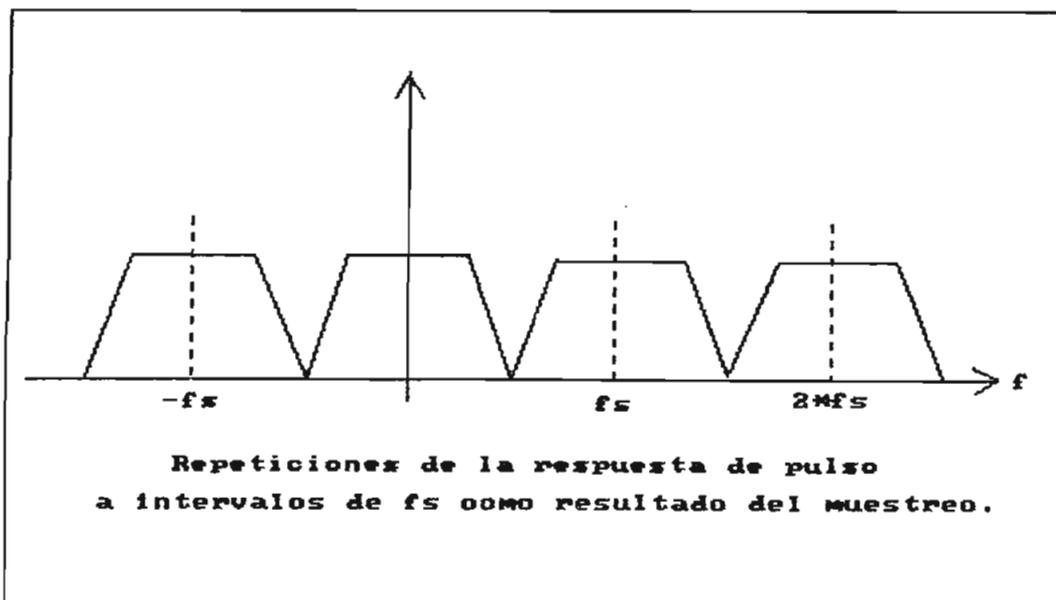


Fig. 2.3 Posibilidad de superposición.

2.1.1.2. Transformación lineal.

En el dominio de la transformada z , el círculo unitario corresponde al eje $j\omega$ en el dominio de la transformada de Laplace. La deducción de un filtro digital a partir de un filtro analógico equivalente puede equipararse a la búsqueda de un mapeo de un dominio al otro que "enrolle" al eje $j\omega$ en torno al círculo unitario. De hecho, la invariancia a los pulsos hace esto, con la excepción de que en un solo tramo del eje $j\omega$, de $-\pi.fs$ a $\pi.fs$, da una vuelta completa en torno al círculo unitario. En la interpretación de invariancia a los pulsos, el problema del "aliasing" se presenta debido a que todos los tramos adicionales del eje $j\omega$, de $(2n - 1).\pi.fs$ a $(2n + 1).\pi.fs$, cuando $n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots$, también vuelven al círculo unitario. Lo que se necesita es una función que mapeará todo el eje $j\omega$ en el círculo unitario sólo una vez. La función que hace esto es la transformación bilineal:

$$s = 2.fs \cdot \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (2.20)$$

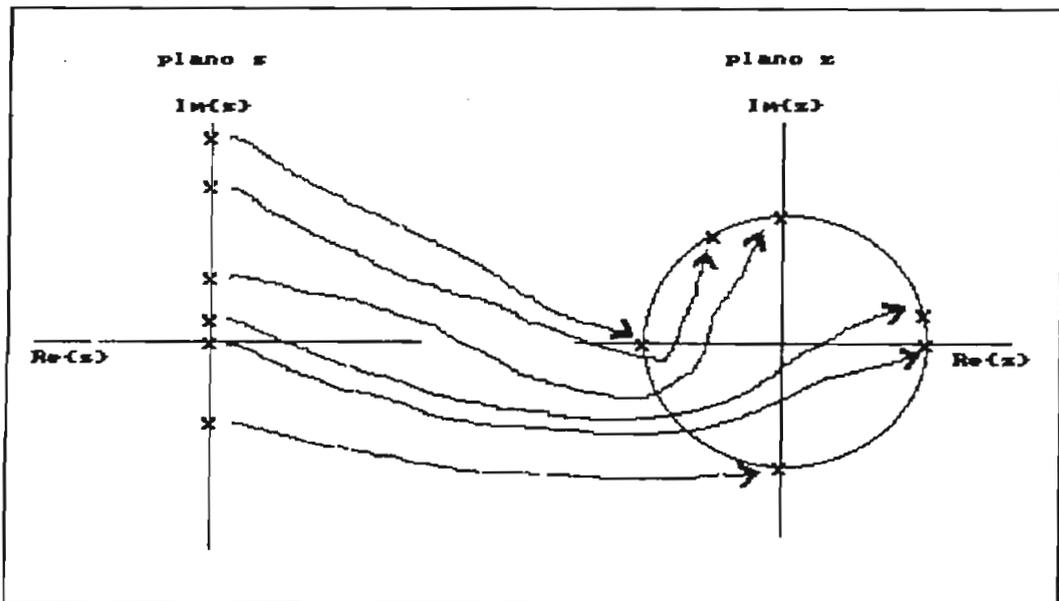


Fig. 2.4 Proyección del eje $j\omega$ en el círculo unitario.

Si esta función sustituye a s en $G(s)$, el resultado es una

función que, cuando se evalúa en torno al círculo unitario, asume los valores que toma $G(s)$ cuando se evalúa sobre el eje jw .

Si se tiene un filtro análogo con una función de transferencia $H_a(s)$ y una respuesta de frecuencia de $H_a(jw)$, éste filtro será aproximado por un filtro digital con una transformada z de $H_z(z)$, utilizando una transformación bilineal $s = (1-z^{-1})/(1+z^{-1})$, como se puede observar en la ecuación (2.21).

$$H_z(z) = H_a \left(\frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \right) \quad (2.21)$$

El filtro digital tiene una respuesta de frecuencia $H(jw)$, la cual es la transformada z , con z reemplazada por e^{jwT} .

$$H(jw) = H_z(z) \Big|_{z=e^{jwT}} = H_a \left(\frac{1 - e^{-jwT}}{1 + e^{jwT}} \right) \quad (2.22)$$

La razón de los exponenciales en la ecuación (2.22) es solo otra manera de expresar la tangente de $wT/2$. Por lo que las respuestas de frecuencia análoga y digital estarán relacionadas a través de la ecuación (2.23):

$$H(jw) = H_a \left(j \tan \frac{wT}{2} \right) \quad (2.23)$$

Si se utiliza muestreos muy consecutivos, el filtro discreto se aproxima al filtro continuo. En la ecuación (2.23), la tangente se aproxima al arco, entonces:

$$H(jw) = H_a \left(j \frac{wT}{2} \right)$$

Se vé en la anterior ecuación que es necesario realizar un ajuste por un factor $(2/T)$, para que la respuesta de

frecuencia del filtro discreto tienda a la respuesta de frecuencia del filtro continuo a T muy pequeño:

$$H(j\omega) = H_a\left(\frac{2}{T} j \frac{\omega T}{2}\right) = H(j\omega)$$

entonces se redefine la transformación bilineal como la planteada en la ecuación (2.20).

Por lo tanto, se observa que la respuesta de frecuencia del filtro digital a ω , es la respuesta del filtro análogo a $(2/T) \tan(\omega T/2)$.

La transformación de la ecuación (2.20) mapea un intervalo infinito de frecuencias en el círculo unitario finito. Este mapeo distorsiona la escala de frecuencia. Llámese ω_d a la frecuencia en radianes del dominio de la transformada Z (filtro digital) y ω_a a la frecuencia en radianes correspondiente del dominio analógico. En el dominio de la transformada Z , la distancia angular es $\omega_d T$ radianes en torno al círculo unitario, donde T es el período de muestreo. Evaluando la ecuación (2.20) sobre el círculo unitario, y como $z = e^{j \cdot \omega_d \cdot T}$; se tiene:

$$\omega_a = \frac{2}{T} \tan\left(\frac{\omega_d T}{2}\right) \quad (2.24)$$

La consecuencia práctica de esto es que, cuando se deduce un filtro digital a partir de un diseño analógico empleando la transformación bilineal, hay que corregir las frecuencias de interés en el dominio analógico de manera que, después de que se hayan transformado, las amplitudes de la respuesta de frecuencia continua y discreta sean del mismo valor para dichas frecuencias.

El siguiente ejemplo puede aclarar la idea de la corrección, al diseñar un filtro pasabanda de 0.2π a 0.5π con una

frecuencia de muestreo de 1 muestra cada 10 segundos ($T=10$), usando la transformada bilineal:

$$w_{a1} = (2/10) \tan (0.2\pi/2) = 0.0207\pi$$

$$w_{a2} = (2/10) \tan (0.5\pi/2) = 0.0637\pi$$

Entonces, se ha diseñado un filtro con una banda de paso desde 0.0207π a 0.0637π , y aplicando este filtro a la transformada bilineal con $T=10$, se tiene:

$$z = (2 + s10) / (2 - s10)$$

expresión con la cual se puede realizar el mapeo del filtro.

La mayoría de las aproximaciones digitales son realizadas mediante la transformada bilineal, la cual no causará el fenómeno de "aliasing". La corrección de puntos de frecuencia críticos disminuirá muchos de los efectos de la deformación de la frecuencia. A causa de esta deformación, la transformación bilineal no debería ser usada en aplicaciones donde las pendientes de alta frecuencia del filtro análogo deben ser preservadas, ya que justamente en las altas frecuencias es donde se tiene no linealidad entre w_a y w_d .

El procedimiento para diseñar un filtro recursivo empleando la transformación bilineal es como sigue:^[1]

- Se corrige todas las frecuencias críticas empleando la ecuación (2.24).

- Se diseña (o se busca en una tabla) la función de transferencia del filtro analógico $G(s)$, empleando las frecuencias predistorsionadas, ejemplo: un filtro Butterworth pasabajos de dos polos con $w_a=6498,4$ rad/s (1034,25 Hz) tiene la función de transferencia: (tablas)^[1]

$$G(s) = 4,223 \times 10^7 / (s^2 + 9,19 \times 10^3 s + 4,223 \times 10^7)$$

- Se encuentra la función de transferencia del filtro digital correspondiente $H(z)$ sustituyendo la ecuación (2.20) en $G(s)$.
- Se deduce el filtro digital apropiado, ya sea por factorización o por desarrollo en fracciones parciales de $H(z)$.

2.1.1.3. Técnicas de diseño directo.

Una técnica de diseño directo (utilizada en el MATLAB) para los filtros recursivos se expone a continuación, a partir de una respuesta de frecuencia especificada. Estos procedimientos de diseño son muy laboriosos desde el punto de vista de cálculo y por lo general, no son prácticos sin la ayuda de una computadora.

2.1.1.3.1. Minimización del error medio cuadrático.^[1]

Esta técnica es debida a Steiglitz^[12]. La ganancia del filtro se especifica en M frecuencias discretas, $\{Z_i\}$, y se determinan los coeficientes que minimizan los errores en estos puntos. Para tener mínima sensibilidad a los coeficientes y ductilidad analítica, se supone una estructura en cascada de N secciones:

$$Y(z) = A.H(z) \quad (2.25)$$

donde A es una ganancia constante, H es un producto de formas biquadráticas dadas por:

$$H(z) = \prod_{k=1}^N \frac{1 + a_k \cdot z^{-1} + b_k \cdot z^{-2}}{1 + c_k \cdot z^{-1} + d_k \cdot z^{-2}} \quad (2.26)$$

Si Y_i es la magnitud especificada de la respuesta de frecuencia en una frecuencia z_i , $Y(z_i)$ la aproximación, se

define el error medio cuadrático Q como:

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^M [|Y(z_i)| - Y_i]^2 \quad (2.27)$$

donde θ es el vector de parámetros desconocidos:

$$\theta = [a_1, b_1, c_1, d_1, \dots, a_N, b_N, c_N, d_N, A] \quad (2.28)$$

y la suma se toma sobre los M puntos en los cuales se especificó Y .

Para encontrar este mínimo es necesario resolver un conjunto de ecuaciones no lineales simultáneas^[12]. Steiglitz utiliza el algoritmo de Fletcher-Powell. Este algoritmo requiere una subrutina que calcule Q y las derivadas parciales de Q con respecto a los parámetros $\text{grad } Q$. La subrutina para obtener Q y $\text{grad } Q$ tiene como entradas las frecuencias de interés $\{z_i\}$, las respuestas especificadas en estas frecuencias, y el valor actual de un vector ϕ . El vector ϕ comprende todos los parámetros de θ salvo la ganancia, que es determinada por la subrutina. Esta ganancia es óptima y se expresa como A^* ; Steiglitz utiliza $Q'(\phi)$ para representar Q en relación con esta ganancia: $Q'(\theta) = Q(A^*, \phi)$. "A" se maneja por separado porque su nivel óptimo puede calcularse en forma directa. El manejo por separado reduce el número de parámetros por optimizar con la rutina de Fletcher-Powell, y por tanto acelera su ejecución.

La subrutina comprende las siguientes etapas:^[12]

- a. Calcula la función de transferencia, exclusiva de la ganancia, para todas las frecuencias que se especifican.
- b. Determina A^* mediante el uso del valor de H_1 y de Y_i .
- c. Calcula los errores individuales E_i , y el error medio

cuadrático Q' .

d. Determina el gradiente.

En general, se requieren muchas iteraciones para llegar a un valor de ϕ satisfactorio. Además, la solución puede tener polos exteriores al círculo unitario.

Por tanto, el programa se corre en dos etapas. Primeramente, se hace una suposición inicial razonable como punto de partida; después de la convergencia, se examinan las ubicaciones de los polos. Cualquier polo que se halle fuera del círculo unitario, por ejemplo en las coordenadas polares (ρ, θ) , se sustituye por un polo correspondiente en el interior, es decir, en $(1/\rho, \theta)$. Después se corre por segunda vez el programa utilizando estas ubicaciones corregidas como intento inicial.

2.1.1.4. Método de diseño de Yule-Walker.^[4]

Este método realiza un ajuste de mínimos cuadrados en el dominio del tiempo. Los coeficientes del denominador $\{a(1), \dots, a(NA)\}$ son calculados por las llamadas "ecuaciones modificadas de Yule Walker"^[13], usando coeficientes de correlación calculados por la transformada inversa de Fourier de la respuesta de frecuencia especificada H .

El numerador se calcula por un procedimiento de cuatro pasos. Primero, se calcula un numerador polinómico correspondiente a una descomposición aditiva del espectro de potencia de la respuesta de frecuencia. Segundo, se evalúa la respuesta de frecuencia completa correspondiente a los polinomios del numerador y denominador. Tercero, se usa una técnica de factorización espectral, para obtener la respuesta impulso del filtro. Finalmente, el polinomio del numerador se obtiene por un ajuste de mínimos cuadrados a la respuesta impulso.

2.2. FILTROS NO RECURSIVOS.

Un filtro no recursivo genera su salida por escalamiento de las entradas mediante constantes, y finalmente sumando todas estas entradas escaladas. Las constantes se denominan coeficientes, y estas constantes determinan el filtro. El diseño de un filtro no recursivo precisamente trata sobre el cálculo de los valores de estos coeficientes. Por lo tanto el filtro no recursivo se puede definir de la siguiente manera:

$$y_k = C_m X_{k-m} + C_{m-1} X_{k-m+1} + \dots + C_0 X_k + \dots + C_{-m+1} X_{k+m-1} + C_{-m} X_{k+m} \quad (2.29)$$

En este filtro, las entradas no contribuyen igualmente a la salida. La contribución de cada elemento es ponderada por el coeficiente con que se multiplica. Si el coeficiente es alto, el elemento particular puede afectar dramáticamente a la salida. Si el coeficiente es pequeño, el elemento tiene un efecto menor sobre la salida del filtro.

Por lo tanto, la definición de un filtro digital no recursivo se puede expresar de la siguiente manera:

$$y_k = \sum_{i=-m}^m C_i \cdot X_{k-i} \quad (2.30)$$

Como se puede observar, la anterior ecuación es una parte de la ecuación (2.14), que representa a un filtro recursivo; cuando todos los coeficientes de la parte recursiva de la ecuación (2.14) son cero, se tiene un filtro no recursivo, por lo que, se puede concluir que el filtro no recursivo es realmente un caso especial del filtro recursivo.

La respuesta de frecuencia del filtro no recursivo, es una función compleja de la variable independiente ω , y está completamente determinada por la respuesta impulso del filtro digital, por lo que a diferentes respuestas impulso, resultan diferentes respuestas de frecuencia del filtro. La representación de la respuesta de frecuencia de un filtro no

recursivo, está dado por la ecuación:

$$H(\omega) = \sum_{l=-m}^m c_l \cdot e^{-j\omega l} \quad (2.31)$$

ya que en un filtro no recursivo $h_1 = c_1$.

Al igual que en los filtros recursivos, se expresa la respuesta de frecuencia por su magnitud y fase:

$$H(\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (2.32)$$

2.2.1. TECNICAS DE DISEÑO DE FILTROS NO RECURSIVOS.

Uno de los atractivos de los filtros no recursivos, es que resulta fácil hacer que tengan una respuesta de fase lineal. En muchas aplicaciones, la fase lineal es una necesidad; por tanto, casi todas las técnicas de diseño no recursivo se han creado pensando en los filtros de fase lineal^[1].

2.2.1.1. Técnicas de la transformada de Fourier: aplicación de ventanas.

Un punto de partida para el diseño de filtros no recursivos es la especificación de respuesta de frecuencia; y, se utiliza la relación que existe entre esta respuesta y la respuesta de pulso del filtro.

Si un filtro digital tiene respuesta de pulso $h(k)$, entonces su respuesta de frecuencia $H(e^{j\omega})$ está dada por la ecuación (2.10). Si ω se escala (normaliza) a la frecuencia de muestreo, entonces $H(e^{j\omega})$ es periódica con periodo 2π y $h(k)$ puede obtenerse a partir de la ecuación (2.11).

Considérese un filtro pasabajos ideal, como se muestra en

la figura 2.5.

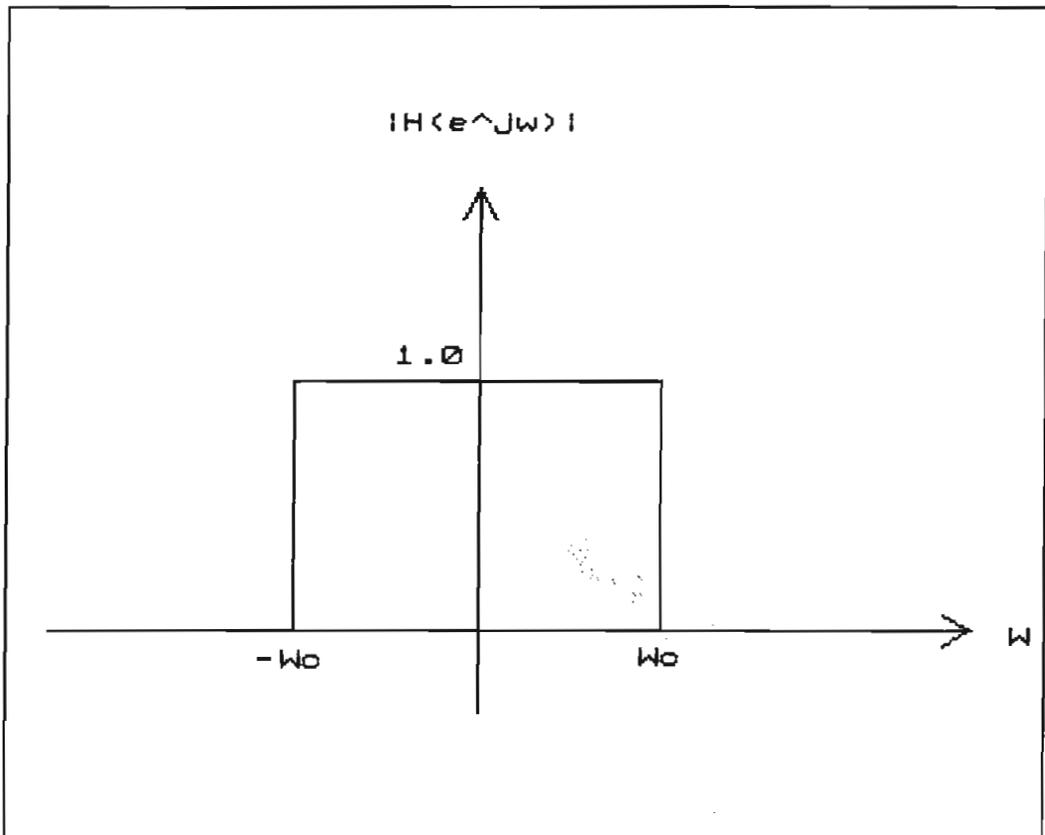


Fig. 2.5 Filtro pasabajo ideal.

Esta respuesta es:

$$H(e^{j\omega}) = 1 \quad |\omega| < \omega_c \quad ; \quad 0 \text{ en caso contrario.} \quad (2.33)$$

donde ω_c es la frecuencia de corte normalizada $2\pi \cdot f_c / f_s$, por lo cual aplicando (2.11), se tiene:

$$h(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega k} d\omega = \frac{\text{sen } \omega_c k}{\pi k} \quad (2.34)$$

cuyo aspecto general es similar al de la figura 2.6. Esta solución no está aún lista para utilizarse, puesto que la respuesta de pulso no es finita ya que contiene un número infinito de términos debido a la forma discontinua de la característica de filtro ideal; y, además el sistema no es causal (porque la respuesta de pulso es diferente de cero en un tiempo negativo). Sin embargo, se puede obtener una aproximación causal finita haciendo pasar por una ventana la

respuesta de pulsos; es decir, truncándola para $|k|$ mayor que algún tiempo de corte t_c y desplazando la respuesta en el tiempo hasta que el sistema sea causal, como se muestra en las figuras 2.7 y 2.8.

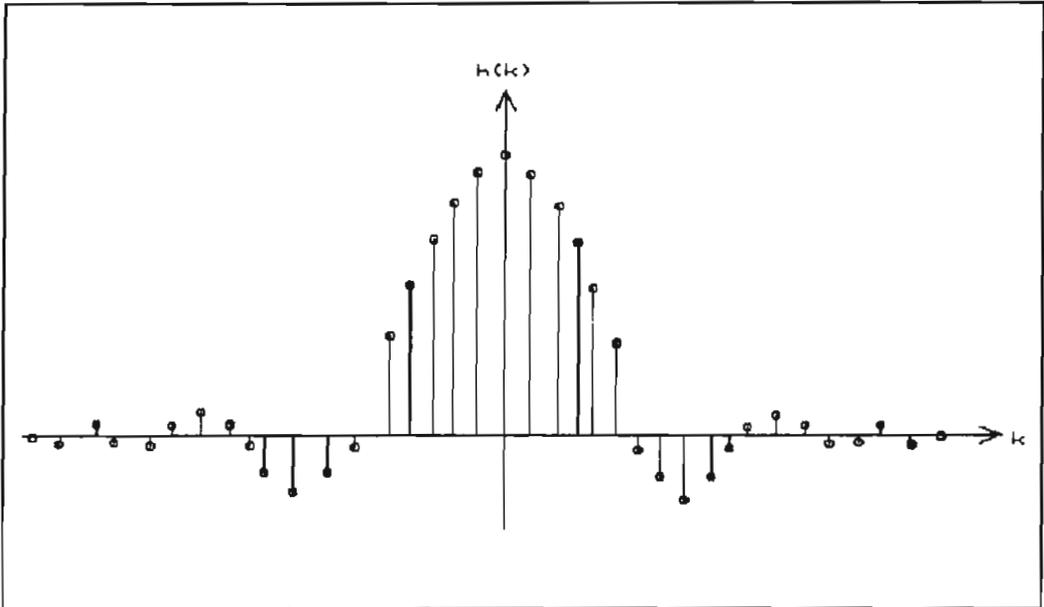


Fig. 2.6 Respuesta impulso del filtro.

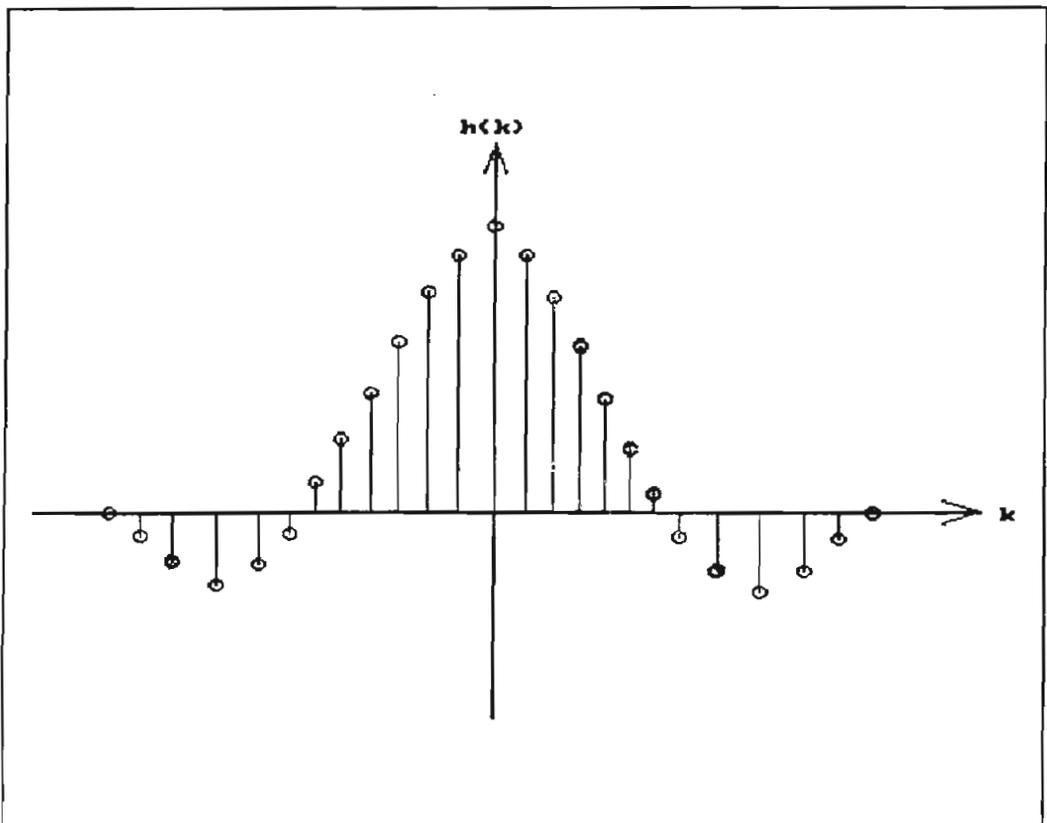


Fig. 2.7 Truncamiento sobre la respuesta impulso

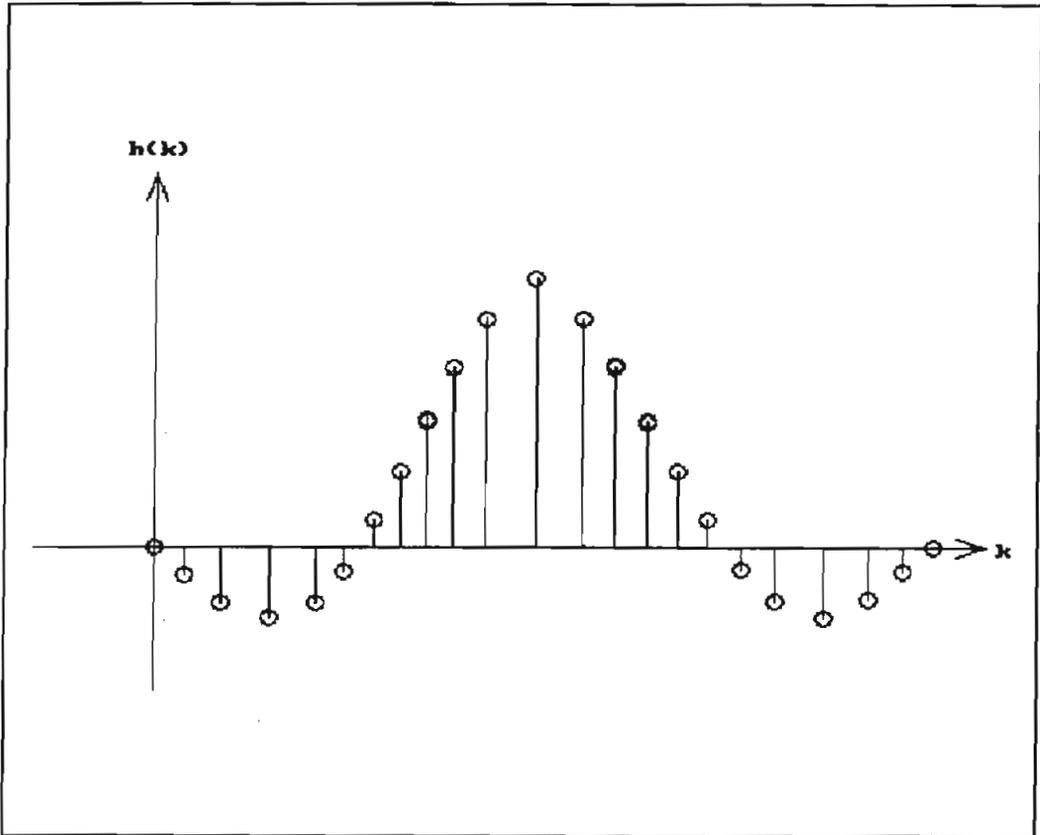


Fig. 2.8 Causalidad sobre la respuesta truncada

El pasar por una ventana la respuesta de pulso provoca una desviación respecto a la respuesta de frecuencia especificada, como se muestra en la figura 2.9.

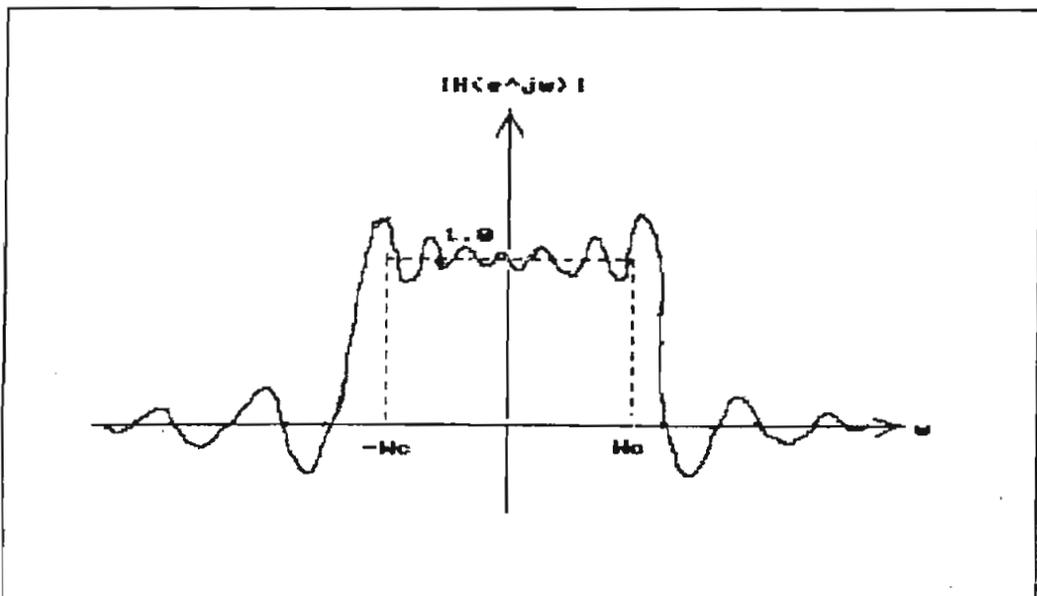


Fig. 2.9 Desviación en frecuencia del filtro ideal.

- La respuesta de la banda de paso ya no es plana, sino que presenta oscilaciones que aumentan de manera uniforme en amplitud hasta llegar a la frecuencia de corte, como lo muestra la figura 2.9.
- La respuesta de la banda de bloqueo ya no es cero, presenta oscilaciones decrecientes.
- La transición entre la banda de paso y la banda de bloqueo ya no es abrupta.

Para minimizar las oscilaciones mencionadas, la respuesta de pulso infinita original se multiplica por una función ventana que no sea un pulso rectangular puro. No existe una función ventana finita cuya transformada no tenga lóbulos laterales (figura 2.14), pero se pueden encontrar funciones cuyas transformadas tengan lóbulos laterales muy pequeños.

En el caso de utilizarse una de estas funciones ventana, las oscilaciones en la respuesta de frecuencia se reducen en forma correspondiente, esto es, de acuerdo a la bondad de dichas ventanas. Se presentarán algunas de ellas, posteriormente en el numeral 2.3 que trata sobre los filtros más utilizados.

En todas las funciones ventana, los lóbulos laterales son mucho menores que aquellos que resultan de la ventana rectangular, y todos los lóbulos principales son más amplios que los resultantes de la ventana rectangular, como se podrá observar en el numeral 2.3.

Estas afirmaciones son válidas para todas las ventanas; la búsqueda de la función ventana ideal es una búsqueda de la mejor solución intermedia entre la amplitud de los lóbulos laterales y el ancho de los lóbulos principales (ver numeral 2.3.5).

Sin embargo, ningún filtro no recursivo diseñado por transformación de Fourier y aplicación de ventanas es

óptimo. El atractivo de la técnica reside en su sencillez.

El diseño con la transformada de Fourier de filtros no recursivos puede resumirse de la siguiente manera:[1]

- Se establece la respuesta de frecuencia deseada (ideal).
- Se determina la respuesta de pulso por medio de la ecuación (2.11).
- Se elige una función ventana y un ancho de ventana para satisfacer las especificaciones de oscilación y amplitud de transición que se requieren. Se asigna la ventana de acuerdo con la respuesta impulso.
- Se desplaza la respuesta de pulso para hacerla causal.

2.2.1.2. Diseño de muestreo en frecuencia.[1]

La función de transferencia de un filtro digital puede obtenerse a partir de su respuesta de pulso empleando la siguiente relación:

$$H(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h(k) \cdot z^{-k} \quad (2.35)$$

La respuesta de pulso puede determinarse a partir de la respuesta de frecuencia por medio de la transformada discreta de Fourier inversa:

$$h(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \cdot W^{k \cdot n} \quad (2.36)$$

Si se combina estas dos últimas relaciones:

$$H(z) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} z^{-k} \sum_{n=0}^{N-1} H(n) \cdot W^{k \cdot n} \quad (2.37)$$

se puede expresar como:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-N}}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \frac{H(n)}{1 - z^{-1} \cdot W^{2n}} \quad (2.38)$$

Los multiplicadores $H(n)$ son muestras equiespaciadas de la respuesta de frecuencia deseada. El procedimiento de diseño de este filtro consiste en sustituir muestras de la respuesta de frecuencia deseada en la ecuación (2.38).

Como es usual, este diseño requiere algún trabajo extra para hacerlo práctico, por lo cual:

- El denominador $(1 - z^{-1}W^{2n})$ coloca un polo en el círculo unitario y lleva a un sistema marginalmente estable. En la práctica, los polos se colocan justo dentro del círculo haciendo que el denominador sea $(1 - az^{-1}W^{2n})$, donde "a" es una constante ligeramente menor que la unidad.

- Las muestras $H(n)$ son números complejos. En la práctica, los términos $H(n)$ conjugados se combinan para producir multiplicadores reales, con algún incremento en la complejidad de cálculo.

- Para tener la exactitud adecuada se requieren muchas muestras muy próximas entre sí. Sin embargo, el diseño es atractivo para filtros de banda estrecha en los cuales sólo algunas muestras son diferentes de cero.

- La respuesta ondulante de este filtro es deficiente, pero mejora en grado considerable dejando una o más muestras de las bandas de transición sin restricción y colocándolas de modo que se optimice dicha respuesta. Esto se realiza mejor con la ayuda de una computadora, mediante un programa de búsqueda del gradiente.[1]

2.2.1.3. Diseño óptimo de filtros.[1]

El concepto de diseño por ajuste de la respuesta de frecuencia a un conjunto de puntos predeterminado es

anterior al moderno diseño óptimo de filtros auxiliado por computadora. Este diseño produce un desempeño equiondulante tanto en las bandas de paso como en las de bloqueo. Es un proceso iterativo en el que cada iteración produce una aproximación al filtro deseado. El desempeño ondulante de la aproximación se compara entonces con la especificación y, como resultado, se produce una nueva aproximación.

Los procedimientos modernos de diseño óptimo toman la forma de programas de computadora.

Para simplificar, supóngase que la respuesta de frecuencia $H(e^{j\omega})$ es real pura y la respuesta de pulso $h(k)$ es simétrica alrededor de $k=0$. (Este filtro no causal se hace fácilmente causal por medio de un simple desplazamiento cuando concluye el diseño). Después $h(k)$ se define sobre una región $-M < k < M$, y $H(e^{j\omega})$ se puede describir en términos de funciones coseno (M es el intervalo de muestras):

$$H(e^{j\omega}) = h(0) \sum_{k=1}^M 2 \cdot h(k) \cdot \cos(k\omega) \quad (2.39)$$

Sea el filtro equiondulante deseado, como el de la figura 2.10:

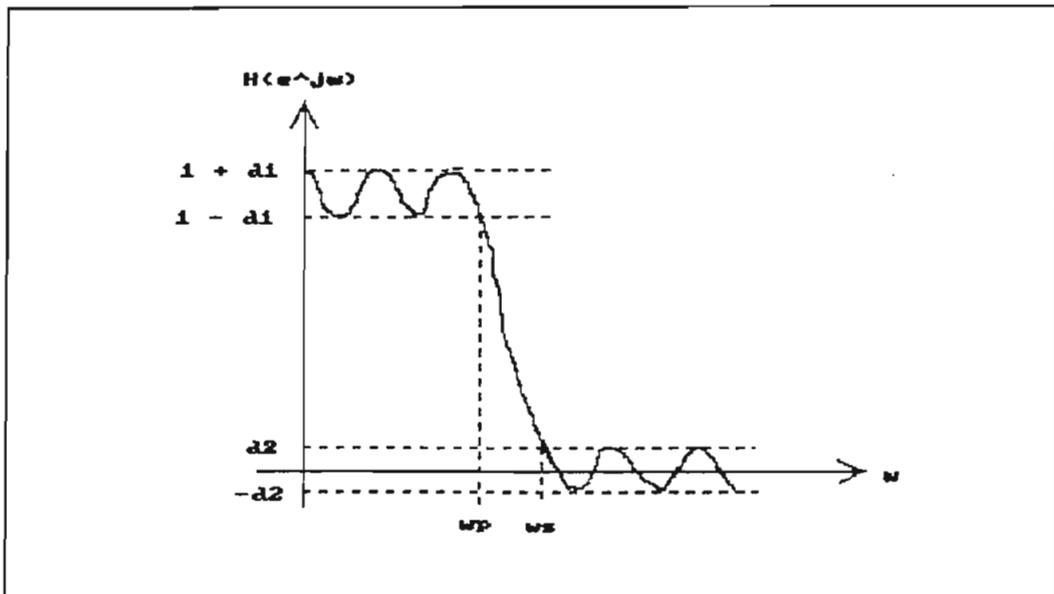


Fig. 2.10 Filtro equiondulante.

donde d_1 es la tolerancia de la banda de paso, d_2 la tolerancia de la banda de bloqueo, ω_p el final de la banda de paso y ω_s el inicio de la banda de bloqueo.

El procedimiento de diseño óptimo puede visualizarse ahora como el problema de determinar un conjunto de multiplicadores de $\cos(k\omega)$ que ajuste la suma de la ecuación (2.39) a las tolerancias de la figura 2.10.

Son soluciones a este problema las de Herrmann y Schuessler, Hofstetter, Parks y McClellan (utilizada por el paquete MATLAB) y Rabiner. En todas estas soluciones se emplea el mismo método básico. [15, 16]

Se supone que los puntos de error máximo están equiespaciados en frecuencia, calculándose entonces una respuesta de frecuencia que pase por estos puntos.

En general, los errores máximos reales no ocurren en los puntos esperados. Sin embargo, el procedimiento óptimo es iterativo, y en cada nueva iteración las posiciones que se hallaron en la anterior se toman como las posiciones de error máximo. Luego se determinan los errores máximos reales de esta nueva respuesta y se ejecuta una nueva iteración. El proceso se repite hasta que no haya desplazamiento entre los errores esperados y los reales. A partir de la curva de respuesta final se obtienen los multiplicadores de la ecuación (2.39); éstos dan la respuesta de pulso requerida.

De esta manera, se ha tratado sobre diferentes métodos de diseño de filtros no recursivos, los cuales utiliza el paquete MATLAB en el diseño de este tipo de filtros.

2.2.2. Retardo Ideal. [3.8.10]

El concepto de retardo es importante en el diseño de filtros, ya que el retardo es inherentemente necesario en la realización de filtros reales. Por lo tanto debe considerarse la representación del retardo en el dominio de

la frecuencia.

La ecuación de diferencias, para un retardo ideal de muestra n_0 es:

$$y(n) = x(n - n_0) \quad (2.40)$$

Hallando la transformada de Fourier de ambos lados de la ecuación (2.40), se obtiene la siguiente relación de la respuesta de frecuencia con un retardo ideal:

$$H(e^{j\omega T}) = \frac{Y(e^{j\omega T})}{X(e^{j\omega T})} = e^{-j\omega n_0 T} \quad (2.41)$$

Como se puede ver, la respuesta de frecuencia del retardo ideal tiene una magnitud unitaria constante para todas las frecuencias, y el ángulo de fase es una función lineal de la frecuencia:

$$|H(e^{j\omega T})| = 1 \quad (2.42)$$

$$\arg[H(e^{j\omega T})] = -\omega n_0 T \quad (2.43)$$

La pendiente de la función de fase lineal es $-n_0 T$, la cual es el negativo del retardo en segundos, y si la pendiente es dividida por T , será el negativo del retardo en muestras.

Debido a la relación entre la pendiente de la función de fase y el retardo, es común considerar la función del **retardo de grupo**, definida como una medida conveniente de la linealidad de la fase. El concepto básico del retardo de grupo está relacionado con el efecto de la fase sobre una señal de banda limitada; específicamente si se considera la salida de un sistema con respuesta de frecuencia $H(e^{j\omega})$ para una entrada de banda limitada $x(n) = s(n) \cdot \cos(n\omega_0 T)$, donde $s(n)$ es una envolvente; y, si se asume que $X(e^{j\omega})$ es distinto de cero solamente alrededor de $\omega = \omega_0$, el efecto de la fase del sistema puede ser aproximado alrededor de $\omega = \omega_0$

por medio de la ecuación (2.43). La respuesta $y(n)$ a la señal $x(n)$ es aproximadamente $y(n) = s(n-n_0) \cdot \cos((n-n_0)\omega_0 T)$; por ejemplo, como se puede observar en la ecuación (2.44), la respuesta de frecuencia $H(\omega)$ para una respuesta impulso simétrica es:

$$H(\omega) = e^{-j\omega n_0 T} \left[2 \sum_{n=0}^{N-1} h(n) \cdot \cos((n - n_0)\omega T) \right] \quad (2.44)$$

Consecuentemente, el retardo de tiempo de la envolvente $s(n)$ de la señal de banda limitada $x(n)$ está dada por el negativo de la pendiente de la fase a ω_0 . Con la fase especificada como una función continua de w , el retardo de grupo de un sistema se define como:

$$\tau(\omega T) = - \frac{d(\arg[H(e^{j\omega T})])}{d\omega} \quad (2.45)$$

Aunque la función del retardo de grupo tiene especial significado en la teoría de propagación de ondas, el uso del retardo de grupo en caracterización de filtros es motivada especialmente por el hecho de que para un sistema que posee precisamente fase lineal, el retardo de grupo es igual al retardo del sistema.

Una no linealidad de la función de respuesta de fase es usualmente indeseable y es motivo de introducción de una distorsión en la salida del sistema.

Solamente los sistemas causales para los cuales la respuesta de fase puede ser precisamente lineal con la frecuencia son aquellos con respuestas impulso de duración finita (filtros no recursivos), por lo que para este tipo de filtros, se debe considerar posibles distorsiones de la señal de salida del filtro, la cual puede estar acompañada de un retardo de fase indeseable en la mayoría de casos. Por ejemplo, en las figuras 2.7 y 2.8 las respuestas impulso son las mismas,

pero en la figura 2.8 se introduce un retardo finito debido al desplazamiento realizado para hacer al sistema causal[1.8].

2.3. FILTROS MAS UTILIZADOS.

Los filtros que se van a presentar a continuación, son los filtros más conocidos y que son utilizados por el paquete MATLAB, objeto de esta tesis.

Para seguir un orden de presentación, se iniciará con los filtros recursivos, para terminar con los no recursivos, determinando para cada uno de ellos, la técnica de diseño utilizada; técnicas que ya han sido presentadas anteriormente.

2.3.1. FILTROS DISEÑADOS POR LA TRANSFORMADA BILINEAL.

La transformada bilineal, es un método de diseño de filtros digitales recursivos, que utiliza aproximaciones a diseños de filtros análogos.

La razón para considerar los filtros análogos en este punto, es que se puede simplificar los diseños de filtros digitales si se inicia con un buen diseño de filtros análogos. Se van a presentar a continuación tres tipos de filtros análogos con algunas de sus propiedades. Estos filtros son:

- Butterworth.
- Chebyshev.
- Elíptico.

Antes de entrar a estudiar estos tres filtros, se hace una revisión de la teoría de los filtros análogos. Se presentará una visión generalizada de su operación, lo cual servirá de introducción a los mismos.

Un filtro análogo acepta una señal análoga $x(t)$, y produce

una salida análoga $y(t)$. Ambas señales son funciones análogas, es decir, estas son funciones de una variable continua t , pudiendo tomar un número infinito de valores.

La función de transferencia del filtro se define por la ecuación (2.46).

$$H(s) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i \cdot s^i}{1 - \sum_{i=1}^M b_i \cdot s^i} \quad (2.46)$$

La función de transferencia del filtro es una razón de polinomios, donde el numerador es controlado por los coeficientes de alimentación directa a_i y el denominador es el resultado de los coeficientes de retroalimentación b_i .

Un filtro análogo puede ser especificado por sus coeficientes, su función de transferencia, o equivalentemente, los polos y ceros de su función de transferencia. La mayoría de filtros análogos están diseñados para satisfacer una especificación en la respuesta de frecuencia.

2.3.1.1. Filtro de Butterworth. [2.3.7, 9, 10]

El filtro de Butterworth es muy conocido debido a que la banda de paso y de bloqueo no contienen rizado. El filtro de Butterworth se llama filtro de máxima monotonía, a causa de la ausencia de rizado. Sin embargo, el filtro logra esta característica a expensas de una región relativamente extensa de transición.

El filtro de Butterworth posee la banda de transición más amplia de los tres filtros análogos en estudio.

Este filtro tiene solamente dos parámetros de diseño: el orden del filtro (orden del denominador de la función de

transferencia) y la frecuencia de corte ω_c del filtro. El orden del filtro representa también el número de polos del mismo, y éstos determinan la complejidad del filtro. El filtro pasa bajos de Butterworth está definido por la función de transferencia de la ecuación (2.47).

$$|H_B(s)|^2 = H_B(s) \cdot H^*(s) = \frac{1}{1 + (s/j\omega_c)^{2M}} \quad (2.47)$$

El término M es el orden del filtro, y ω_c es la frecuencia de corte del mismo. La ecuación (2.47) parece implicar que se está considerando un filtro de Butterworth con $2M$ polos. Este no es el caso, ya que la ecuación (2.47) es el cuadrado de la función de transferencia del filtro, y al elevar al cuadrado la función de transferencia, se doblan los polos. El filtro de Butterworth $|H_B(s)|$, tiene solamente M polos.

La magnitud de la respuesta de frecuencia del filtro elevada al cuadrado, es el cuadrado de la función de transferencia de éste, evaluado en $s = j\omega$:

$$|H_B(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + (\omega/\omega_c)^{2M}} \quad (2.48)$$

En general se puede escribir $H(s) = 1/B_M(s)$, siendo B_M el polinomio de Butterworth en s , donde para M impar se tiene: [9]

$$B_M(s) = \left(\frac{s}{\omega_c} + 1\right) \prod_{k=1}^{(M-1)/2} \left(\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2(\cos \theta_k) \frac{s}{\omega_c} + 1\right), \quad \theta_k = \frac{\pi k}{M}$$

y para M par se tiene:

$$B_M(s) = \prod_{k=1}^{M/2} \left(\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2(\cos \theta_k) \frac{s}{\omega_c} + 1\right), \quad \theta_k = \frac{\pi}{2M}(2k-1)$$

Los anteriores polinomios se utilizan para hallar la función de transferencia $H_B(s)$ necesaria para la aplicación de la transformada bilineal. A continuación se comprueba que los polinomios de Butterworth satisfacen la ecuación (2.48) para un $M=2$.

$$H_B(s) = \frac{1}{\frac{s^2}{w_c^2} + 2(\cos\theta_k) \frac{s}{w_c} + 1}$$

para $s = jw$, se tiene que:

$$H_B(jw) = \frac{1}{1 - \frac{w^2}{w_c^2} + j2(\cos\theta_k) \frac{w}{w_c}}$$

$$|H_B(jw)|^2 = \left[\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{w^2}{w_c^2}\right)^2 + \left(2(\cos\theta_k) \frac{w}{w_c}\right)^2}} \right]^2$$

$$|H_B(jw)|^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{w^2}{w_c^2}\right)^2 + 4(\cos^2\theta_k) \frac{w^2}{w_c^2}}$$

$$\text{Como: } \theta_k = \frac{\pi}{4} \quad \cos(\pi/4) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|H_B(jw)|^2 = \frac{1}{1 - 2\frac{w^2}{w_c^2} + \frac{w^4}{w_c^4} + 2\frac{w^2}{w_c^2}} = \frac{1}{1 + \left(\frac{w}{w_c}\right)^4}$$

con lo que se prueba la validez de los polinomios.

Como se puede observar en el siguiente ejemplo, se aproxima un filtro digital de Butterworth pasa bajos de tercer orden (tres polos) con la transformada bilineal, asumiendo una frecuencia de muestreo de 100 muestras/segundo y una frecuencia de corte $w_c=10$.

Como $M = 3$, $f_s = 100$ muestras/seg., $T = 1/f_s = 0.01$ seg. y $\omega_c = 10$, entonces la función de transferencia $H_B(s)$, se puede hallar mediante la ecuación que representa al polinomio de Butterworth cuando M es un valor impar, de la siguiente manera:

$$\left(\frac{s}{\omega_c} + 1\right) \left(\frac{s^2}{\omega_c^2} + 2 \left(\cos \frac{\pi}{3}\right) \frac{s}{\omega_c} + 1\right)$$

$$\left(\frac{s}{10} + 1\right) \left(\frac{s^2}{100} + \frac{s}{10} + 1\right)$$

$$\frac{1}{0.001s^3 + 0.02s^2 + 0.2s + 1}$$

luego se procede a reemplazar a "s" por la expresión de la transformada bilineal para hallar $H_B(z)$:

$$s = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

y multiplicando al numerador y al denominador por el término $T^3(1+z^{-1})^3$, se tiene que los coeficientes del filtro son:

$$H_B(z) = 10^{-3} \frac{0.4502 + 1.35z^{-1} + 1.35z^{-2} + 0.4502z^{-3}}{1 - 2.781z^{-1} + 2.603z^{-2} - 0.819z^{-3}}$$

La respuesta de frecuencia de filtros de Butterworth de tercero y octavo orden se muestran en la figura 2.11. [2]

Nótese que la respuesta de frecuencia está libre de rizado y el punto medio de la respuesta de frecuencia está en $\omega = \omega_c$. Filtros de mayor orden generan bandas de paso y de bloqueo más planas y regiones de transición más pequeñas.

Los polos de la función de transferencia al cuadrado del filtro de Butterworth son aquellos valores de s que causan que el denominador de la expresión se haga cero. Entonces,

los polos son encontrados igualando el denominador de la misma a cero, luego:

$$\left(\frac{s}{j\omega_c}\right)^{2M} = -1 \quad (2.49)$$

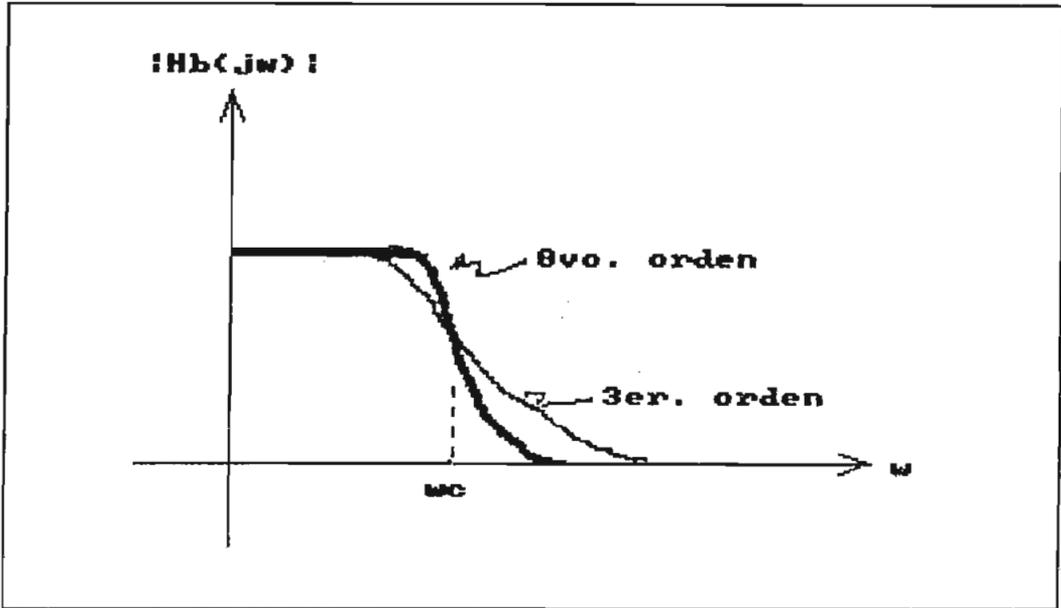


Fig. 2.11 Respuesta de frecuencia de filtros de Butterworth.

Los polos se hallan tomando las $2M$ raíces de la ecuación (2.49) y multiplicando ambos lados por $j\omega_c$.

$$s = (-1)^{1/2M} j\omega_c \quad (2.50)$$

Se completa la solución expresando -1 y j en términos de los exponenciales complejos.

$$-1 = e^{j(2k+1)\pi} \quad \text{donde } k = \text{entero} \quad (2.51)$$

y como $j = e^{j(\pi/2)}$, los polos del filtro de Butterworth al cuadrado son los siguientes:

$$s = e^{j\frac{(2k+1)\pi}{2M}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot \omega_c = e^{j\frac{(2k+M+1)\pi}{2M}} \cdot \omega_c \quad (2.52)$$

Los polos de la función de transferencia al cuadrado del filtro de Butterworth tienen ángulos de:

$$(2k + M + 1) \cdot (\pi/2M) \quad (2.53)$$

y magnitudes de ω_c . Estos polos están uniformemente distribuidos alrededor de un círculo de radio ω_c y centrados en el origen como se puede observar en la figura 2.12. Muchas veces se reconoce el filtro de Butterworth por la localización de sus polos antes que por la forma de la función de transferencia o la respuesta de frecuencia.

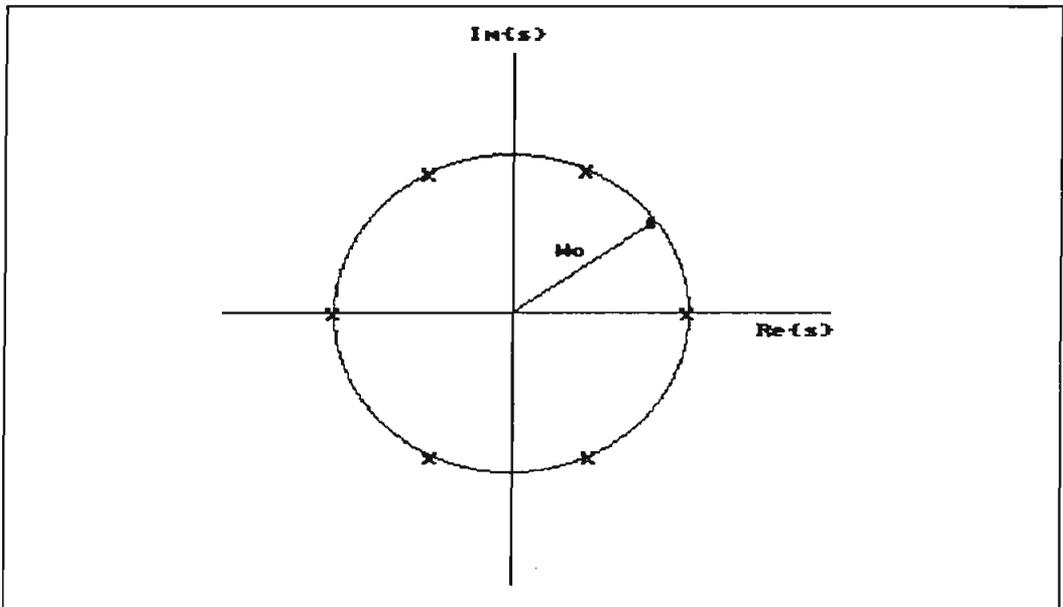


Fig. 2.12 Localización de polos de $H^2(s)$ de un filtro Butterworth de tercer orden.

Se puede ahorrar una gran cantidad de operaciones si se calcula solamente uno de los polos y se encuentran los otros por adición sucesiva de $360^\circ/2M$ al ángulo del polo. El paso final es seleccionar los M polos estables (aquellos que se encuentran en la mitad izquierda del plano s) y usar éstos como los polos del filtro.

2.3.1.2. Filtro de Chebyshev. [2]

El filtro de Chebyshev tiene una región de transición más

pequeña que el filtro de Butterworth del mismo orden, pero en cambio tiene un rizado ya sea en la banda de paso o de bloqueo. Este filtro minimiza la amplitud del máximo pico de rizado, lo cual se denomina criterio de Chebyshev.

Hay dos representaciones de la función de transferencia de Chebyshev, las cuales difieren entre sí por el rizado que permiten en las regiones de paso o de bloqueo. Si se considera un filtro de Chebyshev pasa bajos, que posea un rizado en la región de paso y que no posea el mismo en la región de bloqueo, la función de transferencia cuadrada del filtro de Chebyshev con rizado en la banda de paso, se muestra a continuación:

$$|H_C(s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [T_M(s/jw_c)] [T_M(s/jw_c)]^*} \quad (2.54)$$

Se puede notar por lo tanto que ésta es similar a la función de transferencia del filtro de Butterworth, excepto que s/w_c ha sido reemplazado con el polinomio de Chebyshev T_M .

Esta función T_M es el polinomio de orden M . Los primeros seis polinomios de Chebyshev se listan a continuación: [2]

<u>ORDEN</u>	<u>POLINOMIO</u>
0	1
1	x
2	$2x^2 - 1$
3	$4x^3 - 3x$
4	$8x^4 - 8x^2 + 1$
5	$16x^5 - 20x^3 + 5x$

El parámetro ϵ controla la amplitud del rizado. El máximo rizado tiene una altura pico-pico de: [2]

$$\frac{\epsilon^2}{1 + \epsilon^2} \quad (2.55)$$

Para valores pequeños de ϵ se generan filtros con pequeños rizados. Se debe tener cuidado con esta línea de razonamiento, que sugiere que el rizado podría ser reducido a cero por simple colocación de $\epsilon=0$. Esto en realidad es verdad, pero a expensas de hacer el filtro pasa bajo un dispositivo sin filtrado.

La respuesta de frecuencia del filtro de Chebyshev se calcula para $s = j\omega$, lo cual es equivalente a evaluar la función de transferencia a lo largo del eje $j\omega$.

$$|H_C(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [T_M(\omega/\omega_c)]^2} \quad (2.56)$$

La magnitud de la respuesta de frecuencia de un filtro de Chebyshev de tercero y quinto orden se muestra en la figura 2.13 ($\epsilon = 0.5$).

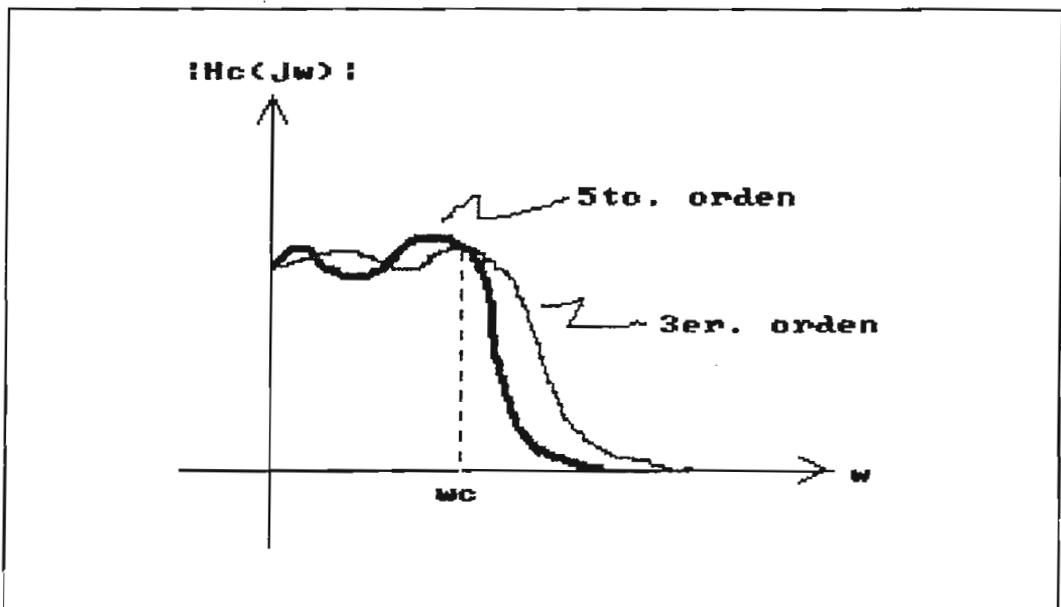


Fig. 2.13 Respuesta de frecuencia de un filtro de 3er y 5to orden de Chebyshev.

Se puede notar que el filtro de más alto orden tiene más rizado y una región de transición más corta. También se puede observar que ω_c no es más grande que el punto de media potencia. En el filtro de Chebyshev ω_c es la frecuencia donde la respuesta comienza a decrecer, es el inicio de la región de transición.

2.3.1.3. Filtro Elíptico. [2]

Ya se ha visto que el filtro de Chebyshev tiene una región de transición más pequeña que el filtro de Butterworth del mismo orden. El filtro de Chebyshev logra esta región de transición más pequeña a causa de que permite un rizado en las regiones de paso o de bloqueo. Ahora podría surgir la pregunta: es posible obtener aún bandas de transición más pequeñas si se permite un rizado en las regiones de paso y bloqueo a la vez? La respuesta a este cuestionamiento es sí, y el filtro que tiene una región más pequeña de transición porque permite rizado en ambas bandas es el elíptico.

El filtro elíptico tiene la región de transición más pequeña en relación a los otros filtros del mismo orden; y, amplitudes del rizado.

La respuesta de frecuencia de un filtro elíptico de orden M es similar a la del filtro de Chebyshev. La diferencia entre el filtro de Chebyshev y el elíptico, es que el elíptico usa una función racional de orden M de Chebyshev, $R_M(w/w_c \cdot L)$ antes que la anterior función $T_M(w/w_c)$. La magnitud de la función de transferencia cuadrada del filtro elíptico está dada por la ecuación (2.57).

$$|H_E(s)|^2 = \frac{1}{1 + \epsilon^2 [R_M(w/w_c \cdot L)]^2} \quad (2.57)$$

Los parámetros ϵ y w_c tienen los mismos efectos que en el filtro de Chebyshev; ϵ controla el rizado de la banda de paso y w_c controla la frecuencia de corte. El parámetro L controla el ancho de la región de transición, la altura del rizado en la banda de bloqueo e interactúa con w_c para afectar la frecuencia de corte.

Para entender el comportamiento del filtro elíptico, se analiza el comportamiento de la función racional de

Chebyshev. La función racional de Chebyshev oscila entre 0 y 1 para $|w| < w_c$. Cuando $|w|$ es más grande, la función oscila entre L^2 e infinito. Entonces, cuando se aplica a un filtro elíptico como en la ecuación anterior, esta función causa que la banda de paso ($|w| < w_c$) oscile entre 1 y $1/(1+\epsilon^2)$. La función racional de Chebyshev causa que la banda de bloqueo del filtro elíptico ($|w| > w_c$), oscile entre 0 (cuando la función se hace infinita) y $1/(1+\epsilon^2 L^2)$. La mayoría de diseños de filtros elípticos resultan en valores grandes de L , para hacer que la banda de bloqueo oscile entre 0 y aproximadamente $1/\epsilon^2$. En esta forma, el filtro elíptico tiene un rizado equivalente en la banda de bloqueo y en la banda de paso.

El diseño de filtros elípticos es mucho más complicado que el filtro de Butterworth y el de Chebyshev porque se debe seleccionar el orden del filtro, la frecuencia de corte w_c , el parámetro L ; y, porque w_c y L interactúan en la determinación del punto de corte. Por esta razón, los filtros elípticos eran diseñados mediante tablas, y hoy en día se utiliza la herramienta computacional.

El filtro elíptico es considerado como filtro análogo avanzado. El filtro elíptico es una generalización del filtro de Chebyshev, pero que permite al diseñador acortar la longitud de la transición y el rizado de la banda de bloqueo o de la banda de paso. Es interesante saber que tal filtro análogo existe.

2.3.2. FILTRO DISEÑADO POR EL METODO DE YULE-WALKER. [13]

El procedimiento que se toma para el diseño de este tipo de filtro, se explica en el numeral 2.1.1.4. Este método no es muy conocido y utiliza diferentes procedimientos para calcular los coeficientes del numerador y del denominador, de la función de transferencia discreta del filtro. Es así que para el cálculo del numerador utiliza ajuste de mínimos cuadrados para la respuesta impulso del filtro y para los coeficientes del denominador utiliza la transformada inversa

de Fourier.

Para este método se especifica la magnitud de respuesta de frecuencia deseada y los puntos de frecuencia en los cuales existe un cambio de magnitud (idealmente), en vectores fila.

Esta técnica de diseño permite realizar filtros multibanda, con especificación tanto de frecuencias como magnitudes según el caso.[4]

2.3.3. FILTRO DISEÑADO POR INVARIANCIA A LOS PULSOS.[1.2.10]

El filtro del paquete que utiliza esta técnica es el filtro de Prony, ya que en un sistema lineal, la respuesta de pulso puede especificar completamente el comportamiento del filtro, por lo tanto esta estrategia de diseño consiste en deducir un filtro digital cuya respuesta impulso sea una versión muestreada de la respuesta impulso de un filtro analógico dado; es por ello que en la rutina del paquete MATLAB para el diseño de un filtro digital por este método, indica que primero debe diseñarse un filtro de los tres inicialmente descritos (Butterworth, Chebyshev, o Elíptico), para que por medio de la respuesta impulso de estos, se pueda diseñar por este método, pudiéndose elegir indistintamente el orden del numerador y denominador de la función de transferencia discreta.

2.3.4. FILTRO REALIZADO MEDIANTE TECNICA DE DISEÑO DIRECTO.

El último filtro recursivo de estudio es el diseñado por el método de minimización del error cuadrático medio (MSE), que es una técnica de diseño directo, debido que para el diseño, se parte directamente de una respuesta de frecuencia especificada. Ya que este procedimiento es muy laborioso, desde el punto de vista del cálculo, no sería práctico sin la ayuda de un computador.

Este diseño utiliza la respuesta de frecuencia compleja de un filtro diseñado anteriormente (Butterworth, Chebyshev o

Elíptico), por lo cual se indica en la rutina correspondiente este particular. [1]

2.3.5. FILTROS DISEÑADOS POR APLICACION DE VENTANAS. [1.2.10]

Los filtros diseñados por aplicación de ventanas son filtros no recursivos. Los métodos de diseño de fase lineal con longitud finita y de fase lineal en forma generalizada (con posibilidad de diseño multibanda) de las rutinas en el paquete MATLAB, utilizan aplicación de ventanas. Como se pudo observar en el numeral 2.2.1.1. la función de una ventana es truncar la respuesta impulso del filtro luego de haber sido desplazada hasta que el sistema sea causal. Para el objeto, se utilizan las siguientes ventanas en el paquete MATLAB:

- Hamming.
- Hanning.
- Kaiser:
- Bartlett.
- Blackman.
- Rectangular.
- Triangular.
- Chebyshev.

La definición general de la respuesta de frecuencia de una ventana donde m es el ancho de la ventana, es como sigue:

$$W(\omega) = \sum_{k=-m}^m w_k \cdot e^{-j\omega k} \quad (2.58)$$

Las ventanas más utilizadas son: Rectangular, Triangular, Hanning, Hamming, Kaiser, las cuales se presentan a continuación con sus transformadas, siendo $w(k)=0$ para $|k| > M$ para todas las ventanas.

2.3.5.1. Ventana Rectangular.

La descripción de la ventana rectangular es:

$$w(k) = 1 \quad (2.59)$$

y la expresión de su transformada es:[2.10]

$$W(\omega) = \frac{\text{sen}\left(\frac{2m+1}{2} \omega\right)}{\text{sen}\left(\frac{\omega}{2}\right)} \quad (2.60)$$

La respuesta de la ventana rectangular es la razón de senos. El numerador cambia como $(2m+1)/2$ y el denominador varía más lentamente como $1/2$. La respuesta de ventana es dominada por dos regiones. Primero hay un pico largo alrededor de $\omega = 0$, el cual es denominado lóbulo principal de la respuesta, siendo la porción que se encuentra entre los primeros dos cruces por cero. El resto de la respuesta de ventana es denominado lóbulos laterales, los cuales en la ventana rectangular se caracterizan por oscilaciones con cruces por cero cada $2\pi/(2m+1)$ y decremento de amplitud.

Cuando la ventana se hace más grande, el lóbulo principal se hace más alto y estrecho, y los lóbulos laterales se concentran más alrededor de $\omega=0$, en otras palabras, la respuesta de ventana se comprime alrededor de la frecuencia cero.

En resumen, la aplicación de la ventana rectangular, causa un ensanchamiento de la región de transición y un rizado alrededor de la región de transición. El ensanchamiento es atribuido al lóbulo principal de la respuesta de ventana y los rizados son causados por los lóbulos laterales. El aumento del orden m resultará en rizados más rápidos, pero no reducirá la amplitud de los mismos.

Una ventana rectangular de longitud finita, genera un rizado máximo de cerca del 8.9% del cambio de ganancia en la transición.[2]

En la figura 2.14 se presenta la función de la ventana rectangular, con su transformada:

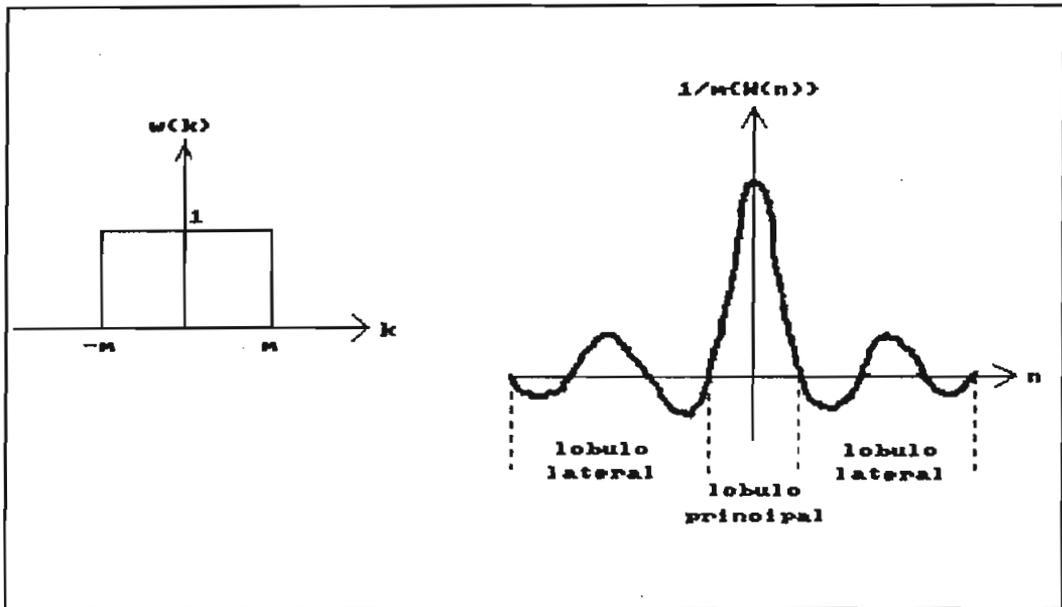


Fig. 2.14 Ventana rectangular y su transformada.

2.3.5.2. Ventana Triangular (Fejér-Bartlett). [1.10]

La descripción de esta ventana es la siguiente:

$$w(k) = 1 - |2k/m| \quad (2.61)$$

En este tipo de ventana, el lóbulo principal es más ancho y más bajo que su similar rectangular (del mismo orden), y las oscilaciones de rizado en los lóbulos laterales, son menores en amplitud, además de no poseer rizado de pico negativo. En la figura 2.15, se muestra la función triangular y su transformada.

2.3.5.3. Ventana de Hanning. [1.2.10]

La selección de los coeficientes particulares para la ventana de Hanning se hace mediante un truncado gradual antes que abrupto de los coeficientes de Fourier. La descripción de la ventana de Hanning está dada por un coseno "elevado", por lo que también se la conoce con este nombre.

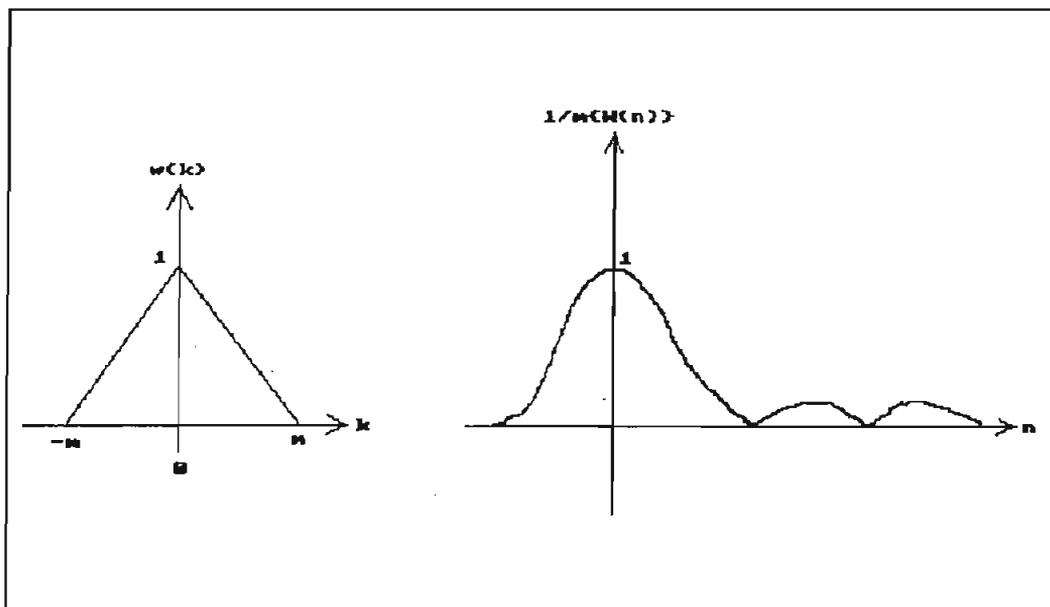


Fig. 2.15 Ventana triangular y su transformada.

$$w(k) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos\left(\frac{\pi k}{m+1}\right) \quad (2.62)$$

Luego de realizar la transformada, se tiene la siguiente expresión resultante: [2]

$$W(\omega) = \frac{\text{sen}[(m+1)\omega] \cos(\omega/2)}{2 \text{sen}(\omega/2)} \left[\frac{1}{1 - \left(\frac{\text{sen}(\omega/2)}{\text{sen}(\pi/2(m+1))}\right)^2} \right]$$

(2.63)

La forma exacta de esta expresión no es tan importante como la apreciación de la forma que ésta toma, como se puede observar en la figura 2.16, en la cual se compara la ventana rectangular con la ventana de Hanning.

Como se puede observar en la figura 2.16, los primeros cruces por cero están localizados a $\pm 2\pi/(m+1)$, y el lóbulo principal de Hanning, es de aproximadamente dos veces el ancho del lóbulo de la ventana rectangular. También se puede notar que los lóbulos laterales de la ventana de Hanning son cerca de un décimo de amplitud de los de la ventana rectangular; por lo tanto, el uso de la ventana de

Hanning en lugar de la ventana rectangular, resulta en un doblaje de la región de transición y rizados mucho más pequeños.

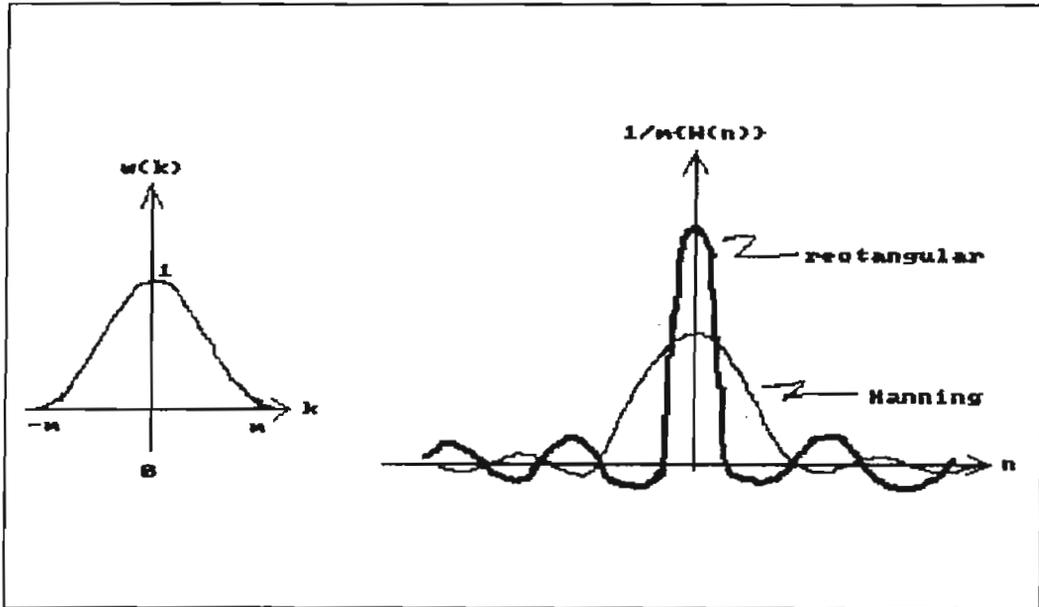


Fig. 2.16 Ventana de Hanning.

Por lo anteriormente expuesto, si una aplicación es sensible a los rizados en la respuesta de frecuencia, es mejor usar la ventana de Hanning, porque aunque ésta dobla el ancho de la región de transición del filtro, se puede corregir esta situación doblando el orden del filtro, para disminuir por lo tanto a la mitad el ancho de la región de transición.

En otras palabras, para obtener un determinado ancho de región de transición mediante un filtro diseñado con ventana de Hanning, éste deberá ser del doble del orden de un filtro diseñado por medio de la ventana rectangular para cumplir con la misma especificación.

2.3.5.4. Ventana de Hamming. [1.2.10]

Debido a que las ventanas rectangular y de Hanning tienen generalmente signos opuestos en sus lóbulos laterales, es decir cuando Hanning es positivo, la rectangular es negativa y viceversa. Hamming construyó una ventana que sea una mezcla de las dos anteriores, con el fin de reducir la

amplitud de los lóbulos laterales. Propuso una ventana "generalizada de Hanning", la cual es una función de dos parámetros: a y b , donde $2a + b = 1$.

$$w(k) = 2a \cos(\pi k/m) + b \quad (2.64)$$

Si $a=0$ y $b=1$, la ventana resultante es la rectangular. Si a es incrementado a $1/4$ y b decrementado a $1/2$, la ventana es aproximadamente una ventana Hanning, excepto que en los extremos $w(-m)$ y $w(m)$ se hace cero. Por lo tanto, si la ventana de Hamming se encuentra entre las ventanas de Hanning y rectangular, se debe cumplir que a esté entre 0 y 0.25 , y b se halle entre los valores de 0.5 y 1 . [1.2]

Pero Hamming al realizar sus pruebas, halló que los valores de a y de b , eran funciones también del orden del filtro, ya que filtros de orden pequeño, requerían una ventana Hamming que se aproxime más a una ventana rectangular, es decir con b grande. Si el orden del filtro era grande, b se hace pequeño y a se hace grande, por lo tanto, la ventana se aproxima más a una de Hanning.

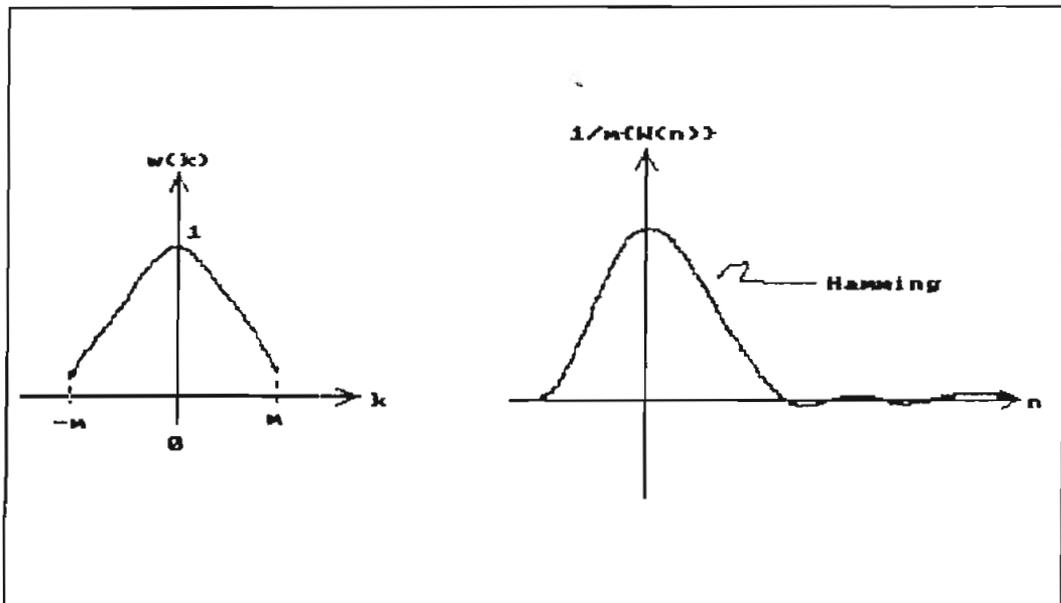


Fig. 2.17 Ventana de Hamming.

Se puede observar en la figura 2.17 la respuesta de

frecuencia de la ventana de Hamming.

En el paquete MATLAB, la rutina creada para el diseño de filtro recursivo por medio de la ventana de Hamming, designa automáticamente estos dos valores, dependiendo del orden que se ha elegido para el filtro. Tentativamente, se podría decir que para el diseño de un filtro de orden menor a 10 se aproxima a una ventana rectangular, y sobre 10 a una ventana de Hanning.

2.3.5.5. Ventana de Kaiser. [1,2,8,10]

Kaiser tenía una aproximación diferente; pensó que sería útil encontrar una función ventana que se pueda ajustar, es decir, que la ventana contenga un parámetro que controle explícitamente el lóbulo principal y los lóbulos laterales. Kaiser, utilizó las funciones de Bessel (las cuales no se encuentran tabuladas en manuales matemáticos para todos los valores de x , por lo que se emplea la expansión en series de potencias para $I_0(x)$ de la ecuación (2.66)), dando gran resultado en la utilización de ventanas ajustables, obteniéndose, lóbulos principales estrechos con lóbulos laterales de pequeñas amplitudes. Kaiser logró hacer ésto, usando la función de Bessel $I_0(x)$, haciendo que el argumento de ésta, dependa de los coeficientes k de la ventana como se observa en la ecuación (2.65).

$$w(k) = \frac{I_0 [\beta \sqrt{1 - (k/m)^2}]}{I_0(\beta)} \quad (2.65)$$

donde:

$$I_0(x) = 1 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{(x/2)^i}{i!} \right)^2 \quad (2.66)$$

El límite superior "M" del sumatorio en la ecuación (2.66), se obtiene basado en el criterio de que el último término en la serie de potencias es menor que 1×10^{-8} ; en la tabla 2.1

se presentan los valores que toma "M" para $k=0, \dots, 10$. [8]

k	M
0	15
1	14
2	14
3	14
4	14
5	13
6	13
7	12
8	11
9	9
10	1

Tabla 2.1 Valores del límite superior "M" en el sumatorio.

El argumento del numerador de la ecuación (2.65) (el contenido de los corchetes), comienza con el valor de β cuando $k=0$ y decrece a 0, a medida de que k se incrementa hasta m . El denominador normaliza los coeficientes de la ventana, siendo una constante respecto a k .

El parámetro β , simplemente escala el argumento de la función de Bessel. Cuando β es cero, el numerador y denominador de los coeficientes de ventana son 1 (en la ecuación (2.65)), lo que implica que la ventana de Kaiser, se vuelve una ventana rectangular. Cuando β es 5,4414 la ventana de Kaiser, se transforma en una ventana de Hamming. Mientras β se hace más grande, el lóbulo principal de la ventana de Kaiser se hace más ancho y los lóbulos laterales se hacen más pequeños. Por lo tanto, se puede ajustar la

ventana de Kaiser para satisfacer especificaciones de rizado y/o de transición.

Si la respuesta de frecuencia deseada es definida, todas las anteriores especificaciones, son elegidas automáticamente. El ancho del lóbulo principal de la respuesta de la ventana, es controlado por β y la longitud de la ventana, entonces para un β dado, el ancho de transición es realmente una restricción sobre la longitud del filtro "m". En la tabla 2.2 se pueden observar porcentajes de rizado, relacionados con el valor de β que se especifica en el diseño de un filtro, con esta ventana:[2]

RIZADO	β
< 9 %	0.0
5 %	1.34
1 %	3.39
0.5 %	3.98
0.1 %	5.65
0.05 %	6.21
0.01 %	7.857
0.001 %	10.061

Tabla 2.2 Porcentajes de rizado en relación a β

En la tabla 2.2, se puede notar que el máximo rizado es del 9 %, mediante el diseño de filtros con la ventana de Kaiser. Si un diseño puede tolerar un rizado más grande que el 9 %, se debería utilizar la ventana rectangular, ya que ésta tiene un 9 % y genera las regiones de transición más estrechas. En la figura 2.18, se muestra la función y la respuesta de la ventana de Kaiser.

Otras ventanas incluidas en el paquete MATLAB, son las de

Bartlett, Blackman y Chebyshev, cuyas respectivas funciones, aunque no son muy conocidas, se presentan a continuación, debido a que también han sido implementadas como rutinas en la presente tesis. Se puede añadir, que se conocen alrededor de 200 ventanas diferentes^[2], de las cuales se están utilizando 8, pertenecientes al mencionado paquete.

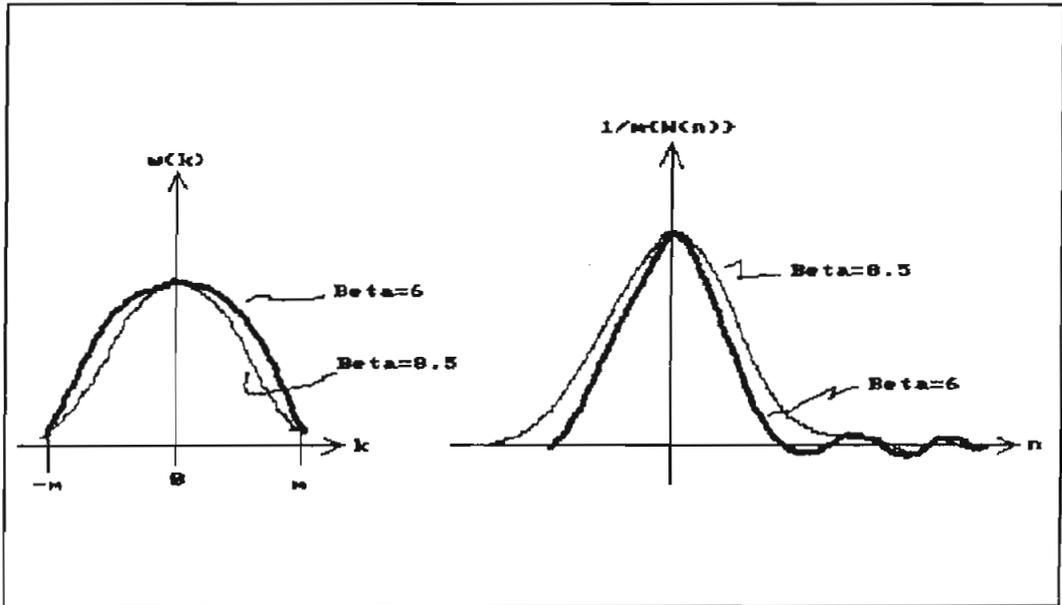


Fig. 2.18 Ventana de Kaiser.

2.3.5.6. Ventana de Bartlett.^[4]

La función ventana de Bartlett, está dada por:

$$w(k) = 1 - \frac{|k|}{m+1} \quad (2.67)$$

Esta ventana es parecida a la ventana triangular (o de Fejér-Bartlett), por ello su nombre. Se puede notar, que mientras más alto sea el valor de m , más se aproxima a la ventana triangular.

2.3.5.7. Ventana de Blackman.^[4]

La ventana de Blackman, posee la siguiente descripción:

$$w(k) = 0.42 - 0.5 \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot k/m) + 0.08 \cdot \cos(4 \cdot \pi \cdot k/m) \quad (2.68)$$

Como se puede ver, la función ventana de Blackman, es una función periódica, válida para el segmento, $|k| < m$.

2.3.5.8. Ventana de Chebyshev. [4]

La descripción de la función ventana de Chebyshev es bastante compleja, y más aún su transformada, pero se puede decir, que se basa en el mismo criterio que del filtro que lleva su nombre: "criterio de minimización de Chebyshev", el cual busca disminuir los rizados de los lóbulos laterales de la respuesta de frecuencia de ventana, para en este caso, disminuir el rizado en la banda de bloqueo de la respuesta de frecuencia del filtro no recursivo así diseñado.

El valor de atenuación del rizado en la región de bloqueo de la respuesta de frecuencia del filtro, debe ser de 20 dB por lo menos, como para obtener un rizado aceptable en el diseño.

2.3.6. FILTROS DISEÑADOS POR APLICACION DE VENTANAS CON RESPUESTA DE FRECUENCIA ESPECIFICADA.

Los filtros que han sido diseñados mediante esta técnica, son los que corresponden a "fase lineal general". Utilizan el mismo principio del numeral 2.3.5.; es decir, el uso de ventanas, pero con la diferencia de que en este caso, se especifica la respuesta de frecuencia ideal del filtro, lo cual no se hacía en el numeral 2.3.5. Al realizar esta especificación de respuesta de frecuencia, ya no se define ningún parámetro a no ser el orden del filtro, la frecuencia de muestreo, los vectores de magnitud de respuesta y de frecuencia, como se explica detalladamente en las ayudas de las rutinas creadas. La ventaja de este tipo de diseño, es que se puede realizar filtros multibanda.

2.3.7. TECNICA DE DISEÑO OPTIMO DE FILTROS. [1.15.18]

Es la última técnica utilizada, para el diseño de filtros no recursivos. Existen algunos algoritmos que se pueden

utilizar en esta técnica, como son los de Herrmann, Schuessler, Hofstetter, Rabiner; y, el que utiliza el paquete MATLAB, el algoritmo de Parks-McClellan, que a su vez es el más conocido y utilizado de todos los anteriormente nombrados. En todas estas soluciones se emplea el mismo método básico, que consiste en producir un desempeño equiindulante del filtro, tanto en la banda de paso como en la de bloqueo. Es un proceso iterativo en el que cada iteración produce una aproximación al filtro deseado. El desempeño ondulante de la aproximación se compara entonces con la especificación y, como resultado, se produce una nueva aproximación.

Este método tiene también la ventaja, de que permite realizar diseños de filtros multibanda.

2.4. RESPUESTA A LA FUNCION IMPULSO.

La función impulso digital, es una entrada muy simple, un 1 a un índice 0 y cero en otro caso:

$$i_k = 1 \quad \text{si } k=0; \quad 0 \text{ en otro caso} \quad (2.69)$$

La respuesta impulso del filtro es simplemente su salida cuando su entrada es un impulso.

2.4.1. RESPUESTA IMPULSO DE UN FILTRO NO RECURSIVO.

Si h_k es la respuesta impulso de un filtro, se tiene de la forma general de un filtro no recursivo que:

$$h(k) = y(k) = \sum_{i=-m}^m c(i) \cdot x(k-i); \quad x_k = \text{impulso} \quad (2.70)$$

La entrada es un impulso i_k , lo cual significa que:

$$x_k = i_k = 1 \quad \text{si } k=0; \quad 0 \text{ en otro caso} \quad (2.71)$$

o también:

$$x_{k-1} = 1 \quad \text{si } i = k; \quad 0 \text{ en otro caso} \quad (2.72)$$

Entonces, cada producto de la suma es cero excepto el producto donde $k=i$. Por lo tanto, la respuesta impulso del filtro no recursivo consiste en los coeficientes del filtro mismo.

$$h(k) = c(k) \quad (2.73)$$

Esta relación entre la respuesta impulso y los coeficientes de un filtro digital no recursivo hacen de la respuesta impulso una forma natural de descripción de estos filtros. Suponiendo que se tiene un filtro no recursivo en una "caja negra", y que se desea medir sus coeficientes, se podría colocar un impulso en su entrada y observar su respuesta impulso.

La longitud de la porción distinta de cero de la respuesta impulso está determinada por el número de coeficientes en el filtro, y como estos filtros poseen como máximo $2m+1$ coeficientes distintos de cero, la respuesta impulso también no sería más grande que $2m+1$. Por esta razón, los filtros no recursivos son llamados también **filtros de respuesta impulso finita (FIR)**.

2.4.2. RESPUESTA IMPULSO DE UN FILTRO RECURSIVO.

La respuesta impulso del filtro recursivo es más compleja. Como la forma general del filtro recursivo es:

$$h(k) = y(k) = \sum_{i=-m}^m c(i) \cdot x(k-i) + \sum_{j=1}^n d(j) \cdot y(k-j) \quad (2.74)$$

donde $x(k)$ es el impulso. Utilizando el mismo razonamiento que en los filtros no recursivos, se puede notar que solamente los términos $k=i$ contribuyen a la suma no

recursiva:

$$h(k) = c(k) + \sum_{j=1}^n d(j) \cdot h(k-j) \quad (2.75)$$

Desafortunadamente, no existe una interpretación sencilla para este resultado. La respuesta impulso de un filtro recursivo es más complicada, y no está relacionada tan fácilmente a los coeficientes del filtro como en el caso no recursivo.

Como se puede observar en la ecuación (2.75), la respuesta impulso de un filtro recursivo puede permanecer distinta de cero para índices muy grandes. La porción recursiva continúa generando una salida, bastante después de que los coeficientes $c(k)$ son cero. Por lo tanto, los **filtros recursivos tienen respuestas impulso infinitas**, por lo que son también denominados filtros IIR (respuesta impulso infinita).

2.4.3. RESPUESTA IMPULSO Y LA RELACION ENTRADA-SALIDA.

La respuesta impulso es muy importante, ya que las entradas y las salidas del filtro, están relacionadas a través de ésta. Si por ejemplo, consideramos un filtro no recursivo, la entrada y la salida están relacionadas a través de los coeficientes del filtro. Sin embargo, para un filtro no recursivo, la respuesta impulso h_k , es igual a los coeficientes del filtro, entonces, la entrada y salida están relacionadas a través de la respuesta impulso. Esta relación es denominada **convolución**, es decir, la salida de un filtro digital no recursivo es solo la convolución de la entrada y la respuesta impulso del filtro.

Si se mira a un filtro recursivo, se tendrá problemas al tratar de relacionar la entrada y la salida a través de la respuesta impulso, debido a que en estos filtros las expresiones de salida continúan haciéndose cada vez más complicadas.

Si se aplica un impulso i_k al filtro, éste producirá su respuesta impulso h_k . Así mismo, si se introduce un impulso desplazado al filtro, i_{k+1} , el filtro producirá una respuesta impulso desplazada, h_{k+1} ; y si se introduce un impulso desplazado y escalado, se producirá una respuesta impulso desplazada y escalada al igual que el impulso. Suponiendo que se representa la entrada a un filtro como la suma de impulsos desplazados, cada impulso será relacionado con un valor de la entrada. Adicionalmente cada impulso es ponderado por un valor de entrada. Entonces:

$$x_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \cdot i_{k-j} \quad (2.76)$$

Se puede aislar esencialmente cada término de la secuencia de entrada. Debido a las propiedades de superposición y homogeneidad, la salida del filtro es solo la suma de las salidas correspondientes a cada una de las entradas. Pero como se sabe que cada impulso escalado y desplazado, genera una respuesta impulso escalada y desplazada, entonces, la salida del filtro es la suma de todas las respuestas impulso:

$$y_k = \sum_{j=-\infty}^{\infty} x_j \cdot h_{k-j} \quad (2.77)$$

La ecuación (2.77) es una forma alternativa de la convolución. Otra forma se tiene substituyendo $l=k-j$.

$$y_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_l \cdot x_{k-l} \quad (2.78)$$

Por lo tanto, la entrada y la salida son relacionadas a través de la convolución de la respuesta impulso. Este desarrollo es mucho más intuitivo que el método anterior.

Si se tiene combinaciones de filtros digitales, como por ejemplo un paralelo de dos filtros: filtro 1 y filtro 2, la

respuesta impulso equivalente será la suma de las respuestas impulso de los filtros individuales:

$$h_k = h_{1k} + h_{2k} \quad (2.79)$$

Lo anterior se debe a que la salida del filtro paralelo equivalente es la suma de las salidas de los filtros individuales, y éstos comparten la misma entrada.

La respuesta impulso equivalente para el arreglo en cascada es la convolución de las respuestas impulso de los filtros individuales:

$$h_k = \sum_{l=-\infty}^{\infty} h_{1l} \cdot h_{2(k-l)} \quad (2.80)$$

La ecuación (2.80) se obtiene, debido a que la entrada al primer filtro es x_k , y la entrada al segundo filtro es la salida del primero. La salida de la forma cascada equivalente es la salida del segundo filtro. Por lo tanto al aplicar un impulso a la entrada del primer filtro, su salida será h_{1k} , la respuesta impulso de este filtro, que a su vez será la entrada del segundo filtro.

$$x_{1k} = x_k \quad ; \quad x_{2k} = y_{1k} \quad ; \quad y_k = y_{2k} \quad (2.81)$$

2.5. APLICACIONES.

Como consecuencia de lo expuesto en los numerales anteriores, se puede concluir que:

- El filtro de Butterworth no posee rizado, pero tiene una región de transición extensa. Este filtro se denomina también filtro de **máxima suavización (monotonía)**.

El filtro de Butterworth es apropiado para aplicaciones que no pueden tolerar rizado (ingeniería biomédica) en las

bandas de paso o de bloqueo. Este provee una respuesta de frecuencia suavizada a expensas de producir una región extensa de transición.

La variación de atenuación de un filtro Butterworth en la región de transición es de 6 dB/octava (20 dB/década) por cada polo; de manera que un Butterworth de octavo orden tendrá una variación de atenuación de 48 dB/octava (160 dB/década) en la región de transición.^[7]

La respuesta de fase de un filtro de Butterworth no es lineal. Por tanto, una respuesta a un escalón o pulso aplicado a un filtro Butterworth provocará un offset al inicio de la señal de salida. Este filtro se usa cuando todas las frecuencias de la banda de paso deben tener la misma ganancia.^[7]

- El filtro de Chebyshev tiene rizados ya sea en la banda de bloqueo o en la banda de paso, pero no en ambas. La altura pico-pico del rizado más grande es minimizado por este diseño. El filtro tiene una banda de transición más pequeña que el filtro de Butterworth del mismo orden. Si la aplicación puede tolerar rizado (sonar, radar), hay como considerar el filtro de Chebyshev, ya que este tiene una región de transición más angosta que el filtro de Butterworth.

Mientras más alto sea el orden del filtro, más ondulaciones aparecerán en la banda de paso. La amplitud de la ondulación puede establecerse en el filtro al diseñarlo y usualmente se fija a 0.5 dB, 1 dB, 2 dB ó 3 dB. Mientras más ondulación se permita, más atenuación se obtendrá en la región de transición. El filtro Chebyshev tiene una variación de atenuación en la región de transición de más de 6 dB/octava/polo. Es muy útil cuando la atenuación en la región de transición debe ser muy rápida. Las ondulaciones (rizado) en la banda de paso o de bloqueo son el precio que se debe pagar por la respuesta en la región de transición.

La variación de atenuación de un filtro Chebyshev en la región de transición es: [7]

$$20 \cdot \log \epsilon + 6(n - 1) + 20 \cdot n \cdot \log(w/w_c) \quad (2.74)$$

donde:

n = orden del filtro

ϵ = una constante, entre 0 y 1, que determina la ondulación del filtro, ej:

ondulación de 0.5 dB -----> $\epsilon = 0.3493$

ondulación de 3 dB -----> $\epsilon = 0.9976$

En la región de transición la atenuación es mayor que la respuesta de un Butterworth por un factor de $20 \log \epsilon + 6(n - 1)$. Los filtros Chebyshev pueden tener menos polos que los Butterworth y ser menos complejos, para una cantidad determinada de variación de la atenuación en la región de transición, si la respuesta de amplitud en la banda de paso no tiene que ser constante.

El retraso de fase de los filtros Chebyshev es menos lineal que el de los filtros Butterworth. Mientras más alto sea el orden de un filtro Chebyshev y más ondulación tenga, menos lineal será su retraso de fase. Por lo tanto, más offset inicial tendrá con entradas de escalón y de pulso.

- El filtro elíptico tiene ondulaciones en las bandas de paso y de bloqueo, y posee la región de transición más angosta que de cualquier otro filtro del mismo orden y especificación de rizado. Entonces, el filtro elíptico es ideal para aquellas aplicaciones donde los rizados pueden ser tolerados y las regiones de transición cortas son demandadas (por ejemplo en transmisión de datos por la red eléctrica).

En general, los filtros son utilizados en procesamiento de lenguaje, comunicación de datos, ingeniería biomédica, acústica, sonar, radar, sismología, exploración de petróleo,

instrumentación, robótica, y en equipos electrónicos de uso doméstico (video grabadoras, cámaras de video, equipos de sonido, etc...). [10]

Las aplicaciones de los filtros no recursivos, diseñados por medio de ventanas, se guían por las distintas propiedades que se presentaron en el numeral 2.3.5. para cada una de las ventanas más utilizadas.

En general, las aplicaciones que se pueden dar a los filtros recursivos son todas aquellas en donde se quiere o se necesita extraer información de las entradas, como por ejemplo en circuitos predictores climatológicos, lazos de control con el uso de predictores, etc. Adicionalmente, se los puede utilizar en todas aquellas aplicaciones, donde se requiere filtrar ruido o determinadas frecuencias que no son de interés o que degradan a las señales que se estudia. Sus diseños son más complicados y largos que los de los no recursivos, y generalmente dependen de un computador; ya que, sus coeficientes son calculados en base a las salidas pasadas, lo cual dificulta en gran manera su cálculo.

Las aplicaciones que se pueden dar a los filtros no recursivos, son generalmente todas aquellas donde se desea mejorar la calidad de las señales de entrada al filtro. Estos son sencillos de diseñar, y no requieren de herramientas muy avanzadas para ello. Se los utiliza ampliamente en instrumentación biomédica, como son electrocardiógrafos, electroencefalógrafos, bisturí electrónico, etc. Su función en estos casos es eliminar el ruido que se produce por los músculos del cuerpo humano (ruido muscular), que es suficientemente fuerte como para distorsionar las señales de interés, debido a que éstas se registran con niveles de voltaje muy bajos (biopotenciales), que son fácilmente modificados por el ruido muscular.

A continuación se presentan, aplicaciones posibles para los distintos tipos de filtro que se pueden diseñar:

- **Pasabajos:**

Este filtro se lo utiliza generalmente para aplicaciones en las cuales se necesita eliminar ruido contaminante de alta frecuencia de la señal de interés que normalmente posee una componente de continua (cuya frecuencia es muy cercana a cero), o un ancho de banda muy reducido.

- **Pasaaltos:**

Se lo puede utilizar en casos en los cuales, interesa eliminar componentes de frecuencia muy baja o señales continuas de otras que poseen tanto componentes alternas como continuas. También se lo podría utilizar para aislar una señal contaminante de ruido, de una señal continua.

- **Pasabanda:**

A este tipo de filtro se lo puede utilizar para separar señales de distintas frecuencias que se encuentran sumadas en una sola. Por ejemplo: si se tiene una señal alterna con tres componentes de frecuencia distinta, 20, 50, 120 Hz. Utilizando un filtro pasabanda podemos separar la señal que contiene 50 Hz y aislarla de la original.

- **Eliminabanda:**

Una aplicación actual de este tipo de filtro, es la de eliminar la señal alterna de 60 Hz de la red eléctrica, en módulos de control de iluminación en casas, los cuales trabajan con la señal de 60 Hz como portadora de información binaria representada como presencia o ausencia de señales de 120 KHz (1 y 0 lógicos) que se transmiten por la red eléctrica existente. El filtro eliminabanda, se encarga de desaparecer la señal de 60 Hz.

- 3. ANALISIS DEL ESPECTRO DE FRECUENCIA DE SEÑALES
 - 3.1. Transformada discreta de Fourier
 - 3.1.1. La TDF y la transformada z
 - 3.2. Transformada rápida de Fourier
 - 3.3. Espectro de frecuencia
 - 3.3.1. Espectro de energía
 - 3.4. Aplicaciones
 - 3.4.1. La TDF y el filtrado
 - 3.4.2. La TDF y la convolución
 - 3.4.3. La TDF y la frecuencia
 - 3.4.4. La TDF y las ventanas

3.0. ANALISIS DEL ESPECTRO DE FRECUENCIA DE SEÑALES.

3.1. TRANSFORMADA DISCRETA DE FOURIER.

El presente capítulo trata principalmente sobre el análisis del espectro de frecuencia de señales, por lo que se debe comenzar necesariamente por el estudio de las transformadas discreta y rápida de Fourier, herramientas indispensables para poder realizar este análisis, y que son utilizadas por el paquete MATLAB para realizar el cálculo del espectro de potencia, además de ser útiles para otras aplicaciones, que se estudiarán posteriormente en el capítulo.

En este capítulo se desarrolla una técnica digital para ir entre los dominios del tiempo y la frecuencia. Con esta técnica, se puede utilizar un computador digital para calcular la respuesta impulso desde una respuesta de frecuencia, o a la inversa. Esta poderosa herramienta puede ser aplicada a señales generales digitales. Dicha técnica es la transformada discreta de Fourier (TDF) y su implementación computacional eficiente, la transformada rápida de Fourier (TRF).

Se inicia el desarrollo de la TDF buscando una manera de calcular la respuesta impulso y la respuesta de frecuencia mediante un computador. Estas dos respuestas están relacionadas mediante la ecuación (3.1):

$$h_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(w) e^{jw^*x} dw \quad (3.1)$$

Con suficiente información de frecuencia, si se aplica la ecuación (3.1) a muestras de la respuesta de frecuencia, dará como resultado una respuesta impulso razonablemente buena. Por lo tanto, si se procede a realizar una manipulación de la ecuación (3.1), expresando primeramente ésta de una forma que el computador pueda aceptar, siendo esta forma, con su más fácil realización, que es

reemplazando la integral con un sumatorio que incluye el término $H(i2\pi/M)$ (respuesta de frecuencia discreta), donde M es el número de puntos de la respuesta de frecuencia; i es un índice tal que $i = 0, 1, 2, \dots, M-1$.

No sería razonable el asumir que la anterior aproximación producirá exactamente la respuesta impulso h_k . El resultado de esta aproximación en la ecuación (3.1), se denotará por h'_1 , y se espera que será "aproximada" a la respuesta impulso h_k .

$$h'_1 = \sum_{i=0}^{M-1} H(i \frac{2\pi}{M}) e^{j \frac{2\pi}{M} i l} \quad (3.2)$$

Se puede ver que la ecuación (3.2) es una versión discretizada de la ecuación (3.1); w es reemplazada por $i(2\pi/M)$ y la integral es aproximada por el sumatorio. La relación entre h'_1 y h_k se desarrolla sustituyendo la expresión $H(i2\pi/M)$ en la ecuación (3.2). Puesto que:

$$H(w) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \cdot e^{-jwk} \quad (3.3)$$

donde N es el número de muestras de la respuesta impulso.

$$h'_1 = \sum_{i=0}^{M-1} \left[\sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j \frac{2\pi}{M} k i} \right] e^{j \frac{2\pi}{M} i l} \quad (3.4)$$

Combinando los exponenciales e intercambiando los sumatorios:

$$h'_1 = \sum_{k=0}^{N-1} h_k \sum_{i=0}^{M-1} e^{j \frac{2\pi}{M} i(l-k)} \quad (3.5)$$

Como el sumatorio en i es una suma finita de una progresión

geométrica, dicha suma posee la siguiente forma:

$$\sum_{i=0}^{M-1} r^i = \frac{1 - r^M}{1 - r} \quad (3.6)$$

En este caso "r" es $e^{j2\pi(1-k)/M}$. La respuesta impulso reconstruída tiene la siguiente forma:

$$h'_l = \sum_{k=0}^{M-1} h_k \frac{1 - e^{j2\pi(1-k)l}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{M}(1-k)l}} \quad (3.7)$$

El numerador es siempre cero, debido a que $e^{j2\pi(1-k)l}$ es 1 cuando k y l son enteros, pero no hay que concluir que todos los términos h'_l van a ser cero. Cuando la diferencia entre l y k es un múltiplo entero de M ($l-k = 0, +/-M, +/-2M, \dots$), el denominador es cero también y h'_l puede tomar un valor distinto de cero, valor que se puede calcular aplicando la regla de l'Hospital, la cual muestra que los términos de la ecuación (3.7) toman el valor de M cuando $l-k$ es un múltiplo de M.

$$\frac{e^{j2\pi(1-k)l} j2\pi l}{e^{j\frac{2\pi}{M}(1-k)l} j\frac{2\pi}{M} l} = M \quad (3.8)$$

Aplicando este resultado a la ecuación (3.7) y encontrando que h'_l es la suma de todos los h_k tal que $k=l, l-M, l+M, l-2M, l+2M$, en otras palabras:

$$h'_l = M \sum_{k=l} h_{l+kM} \quad (3.9)$$

La respuesta impulso reconstruída, h'_l , es la suma de un número infinito de elementos de la respuesta impulso. Por ejemplo, h'_0 es la suma de $h_0, h_{-M}, h_M, h_{-2M}, h_{2M}$, y así. Esta operación está representada en la figura 3.1. El

gráfico superior muestra la respuesta impulso no desplazada de un filtro (correspondiente a $i=0$ en la ecuación (3.9)), el segundo gráfico muestra la respuesta impulso desplazada a la izquierda M puntos (correspondiente a $i=1$), el tercer gráfico muestra la respuesta impulso para $i=-1$, y así sucesivamente. La respuesta impulso reconstruida es la suma de la respuesta impulso del filtro, la cual es desplazada para todos los múltiplos enteros posibles de M .

Como se muestra en la figura 3.1, la respuesta impulso reconstruida, h'_l , es periódica en M y nunca será estrictamente igual a h_k . Sin embargo, cuando M es suficientemente grande, para que las versiones desplazadas de h_k no se superpongan (como se puede ver en la figura 3.1), h'_l es simplemente h_k repetida cada M índices y escalada por un factor multiplicativo de M , siempre y cuando M sea lo suficientemente grande para prevenir sobreposición.

$$h'_l = M \cdot h_k \quad l=0,1,2,\dots,M-1 \quad (3.10)$$

y la respuesta impulso reconstruida es siempre periódica:

$$h'_l = h'_{l+M} \quad (3.11)$$

Cuando h_k y h_{k+M} no tienen términos comunes distintos de cero, se previene la sobreposición. La respuesta impulso no desplazada, h_k , posee términos distintos de cero desde $k=0$ a $N-1$; y, la respuesta impulso desplazada h_{k+M} , posee términos distintos de cero desde $k=-M$ a $-M+N-1$. Para que estas no contengan términos distintos de cero que se superpongan, M debe ser lo suficientemente grande para que los términos diferentes de cero del extremo derecho de h_{k+M} (que es h_{-M+N-1}) no se superponga a los términos diferentes de cero del extremo izquierdo de h_k (h_0). Esto significa que:

$$-M + N - 1 < 0 \quad \text{o} \quad M > N - 1 \quad (3.12)$$

$$M \geq N \quad (3.13)$$

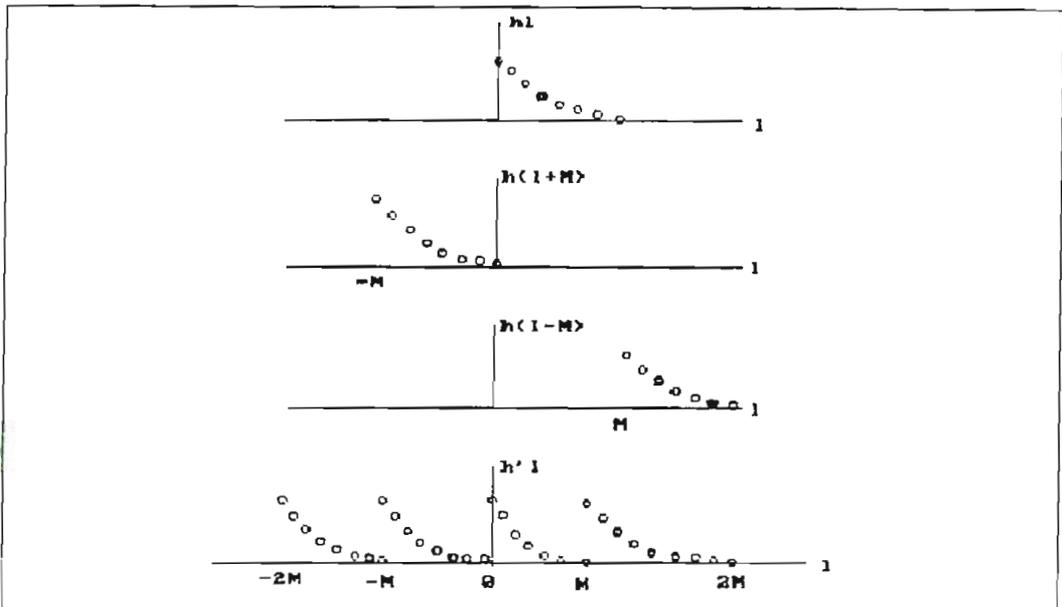


Fig. 3.1 Reconstrucción de la respuesta impulso.

Entonces, N muestras de la respuesta de frecuencia de un filtro son suficientes para reconstruir la respuesta impulso del filtro. Se necesitan solamente N evaluaciones de la respuesta de frecuencia. Calcular más solamente incrementa el período de la respuesta impulso reconstruida sin proveer una mejor reconstrucción. En resumen, si la respuesta de frecuencia es evaluada a solo N frecuencias, $i(2\pi/N)$, la respuesta impulso del filtro puede ser reconstruida desde los N valores de la respuesta de frecuencia. Se pueden calcular los valores discretos de la respuesta de frecuencia mediante:

$$H\left(i\frac{2\pi}{N}\right) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} \quad i=0,1,\dots,N-1 \quad (3.14)$$

La respuesta impulso reconstruida se la obtiene mediante:

$$h_k = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} H\left(i\frac{2\pi}{N}\right) e^{j\frac{2\pi}{N}ik} \quad k=0,1,\dots,N-1 \quad (3.15)$$

La ecuación (3.14) es la definición de la transformada discreta de Fourier (TDF), y la ecuación (3.15) es la

transformada discreta inversa de Fourier (TDIF). La TDF transforma la respuesta impulso del filtro a respuesta de frecuencia. La TDIF como su nombre lo indica, realiza la operación inversa, es decir, transforma la descripción en el dominio de la frecuencia al dominio del tiempo (respuesta impulso). Hay que recordar que la TDF y la TDIF producen resultados periódicos con períodos de N .

Para mayor facilidad, la TDF y la TDIF son representadas por los operadores $H_i = \text{TDF}_N \{h_k\}$ y $h_k = \text{TDIF}_N \{H_i\}$.

En el siguiente ejemplo se usa la TDF para calcular la respuesta de frecuencia discreta de un filtro, que posee la siguiente respuesta impulso:

$$h_0 = 0 ; h_1 = 1 ; h_2 = 2 ; h_3 = 3$$

esta respuesta impulso representa una rampa truncada. En este caso $N = 4$, y la TDF toma la siguiente forma:

$$H\left(j\frac{2\pi}{4}\right) = \sum_{k=0}^3 h_k \cdot e^{-j\frac{2\pi}{4}ki} \quad i=0,1,2,3$$

Esta TDF es bastante simple, y se la puede calcular a mano:

$$H(0) = \sum_{k=0}^3 h_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k \cdot 0}$$

$$H(0) = 0 + 1 + 2 + 3 = 6$$

$$H\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^3 h_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k \cdot 1}$$

$$H(\pi/2) = 0 + e^{-j\pi/2} + 2e^{-j\pi} + 3e^{-j3\pi/2} = -2 + j2$$

$$H(\pi) = \sum_{k=0}^3 h_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k \cdot 2}$$

$$H(\pi) = 0 + e^{-j\pi} + 2e^{-j\pi 2} + 3e^{-j\pi 3} = -2$$

$$H\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \sum_{k=0}^3 h_k \cdot e^{-j\frac{\pi}{2}k \cdot 3}$$

$$H(3\pi/2) = 0 + e^{-j3\pi/2} + 2e^{-j3\pi} + 3e^{-j9\pi/2} = -2 - j2$$

La TDF ha sido desarrollada mediante técnicas basadas en computadores para evaluación de la respuesta de frecuencia. Sin embargo, no hay razón de restringir la TDF a las respuestas de frecuencia e impulso. Matemáticamente, la TDF puede ser aplicada a cualquier señal digital de longitud finita, por decir x_k , para producir una representación en frecuencia X_1 de la señal x_k . De hecho, la representación de frecuencia, X_1 , no será una respuesta de frecuencia a menos de que x_k pase a ser una respuesta impulso. De otra manera, sería solo una forma alternativa de representar x_k . Esta generalización de la respuesta de frecuencia introduce al campo de la representación espectral (como se verá más adelante en el numeral 3.3.) donde las señales digitales son transformadas desde el dominio del tiempo, x_k , al dominio de la frecuencia, X_1 . Esta transformación es hecha en un intento de extraer más información de la señal o para simplificar su manipulación.

3.1.1. LA TDF Y LA TRANSFORMADA Z.

Se ha desarrollado la TDF como si ésta fuera una técnica digital para el cálculo de las respuestas de frecuencia o un método general para representar señales digitales en el dominio de la frecuencia. La TDF es solo un caso especial de la transformada z. La transformada z de un filtro causal de N puntos es el sumatorio de la respuesta impulso multiplicada por z^{-k} .

$$H_z(z) = \sum_{k=0}^{N-1} h_k z^{-k} \quad (3.16)$$

La TDF del mismo filtro se calcula a través de una expresión similar:

$$H_i = \sum_{k=0}^{N-1} h_k e^{-j \frac{2\pi}{N} k l} \quad (3.17)$$

La ecuación (3.17) es solo un caso especial de la ecuación (3.16); z ha sido reemplazada con $e^{j(2\pi/N)l}$. Entonces, el i ésimo coeficiente de TDF es la transformada z evaluada en $z = e^{j(2\pi/N)l}$.

$$H_i = H_z(z) \Big|_{z=e^{j \frac{2\pi}{N} l}} \quad (3.18)$$

La anterior relación se muestra en la figura 3.2. Los coeficientes TDF son evaluados alrededor del círculo unitario. El ángulo entre coeficientes sucesivos es $2\pi/N$, así como N se incrementa, la TDF contiene una representación más exacta de la transformada z alrededor del círculo unitario.

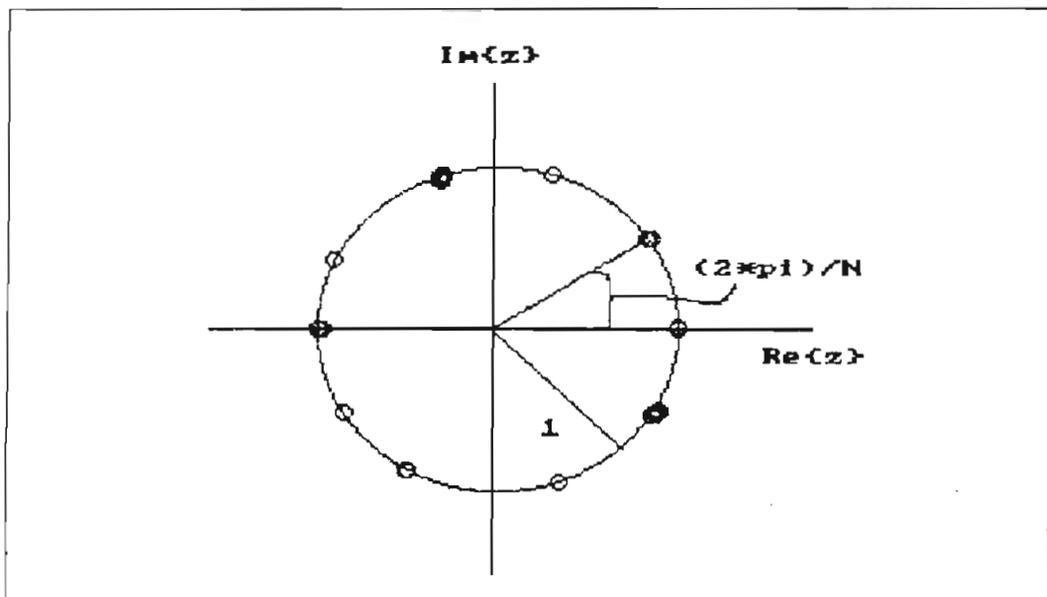


Fig. 3.2 Representación de la TDF.

La respuesta de frecuencia del filtro es su transformada z evaluada alrededor del círculo unitario, y la TDF es una técnica para calcular la respuesta de frecuencia. La conexión entre la TDF y la transformada z se menciona para mostrar las características comunes de ambas técnicas.

3.1.2. PROPIEDADES DE LA TDF.

Como la TDF es ampliamente usada en diseño de filtros digitales y procesamiento digital de señales, es necesario, hacer una revisión de algunas de sus propiedades generalizadas:

- La TDF es lineal:

La TDF es un operador lineal, es decir, se la puede aplicar fácilmente con sumas de señales o señales escaladas.

$$TDF_N[ax_k + bz_k] = aX_1 + bZ_1 \quad (3.19)$$

- La TDIF es lineal:

La TDIF es un operador lineal. Esto es, si $x_k = TDIF_N[X_1]$ y $z_k = TDIF_N[Z_1]$, entonces:

$$TDIF_N[ax_k + bz_k] = aX_1 + bZ_1 \quad (3.20)$$

- La TDF es periódica:

Las componentes de frecuencia producidas por la TDF son periódicas con un período N . Esto es, si $X_1 = TDF_N[x_k]$, entonces:

$$X_1 = X_{1+N} \quad (3.21)$$

- La TDIF es periódica:

La señal digital producida por una TDIF de N puntos es periódica, con un período N . Si $x_k = \text{TDIF}_N[X_1]$, entonces:

$$x_k = x_{k+N} \quad (3.22)$$

- La TDF de señales reales es simétrica conjugada:

Si $X_1 = \text{TDF}_N[x_k]$ y x_k es puramente real (sin componente imaginaria), entonces:

$$X_1 = X_{-1}^* \quad (3.23)$$

El hecho que el espectro de una señal real sea simétrica conjugada, significa que solo la mitad de los coeficientes necesitan ser calculados, almacenados o graficados para tales señales. Si los coeficientes de TDF X_0 hasta $X_{N/2}$ son conocidos, entonces los coeficientes $X_{N/2 + 1}$ hasta X_N o los coeficientes de $X_{-N/2}$ hasta X_{-1} pueden ser inferidos (conocidos) porque ellos son los conjugados complejos. Una propiedad similar se mantiene para señales que son puramente imaginarias, y que podrían ser representadas completamente con solamente $N/2$ coeficientes.

3.2. TRANSFORMADA RAPIDA DE FOURIER. [2.8.10]

Existen muchas formas para calcular la TDF, desde máquinas de propósito especial hasta pequeños circuitos integrados. La TDF es muy difícil de implementar en su forma básica, debido, no a que requiere operadores especiales, ya que solo utiliza adiciones y multiplicaciones, sino porque requiere N adiciones y multiplicaciones complejas para cada coeficiente calculado. Donde haya N coeficientes, una TDF completa requiere N^2 operaciones complejas. Como se sabe, una multiplicación compleja, requiere cuatro multiplicaciones reales y dos sumas reales, y una adición compleja envuelve dos sumas reales.

Un computador actual de propósito general que trabaje por decir a 25 MHz, sin un coprocesador matemático, podría realizar cerca de 200.000 multiplicaciones o adiciones reales por segundo, entonces podría manejar unas 30.000 multiplicaciones complejas por segundo, o 100.000 sumas complejas, lo cual parece suficiente, pero si se toma en cuenta una TDF de 1000 puntos, requeriría 10^6 operaciones complejas y consumiría cerca de 40 segundos de tiempo del computador. [2]

Por esta razón, dos investigadores: J.W. Cooley y J.W. Tukey hallaron una implementación eficiente de la TDF. Esta se conoce como la Transformada Rápida de Fourier (TRF), aunque podría haber sido llamada la transformada discreta rápida de Fourier, ya que la TRF es solo una manera rápida de calcular la TDF. Si se ignora la precisión finita de la aritmética en un computador, la TRF y la TDF generan exactamente los mismos resultados.

Tomando en cuenta una TDF de cuatro puntos ($N=4$) para hallar una forma eficiente de calcularla, y suponiendo que la TDF genera los coeficientes X_0 , X_1 , X_2 y X_3 de los datos x_0 , x_1 , x_2 , y x_3 . Las ecuaciones de la TDF se muestran a continuación para poder mostrar explícitamente como se calculan los coeficientes, utilizando la ecuación (3.14):

$$\begin{aligned}
 X_0 &= x_0 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_1 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} \\
 X_1 &= x_0 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_1 e^{-j\frac{2\pi}{4}1} + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}3} \\
 X_2 &= x_0 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_1 e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}4} + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}6} \\
 X_3 &= x_0 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_1 e^{-j\frac{2\pi}{4}3} + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}6} + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}9} \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Una TDF de cuatro puntos requiere 16 sumas y multiplicaciones. Pero en el sistema de ecuaciones (3.24),

este cálculo requiere solamente 12 adiciones complejas y nueve multiplicaciones ($e^{-j(2\pi/4)0}=1$ y no requiere una multiplicación). Como se puede ver $e^{-j(2\pi/4)k}$ es periódica, con un período de 4. Por lo que los dos últimos términos de X_2 y X_3 pueden ser escritos con argumentos más pequeños:

$$\begin{aligned}
 X_2 &= x_0 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_1 e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}2} \\
 X_3 &= x_0 e^{-j\frac{2\pi}{4}0} + x_1 e^{-j\frac{2\pi}{4}3} + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}2} + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}1} \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

ya que: $e^{-j(2\pi/4)0} = e^{-j(2\pi/4)4}$.

Una ligera inspección de las ecuaciones (3.24) y (3.25) muestra que los datos aparecen para ser procesados en pares: (x_0, x_2) y (x_1, x_3) . Las siguientes ecuaciones resultan de un rearrreglo de la TDF para agrupar en operaciones pares:

$$\begin{aligned}
 X_0 &= (x_0 + x_2) + (x_1 + x_3) \\
 X_1 &= (x_0 + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}2}) + (x_1 + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}2}) e^{-j\frac{2\pi}{4}} \\
 X_2 &= (x_0 + x_2) + (x_1 + x_3) e^{-j\frac{2\pi}{4}} \\
 X_3 &= (x_0 + x_2 e^{-j\frac{2\pi}{4}2}) + (x_1 + x_3 e^{-j\frac{2\pi}{4}2}) e^{-j\frac{2\pi}{4}3} \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

Se puede observar que la nueva organización del sistema de ecuaciones (3.26) calcularán exactamente los mismos coeficientes como la TDF de las ecuaciones (3.24), pero las (3.25) requieren solamente 12 sumas y cinco multiplicaciones complejas, lo cual es casi una reducción a la mitad en las multiplicaciones. Reorganizaciones similares son posibles para cualquier TDF con una longitud de potencias de 2

(2,4,8,16,32,64,...). Esta organización más rápida de TDF es denominada como la transformada rápida de Fourier de potencias de 2 (2TRF). Como prácticamente todas las TRF son algoritmos de potencias de 2, este término es generalmente eliminado y el algoritmo es simplemente llamado TRF.

Existe un método general para expresar una TDF de longitud de potencias de 2 como una TRF, y esta técnica es sugerida, observando las ecuaciones (3.26), en las cuales se tiene que las muestras pares de los datos de entrada aparecen en los términos $x_0 + x_2$ y $x_0 + x_2e^{-j(2\pi/2)}$. Estos son los coeficientes de la TDF de una señal de dos puntos que comprende los términos pares de la entrada. Similarmente, las muestras impares de la entrada aparecen en los términos $x_1 + x_3$ y $x_1 + x_3e^{-j(2\pi/2)}$, que son los coeficientes de la TDF de dos puntos de la secuencia impar de datos.

Entonces, la TRF de cuatro puntos, comienza con el cálculo de dos TDF de dos puntos, una para las muestras pares y la otra para las impares, y luego los resultados de la TDF son combinados como en la ecuación (3.26), lo cual se muestra en la figura 3.3.

La notación usada en la figura 3.3 es para uso general. En su lugar se suele utilizar una más conveniente, más corta y que es utilizada para representar el procesamiento de las señales digitales, denominada gráfica de flujo de datos. La TRF de cuatro puntos es representada como un flujo de datos en la figura 3.4. Los cuatro puntos de datos son aplicados al lado izquierdo del gráfico, y son movidos a la derecha a lo largo de los caminos de datos (líneas). Conforme se movilizan, encuentran operadores de multiplicación y/o adición y realizan las operaciones matemáticas apropiadas. La figura 3.4 es una representación exacta de la ecuación (3.26) y se puede ver que la mitad izquierda de la figura representa dos TDF de dos puntos, y la mitad derecha muestra las combinaciones de las dos TDF para generar los cuatro coeficientes de la TDF. La figura 3.4 muestra el flujo gráfico entero para una TRF de cuatro puntos.

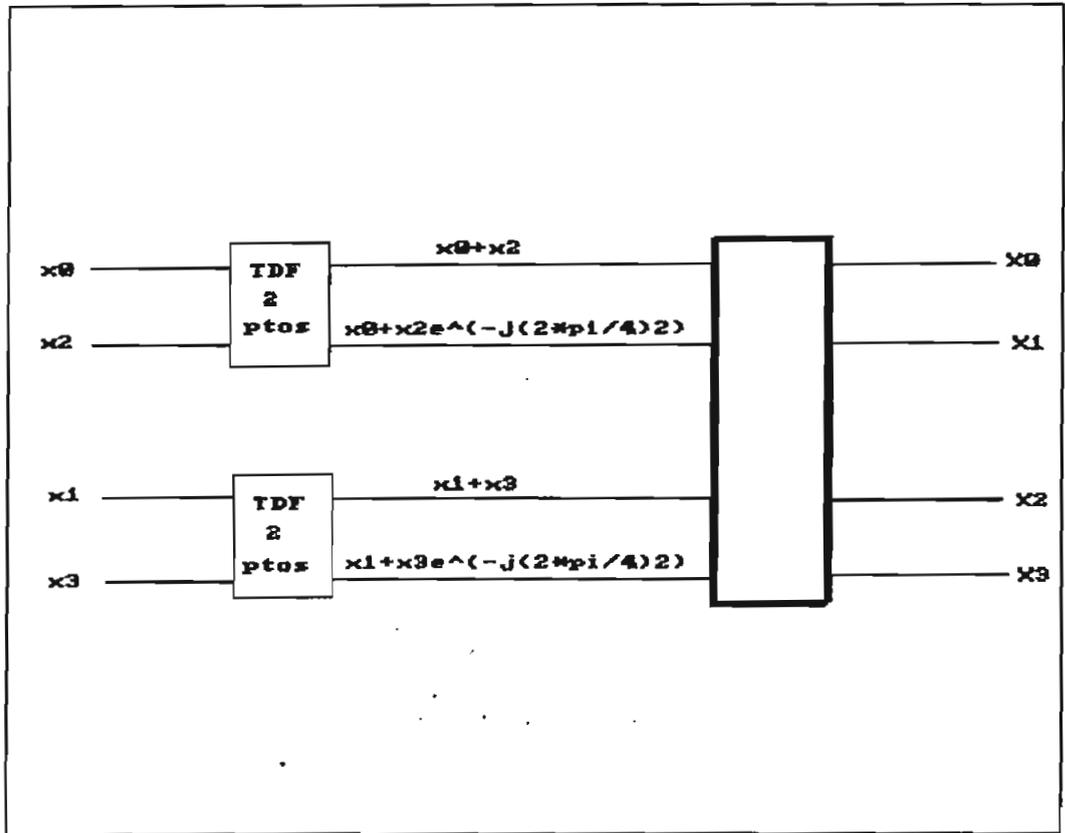


Fig. 3.3 Cálculo de la TRF.

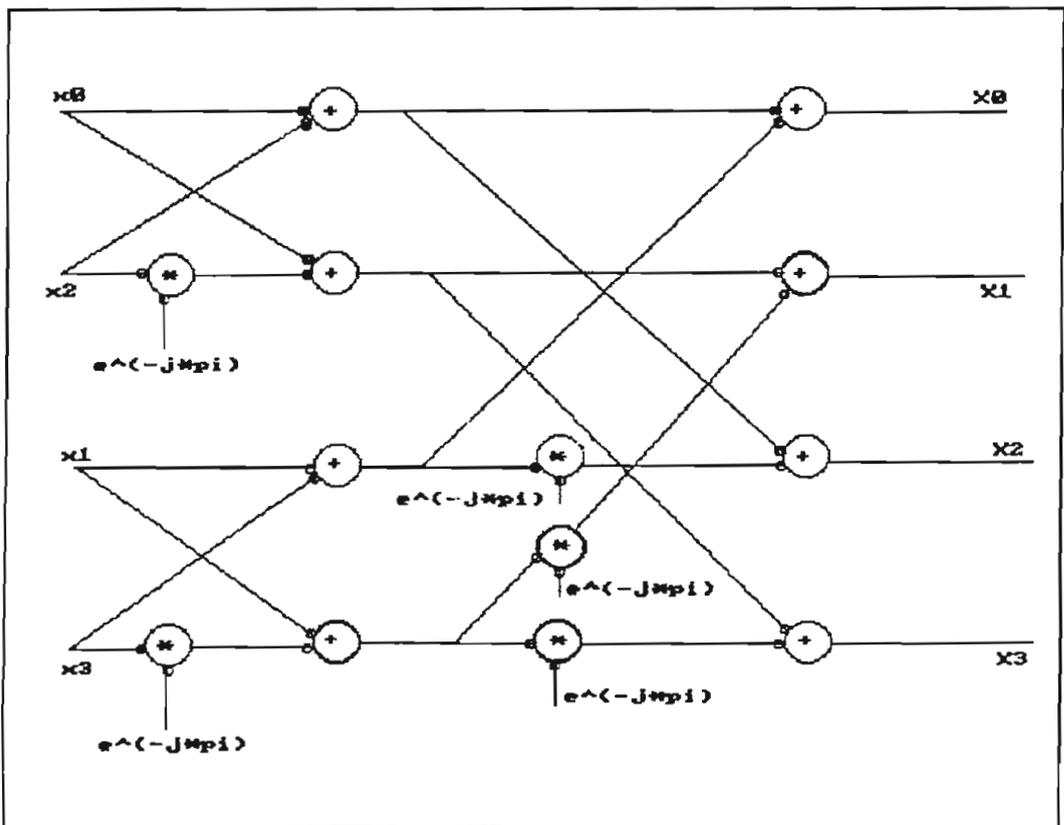


Fig. 3.4 Gráfica de flujo de datos.

Esta interpretación de la TRF de cuatro puntos, sugiere que la organización fué obtenida dividiendo la TDF de cuatro puntos en dos TDF de dos puntos y combinando luego sus coeficientes. Esto implica que una organización de TRF de ocho puntos podría ser obtenida dividiendo la transformada de ocho puntos en dos TDF de cuatro puntos y luego combinando los dos grupos de coeficientes.

Por consiguiente, la TRF está basada en la división repetida de una TDF. Si N es una potencia de 2, las TDF pueden ser repetidamente divididas por la mitad hasta tener $N/2$ transformadas de dos puntos. Se ejecuta la TRF primeramente calculando las $N/2$ TDF de dos puntos, entonces se combinan los coeficientes de aquellas TDF para generar los coeficientes de las $N/4$ TDF de cuatro puntos, se combinan estos coeficientes para hacer los coeficientes de las $N/8$ TDF de ocho puntos y así sucesivamente. De esta manera se construyen TDF muy grandes, hasta obtener los N coeficientes requeridos de la TDF de N puntos.

La TRF puede ser vista como una serie de etapas. La primera etapa es el cálculo de las TDF de dos puntos. Cada TDF de dos puntos requiere dos multiplicaciones y adiciones (complejas), por lo que la primera etapa envuelve N operaciones complejas. La segunda etapa construye los coeficientes de cuatro puntos desde los de dos puntos. Cada transformada de cuatro puntos requiere cuatro multiplicaciones y adiciones y existen $N/4$ de tales transformadas en la segunda etapa. Entonces, la segunda etapa también demanda N operaciones complejas. La tercera etapa construye $N/8$ TDF de ocho puntos, y esta también envuelve N multiplicaciones y adiciones ($N/8 * 8$). Cada etapa sucesiva requiere N multiplicaciones y adiciones debido a que las longitudes de la TDF son dobladas en cada etapa. La etapa final, donde los coeficientes de N puntos son ensamblados finalmente, requieren N adiciones y multiplicaciones. Una TRF de N puntos ($N=2^{\text{entero}}$), tiene $\log_2 N$ de tales etapas, y como cada etapa requiere N multiplicaciones y adiciones, la TRF de N puntos requiere

$N \cdot \log_2 N$ operaciones complejas. [2]

Esto debería ser comparado con las N^2 operaciones demandadas por la implementación directa de la TDF. Como se muestra en la tabla 3.1, mientras N se hace más grande, la TRF se hace incrementalmente más eficiente. Una TRF relativamente pequeña de 64 puntos de datos correrá cerca de 10 veces más rápido que una TDF de 64 puntos, y producirá los mismos resultados. Una TRF de un millón de puntos (1'048.576 puntos) correrá cerca de 50.000 veces más rápido que su contraparte TDF. [2]

Longitud N	TDF N^2	TRF $N \log_2 N$	TRF/TDF $N \log_2 N / N^2$
32	1.024	160	15 %
64	4.160	384	9 %
128	16.384	896	5 %
256	65.536	2.048	3 %
512	262.144	4.608	1,7 %
1.024	1.049.600	10.240	1 %

Tabla 3.1 Comparación entre la TDF y la TRF.

En resumen, el algoritmo de TRF es un esquema eficiente para calcular la TDF. Es importante recordar que la TRF y la TDF calculan exactamente los mismos coeficientes, pero la TRF lo hace más rápido. La mayor restricción de la TRF de potencias de 2 (casi todos los algoritmos de TRF son de este tipo), es que la secuencia de datos debe tener así mismo, una longitud de potencias de 2. Pero esto no es un problema mayor, ya que muchas aplicaciones permiten al usuario seleccionar la longitud de la transformada, o el usuario puede realizar un llenado de ceros para obtener una longitud de secuencia de datos de potencia de 2.

3.3. ESPECTRO DE FRECUENCIA.

Cualquier señal digital de N puntos podría ser aplicada a la TDF y producir un grupo de N coeficientes de TDF. Cuando la señal digital original es una respuesta impulso de un filtro, por ejemplo, los coeficientes de la TDF son muestras de la respuesta de frecuencia. Pero el significado de los coeficientes de la TDF cuando la señal digital es una señal cualquiera, representan el espectro de la señal digital.

Las señales son transformadas al dominio de la frecuencia vía la TDF, porque de alguna manera, la representación espectral provee una información muy útil, como lo hacen también las representaciones de las respuestas impulso y de frecuencia que mantienen la misma cantidad de información.

El primer paso es realizar un estudio del espectro del término $e^{j\omega k}$, el cual es una señal compleja con una frecuencia de ω radianes/muestra. Aplicando N muestras contiguas de $e^{j\omega k}$ a la TDF (mediante la ecuación (3.14)) y observando los coeficientes resultantes, se tiene que la TDF del exponencial complejo es: [2]

$$X_i = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\omega k} e^{-j\frac{2\pi}{N}ki} = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(\omega - \frac{2\pi}{N}i)k} \quad (3.27)$$

Un cálculo directo de esta expresión podría requerir un cálculo para cada uno de los N coeficientes de la TDF, X_0, \dots, X_{N-1} . Sin embargo, se puede ahorrar una gran cantidad de tiempo, observando que el i -ésimo coeficiente de TDF, depende solamente de la diferencia de frecuencia, $\omega - (2\pi/N)i$. Esta es una diferencia de frecuencia ya que ω es la frecuencia de la entrada a la TDF y $(2\pi/N)i$ es la frecuencia del i -ésimo coeficiente de la TDF. Esta observación permite tratar todos los coeficientes de frecuencia idénticamente, antes que calcular cada uno individualmente.

Si la diferencia de frecuencia es $\delta\omega$, y la ecuación (3.27)

es la respuesta de la TDF; entonces:

$$\delta w = w - (2\pi/N)i \quad (3.28)$$

$$X'(\delta w) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{j\delta w k} \quad (3.29)$$

Este es un sumatorio finito de una serie geométrica, cuya forma es:

$$X'(\delta w) = \frac{1 - e^{j\delta w N}}{1 - e^{j\delta w}} \quad (3.30)$$

Es importante tener en cuenta que la ecuación (3.30) no representa a los valores de los coeficientes TDF. La respuesta TDF es usada para calcular el valor de cualquier coeficiente cuando la entrada a la TDF es un exponencial complejo. Esto se realiza mediante el cálculo de δw para un coeficiente particular y luego evaluando la ecuación (3.30).

Por ejemplo, suponiendo que la frecuencia de la señal de entrada es $(2\pi/N)i$, significa que el valor del i -ésimo coeficiente es encontrado por evaluación de la ecuación (3.30) con un $\delta w=0$. En tal caso, el numerador y el denominador se hacen cero y el valor del coeficiente está determinado a través de la regla de l'Hospital y será $X_i = X'(0) = N$.

La ecuación (3.30) muestra que la respuesta TDF es cero para cada frecuencia múltiplo entero de $(2\pi/N)$, distinto de cero. Entonces, $X'(l2\pi/N) = 0$ para l distinto de cero ($l=1,2,3, \dots$), lo cual significa que si la frecuencia de entrada es precisamente un múltiplo entero de $(2\pi/N)$ radianes/muestra, el coeficiente TDF que está asociado con la frecuencia de entrada tiene el valor de N y todos los otros coeficientes son cero. En este caso, los coeficientes TDF indicarán la frecuencia de la entrada, porque solamente el i -ésimo

coeficiente será distinto de cero.

Pero éste es un caso muy especial de la TDF. Rara vez una señal de entrada tendrá una frecuencia que sea exactamente un múltiplo de $(2\pi/N)$. Cuando la señal de entrada tiene una frecuencia arbitraria, la diferencia de frecuencias, $\delta\omega$, puede asumir cualquier valor desde $-\pi$ hasta π . Como se puede observar en la ecuación (3.30), la magnitud del denominador se incrementa si $\delta\omega$ se aleja de cero. Esto implica que los coeficientes que están asociados con frecuencias que están lejanas de la frecuencia de entrada (valor grande de $\delta\omega$) poseerán valores pequeños. Aquellos coeficientes asociados con frecuencias cercanas a la frecuencia de entrada serán generalmente más grandes.

Por ejemplo, si se aplican 40 muestras de $x_k = e^{j(2\pi/10)k}$ a la TDF, los coeficientes resultantes de los 40 puntos X_0, X_1, \dots, X_{39} , corresponden a las frecuencias de $0, 2\pi/40, \dots, (2\pi/40)_{39}$ rad/muestra, y para evaluar X_0 se procede a calcular su $\delta\omega$ (ecuación (3.28)). Debido a que la frecuencia de entrada es $2\pi/10$ y X_0 corresponde a la frecuencia de 0 , $\delta\omega = 2\pi/10 - 0 = 2\pi/10$. Aplicando la ecuación (3.30), se encuentra que para el valor de $\delta\omega = 2\pi/10$, el numerador de la ecuación (3.30) se hace cero y por lo tanto $X_0 = 0$. El próximo paso es calcular $\delta\omega$ para X_1 , cuyo valor es: $2\pi/10 - 2\pi/40 = 6\pi/40$; para este valor de $\delta\omega$, la ecuación (3.30) se hace cero nuevamente y $X_1 = 0$. Si se realizara el cálculo de todos los coeficientes se observaría que para 39 de ellos su valor sería cero y solo uno tendría un valor distinto de cero. Este coeficiente distinto de cero es el que posee su $\delta\omega = 0$ y su valor corresponde al del valor pico de la TDF. Este coeficiente es X_4 y está asociado con la frecuencia de $(2\pi/40)4 = 2\pi/10$ rad/muestra ($\delta\omega = 0$). Su valor es $X_4 = 40$ (N), por lo que los coeficientes de la TDF que resultan de aplicarse $x_k = e^{j(2\pi/40)k}$ son:

$$X_i = 40 \quad \text{si } i=4, \quad 0 \text{ en otro caso.}$$

Estas observaciones llevan a la conclusión de que la TDF es

un proceso de ordenamiento de frecuencia. Cada uno de los N coeficientes de TDF son sensibles a una frecuencia particular de entrada; X_i está asociado con la frecuencia $(i2\pi/N)$ radianes/muestra. Mientras un coeficiente esté más cercano a la frecuencia de entrada, más grande será ese coeficiente. Esta es una manera muy útil de tratar a la TDF, y sugiere uno de los mayores usos de la transformada: **representar una señal en términos de las frecuencias que la conforman.**

En la figura 3.5 se muestra respuestas TDF para longitudes de 10 y 512 puntos. Se puede observar que la magnitud asume un máximo de N cuando $\delta\omega=0$, y decrece de una manera oscilatoria a medida que $\delta\omega$ se aleja de cero. El ancho del pico central es $4\pi/N$, por lo que si la TDF se hace más grande, el pico se hace más estrecho. Por ejemplo, doblando la longitud de la TDF, se reducirá a la mitad el ancho del pico y doblará la altura. Esto sugiere que TDF más grandes, son más sensibles a la frecuencia, y entonces, realizan una mejor separación de frecuencias, por lo cual las TDF más grandes son utilizadas en aplicaciones que requieren resolución de muy alta frecuencia, por decir, en una TDF de un millón de puntos se tiene un pico central de sólo 12.56×10^{-6} radianes/muestra de ancho. [2]

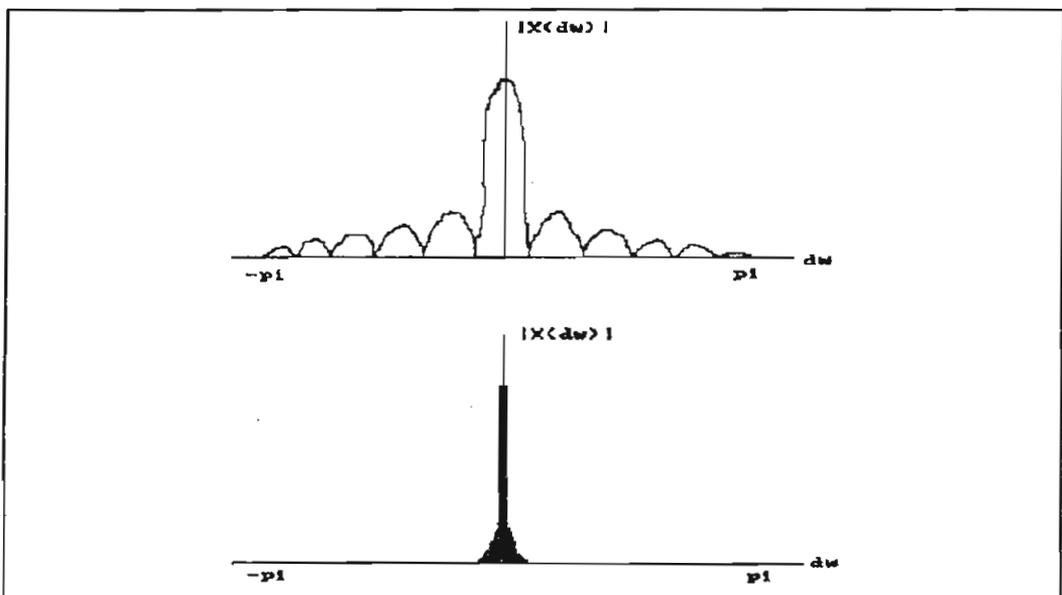


Fig. 3.5 TDF para longitudes de 10 y 512 puntos.

3.3.1. ESPECTRO DE ENERGIA.

La idea del espectro de señales puede ser tratada sobre la base de considerar la distribución de energía en la señal como una función de la frecuencia. La potencia instantánea en una señal es generalmente tomada como el cuadrado de la amplitud de la señal, entonces para una señal de voltaje, la potencia es, medida en voltios cuadrados y la energía medida en voltios cuadrados-segundos, asumiendo que la señal de voltaje es medida a través de una resistencia de un ohmio. La energía en una señal $f(t)$ está dada por consiguiente como:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt \quad (3.31)$$

Siendo $F(w)$ la transformada de Fourier de $f(t)$, se tiene que:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) e^{j\omega t} dw \right] dt \quad (3.32)$$

Intercambiando el orden de integración en el lado derecho de la ecuación (3.32):

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{j\omega t} dt \right] dw \quad (3.33)$$

La porción que se encuentra entre corchetes es $F(-w)$, por lo que se puede escribir:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) F(-w) dw \quad (3.34)$$

La ecuación (3.34) se puede simplificar, si es que $f(t)$ es real, y según la definición de la transformada de Fourier, se cumple en este caso que $F(-w) = F^*(w)$, la conjugada

compleja de $F(w)$. Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(w) F^*(w) dw = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(w)|^2 dw \quad (3.35)$$

La ecuación (3.35) es una propiedad fundamental de la transformada de Fourier, llamada el "teorema de Parseval", el cual dice que la energía en la señal $f(t)$ es igual a $1/(2\pi)$ veces el área bajo el cuadrado de la magnitud de la transformada de Fourier de $f(t)$. El término $|F(w)|^2$ es conocido como el espectro de energía, o densidad espectral de energía de $f(t)$ y puede ser interpretada como la distribución de energía con la frecuencia. Las unidades de $|F(w)|^2$ dependen de las unidades de $f(t)$; por ejemplo, si $f(t)$ fuera un voltaje, entonces $|F(w)|^2$ debería tener unidades de voltios cuadrados-segundos por Hz.

Un mejor entendimiento del significado del espectro de energía se obtiene considerando como un sistema lineal altera el espectro de una señal transmitida a través del sistema.

$$Y(w) = H(w) \cdot X(w) \quad (3.36)$$

El espectro de energía de la salida es entonces hallado así:

$$|Y(w)|^2 = Y(w) Y^*(w) = [H(w) X(w)] [H^*(w) X^*(w)] = |H(w)|^2 |X(w)|^2 \quad (3.37)$$

De la ecuación (3.37) se puede ver que el espectro de energía de la señal de salida está relacionado al espectro de energía de la señal de entrada por el término $|H(w)|^2$, que a menudo se denomina como la "función de transferencia de energía del sistema".

Como se verá en el numeral 3.4, la densidad espectral de potencia es una herramienta muy útil, debido a que mediante

ella se puede identificar las distintas componentes de frecuencia constitutivas de una señal cualquiera.

3.4. APLICACIONES.

La aplicación de la densidad espectral de potencia, es la de facilitar el conocimiento de la energía de la señal a diferentes frecuencias, y por lo tanto proporciona información de todas las componentes de frecuencia que constituyen dicha señal. Como se sabe una señal periódica puede ser descompuesta en una suma de senos y/o cosenos de diferentes frecuencias. El conocimiento de las frecuencias que constituyen una señal, es particularmente útil, cuando por ejemplo, interesa solamente cierta(s) frecuencia(s). Utilizando un filtro adecuado, se eliminan las frecuencias indeseables, como pueden ser señales de ruido que contaminan la señal de interés; o, simplemente se posibilita realizar una separación de las diversas componentes; por ejemplo, una señal que contiene componentes de 15, 40 y 60 Hz y de la cual interesa mantener tan solo la componente de 60 y eliminar las otras dos. Mediante el análisis espectral de potencia, se posibilita obtener información de cierto tipo de señales que a simple vista, no proporcionarían ninguna información útil.

Pero, el análisis espectral de potencia es tan solo una aplicación de la TDF y de su implementación eficiente, la TRF. A continuación se presentan otras aplicaciones de la TDF que son de mucha utilidad.

3.4.1. LA TDF Y EL FILTRADO.

En esta aplicación, la TDF es usada como una herramienta de análisis para filtros digitales. A través de ella, se puede predecir cómo afectará un filtro a una señal de entrada específica. Recordando que un filtro digital produce una salida, la cual es la convolución de la entrada del filtro y su respuesta impulso:

$$y_k = \sum_{i=-\infty}^{\infty} h_i x_{k-i} \quad (3.38)$$

La respuesta de frecuencia del filtro es un retrato equivalente, pero generalmente más útil de la operación del filtro. Considerando una secuencia de entrada de duración finita, por decir, x_0, \dots, x_{N-1} , como la entrada al filtro digital, con coeficientes TDF, X_0, \dots, X_{N-1} , que representan una versión periódica de la señal de entrada, entonces los coeficientes TDF de la salida del filtro, son el producto de los coeficientes TDF de la entrada y la respuesta de frecuencia del filtro:

$$Y_l = H\left(\frac{2\pi}{N}l\right) X_l \quad (3.39)$$

Por definición la TDIF para la salida del filtro (y_k) es:

$$y_k = \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} Y_l e^{j\frac{2\pi}{N}lk} \quad (3.40)$$

El resultado de la ecuación (3.39) proporciona un método rápido y conveniente para estudiar el comportamiento de un filtro en el dominio de la frecuencia. Es mucho más fácil calcular una salida de un filtro en el dominio de la frecuencia que en el dominio del tiempo, ya que es más fácil multiplicar que convolucionar.

3.4.2. LA TDF Y LA CONVOLUCION.

Esta segunda aplicación de la TDF es realmente una variante del uso de la TDF en el filtrado. En algunas aplicaciones es más eficiente calcular los coeficientes de la TDF de señales, multiplicar los coeficientes, y realizar la TDIF, antes que realizar la convolución directa. En estos casos la convolución es realizada por la TDF, multiplicación y la

TDIF. Esta realización se hace más atractiva si las señales están ya expresadas en términos de sus coeficientes TDF y/o los resultados de la convolución son deseados en el dominio de la frecuencia. A causa de que ésta realización usa representaciones TDF de las señales, se produce una convolución periódica (o circular).

Para usar una TDF para calcular los coeficientes para la convolución, se debe extender la respuesta impulso del filtro con ceros hasta que la respuesta impulso extendida sea un entero múltiplo de N (de la ecuación (3.39)), y luego tomar la TDF de la respuesta impulso extendida. Se puede extender la respuesta impulso a cualquier múltiplo de N , pero normalmente se extiende sólo al múltiplo más pequeño. Entonces:

$$y_k = \text{TDIF}_N\{Y_1\} \quad k=0, \dots, N-1 \quad (3.41)$$

Del resultado de la convolución, y_k , es periódica, de período N . Podría parecer que el reemplazar el operador directo de convolución con el método de las transformadas haría más largo el proceso de convolución, pero no sucede así debido a que, aunque haya que calcular los coeficientes TDF tanto de la entrada como de la salida y la transformada inversa TDIF, para hallar la convolución circular, todo el procedimiento se realiza más rápido a causa de los algoritmos existentes, que son más eficientes, tanto así que una convolución de 1.000 puntos de una señal con un período de $N = 2.000$, requiere 2.000.000 de adiciones y multiplicaciones; una implementación eficiente de TDF y de TDIF para realizar el mismo trabajo, requiere solamente 90.000 adiciones y multiplicaciones para la TDIF, 180.000 operaciones para el cálculo de la TDF y 2.000 multiplicaciones complejas para la parte de multiplicación de los coeficientes; un total de 274.000 sumas y 278.000 multiplicaciones en contraste con los 2.000.000 de sumas y multiplicaciones para la convolución regular. [2]

3.4.3. LA TDF Y LA FRECUENCIA.

Existen muchas aplicaciones en las cuales la información es llevada por la frecuencia de una señal. Por ejemplo, tal uso de la frecuencia se utiliza cuando se producen los tonos en un teléfono de tono. En este caso cada botón (1-9 y las tres teclas especiales), generan una mezcla de tonos. Estos tonos son transmitidos por las líneas telefónicas y son decodificadas en la central. La compañía de teléfonos deben tener sistemas que puedan "escuchar" estos tonos para determinar las frecuencias, que indicarán cual botón fué presionado.

Una TDF es una herramienta útil para dividir una señal en sus componentes de frecuencia. Para esta aplicación, N muestras de la señal se aplican a la TDF. Los coeficientes TDF indican cuales frecuencias están presentes y cuán fuertes son. Los coeficientes TDF que están asociados con componentes de frecuencia en las señales son grandes, y los otros coeficientes (aquellos asociados con componentes de frecuencia no existentes), son pequeños. La TDF es ampliamente usada para descomponer una señal en sus componentes de frecuencia o para analizar una señal basada en la frecuencia.

La TDF es también utilizada para detectar señales coherentes (sinusoides) en ruido altamente no coherente, comúnmente llamado ruido "blanco". Esta aplicación está basada en el hecho de que la potencia del ruido es esparcida aleatoriamente entre todos los coeficientes TDF, pero la potencia de la señal está concentrada solamente en unos pocos coeficientes. Si la TDF es suficientemente grande, los coeficientes asociados con el ruido serán mucho más pequeños que aquellos de la señal. Entonces la señal se detecta por inspección de los coeficientes, mirando los más grandes. Generalmente, en lugar de analizar los coeficientes se hace un gráfico del espectro de potencia de la señal.

A causa de que el ruido es aleatorio, diferentes muestras de

la señal más ruido producirán diferentes coeficientes TDF.

3.4.4. LA TDF Y LAS VENTANAS.

La TDF es de la forma de la figura 3.5. Idealmente se desea que tenga un lóbulo delgado y no haya rizado (que no hayan fugas espectrales). Este es un problema similar al problema de filtrado en el cual se tiene una respuesta de frecuencia con rizado. Si se tiene un filtro con rizado en la respuesta de frecuencia, quiere decir que se tiene una TDF con rizado.

Supóngase que la señal se hace pasar por una ventana antes de aplicar ésta a la TDF, es decir, se calcula la TDF de $w_k \cdot x_k$ en lugar de x_k . Los términos w_k son los coeficientes de la ventana y los x_k son las muestras de la señal. Se busca ahora como en el caso de los filtros manejar una ventana para conseguir que el lóbulo principal sea más angosto y los lóbulos laterales más pequeños, sin necesidad de utilizar mayor número de puntos en la TDF.

Cada nueva ventana generará una diferente respuesta TDF y permitirá jugar con el ancho del lóbulo principal y la altura de los lóbulos laterales. Diferentes ventanas generarán diferentes grupos de coeficientes TDF. [2.10]

Por otro lado, el concepto de la transformada discreta de Fourier es quizá la estructura más ampliamente utilizada por técnicas que obtienen espectros para señales discretas no estacionarias, donde la resolución espectral y la variación del tiempo son los términos más importantes. Una señal no estacionaria es aquella en la cual las propiedades varían con el tiempo, por ejemplo, una suma de componentes sinusoidales con amplitudes, frecuencias, o fases variantes en el tiempo como se tiene en las señales de lenguaje y en las señales del radar Doppler, aplicaciones en las que la transformada de Fourier provee una descripción útil de cómo cambian las propiedades de la señal con el transcurso del tiempo. [10]

- 4. RUTINAS DEL MATLAB

- 4.1. Implementación de software para procesamiento digital de señales

- 4.1.1. Simulación de plantas

- 4.1.2. Análisis espectral

- 4.1.3. Diseño de filtros digitales

- 4.1.4. Métodos de filtrado de las señales

- 4.1.5. Ajuste polinomial de señales digitales

- 4.2. Biblioteca de procesamiento de señales del MATLAB

- 4.2.1. Diseño de filtros digitales

- 4.2.2. Filtrado de señales, utilizando los filtros del numeral 4.2.1.

- 4.2.3. Análisis espectral

- 4.2.4. Ajuste polinómico de señales digitales

- 4.3. Rutinas para filtros

- 4.3.1. Rutinas para diseño de filtros recursivos

- 4.3.2. Rutinas para diseño de filtros no recursivos

- 4.3.3. Filtrado digital de señales contaminadas

- 4.3.4. Respuesta de frecuencia de filtros digitales

- 4.4. Rutinas para el análisis del espectro

- 4.5. Rutinas adicionales

4.5.1. Rutinas utilizadas en la simulación de plantas

4.5.2. Rutinas utilizadas para el ajuste polinomial

4. RUTINAS DEL MATLAB.

En el presente capítulo, se trata sobre todas las rutinas creadas para realizar un procesamiento digital de señales a nivel de simulación, mediante el uso de los archivos de funciones (function files) y los archivos de escritura (script files) que posee el paquete MATLAB.

Es necesario indicar que la versión utilizada del MATLAB es la V. 3.5a. Versiones anteriores o posteriores, poseen ciertas diferencias en sintaxis y hasta en interpretación de ciertas instrucciones, como es el caso de la versión de MATLAB FOR WINDOWS, que a la instrucción "eval()", la utiliza como evaluación de funciones y no como posible llamada a subrutina como lo realiza la versión 3.5a.

La versión 3.5a del MATLAB requiere por lo menos 320K de memoria, MS-DOS o PC-DOS de versión 3.0 o más alta, y un coprocesador matemático ó en su ausencia un emulador de coprocesador, aunque obviamente, con el emulador se realizan las operaciones de punto flotante de una forma muy lenta, en comparación con el coprocesador físico.

4.1. IMPLEMENTACION DE SOFTWARE PARA PROCESAMIENTO DIGITAL DE SEÑALES.

En este numeral se describe las rutinas realizadas para configurar un "módulo" que permita la simulación de plantas de primero y segundo orden con y sin retardo de transporte, el análisis espectral de señales obtenidas de las plantas simuladas o de otra señal cualquiera, diseño de filtros digitales recursivos y no recursivos, filtrado de señales contaminadas con ruido o con varias componentes de frecuencia, y, finalmente el ajuste polinomial de señales digitales con las aplicaciones de interpolación y extrapolación. En la figura 4.1 se muestra el esquema del software implementado para el Procesamiento Digital de Señales.

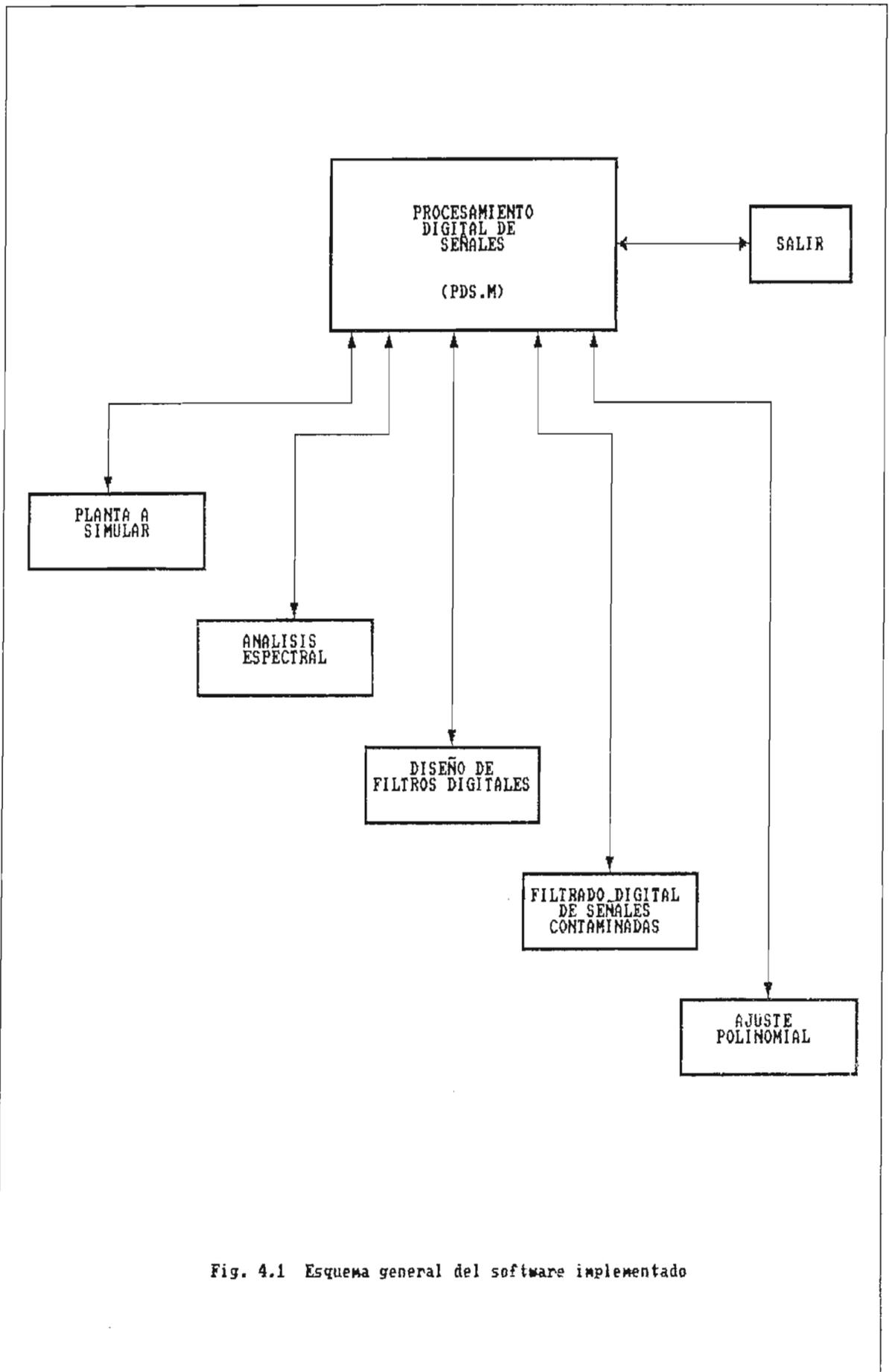


Fig. 4.1 Esquema general del software implementado

4.1.1. SIMULACION DE PLANTAS.

El módulo de simulación de plantas posee cuatro alternativas que son: simulación de plantas de primer orden, de primer orden con retardo de transporte, de segundo orden y segundo orden con retardo de transporte. Cualquiera de las anteriores rutinas comienza con la introducción de las respectivas funciones de transferencia, cuyo formato es presentado al inicio en la sección tutorial de cada rutina, junto con ciertas indicaciones según el caso.

Todas las rutinas poseen las siguientes opciones, las cuales se presentan en la figura 4.2 mediante un diagrama de flujo:

- Se introduce ruido en un porcentaje con respecto al valor de estabilización de la señal de salida de la planta.

- Se procede a escoger el tipo de señal de entrada a la planta, teniéndose dos posibilidades:
 - a) Señal paso o escalón.
 - b) Cualquier otra señal definida por el usuario.

- Seguidamente, se escoge la naturaleza de ruido con que se contamina la señal de salida, existiendo los siguientes tipos:
 - a) Ruido con distribución normal.
 - b) Ruido con distribución uniforme.
 - c) Señal binaria pseudo aleatoria (PRBS).

Si se quiere, se puede observar la señal de ruido que contaminará la señal de salida. En caso de utilizarse las plantas que introducen un retardo de transporte, se puede elegir una aproximación de primero o de segundo orden de Paddé.

Finalmente, se presenta los gráficos de la respuesta de la planta a la señal escogida, sin contaminación y con la presencia de ruido, teniéndose la posibilidad de ampliar la escala del gráfico, según la conveniencia.

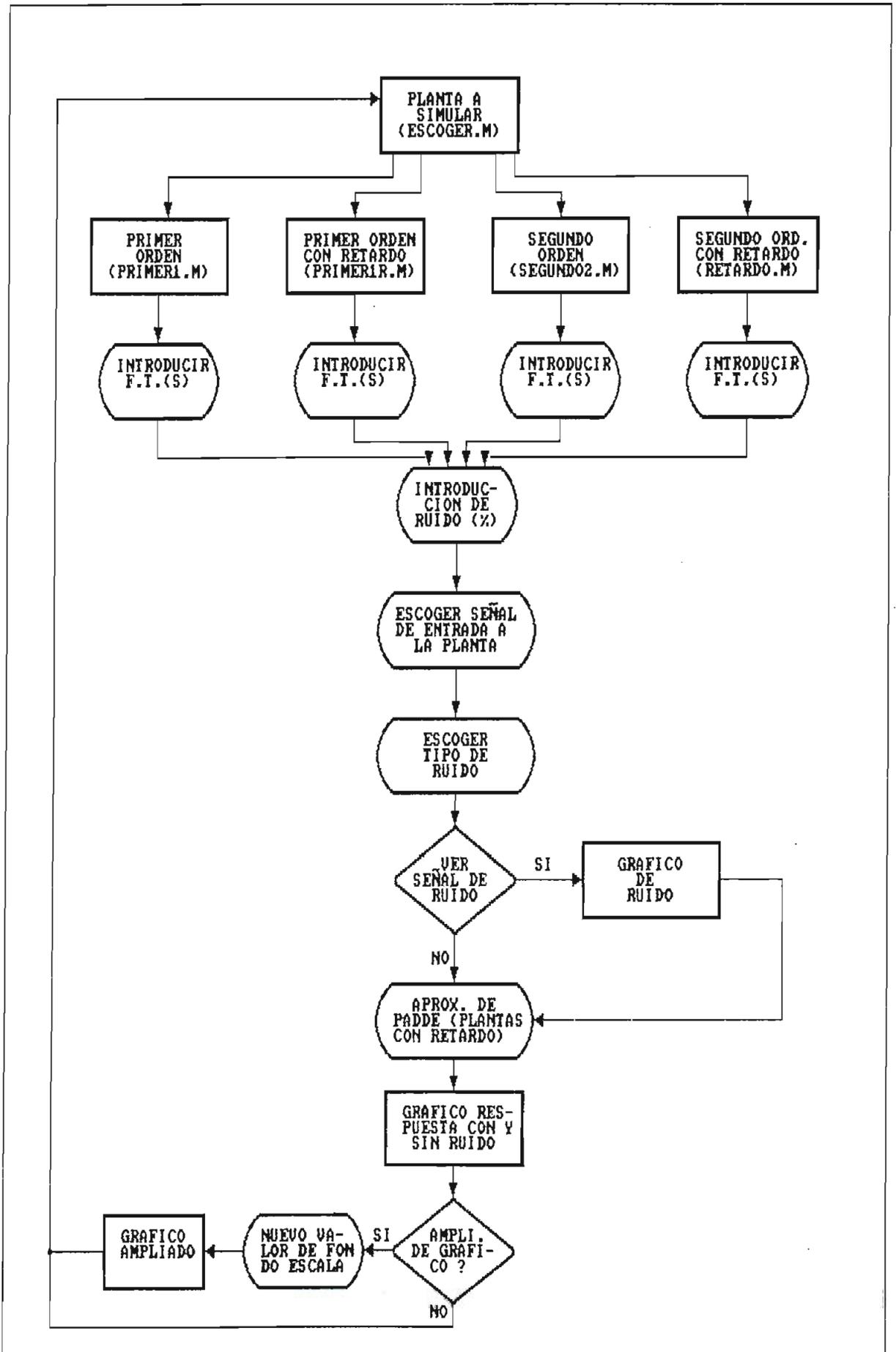


Fig. 4.2 Diagrama de flujo del módulo de simulación de plantas.

4.1.2. ANALISIS ESPECTRAL.

En el módulo de análisis espectral, se presenta la posibilidad de utilizar la señal obtenida de la planta simulada en el punto anterior, o definir una señal que sea de especial interés. Si se decide por la opción de definir una señal cualquiera, se tiene que realizar otra elección, que es escoger una PRBS o no hacerlo. Si se trabaja con la PRBS, se puede utilizar un modelo preestablecido o a su vez definir un nuevo modelo. Si no se trabaja con la PRBS, se puede definir cualquier señal en función de "to", que es el vector que define la base de tiempo de la rutina; y, la frecuencia de muestreo a la que se quiere discretizar tal señal. Se presenta a continuación en la rutina, un gráfico de la señal que se vá a analizar (ya sea de la planta, o definida por el usuario).

Seguidamente, la rutina calcula la densidad espectral de la señal y la grafica a continuación; si se desea, se puede ampliar la escala del gráfico a voluntad.

En la rutina del módulo de análisis espectral (figura 4.3) se presenta un tutorial al inicio, y las indicaciones pertinentes en el desarrollo de la misma para orientar al usuario.

Se recomienda utilizar una frecuencia de muestreo (f_s) de 100 Hz cuando se utiliza la señal obtenida de la simulación de la planta, ya que las frecuencias presentes en el análisis espectral en este caso son muy bajas, y para poderlas apreciar, se debe utilizar un valor no muy alto de f_s (debido a que todas las rutinas relacionan el fondo de escala con el valor de $f_s/2$ por el teorema de muestreo).

En caso de definir una señal cualquiera, deberá utilizarse el valor que convenga de la frecuencia de muestreo según las componentes de frecuencia que posea la señal, tomando en cuenta que estas no pueden ser mayores al valor de $f_s/2$.

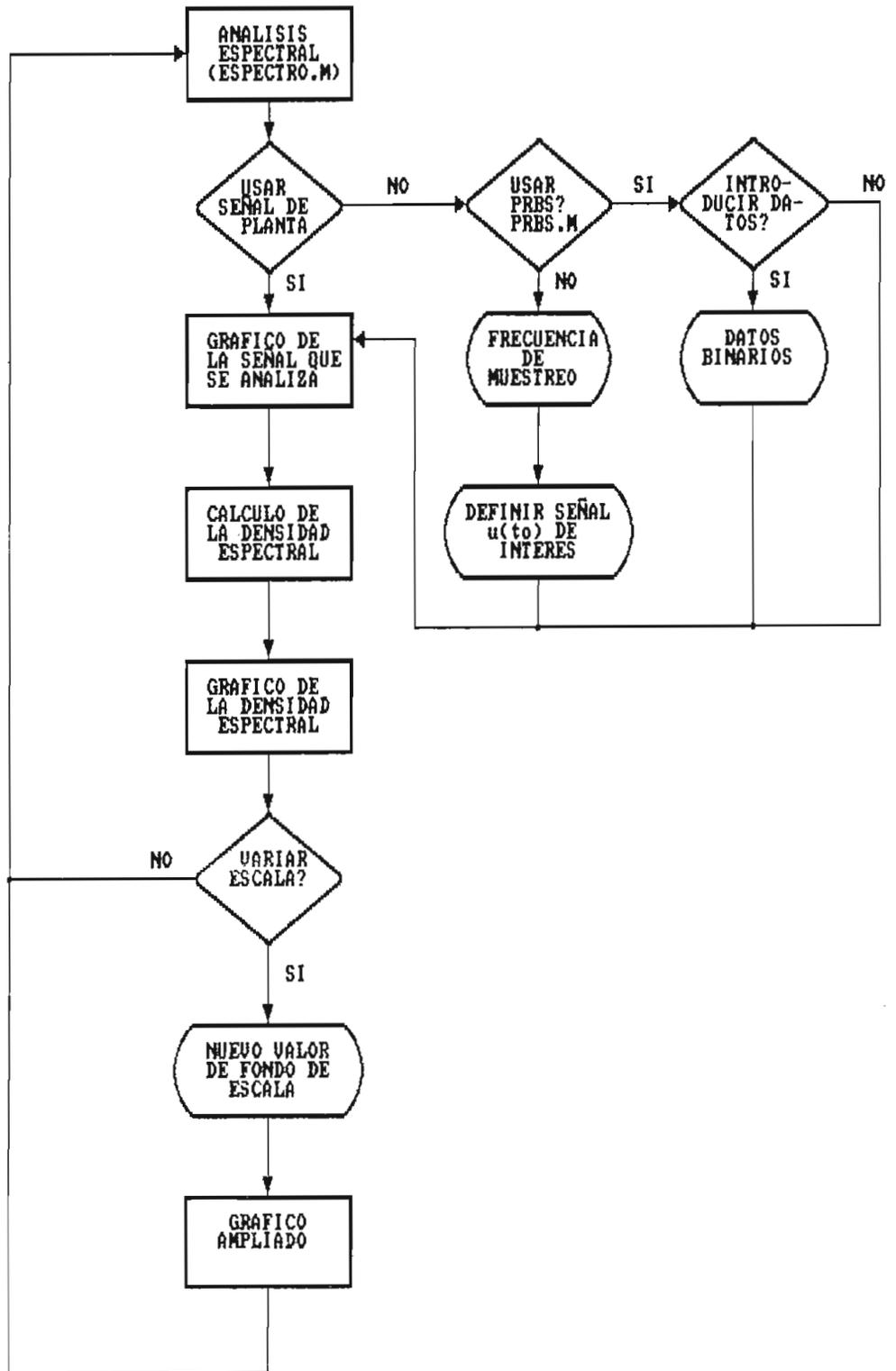


Fig. 4.3 Diagrama de flujo del módulo de análisis espectral

4.1.3. DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.

Este módulo contiene dos alternativas (figura 4.4):

- a) Diseño de filtros recursivos.
- b) Diseño de filtros no recursivos.

Dentro de los filtros recursivos, se tiene los siguientes métodos de diseño:

- Método de la transformada bilineal.
- Método de Yule-Walker.
- Método de Prony.
- Método de minimización del error medio cuadrático.

Los métodos de diseño para los filtros no recursivos son los siguientes:

- De fase lineal con longitud de ventana definida.
- De fase lineal en el dominio de la frecuencia.
- Mediante el algoritmo de Parks-McClellan.

4.1.3.1. Transformada bilineal:

El método de la transformada bilineal (figuras 4.5.1 y 4.5.2) realiza el diseño de filtros digitales mediante aproximaciones a los filtros análogos de Butterworth, Chebyshev (tipo I y II), y Elíptico. Se define una frecuencia de muestreo de acuerdo a las frecuencias que conformen la señal que se quiere filtrar, eligiéndose el tipo adecuado de filtro y sus características (pasa bajo, pasa alto, pasa banda o elimina banda). La introducción de las especificaciones de rizados en las bandas de paso y/o de bloqueo, y las frecuencias de paso y de bloqueo que conforman la región de transición, es ayudada por un gráfico del esquema de tolerancia según el filtro que se quiere diseñar. Un valor típico del rizado en la banda de paso es de 0.5 dB y en la de bloqueo es de 40 dB para ésta clase de filtros.

Esta rutina calcula el orden mínimo del filtro imprescindible para satisfacer los requerimientos y la

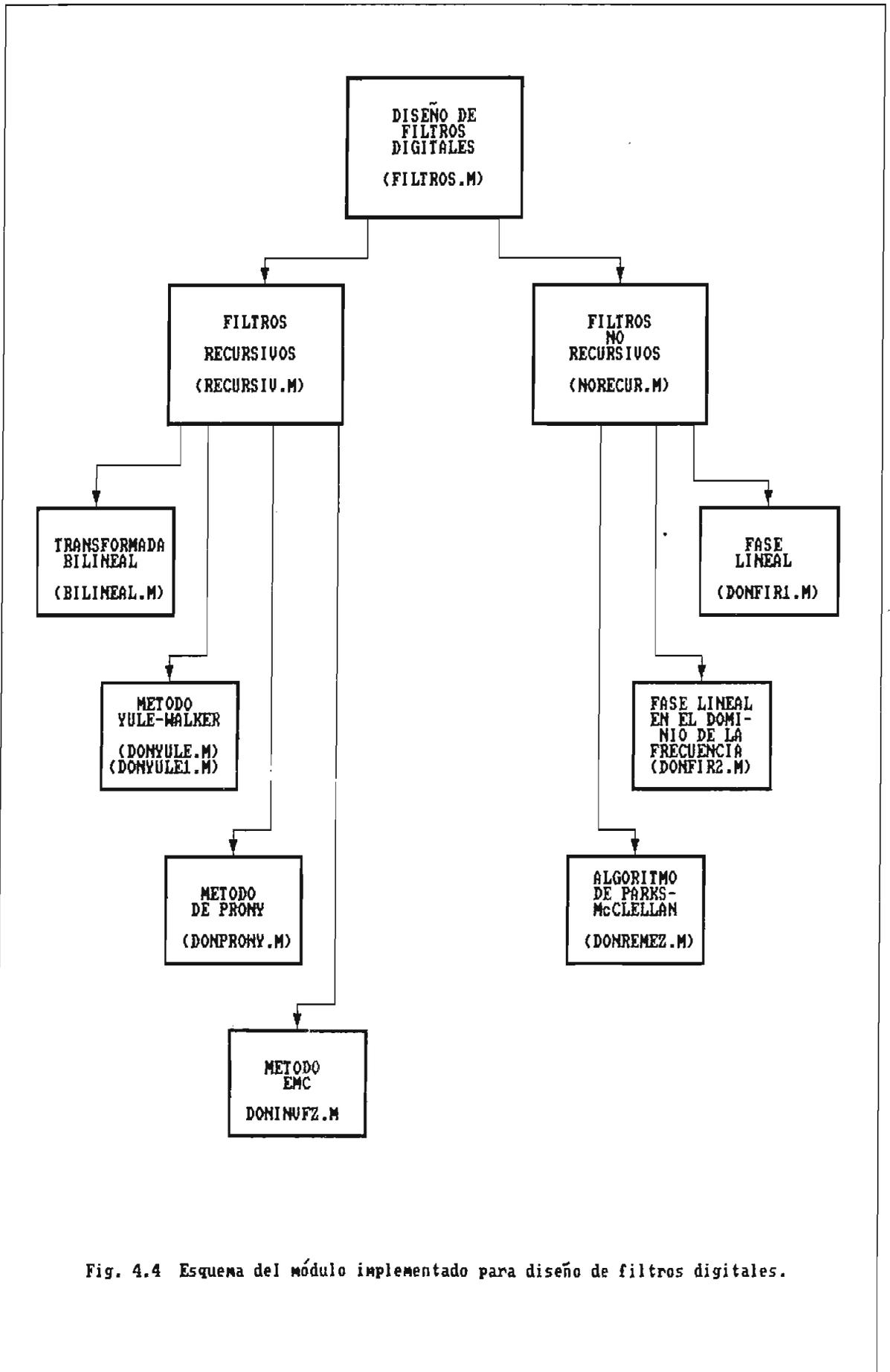


Fig. 4.4 Esquema del módulo implementado para diseño de filtros digitales.

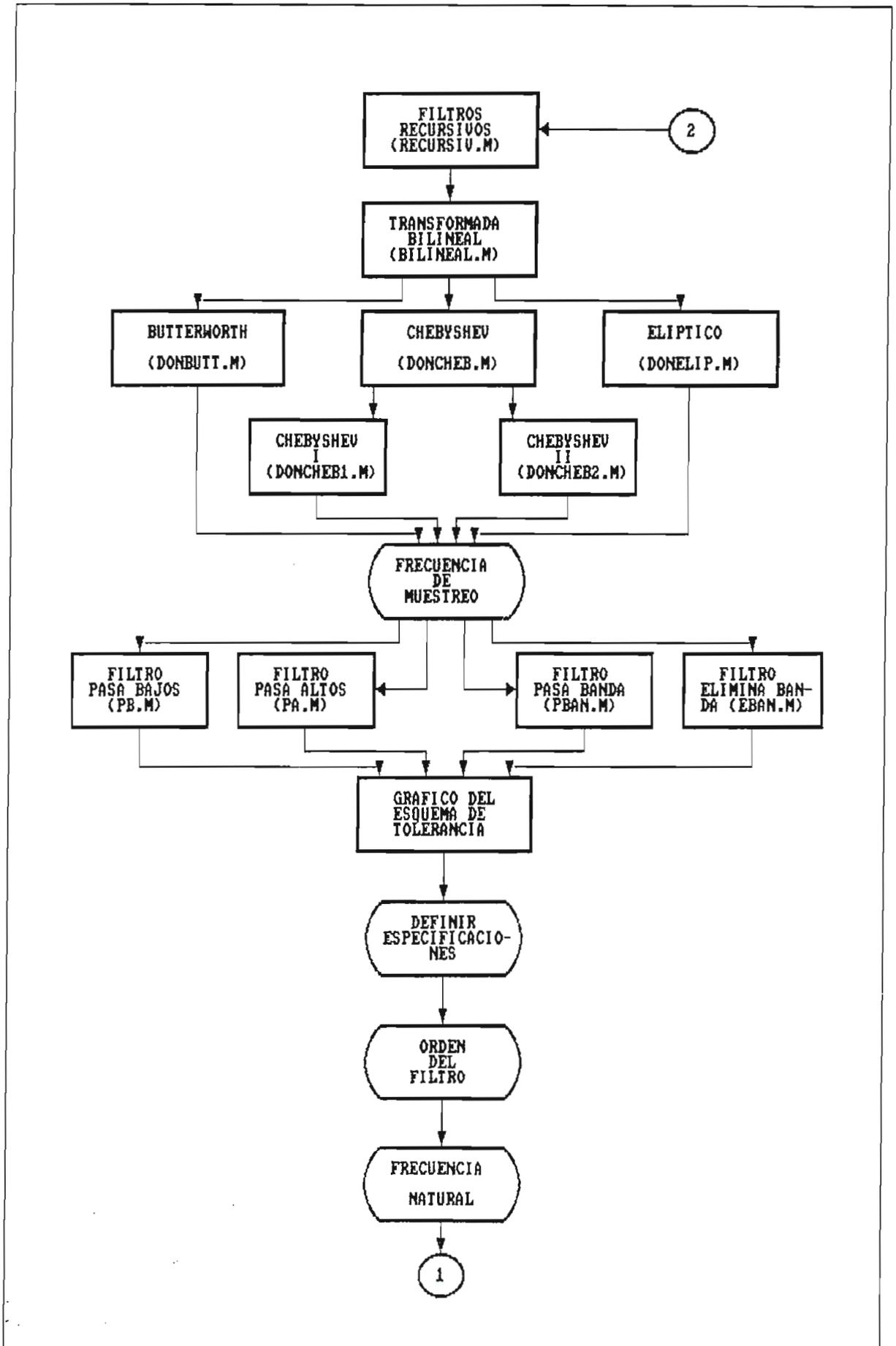


Fig. 4.5.1 Diagrama de flujo para diseño de filtros por medio de la transformada bilineal.

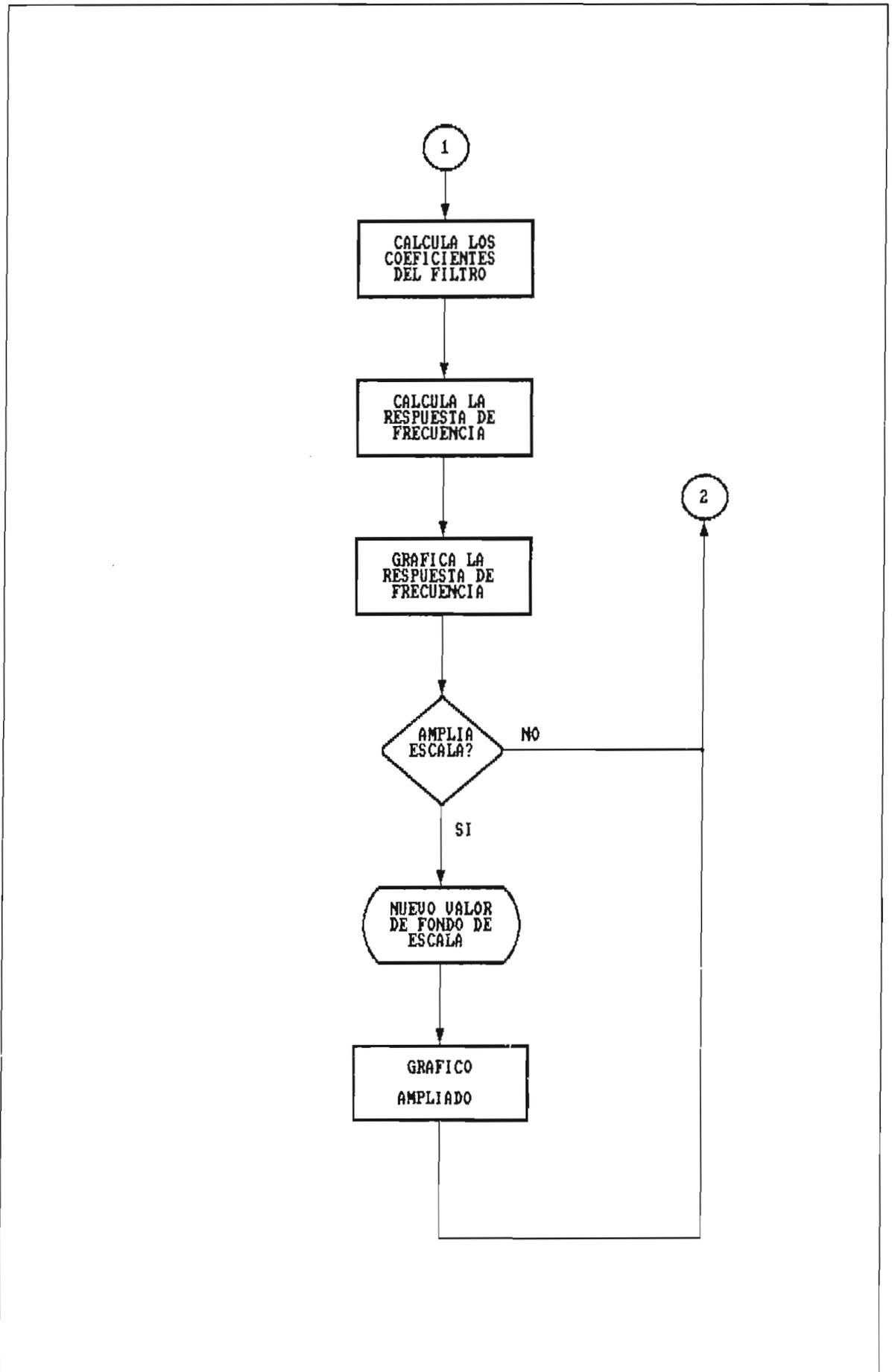


Fig. 4.5.2 Diagrama de flujo para diseño de filtros por medio de la transformada bilineal.

frecuencia natural del filtro para esas condiciones (entre 0 y 1, con 1 correspondiente al valor de $f_s/2$), pero se puede introducir el orden que el usuario desee, así como también el valor de la frecuencia natural dentro de la región de transición. La rutina de la transformada bilineal procede a calcular los coeficientes del filtro y luego calcula la magnitud de respuesta de frecuencia, graficándola con posibilidad de ampliar el gráfico a voluntad del usuario. Todas las rutinas de este método poseen tutoriales con el fin de orientar al usuario en su utilización.

4.1.3.2. Método de Yule-Walker.

Este método trabaja con la definición de la magnitud de respuesta de frecuencia (figura 4.6). La rutina trabaja de la siguiente manera: se introduce la frecuencia de muestreo conveniente, el orden del filtro y los vectores de magnitud y frecuencia de la respuesta de frecuencia ideal del filtro, se presentan tutoriales y un ejemplo de introducción de la respuesta de frecuencia. Seguidamente se grafica la respuesta de frecuencia ideal con la opción de regresar al inicio de la rutina si la respuesta de frecuencia se ha definido erróneamente; caso contrario procede a calcular los coeficientes del filtro y la respuesta de frecuencia real del mismo. Finalmente grafica las respuestas ideal y real de frecuencia para compararlas y posibilita la ampliación de escala a voluntad del usuario.

En este método de diseño se pueden realizar filtros multibanda, definiendo la respuesta de frecuencia ideal para ello, de la misma manera que para un filtro común.

4.1.3.3. Método de Prony.

Este método de diseño trabaja con un diseño anterior de filtro recursivo realizado por la transformada bilineal preferiblemente, ya que realiza su diseño calculando la respuesta impulso del filtro anterior haciendo posible el

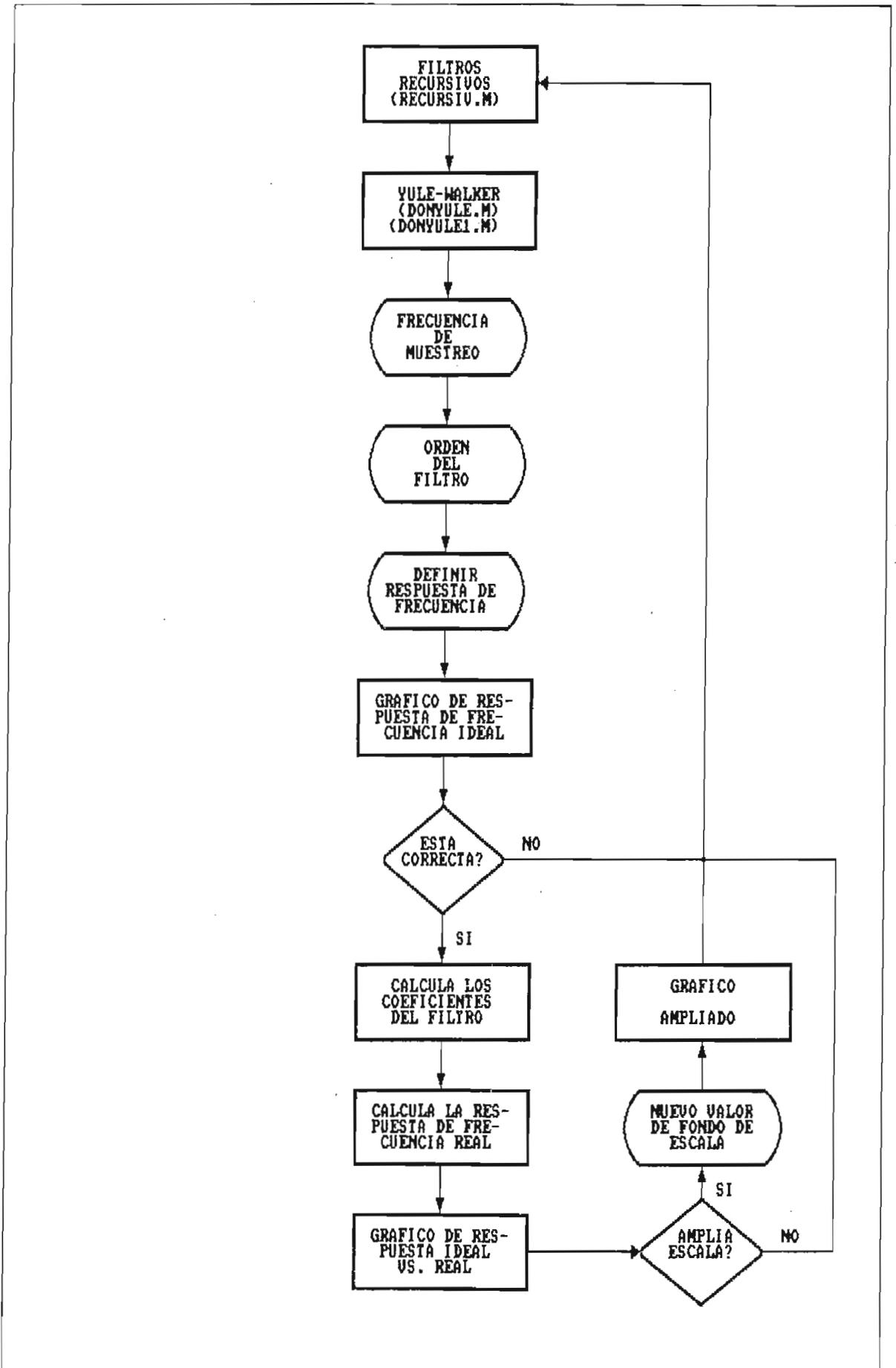


Fig. 4.6 Diagrama de flujo para diseño de filtros por el método de Yule-Walker.

variar el orden del numerador y del denominador separadamente. Realiza un gráfico de la respuesta impulso y luego calcula los coeficientes del numerador y del denominador del filtro. Posee como en los otros casos un tutorial al inicio de la rutina; después de calcular la magnitud de la respuesta de frecuencia, la grafica con la posibilidad de ampliar la escala (figura 4.7).

4.1.3.4. Método de minimización del error medio cuadrático.

Al igual que en el método de Prony, este método también trabaja con un filtro que ya ha sido diseñado anteriormente, debido a que calcula la respuesta de frecuencia compleja (magnitud y ángulo) en base a los coeficientes del filtro conocido, con el fin de facilitar la variación del orden en el numerador y el denominador de la nueva función de transferencia del filtro (coeficientes actuales). Al inicio de la rutina se presenta un tutorial en el cual se explica su funcionamiento y el hecho de tener que realizar un diseño anterior para poder utilizar este método de diseño.

Se comienza introduciendo los ordenes de numerador y denominador requeridos, con lo cual la rutina procede a calcular los nuevos coeficientes. Luego calcula la respuesta de frecuencia del filtro y la grafica, con la opción de poder ampliar la escala a voluntad (figura 4.8).

4.1.3.5. Método de fase lineal.

Este método es el primero de los filtros no recursivos. Utiliza varias ventanas para truncar la respuesta impulso del filtro como son: Hamming, Hanning, Kaiser, Bartlett, Blackman, Rectangular, Triangular y Chebyshev (figura 4.9.1). Para cada una de las ventanas mencionadas, existe una rutina diferente, pero todas utilizan la misma estructura, en la que se define primeramente la frecuencia de muestreo conveniente, para luego escoger el tipo de filtro necesario presentándose un esquema de tolerancia para cada uno (pasa bajo, pasa alto, pasa banda, elimina banda).

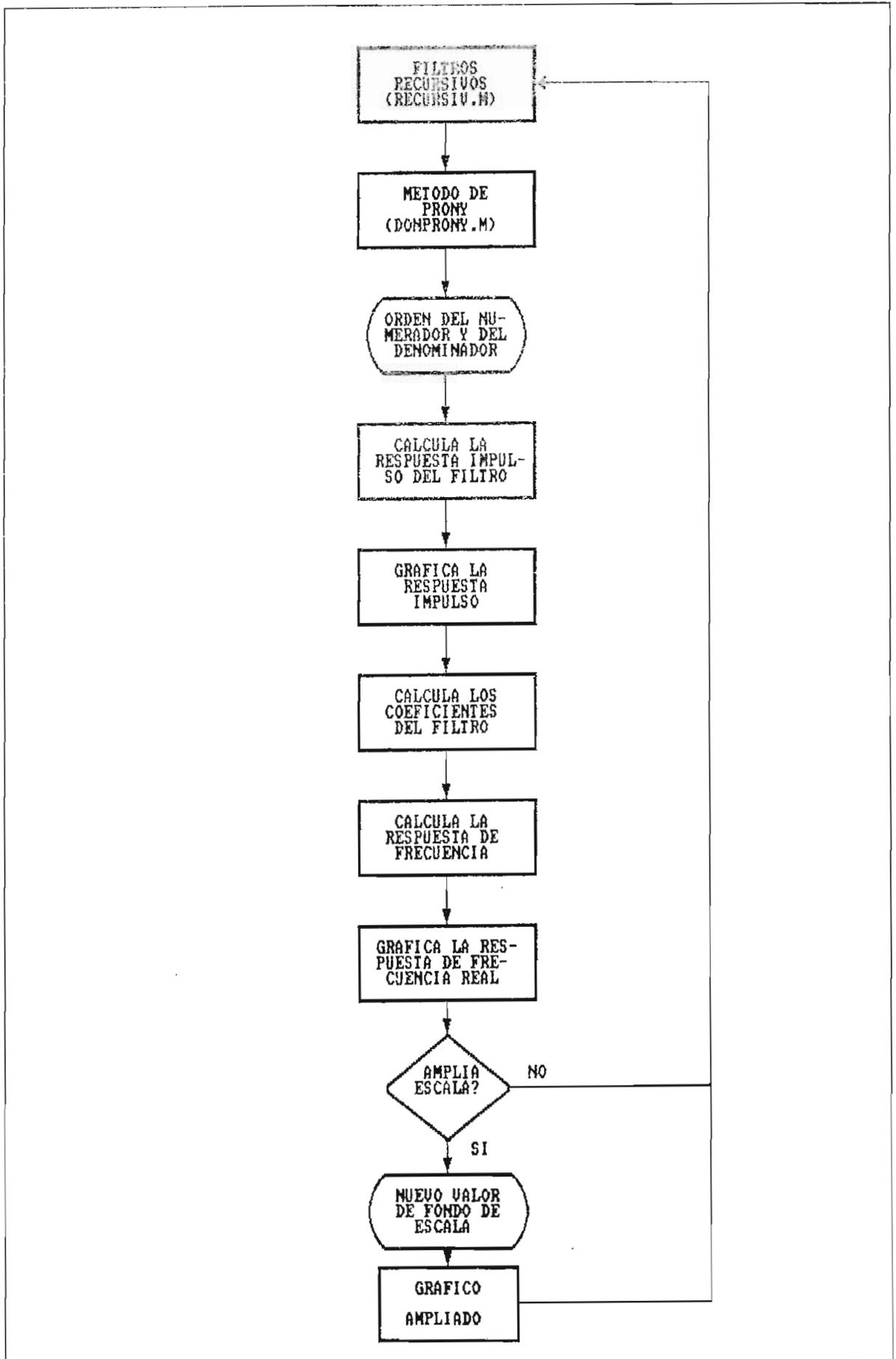


Fig. 4.7 Diagrama de flujo para diseño de filtros por el método de Prony.

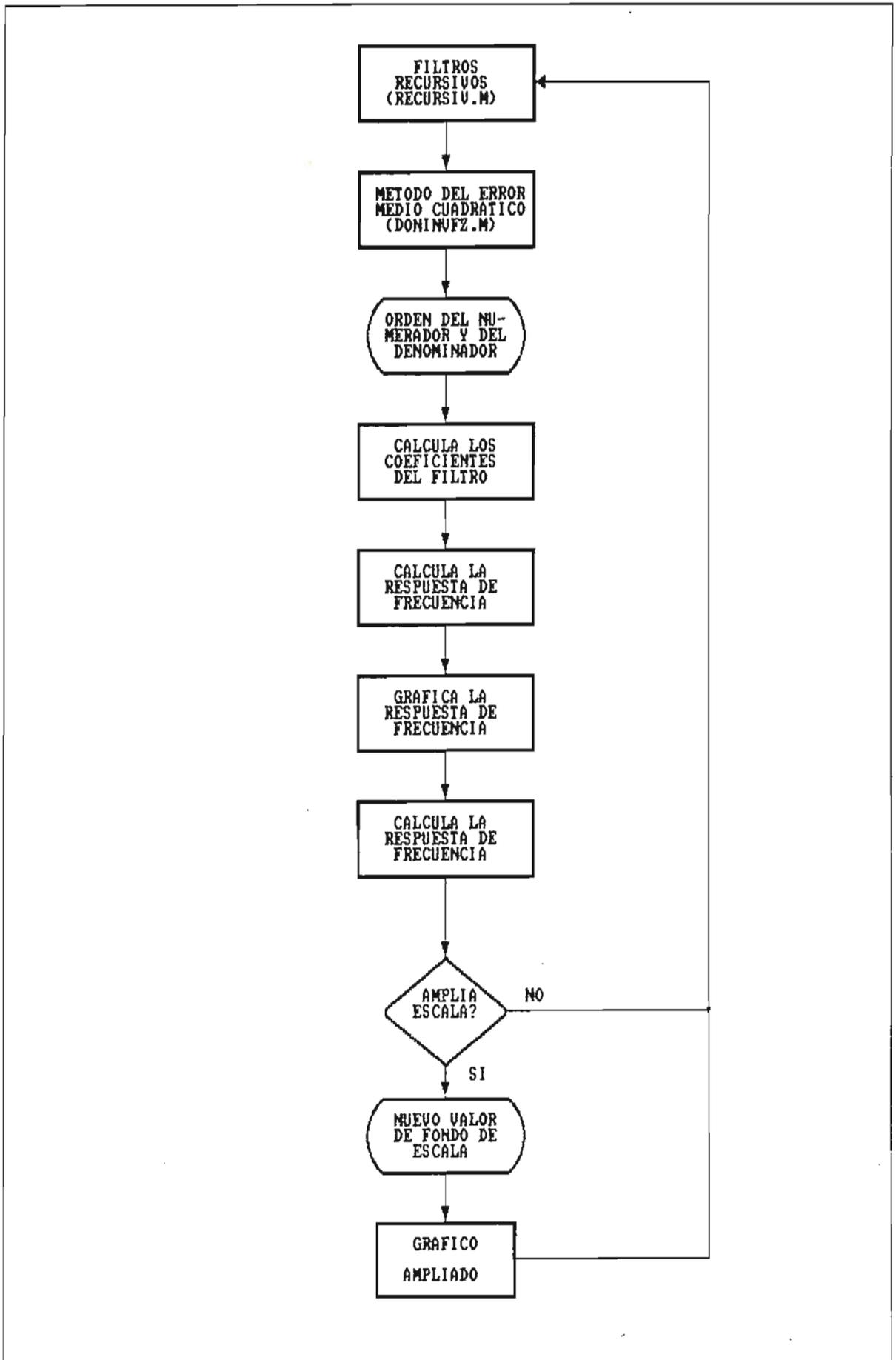


Fig. 4.8 Diagrama de flujo para diseño de filtros por el método del ENC.

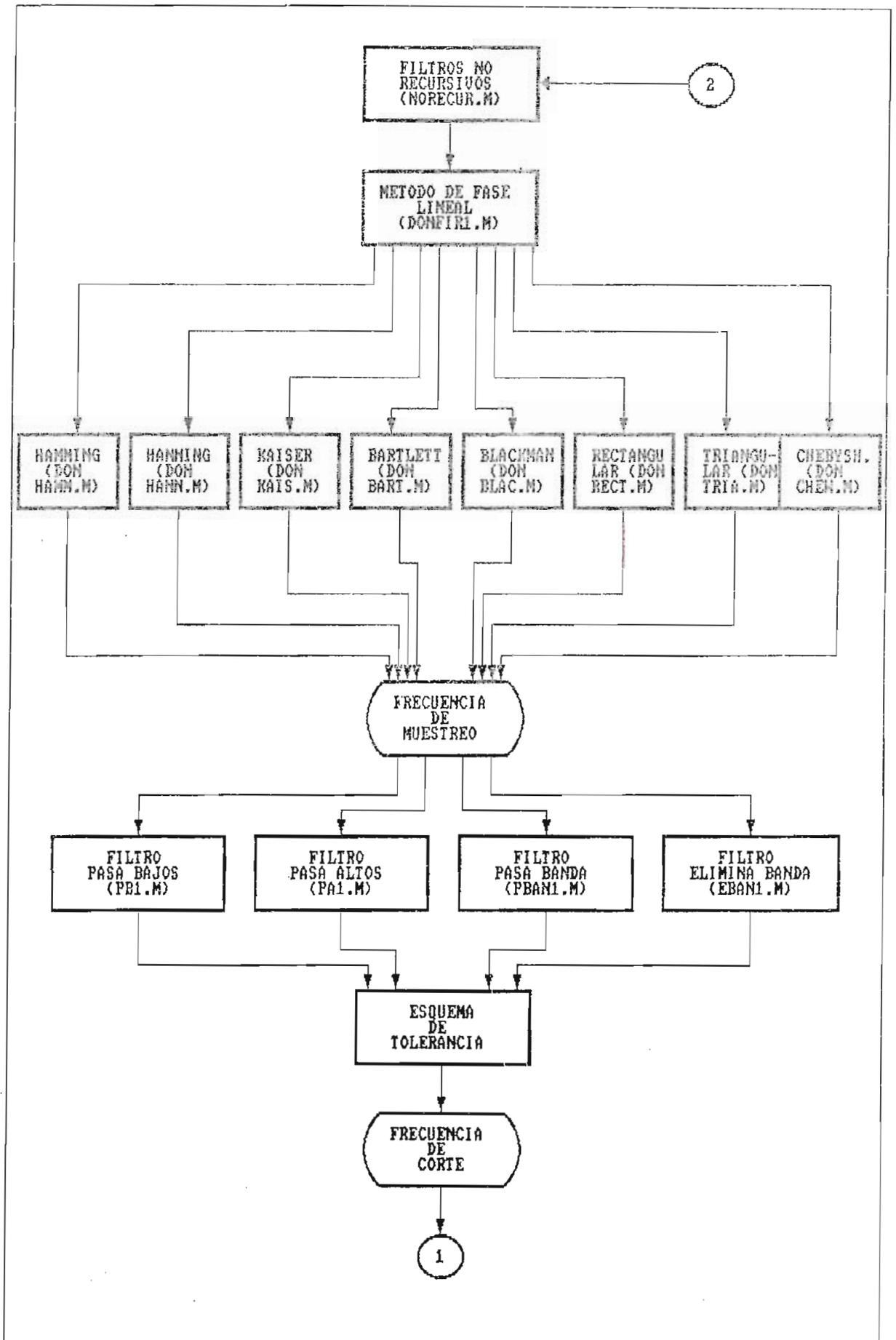


Fig. 4.9.1 Diagrama de flujo para diseño de filtros no recursivos de fase lineal.

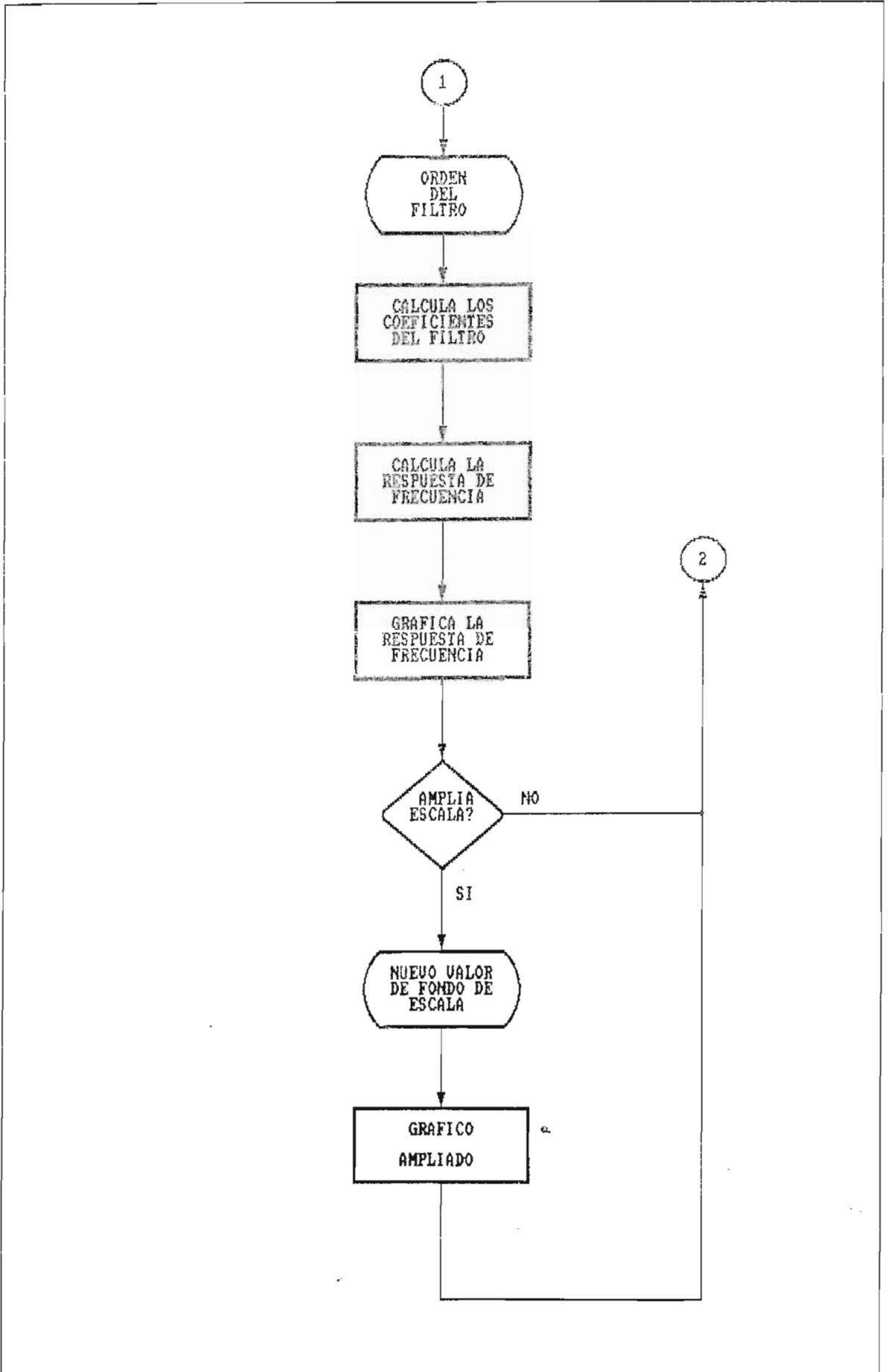


Fig. 4.9.2 Diagrama de flujo para diseño de filtros no recursivos de fase lineal.

En base al esquema de tolerancia, se define la frecuencia de corte (el esquema es un gráfico tutorial para ayudar al usuario). Se introduce el orden del filtro, y la rutina procede a calcular los coeficientes del filtro que se ha diseñado, así como la respuesta de frecuencia; finalmente se presenta el gráfico de la respuesta de frecuencia con la posibilidad de ampliar la escala a voluntad del usuario (figura 4.9.2). Todas las rutinas (para cada ventana), poseen tutoriales de la operación que cada una de ellas realiza y de los argumentos de entrada y salida que contienen.

4.1.3.6. Método de fase lineal en el dominio de la frecuencia.

Este método es similar al anterior, con la excepción de que se define los vectores de magnitud y frecuencia de la respuesta de frecuencia deseada del filtro, utilizando las mismas ventanas que en 4.1.3.5 con su propia rutina cada una de ellas (y en este caso con su propia subrutina también). Cada rutina posee un tutorial para informar al usuario de los argumentos de entrada y salida de la misma y su utilización.

Luego de seleccionar el tipo de ventana que se va a utilizar, se define la frecuencia de muestreo, el orden del filtro y los vectores de magnitud y frecuencia de la respuesta de frecuencia deseada; se presenta un ejemplo didáctico de como introducir dichos vectores. A continuación se grafica la respuesta de frecuencia deseada (ideal) con la opción de iniciar de nuevo el diseño si ésta no se ha definido correctamente (figura 4.10.1).

Después de que se acepta al gráfico de la respuesta de frecuencia deseada como correcta, la rutina procede a calcular los coeficientes del filtro, para con ellos poder calcular posteriormente la respuesta de frecuencia real del filtro; finalmente se grafica la respuesta de frecuencia real versus la deseada (ideal) con posibilidad de ampliar la

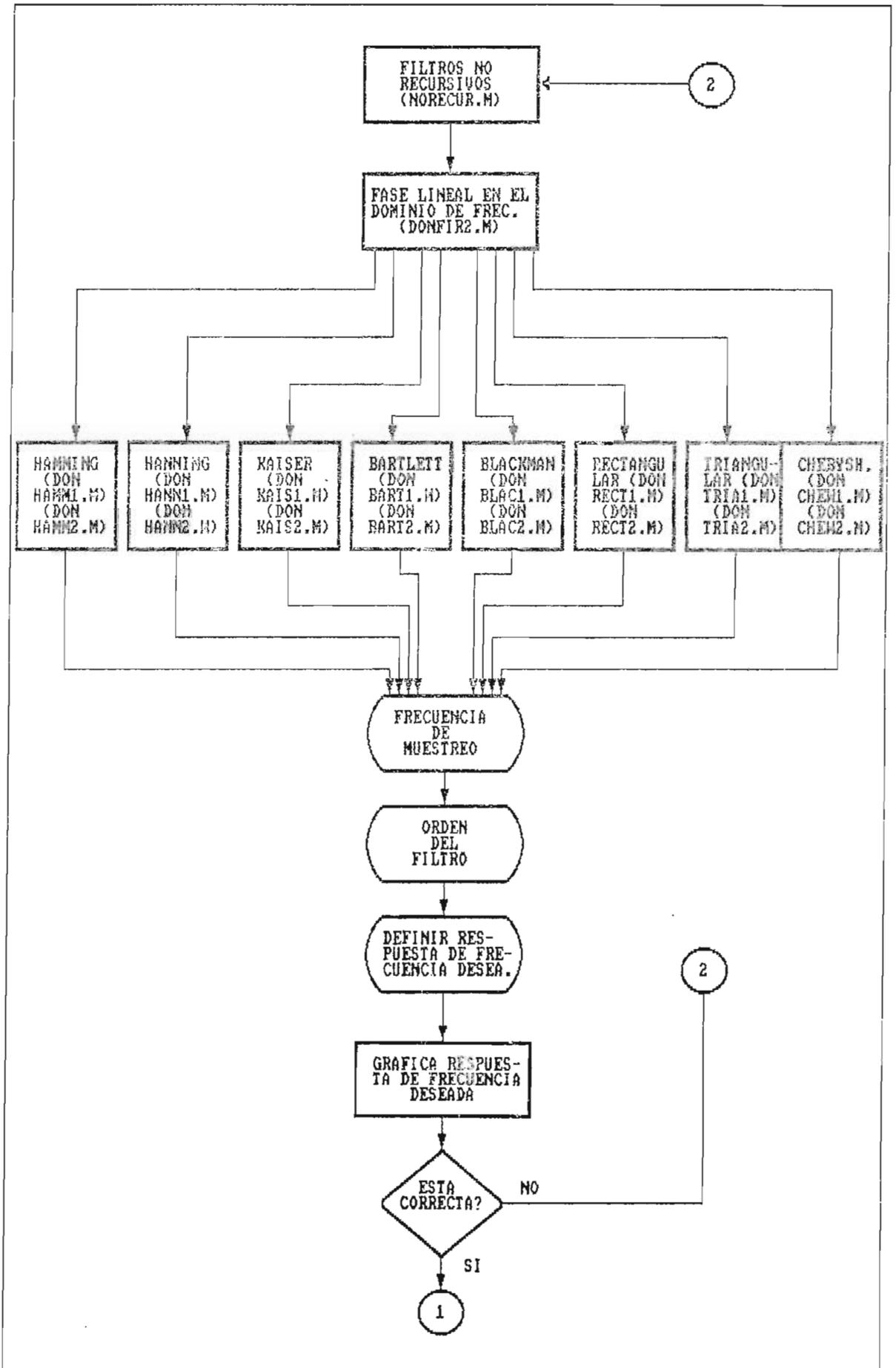


Fig. 4.10.1 Diagrama de flujo de filtros de fase lineal en el dominio de la frecuencia.

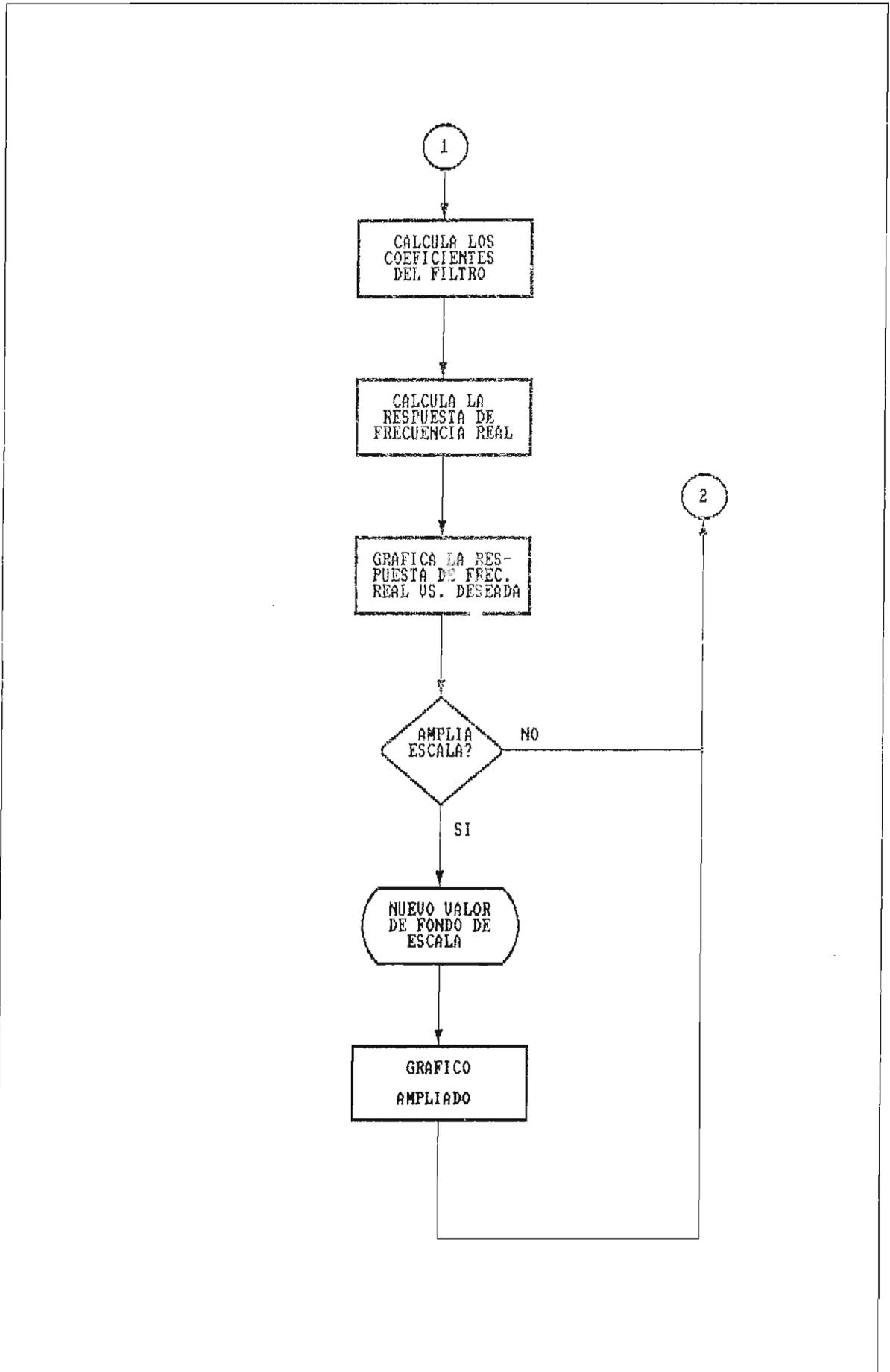


Fig. 4.10.2 Diagrama de flujo de filtros de fase lineal en el dominio de la frecuencia.

escala a voluntad (figura 4.10.2).

Mediante este método se pueden realizar diseños de filtros multibanda, debido a la posibilidad de definir la respuesta de frecuencia deseada, cualquiera que esta sea.

4.1.3.7. Método de diseño de Parks-McClellan.

El método de Parks-McClellan es el último de los métodos de diseño no recursivo y es denominado también como diseño óptimo equirizado (rizado equivalente en las bandas de paso y de bloqueo); la rutina y la subrutina de este método trabajan también en el dominio de la frecuencia, pues se definen los vectores de magnitud y frecuencia de la respuesta de frecuencia deseada, por lo cual el diseño por este método es capaz de realizar filtros multibanda, al igual que el método de 4.1.3.6.

Se inicia definiendo la frecuencia de muestreo necesaria, el orden del filtro (que no es tan grande como se lo puede definir en los ejemplos 4.1.3.5 y 4.1.3.6, ya que aquí es de aproximadamente 10, debido al número de iteraciones que realiza, y al colocar un orden muy elevado, se produce un mensaje de "out of memory" en el MATLAB).

Se define la respuesta de frecuencia deseada (ideal), con la ayuda de un ejemplo didáctico de la introducción de los datos de magnitud y frecuencia en vectores, aparte de poseer cada rutina un tutorial al inicio de la misma. Se procede a graficar la respuesta de frecuencia ideal con el fin de observar si los datos han sido introducidos correctamente; caso contrario la rutina posibilita el iniciar de nuevo el proceso para corregir el error.

Si la respuesta de frecuencia deseada está correcta, se calcula los coeficientes del filtro, la respuesta de frecuencia real, y, se procede a graficar las respuestas de frecuencia deseada y real del filtro, para poder compararlas con opción de ampliar la escala del gráfico (figura 4.11).

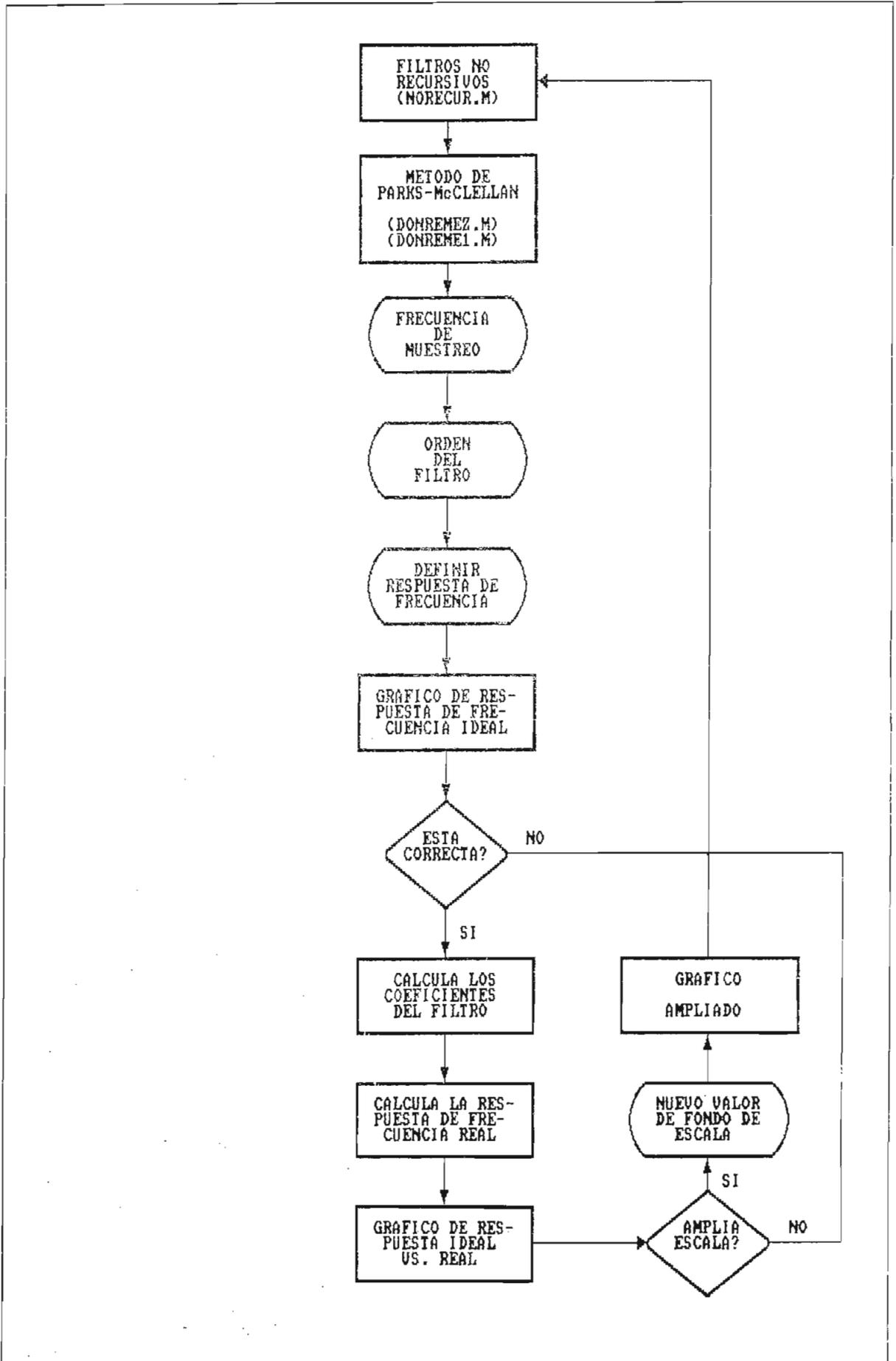


Fig. 4.11 Diagrama de flujo para diseño de filtros por el método de Parks-McClellan.

4.1.4. METODOS DE FILTRADO DE LAS SEÑALES.

Existen dos posibilidades de realizar filtrado de las señales de interés:

- a) Filtrado mediante filtros recursivos.
- b) Filtrado mediante filtros no recursivos.

El filtrado mediante los filtros recursivos utiliza uno de los siguientes métodos:

- Filtrado de fase cero.
- Filtrado en forma directa transpuesta.

Cuando se ha diseñado un filtro no recursivo, se utiliza el filtrado mediante filtros no recursivos, el cual utiliza la transformada rápida de Fourier para el efecto.

Cualquiera que sea el método, la estructura del diagrama de flujo es la misma, variando únicamente en el procedimiento de filtrado escogido. Todas las rutinas poseen tutoriales y su desarrollo es como sigue: se puede utilizar la señal obtenida en la simulación de las plantas para realizar un proceso de filtrado directo con la misma, o definir una señal cualquiera que se desee filtrar (como por ejemplo una señal de componentes sinusoidales de varias frecuencias, donde se quiere filtrar las frecuencias que no son de interés). Para ello se debe definir la frecuencia de muestreo conveniente.

Ya sea que se elige la señal de la planta o la señal definida, se procede a realizar el filtrado con el método escogido y el filtro diseñado anteriormente en el numeral 4.1.3. Posteriormente se grafica la señal original contaminada y la señal que ha sido filtrada, en una misma pantalla, para poder comparar las dos señales.

Adicionalmente se puede mirar el nuevo espectro de potencia (de la señal filtrada), utilizando para el objeto, las definiciones de cada una de las señales filtradas así:

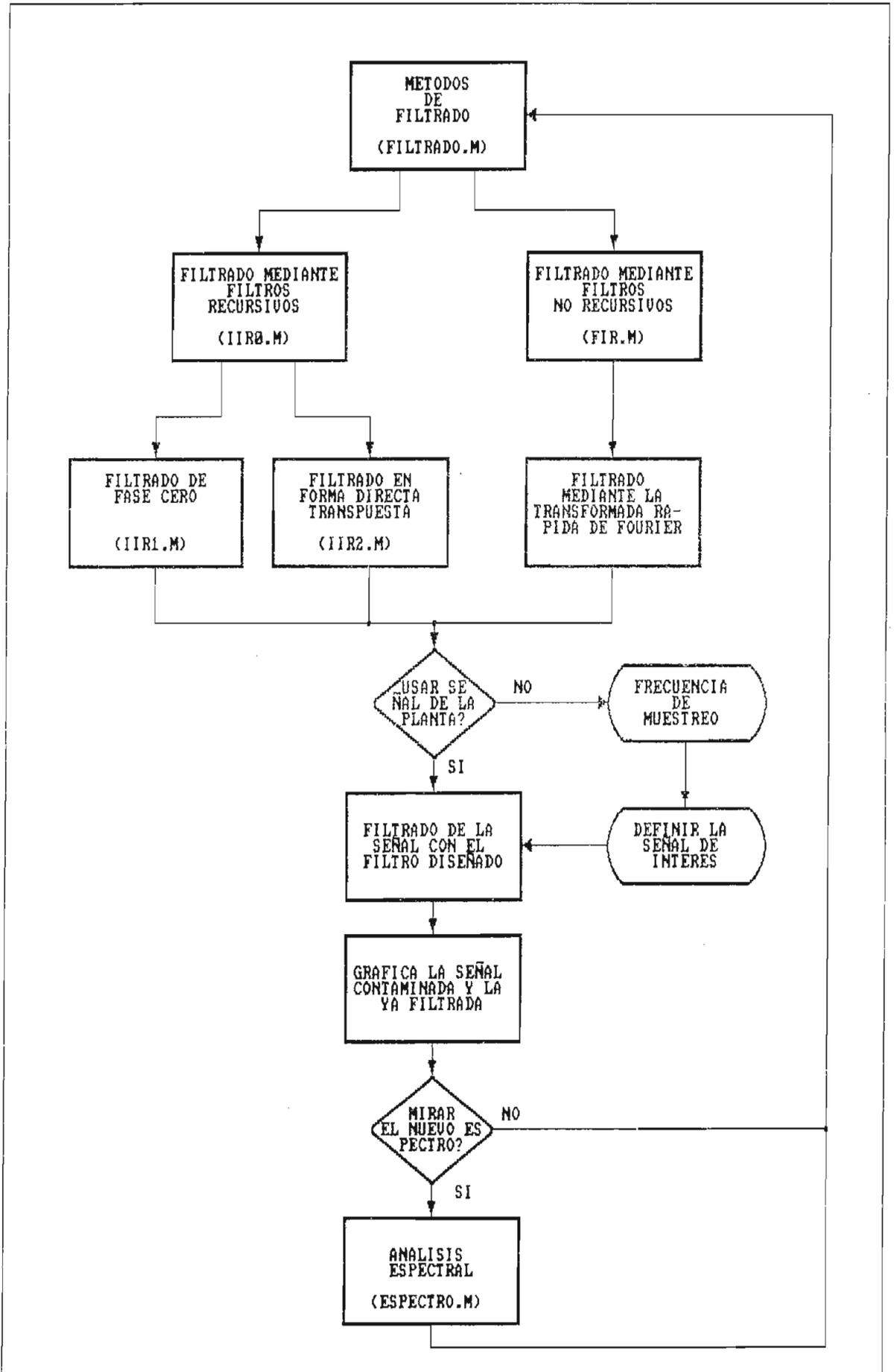


Fig. 4.12 Diagrama de flujo para el módulo de los métodos de filtrado.

- F0 para una señal filtrada con el método de fase cero (filtros recursivos).
- F1 para una señal filtrada con el método de forma directa transpuesta (filtros recursivos).
- F2 para la señal filtrada con el método de la TRF con filtros no recursivos. (Figura 4.12).

4.1.5. Ajuste polinomial de señales digitales.

El ajuste polinomial de señales digitales posee como todas las rutinas un tutorial al inicio de la misma. Su procedimiento es como sigue: se define un vector "k" que representa los tiempos discretos en los cuales han sido tomadas las distintas muestras; este vector puede ser definido (por ejemplo [0:0.1:10] que indica que el primer punto se toma a $k=0$, con intervalos de 0.1 hasta un valor de $k=10$), o escrito explícitamente (como [0,1,2,3,4,5]). Así mismo se procede a definir el vector $x(k)$, el cual representa a los valores que toma la función "x" a los tiempos discretos "k", habiendo la posibilidad de realizarlo como se lo hizo para el vector k, es decir, por generación del vector (por ejemplo: $\sin(xk)$), o por definición explícita de sus valores.

A continuación se grafica el vector k versus $x(k)$ (discretamente), y se introduce el orden del polinomio con el que se quiere ajustar la señal. Calcula el modelo polinómico y grafica el resultado del ajuste polinomial (el polinomio evaluado en tiempo continuo; hasta aquí lo que tiene que ver con el ajuste polinomial).

Como aplicaciones del ajuste polinomial, se tiene a la interpolación y a la extrapolación, que se pueden elegir (cualquiera de las dos) al terminar la modelación polinomial. De todos modos, se procede a definir un vector k' que contiene los puntos discretos de tiempo en los cuales se quiere realizar la interpolación o la extrapolación; la

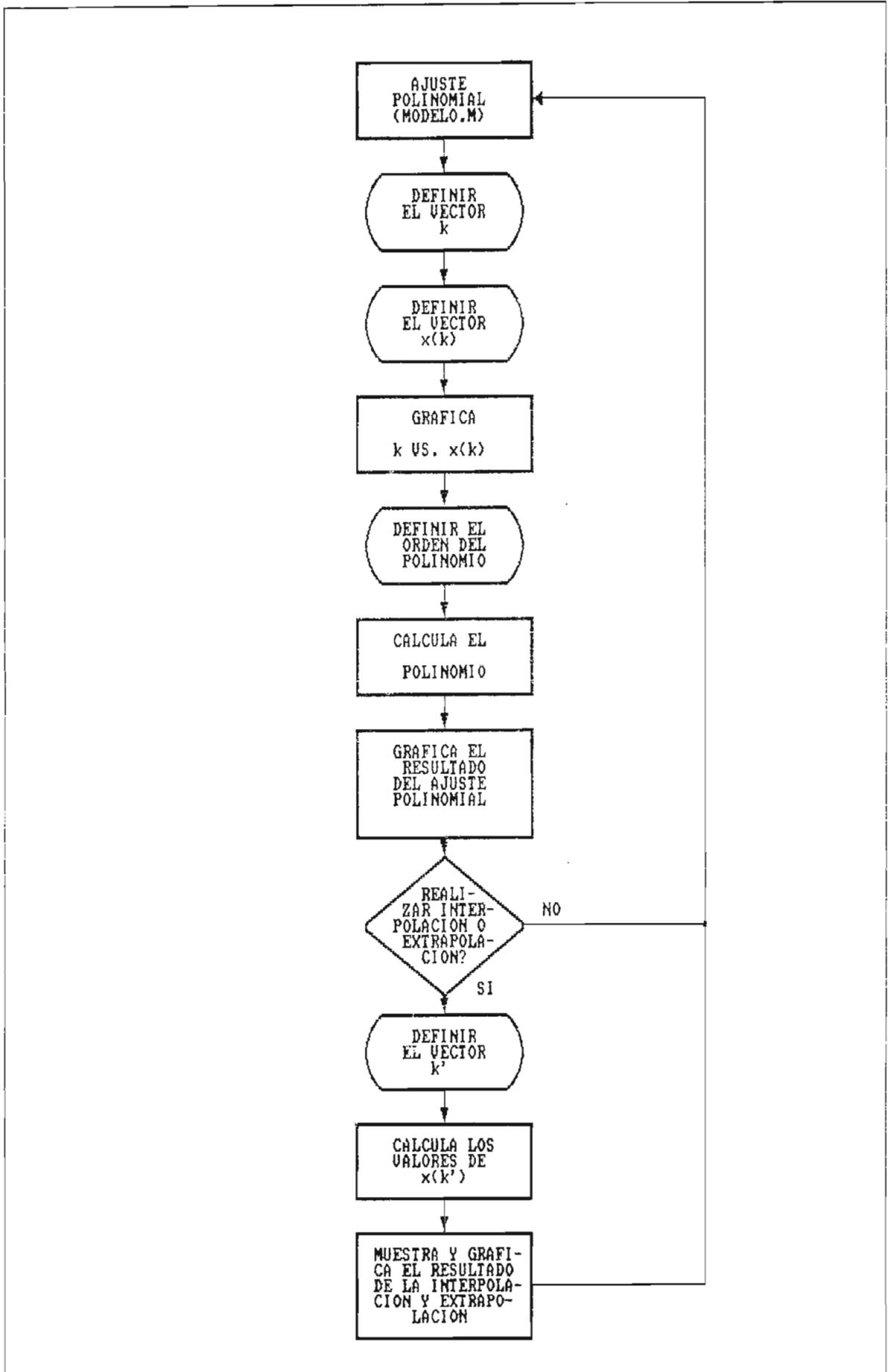


Fig. 4.13 Diagrama de flujo para el módulo de ajuste polinomial.

rutina calcula los valores $x(k')$ que resultan de la evaluación del modelo polinomial que se ajusta a la señal discreta de interés y que corresponden a la interpolación o a la extrapolación según el caso. Presenta estos valores de $x(k')$ para los dos casos y adicionalmente grafica el resultado de la extrapolación si ésta se ha realizado (figura 4.13).

- Señal Binaria Pseudo Aleatoria (PRBS).

Como se muestra en el diagrama de flujo de la figura 4.14, la señal PRBS es generada por una rutina de función (function file) que se desarrolla de la siguiente manera: se puede introducir los datos binarios (6) que son necesarios para la generación de la señal, o se puede utilizar un modelo preestablecido. Paso seguido se evalúa la relación lógica XOR (O EXCLUSIVO) entre los bits 5 y 6, desplazando este resultado a la posición del bit 1 y desplazando a la vez los bits 1, 2, 3, 4, y 5 un lugar hacia la derecha rotando de esta forma los datos binarios para generar la PRBS. Finalmente se grafica la señal generada, la cual varía entre +1 y -1, ya que cuando el resultado del XOR es 1 lógico, la señal asume +1 a la salida; cuando el resultado de XOR es 0 lógico, la señal asume un valor de -1 a la salida.

4.2. LIBRERIA DE PROCESAMIENTO DE SEÑALES DEL MATLAB.

La librería de procesamiento de señales del paquete MATLAB, posee funciones y comandos para los siguientes temas:

4.2.1. DISEÑO DE FILTROS DIGITALES.

- Bartlett.
- Bilinear.
- Blackman.
- Boxcar.
- Buttap.

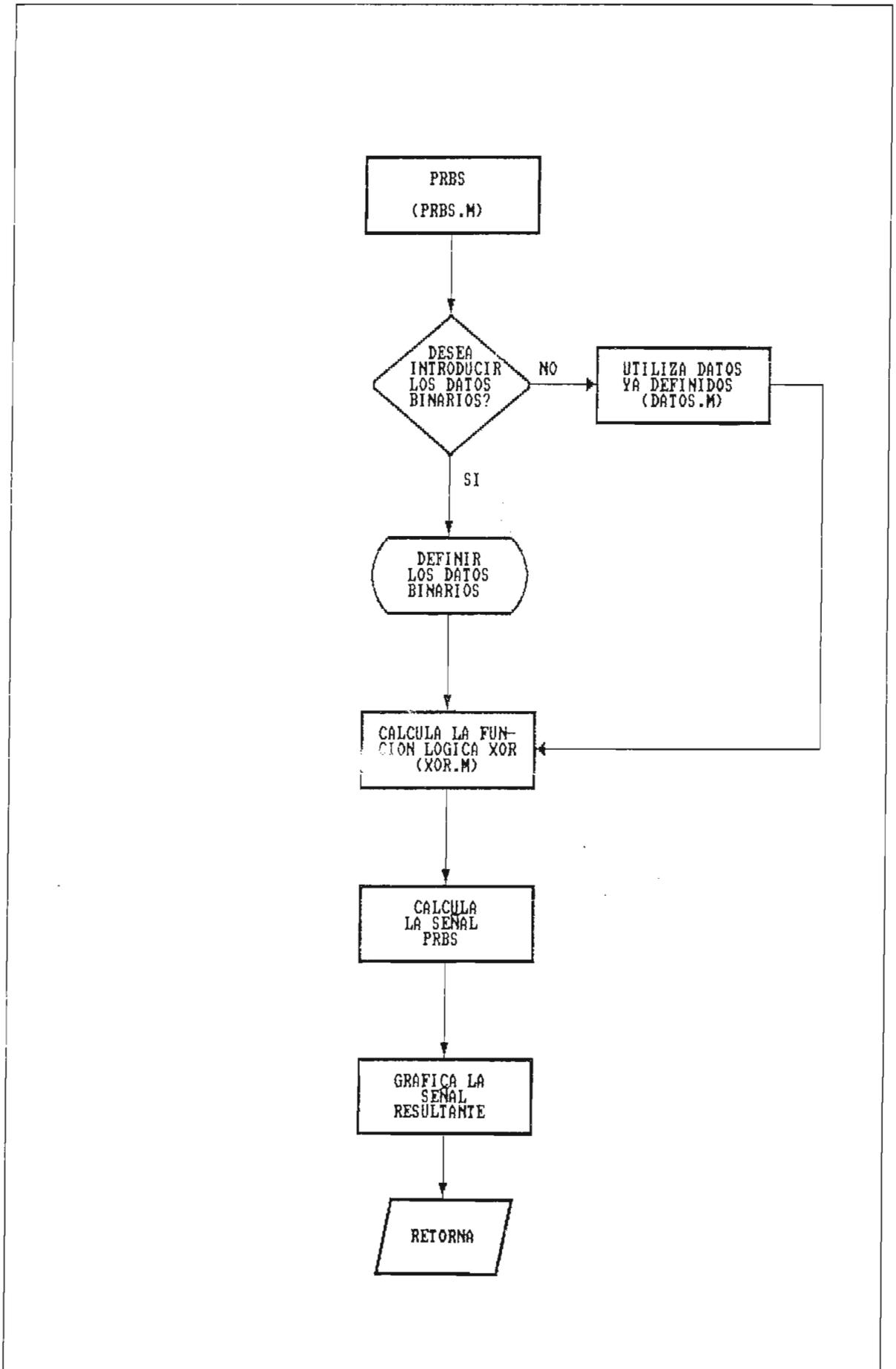


Fig. 4.14 Diagrama de flujo de la rutina de generación de una PRBS.

- Butter.
- Buttord.
- Cheblap.
- Cheb2ap.
- Chebap.
- Cheblord.
- Cheb2ord.
- Chebwin.
- Cheby.
- Cheby1.
- Cheby2.
- Ellip.
- Ellipap.
- Ellipord.
- Fir1.
- Fir2.
- Freqz.
- Hamming.
- Hanning.
- Invfreqz.
- Kaiser.
- Prony.
- Remez.
- Triang.
- Yulewalk.

4.2.2. FILTRADO DE SEÑALES, UTILIZANDO LOS FILTROS DEL NUMERAL 4.2.1.

- Filtfilt.
- Filter.
- Fftfilt.

4.2.3. ANALISIS ESPECTRAL.

- Fft.
- Ifft.
- Specplot.
- Spectrum.

4.2.4. AJUSTE POLINOMICO DE SEÑALES DIGITALES.

- Polyfit.
- Polyval.

4.3. RUTINAS PARA FILTROS.

En este numeral, se desarrollará el tema teniendo en cuenta el orden de presentación de los métodos de diseño en el programa de procesamiento de señales, así, se iniciará con el diseño de los filtros recursivos, luego con los no recursivos, para terminar con los métodos de filtrado, los cuales utilizan los coeficientes de los filtros diseñados anteriormente. Para cada método se realizará una pequeña explicación de su procedimiento, así como también de los datos de entrada y de salida para cada rutina, y la función perteneciente al MATLAB, que utiliza dicha rutina.

4.3.1. RUTINAS PARA DISEÑO DE FILTROS RECURSIVOS.

Las rutinas existentes para el diseño de este tipo de filtros, son cuatro:

4.3.1.1. Método de la transformada bilineal:

La transformada bilineal utiliza para cada una de sus variaciones: Butterworth, Chebyshev, Elíptico, las siguientes funciones:

- Bilinear:

Es la transformada bilineal con corrección de frecuencia opcional.

[Zd,Pd,Kd] = bilinear(Z,P,K,Fs) convierte la función de transferencia especificada en el dominio de Laplace por Z, P, y K a su equivalente discreto en el dominio de la transformada z, equivalente obtenido de la transformación bilineal:

$$H(z) = H(s) \Big|_{s=2*Fs*(z-1)/(z+1)} \quad (4.1)$$

donde los vectores columna Z y P especifican los ceros y los polos, K especifica la ganancia, y Fs es la frecuencia de muestreo en Hz.

[NUMd,DEND] = bilinear(NUM,DEN,Fs) donde NUM y DEN son vectores fila conteniendo los coeficientes del numerador y el denominador de la función de transferencia NUM(s)/DEN(s) en potencias descendentes de s, transforma a su equivalente en z, NUMd(z)/DEND(z).

Cada una de las dos formas anteriores de BILINEAR, acepta un argumento de entrada adicional opcional, Fp, que especifica la corrección antes de realizar la transformada bilinear para que las respuestas de frecuencia antes y después, coincidan exactamente en el punto de frecuencia Fp (Hz).

4.3.1.1.1. Aproximación de Butterworth.

- Buttap:

Prototipo de filtro pasabajo análogo de Butterworth.

[Z,P,K] = buttap(N) retorna los ceros, polos y ganancia para un prototipo normalizado de filtro pasabajo análogo de Butterworth de orden N. El filtro resultante tiene N polos alrededor del círculo unitario en el semiplano izquierdo, y sin ceros.

- Buttord:

Selección del orden del filtro de Butterworth.

[N,Wn] = buttord(Wp,Ws,Rp,Rs) retorna el orden N del filtro de Butterworth de más bajo orden que no pierde más que Rp dB en la banda de paso y tiene por lo menos Rs dB de atenuación en la banda de bloqueo. La banda de paso va desde 0 hasta Wp y la banda de bloqueo se extiende desde Ws a 1, que es la frecuencia de Nyquist. Buttord también retorna Wn, que es la

frecuencia natural de corte del filtro normalizado Butterworth, para usar con Butter y cumplir con las especificaciones. Cuando R_p es escogida como 3 dB, el W_n en Butter es igual a W_p en Buttord.

- Butter:

Diseño de filtro digital de Butterworth.

$[B,A] = \text{butter}(N,W_n)$ diseña un filtro digital de Butterworth pasabajo de orden N , y retorna los coeficientes del filtro en los vectores B y A de longitud $N+1$. La frecuencia de corte W_n debe estar entre 0 y 1, con 1 correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo.

Si W_n es un vector de dos elementos, $W_n = [W_1 W_2]$, butter retorna un filtro pasabanda de orden $2N$ con banda de paso $W_1 < W < W_2$.

$[B,A] = \text{butter}(N,W_n, \text{'high'})$ diseña un filtro pasaalto.

$[B,A] = \text{butter}(N,W_n, \text{'stop'})$ es un filtro eliminabanda si W_n es $[W_1 W_2]$.

4.3.1.1.2. Aproximación de Chebyshev.

- Cheb1ap:

Prototipo de filtro pasabajo análogo de Chebyshev tipo I.

$[Z,P,K] = \text{cheb1ap}(N,R_p)$ retorna los ceros, polos y ganancia para un prototipo normalizado de filtro pasabajo análogo de Chebyshev tipo I de orden N , con R_p decibelios de rizado en la banda de paso. Los filtros Chebyshev de tipo I son planos en la banda de bloqueo.

- Cheb2ap:

Prototipo de filtro pasabajo análogo de Chebyshev tipo II.

$[Z,P,K] = \text{cheb2ap}(N,R_s)$ retorna los ceros, polos y ganancia para un prototipo normalizado de filtro pasabajo análogo de Chebyshev tipo II de orden N , con R_s decibelios de rizado en la banda la de bloqueo. Los filtros Chebyshev de tipo II son

planos en la banda de paso.

- **Chebap:**

Chebap(N,R) retorna un vector de longitud N, de localizaciones de polos para un prototipo de filtro pasabajo análogo Chebyshev con R decibelios de rizado en la banda de paso.

- **Cheblord:**

Selección del orden del filtro de Chebyshev tipo I.

[N,Wn] = cheblord(Wp,Ws,Rp,Rs) retorna el orden N del filtro de Chebyshev tipo I de más bajo orden que no pierde más que Rp dB en la banda de paso y tiene por lo menos Rs dB de atenuación en la banda de bloqueo. La banda de paso va desde 0 hasta Wp y la banda de bloqueo se extiende desde Ws a 1, que es la frecuencia de Nyquist. Cheblord también retorna Wn, que es la frecuencia natural de Chebyshev, para usar con Cheby1 y cumplir con las especificaciones.

- **Cheb2ord:**

Selección del orden del filtro de Chebyshev tipo II.

[N,Wn] = cheb2ord(Wp,Ws,Rp,Rs) retorna el orden N del filtro de Chebyshev tipo II de más bajo orden que no pierde más que Rp dB en la banda de paso y tiene por lo menos Rs dB de atenuación en la banda de bloqueo. La banda de paso va desde 0 hasta Wp y la banda de bloqueo se extiende desde Ws a 1, que es la frecuencia de Nyquist. Cheb2ord también retorna Wn, que es la frecuencia natural de Chebyshev, para usar con Cheby2 y cumplir con las especificaciones.

- **Cheby1:**

Diseño de filtro digital de Chebyshev tipo I.

[B,A] = cheby1(N,R,Wn) diseña un filtro digital de Chebyshev pasabajo de orden N, con R decibelios de rizado en la banda de paso, y retorna los coeficientes del filtro en los

vectores B y A de longitud $N+1$. La frecuencia de corte W_n debe estar entre 0 y 1, con 1 correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo. Usar $R=0.5$ como un punto de partida, si no se está seguro de su valor.

Si W_n es un vector de dos elementos, $W_n = [W_1 \ W_2]$, `cheby1` retorna un filtro pasabanda de orden $2N$ con banda de paso $W_1 < W < W_2$.

`[B,A] = cheby1(N,R,Wn,'high')` diseña un filtro pasaalto.

`[B,A] = cheby1(N,R,Wn,'stop')` es un filtro eliminabanda si W_n es $[W_1 \ W_2]$.

- Cheby2:

Diseño de filtro digital de Chebyshev tipo II.

`[B,A] = cheby2(N,R,Wn)` diseña un filtro digital de Chebyshev pasabajo de orden N , con R decibelios de rizado en la banda de bloqueo, y retorna los coeficientes del filtro en los vectores B y A de longitud $N+1$. La frecuencia de corte W_n debe estar entre 0 y 1, con 1 correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo. Usar $R=20$ como un punto de partida, si no se está seguro de su valor.

Si W_n es un vector de dos elementos, $W_n = [W_1 \ W_2]$, `cheby2` retorna un filtro pasabanda de orden $2N$ con banda de paso $W_1 < W < W_2$.

`[B,A] = cheby2(N,R,Wn,'high')` diseña un filtro pasaalto.

`[B,A] = cheby2(N,R,Wn,'stop')` es un filtro eliminabanda si W_n es $[W_1 \ W_2]$.

- Cheby:

Diseño de filtro digital de Chebyshev.

`[B,A] = cheby(N,R,Wn)` diseña un filtro digital de Chebyshev pasabajo de orden N , con R decibelios de rizado en la banda de paso, y retorna los coeficientes del filtro en los vectores B y A de longitud $N+1$. La frecuencia de corte W_n debe estar entre 0 y 1, con 1 correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo. Usar $R=0.5$ como un punto de

partida, si no se está seguro de su valor.

Si W_n es un vector de dos elementos, $W_n = [W_1 \ W_2]$, `cheby` retorna un filtro pasabanda de orden $2N$ con banda de paso $W_1 < W < W_2$.

`[B,A] = cheby(N,R,Wn,'high')` diseña un filtro pasaalto.

`[B,A] = cheby(N,R,Wn,'stop')` es un filtro eliminabanda si W_n es $[W_1 \ W_2]$.

4.3.1.1.3. Aproximación Elíptica.

- `Ellipap`:

Prototipo de filtro pasabajo análogo elíptico.

`[Z,P,K] = ellipap(N,Rp,Rs)` retorna los ceros, polos y la ganancia de un prototipo análogo de filtro pasabajo elíptico con R_p decibelios de rizado en la banda de paso y una banda de bloqueo con R_s decibelios de atenuación.

- `Ellipord`:

Selección del orden del filtro elíptico.

`[N,Wn] = ellipord(Wp,Ws,Rp,Rs)` retorna el orden N del filtro elíptico de más bajo orden que no pierde más que R_p dB en la banda de paso y tiene por lo menos R_s dB de atenuación en la banda de bloqueo. La banda de paso va desde 0 hasta W_p y la banda de bloqueo se extiende desde W_s a 1, que es la frecuencia de Nyquist. `Ellipord` también retorna W_n , que es la frecuencia natural elíptica, para usar con `Ellip` y cumplir con las especificaciones.

- `Ellip`:

Diseño de filtro digital elíptico o de Cauer.

`[B,A] = ellip(N,Rp,Rs,Wn)` diseña un filtro digital elíptico pasabajo de orden N , y retorna los coeficientes del filtro en los vectores B y A de longitud $N+1$. La frecuencia de corte W_n debe estar entre 0 y 1, con 1 correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo. Usar $R_p=0.5$ y $R_s=20$ como

puntos de partida si no se está seguro de los valores necesarios de éstos.

Si W_n es un vector de dos elementos, $W_n = [W_1 \ W_2]$, `ellip` retorna un filtro pasabanda de orden $2N$ con banda de paso $W_1 < W < W_2$.

`[B,A] = ellip(N,Rp,Rs,Wn,'high')` diseña un filtro pasaalto.

`[B,A] = ellip(N,Rp,Rs,Wn,'stop')` es un filtro eliminabanda si W_n es $[W_1 \ W_2]$.

4.3.1.2. Método de Yule-Walker:

- Yulewalk:

Método de diseño de filtro recursivo, usando un método de mínimos cuadrados.

`[B,A] = yulewalk(N,F,M)` encuentra los coeficientes B y A del filtro recursivo de orden N, tal que el filtro:

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(n)z^{-(n-1)}}{1 + a(1)z^{-1} + \dots + a(n)z^{-(n-1)}} \quad (4.2)$$

empareja la respuesta de frecuencia en magnitud dada por los vectores F y M. Los vectores F y M especifican la frecuencia y la magnitud para el filtro, tal que `plot(F,M)` debería mostrar un gráfico de la respuesta de frecuencia deseada. Las frecuencias en F deben estar entre 0 y la mitad de la frecuencia de muestreo, ordenándose ascendentemente y comenzando con 0 y terminando con la mitad de la frecuencia de muestreo. Mediante éste método, se puede realizar diseños de **filtros multibanda**.

4.3.1.3. Método de Prony:

- Prony:

Diseño de filtro de respuesta impulso infinita (recursivo), en el dominio del tiempo (respuesta impulso) por el método de Prony.

`[B,A] = prony(H,NB,NA)` encuentra un filtro con orden del

numerador NB y orden del denominador NA, teniendo la respuesta impulso en el vector H. Los coeficientes del filtro recursivo son retornados en vectores fila B y A, de longitud NB+1 y NA+1, ordenados en potencias descendentes de z.

4.3.1.4. Método del error mínimo cuadrado.

- Invfreqz:

Es la operación inversa de Freqz (numeral 4.4). Esta función puede convertir los datos de magnitud y fase en una función de transferencia discreta en el tiempo en función de la transformada z.

[B,A] = invfreqz(H,W,nb,na) retorna los coeficientes del numerador y del denominador en vectores B y A de la función de transferencia cuya respuesta de frecuencia está dada en el vector H a los puntos de frecuencia especificada en el vector W. Los escalares nb y na especifican los órdenes deseados de los polinomios del numerador y del denominador.

La frecuencia está especificada en radianes/segundo entre cero y π , y la longitud de W es igual a la longitud de H. Esta rutina puede ser usada para diseñar el filtro con un error mínimo cuadrado entre la respuesta de frecuencia del filtro y un grupo de puntos que se especifican en el dominio de la frecuencia.

4.3.2. RUTINAS PARA DISEÑO DE FILTROS NO RECURSIVOS:

Las rutinas existentes para este tipo de filtros son las siguientes:

4.3.2.1. Método de diseño de fase lineal con ventanas:

Todos los filtros diseñados por este método, poseen una función en común, y es la que se presenta a continuación:

- **Fir1:**

Diseño de filtros no recursivos, usando las ventanas.

$B = \text{fir1}(N, W_n)$ diseña un filtro digital FIR (respuesta impulso finita) pasabajo de orden N , y retorna los coeficientes del filtro en el vector B de longitud $N+1$. La frecuencia de corte W_n debe estar entre 0 y 1, con 1 correspondiente a la mitad de la frecuencia de muestreo.

Si W_n es un vector de dos elementos, $W_n = [W_1 \ W_2]$, fir1 retorna un filtro pasabanda de orden N con banda de paso $W_1 < W < W_2$.

$B = \text{fir1}(N, W_n, \text{'high'})$ diseña un filtro pasaalto.

$B = \text{fir1}(N, W_n, \text{'stop'})$ es un filtro eliminabanda si $W_n = [W_1 \ W_2]$. Para filtros pasaaltos y eliminabanda, N debe ser par. Por regla general fir1 usa una ventana de Hamming. Otras ventanas disponibles, como la rectangular, Hanning, Bartlett, Blackman, Kaiser, Chebwin, y triangular pueden ser especificadas con un argumento opcional, por ejemplo:

$B = \text{fir1}(N, W_n, \text{bartlett}(N+1))$, usa una ventana de Bartlett.

$B = \text{fir1}(N, W_n, \text{'high'}, \text{chebwin}(N+1, R))$ usa una ventana de Chebyshev para diseñar un filtro pasaaltos.

- **Hamming:**

$\text{Hamming}(N)$ retorna la ventana de Hamming de N puntos.

- **Hanning:**

$\text{Hanning}(N)$ retorna la ventana de Hanning de N puntos en un vector columna.

- **Kaiser:**

$\text{Kaiser}(N, \text{beta})$ retorna la ventana beta-valuada de Kaiser, de N puntos.

- **Bartlett:**

$\text{Bartlett}(N)$ retorna la ventana de Bartlett de N puntos.

- **Blackman:**

$\text{Blackman}(N)$ retorna la ventana de Blackman de N puntos.

- **Boxcar:**

Boxcar(N) retorna la ventana rectangular de N puntos.

- **Triang:**

Triang(N) retorna la ventana triangular de N puntos.

- **Chebwin:**

Chebwin(N,R) retorna la ventana de Chebyshev de N puntos, con R decibelios de rizado. N debe ser impar. Si N es par, retorna una ventana impar de longitud N+1.

4.3.2.2. Método de diseño de fase lineal en frecuencia.

Todos los filtros diseñados por este método, poseen una función en común, y es la que se presenta a continuación:

- **Fir2:**

Diseño de filtros no recursivos, usando las ventanas, independientemente de la forma del filtro.

$B = \text{fir2}(N,F,M)$ diseña un filtro digital FIR (respuesta impulso finita) de orden N, y retorna los coeficientes del filtro en el vector B de longitud N+1, mediante la respuesta de frecuencia especificada por los vectores F y M, tal que $\text{plot}(F,M)$, debería mostrar un gráfico de la respuesta de frecuencia deseada. Las frecuencias en F deben estar entre 0 y la mitad de la frecuencia de muestreo, ordenadas incrementalmente, comenzando con cero y terminando con la mitad de la frecuencia de muestreo.

Por regla general fir2 usa una ventana de Hamming. Otras ventanas disponibles, como la rectangular, Hanning, Bartlett, Blackman, Kaiser, Chebwin, y triangular pueden ser especificadas con un argumento opcional, por ejemplo:

$B = \text{fir2}(N,F,M,\text{bartlett}(N+1))$, usa una ventana de Bartlett.

$B = \text{fir2}(N,F,M,\text{chebwin}(N+1,R))$ usa una ventana de Chebyshev.

Este método también utiliza todas las ventanas que se

mencionó anteriormente y de la misma manera, como se puede ver en el ejemplo anterior.

4.3.2.3. Algoritmo de Parks-McClellan.

Este es un método de diseño de filtros no recursivos equirizados óptimos, utiliza la siguiente función:

- Remez:

Diseño de filtro no recursivo equirizado óptimo.

$B = \text{remez}(N,F,M)$, diseña un filtro de respuesta impulso finita de orden N , con la respuesta de frecuencia especificada por los vectores F y M , y retorna los coeficientes del filtro en el vector B de longitud $N+1$. Los vectores F y M especifican la frecuencia y la magnitud para el filtro, tal que, $\text{plot}(F,M)$ debería mostrar un gráfico de la respuesta de frecuencia deseada. Las frecuencias en F deben estar entre 0 y la mitad de la frecuencia de muestreo, ordenadas incrementalmente, comenzando con cero y terminando con la mitad de la frecuencia de muestreo. Con este método, se puede realizar diseños de filtros multibanda.

4.3.3. FILTRADO DIGITAL DE SEÑALES CONTAMINADAS.

4.3.3.1. Filtrado mediante filtros recursivos:

4.3.3.1.1. Filtrado de fase cero.

- Filtfilt:

Filtrado digital hacia adelante y hacia atrás de fase cero. $Y = \text{filtfilt}(B,A,X)$ filtra los datos en vector X con el filtro descrito por los vectores A y B para crear los datos filtrados Y . El filtro está descrito por la ecuación en diferencias:

$$y(n) = b(1)*x(n)+b(2)*x(n-1)+\dots+b(nb+1)*x(n-nb) - a(2)*y(n-1)-\dots-a(na+1)*y(n-na) \quad (4.3)$$

Después del filtrado en una dirección (hacia adelante), la secuencia de filtrado es entonces revertida y va hacia atrás a través del filtro. La secuencia resultante tiene precisamente distorsión de fase cero y dobla el orden del filtro.

4.3.3.1.2. Filtrado en forma directa transpuesta.

- Filter:

Filtrado digital.

$Y = \text{filter}(B,A,X)$ filtra los datos en el vector X con el filtro descrito por los vectores A y B para crear los datos filtrados Y . El filtro es una implementación de "forma directa II transpuesta" de la ecuación en diferencias estándar (4.3).

4.3.3.2. Filtrado mediante filtros no recursivos.

- Fftfilt:

Método para filtrado, usando la TRF.

$Y = \text{fftfilt}(B,X)$ filtra X con el filtro no recursivo B , usando la TRF.

$Y = \text{fftfilt}(B,X,N)$ usa la TRF para filtrar X con B usando una TRF de N puntos.

4.3.4. Respuesta de frecuencia de filtros digitales.

- Freqz:

Respuesta de frecuencia de filtros digitales en el dominio de la transformada z , cuando N es un entero. $[H,W] = \text{freqz}(B,A,N)$ retorna el vector W de frecuencia de N puntos, y la respuesta de frecuencia compleja de N puntos en el vector G del filtro B/A :

$$H(e^{j\omega}) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{b(1) + b(2)z^{-1} + \dots + b(nb+1)z^{-nb}}{1 + a(2)z^{-1} + \dots + a(na+1)z^{-na}} \quad (4.4)$$

ingresando los coeficientes del numerador y el denominador en los vectores B y A. La respuesta de frecuencia es evaluada a N puntos igualmente espaciados alrededor de la mitad superior del círculo unitario. Para graficar la magnitud y la fase de un filtro:

```
[H,W] = freqz(B,A,N);
mag = abs(H);
fase = angle(H);
```

Freqz(B,A,N,'whole') usa N puntos alrededor del círculo unitario entero.

Freqz(B,A,W) retorna la respuesta de frecuencia a las frecuencias designadas en el vector W, normalmente entre 0 y π .

Cabe mencionar, que todos los filtros que se diseñan en el programa del paquete MATLAB, tienen la característica de poder ser utilizados para el diseño de cualquiera de las formas de filtro existentes, que son:

- Filtro pasabajo.
- Filtro pasaalto.
- Filtro pasabanda.
- Filtro eliminabanda.

4.4. RUTINAS PARA EL ANALISIS DEL ESPECTRO.

Las siguientes rutinas han sido utilizadas para el desarrollo del análisis espectral, por lo que se tiene:

- Spectrum:

Estimación del espectro de potencia de una o dos secuencias de datos.

P = spectrum(X,Y,M) realiza el análisis de TRF de las dos secuencias X y Y usando el método de estimación espectral de

potencia. Las secuencias X y Y de N puntos son divididas en K secciones de M puntos cada una (M debe ser una potencia de dos). Spectrum retorna un arreglo de M/2 por 8.

P = [Pxx Pyy Pxy Txy Cxy Pxxc Ppyc Pxyc], donde: [4]

Pxx = densidad espectral de potencia en el vector X.

Pyy = densidad espectral de potencia en el vector Y.

Pxy = densidad espectral cruzada.

Txy = función de transferencia compleja desde X a Y.

Cxy = función de coherencia entre X y Y.

Pxxc, Ppyc, Pxyc = rango de confianza.(95 %).

Las unidades sobre el espectro de potencia Pxx y Pyy (que son los que se utilizan en las rutinas), son tales que, usando el teorema de Parseval:

$$\sum \frac{x^2}{M} = \sum (Pxx) \quad (4.5)$$

Donde M es el número de muestras y el valor RMS de la señal es la raíz cuadrada de ésta. Por ejemplo, una onda sinusoidal pura con amplitud A tiene un valor RMS de $A/2^{1/2}$.

- Specplot:

Grafica la salida de la función spectrum.

Specplot (P,Fs), usa P, que es la salida de spectrum, y Fs que es la frecuencia de muestreo. Specplot (P) usa frecuencia normalizada, Fs=2, para que el fondo de escala en el eje de frecuencia sea 1, que es la mitad de la frecuencia de muestreo (la frecuencia de Nyquist).

- Fft:

Fft(X) es la TDF del vector X. Si la longitud de X es una potencia de 2, se utiliza un algoritmo rápido de TRF para potencias de 2. Si la longitud de X no es una potencia de 2, entonces se emplea un algoritmo más lento para potencias distintas de 2.

$\text{Fft}(X,N)$ es la TRF de N puntos, rellena con ceros si X tiene menos que N puntos, y truncada si tiene más.

- **Ifft:**

$\text{Ifft}(X)$ es la inversa de la TDF del vector X . $\text{Ifft}(X,N)$ es la TRIF de N puntos, donde N debe ser una potencia de 2.

4.5. RUTINAS ADICIONALES.

4.5.1. RUTINAS UTILIZADAS EN LA SIMULACION DE PLANTAS:

- **Step:**

Respuesta paso de sistemas lineales continuos en el tiempo. $Y = \text{step}(\text{NUM},\text{DEN},T)$ calcula la respuesta paso desde la descripción de la función de transferencia $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$, donde NUM y DEN contienen los coeficientes polinomiales en potencias descendentes.

- **Lsim:**

Simulación de sistemas lineales continuos en el tiempo, a entradas arbitrarias.

$Y = \text{lsim}(\text{NUM},\text{DEN},U,T)$ calcula la respuesta en el tiempo desde la descripción de la función de transferencia $G(s) = \text{NUM}(s)/\text{DEN}(s)$, donde NUM y DEN contienen los coeficientes polinomiales en potencias descendentes.

- **Rand:**

Matrices y números aleatorios. $\text{Rand}(N)$ es una matriz $N \times N$ con elementos aleatorios. $\text{Rand}(M,N)$ es una matriz $M \times N$ con elementos aleatorios. $\text{Rand}(A)$ es del mismo tamaño que A . Rand sin argumentos es un escalar cuyo valor cambia cada vez que es utilizado.

Ordinariamente, los números random están uniformemente distribuidos en el intervalo $(0,1)$. $\text{Rand}(\text{'normal'})$ cambia a

una distribución normal con media 0 y varianza 1. Rand('uniform') cambia de nuevo a la distribución uniforme.

Rand('dist') retorna una variable conteniendo la distribución corriente, cualquiera que esta sea "uniforme" o "normal". Rand('seed') retorna el valor actual de la semilla para el generador. Rand('seed',n) coloca el valor de la semilla a n. Rand('seed',0) resetea la semilla a cero, su valor cuando se inició la sesión con el MATLAB.

4.5.2. RUTINAS UTILIZADAS PARA EL AJUSTE POLINOMIAL.

- Polyval:

Evaluación polinomial.

Si V es un vector cuyos elementos son los coeficientes de un polinomio, entonces polyval(V,s) es el valor del polinomio evaluado con el valor de s. Si S es una matriz o un vector, el polinomio es evaluado en todos los puntos de S.

- Polyfit:

Polyfit(x,y,n) encuentra los coeficientes de un polinomio formado desde los datos en el vector x, de grado n, que ajusta los datos en el vector y, utilizando minimización de errores cuadrados.

Utilizando el comando POLYVAL, se pueden obtener los resultados de la interpolación y de la extrapolación, ya que éste comando evalúa el modelo polinómico hallado con POLYFIT en los puntos (x,y).

- 5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES
 - 5.1. Resultados
 - 5.1.1. Simulación de plantas
 - 5.1.2. Análisis espectral
 - 5.1.3. Diseño de filtros
 - 5.1.4. Filtrado de señales
 - 5.1.5. Ajuste polinomial
 - 5.1.6. Relación entre un filtro digital y uno análogo
 - 5.1.7. Variación del número de puntos de la TDF en el cálculo de un espectro
 - 5.2. Conclusiones

5.1. RESULTADOS.

Los resultados que se presentan a continuación, son los más representativos de los diversos campos de aplicación del software desarrollado mediante la base algorítmica del MATLAB para el módulo de procesamiento digital de señales, el cual, como ya se ha visto contiene rutinas para simulación de plantas, análisis espectral, diseño de filtros digitales recursivos y no recursivos, filtrado de las señales contaminadas mediante los filtros diseñados con métodos apropiados para ello, y finalmente, ajuste polinomial de señales discretas y sus aplicaciones de interpolación y extrapolación.

Se ha procedido de esta manera, debido a la gran variedad de filtros, métodos de filtrado, y demás aplicaciones del módulo de procesamiento digital de señales PDS, que se pueden realizar mediante computador, (en este caso con el paquete MATLAB), ya que sería muy extenso presentar a todos ellos para conocer sus características, por lo que se centrará la atención en los métodos más representativos y didácticos.

5.1.1. SIMULACION DE PLANTAS.

Se realiza la simulación de plantas con un total de 1000 muestras, lo cual significa que al tomar una frecuencia de muestreo de 100 Hz, se tiene información de la señal de interés hasta 10 segundos, tiempo suficiente para apreciar el comportamiento de las plantas, a las entradas paso (o escalón) o a una señal definida por el usuario. El objetivo de realizar dicha simulación, además de observar el comportamiento de la planta, es el de posteriormente utilizar esta señal de respuesta, para poder filtrar el ruido presente en ella mediante el diseño de un filtro adecuado. Los resultados obtenidos son los siguientes:

5.1.1.1. Simulación de una planta de segundo orden.

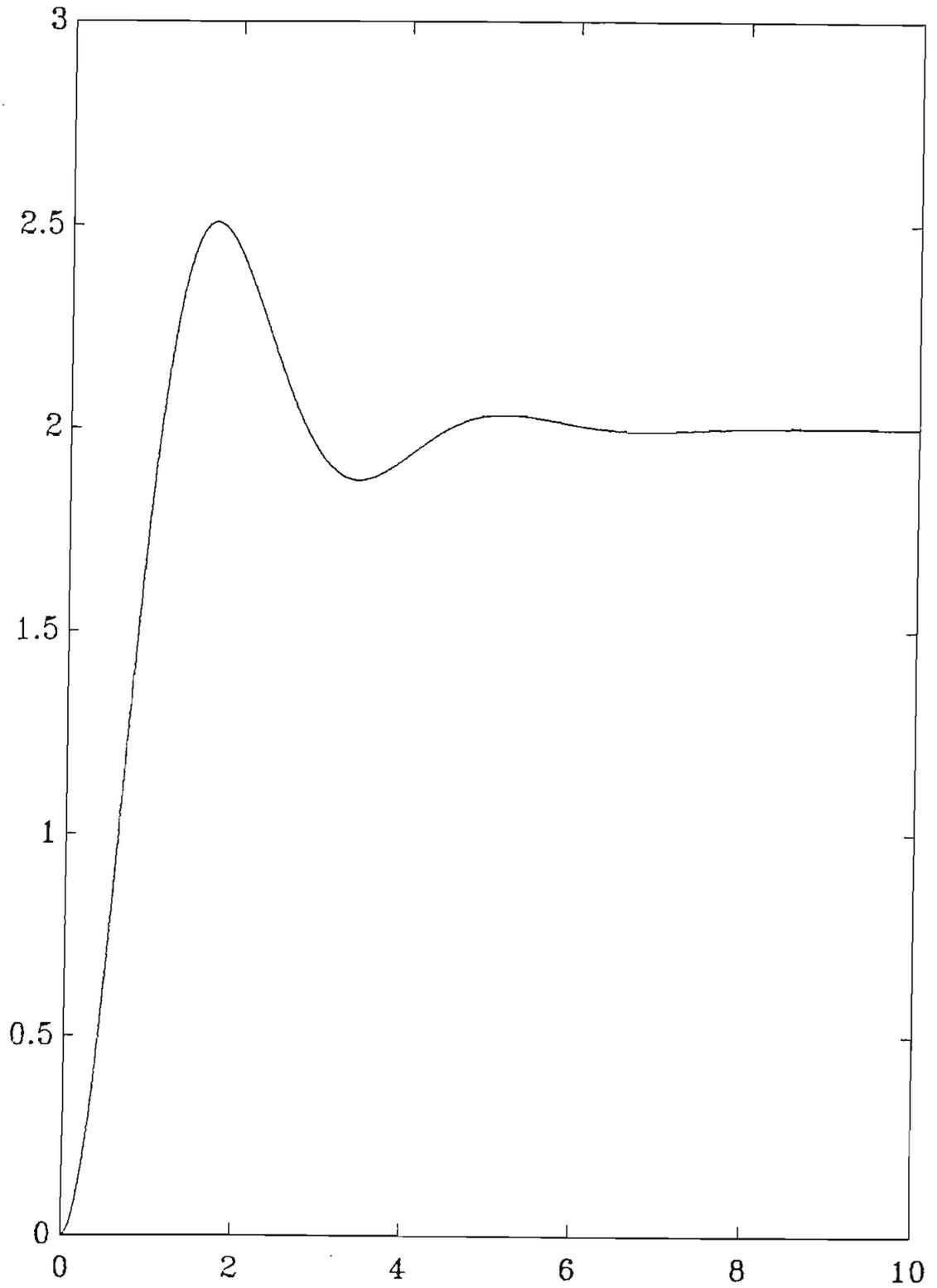


Fig. 5.1 Respuesta paso de una planta de segundo orden.
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

En la figura 5.1, se presenta la respuesta de una planta de segundo orden a una entrada escalón con los siguientes parámetros:

- Ganancia = 2.
- Frecuencia natural $W_n = 2$.
- Coeficiente ϵ de amortiguamiento = 0.4.
- Porcentaje de ruido presente en la señal de entrada: 20 % del valor de estabilización.
- Presencia de ruido con distribución normal (gaussiana).

En la figura 5.2, se presenta la misma señal pero con la presencia de ruido de distribución normal. Como el valor de estabilización es en dos, el porcentaje de ruido es +/- 0.4. Se utiliza en esta simulación una frecuencia de muestreo de 100 Hz.

5.1.1.2. Simulación de una planta de segundo orden con retardo.

La figura 5.3, representa la respuesta de una planta de segundo orden, con un retardo de transporte, a la entrada de una señal escalón (paso). La frecuencia de muestreo es de 100 Hz y el retardo de transporte es simulado mediante la aproximación de Paddé de segundo orden de la forma:

$$e^{-s \cdot T_d} = \frac{1 - \frac{s \cdot T_d}{2} + \frac{s^2 \cdot T_d^2}{8}}{1 + \frac{s \cdot T_d}{2} + \frac{s^2 \cdot T_d^2}{8}} \quad (5.1)$$

Los parámetros de la planta de segundo orden son los siguientes:

- Ganancia = 2.
- Frecuencia natural $W_n = 2$.
- Coeficiente de amortiguamiento $\epsilon = 0.4$.
- Tiempo de retardo $T_d = 1$ segundo.
- Porcentaje de ruido de la señal de estabilización = 20 %.

El ruido que se introduce en esta señal es de distribución

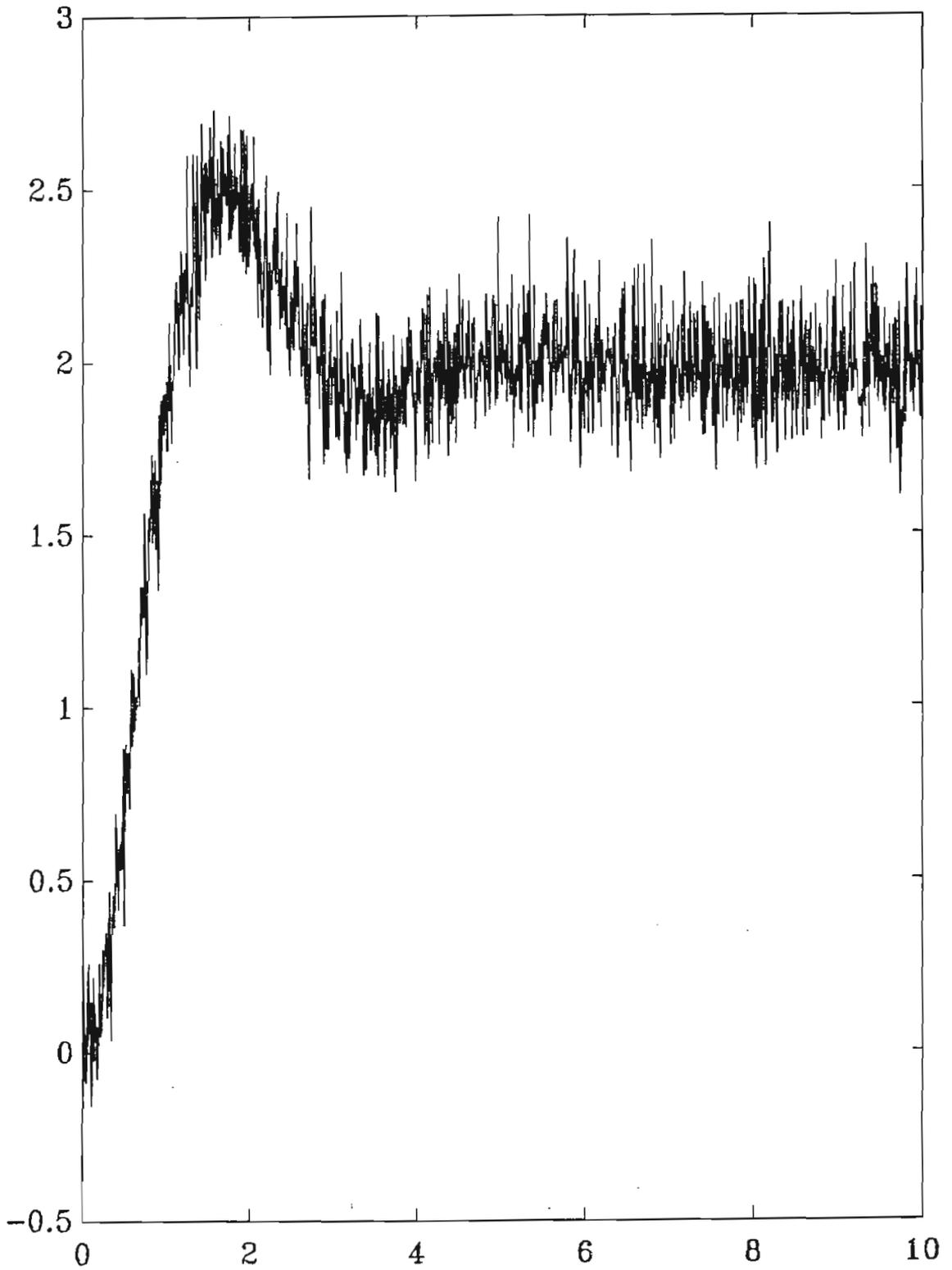


Fig. 5.2 Respuesta paso con presencia de ruido normal.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

uniforme. La figura 5.4 representa la misma señal de la figura 5.3 pero con presencia de ruido de distribución uniforme.

5.1.1.3. Simulación de una planta de primer orden.

La simulación de la planta de primer orden, se la realiza con introducción de ruido de distribución normal y sin retardo de transporte, a la entrada de una función paso unitario; los parámetros utilizados para la simulación son los siguientes:

- Ganancia = 1
- $a = 0.5$
- $b = 1$
- Porcentaje de ruido con respecto a la señal de estabilización = 20 %

La frecuencia de muestreo es de 100 Hz; en la figura 5.5 se muestra la respuesta a la señal paso, y en la figura 5.6 se observa la misma señal pero con la presencia de ruido de distribución normal.

5.1.2. ANALISIS ESPECTRAL.

Los resultados del análisis espectral, se presentan para cada una de las simulaciones de plantas que se describieron anteriormente, así como de señales que poseen una o más componentes de frecuencia, cuando han sido contaminadas por la presencia de ruido y cuando han sido filtradas mediante el diseño de un filtro, para comparar los espectros antes y después del proceso de filtrado. También se ha realizado análisis espectral de señales de ruido, como son de la distribución normal y de la señal PRBS.

5.1.2.1. Análisis espectral de la señal contaminada de la planta del numeral 5.1.1.1.

En la figura 5.7 se presenta la densidad espectral de la

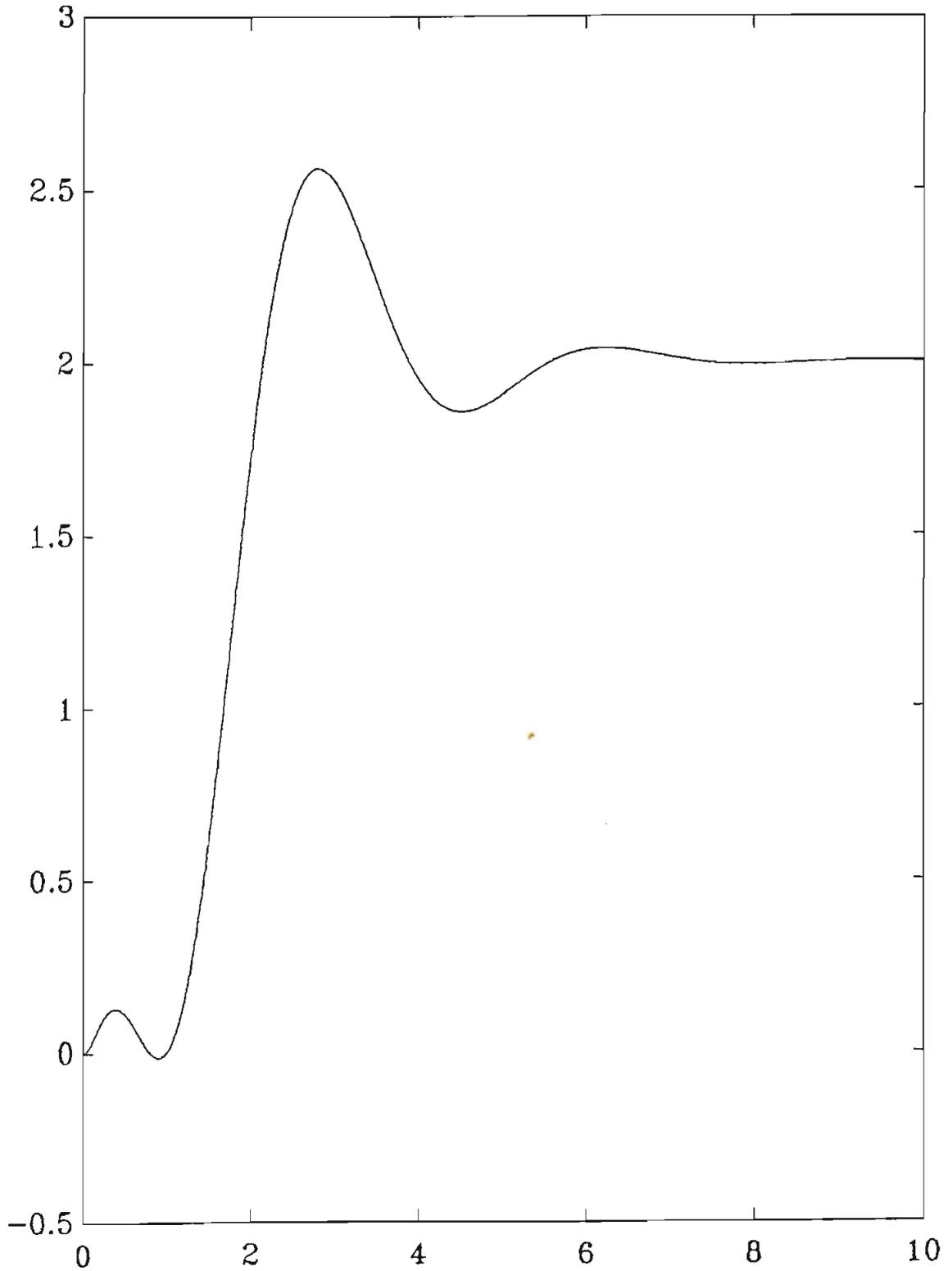


Fig. 5.3 Respuesta paso; planta de segundo orden con retardo.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

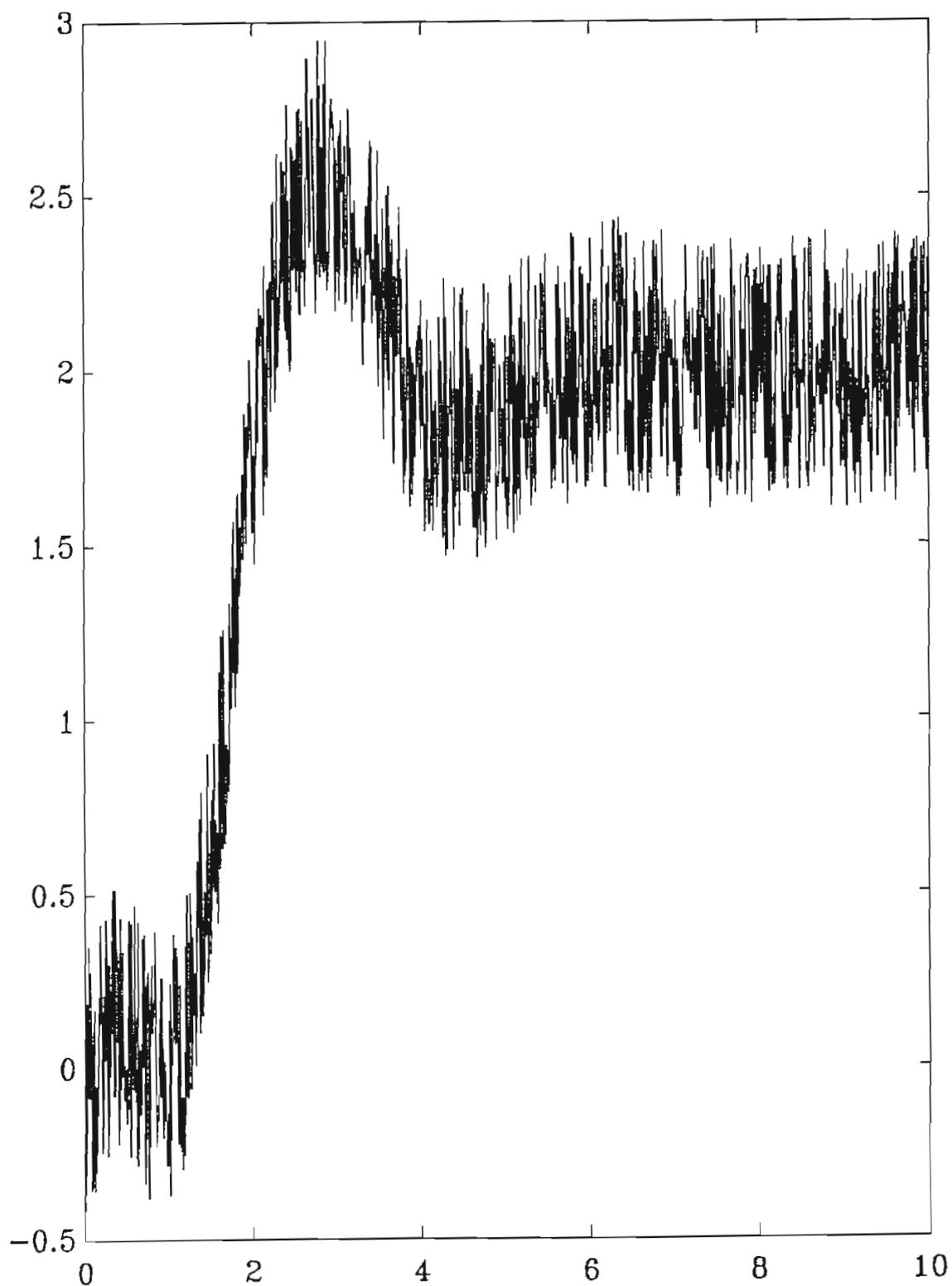


Fig. 5.4 Señal de respuesta con presencia de ruido uniforme.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

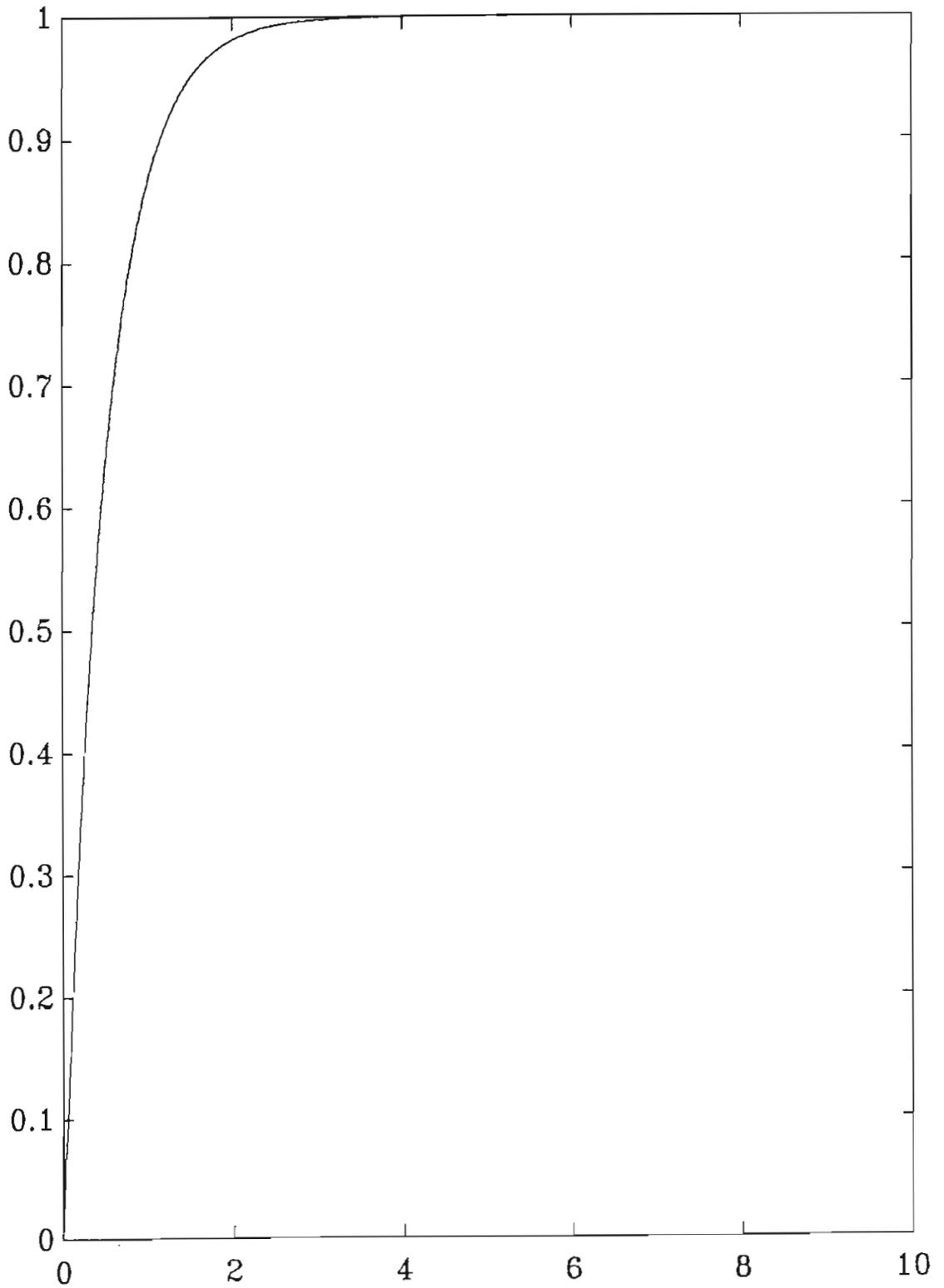


Fig. 5.5 Respuesta paso de planta de primer orden.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

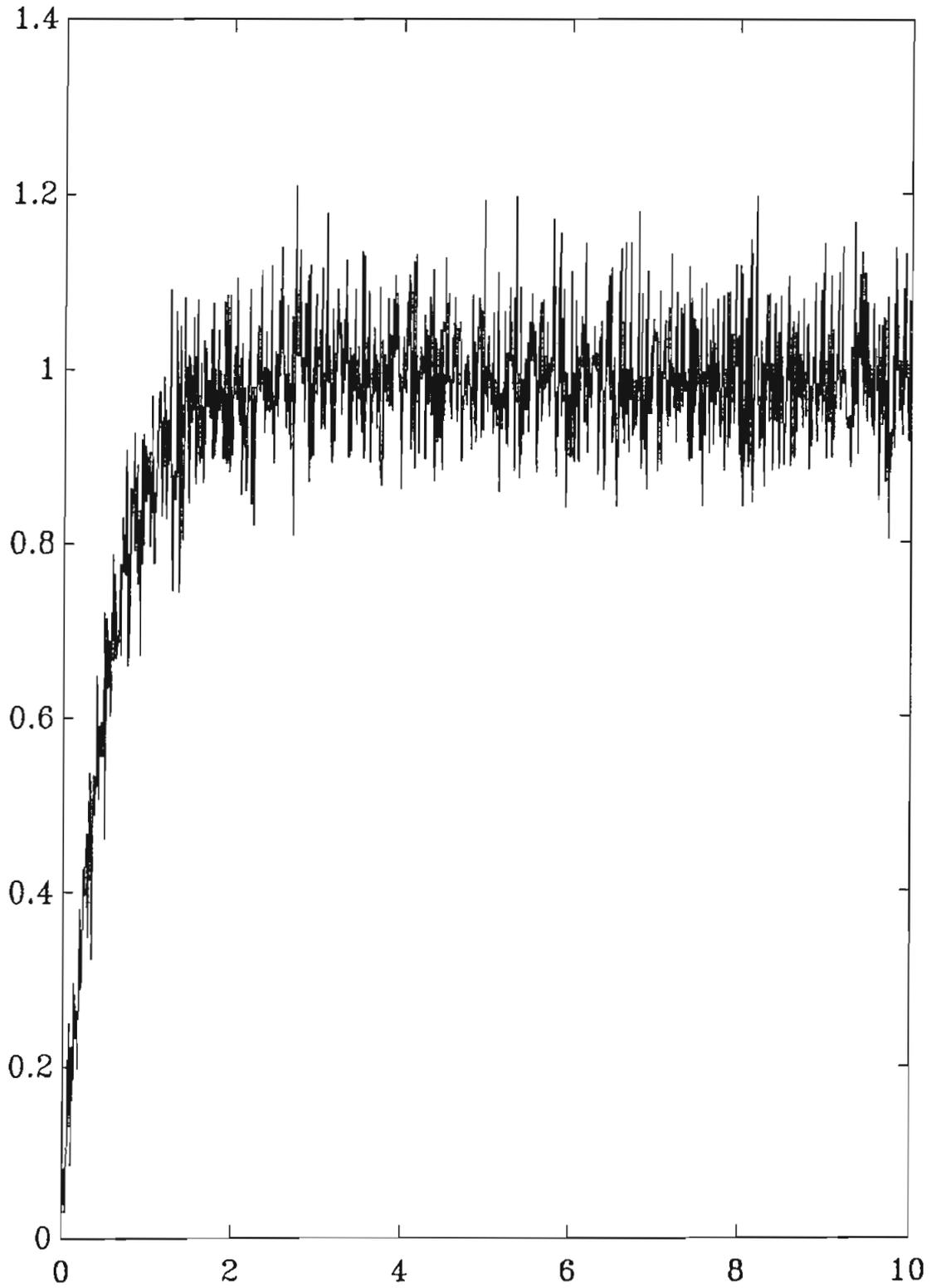


Fig. 5.6 Respuesta paso con presencia de ruido normal.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

señal de la figura 5.2, que es la respuesta de la planta de segundo orden a la señal paso con presencia de ruido de distribución normal. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz. En la figura 5.8 se presenta el mismo resultado que en la figura 5.7, pero ampliado a un fondo de escala de 5 Hz; como se puede ver, el espectro se localiza solo a bajas frecuencias, tendiendo a cero en frecuencias altas, lo cual es debido a la componente de continua de la señal de la figura 5.2.

5.1.2.2. Análisis espectral de la señal contaminada de la planta de segundo orden con retardo.

En la figura 5.9 se tiene el espectro de potencia similar al del numeral 5.1.2.1, es decir existe una concentración del espectro a frecuencias bajas, cercanas a cero, haciéndose muy pequeño a frecuencias más altas. En la figura 5.10 se puede observar el mismo espectro con un fondo de escala ampliado de 10 Hz. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz.

5.1.2.3. Análisis espectral de la señal contaminada de la planta de primer orden sin retardo.

Las figuras 5.11 y 5.12 presentan el espectro de la señal contaminada con ruido de distribución normal de la planta de primer orden; como se puede ver es similar a la de los numerales 5.1.2.1 y 5.1.2.2. La figura 5.12 es el espectro de la figura 5.11 ampliado a un fondo de escala de 2,5 Hz, con frecuencia de muestreo de 100 Hz. Si la señal de ruido fuera de más amplitud, se podría notar espectros en el resto de la escala de frecuencia, que indicarían de una manera más real, el verdadero espectro de una señal de ruido aleatoria, como se podrá ver adelante.

5.1.2.4. Espectro del ruido de distribución Gaussiana (normal).

En la figura 5.13 se muestra una señal aleatoria de ruido con distribución normal de media cero, varianza 1 y de am-

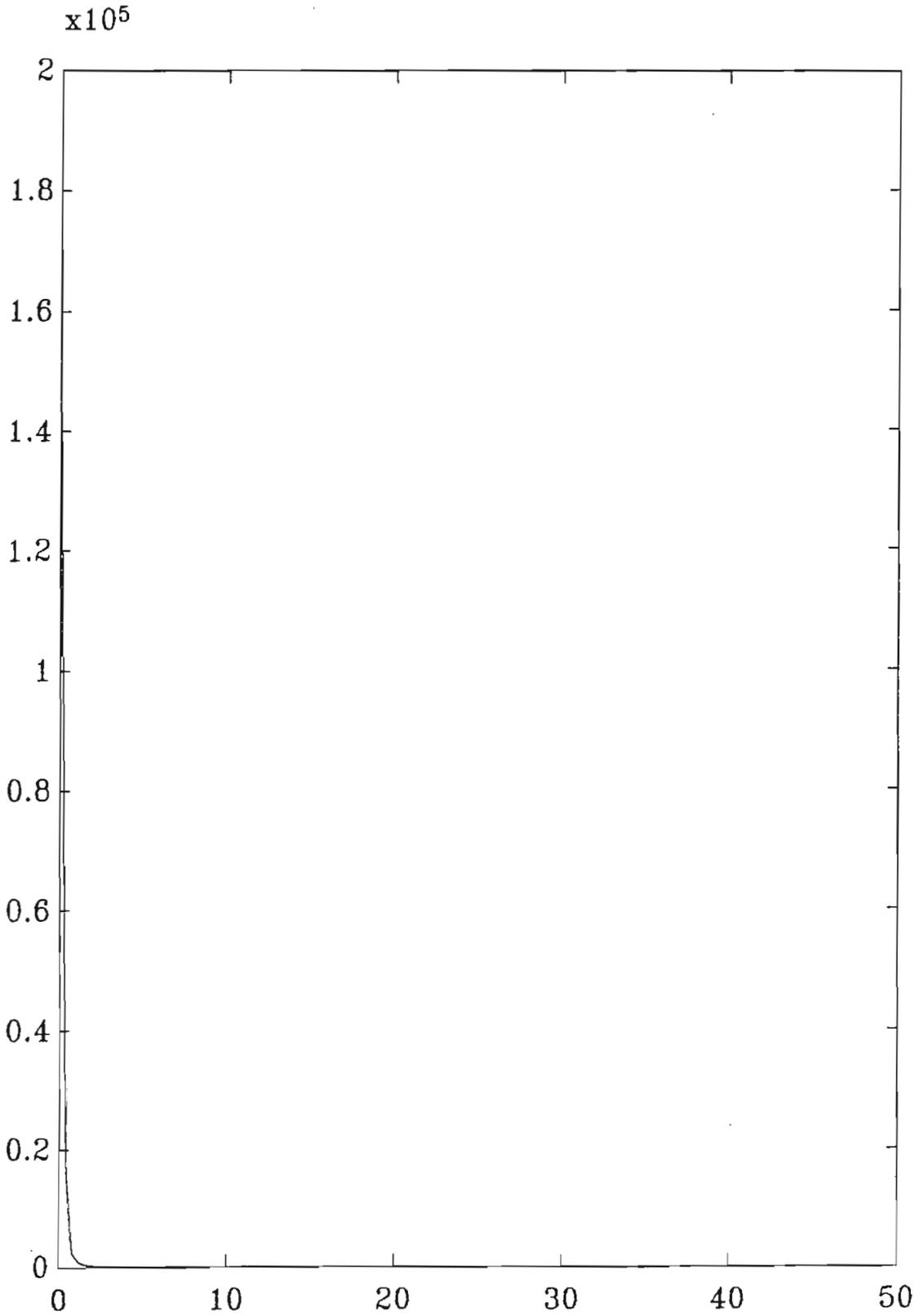


Fig. 5.7 Espectro de la señal contaminada de 5.1.1.1.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

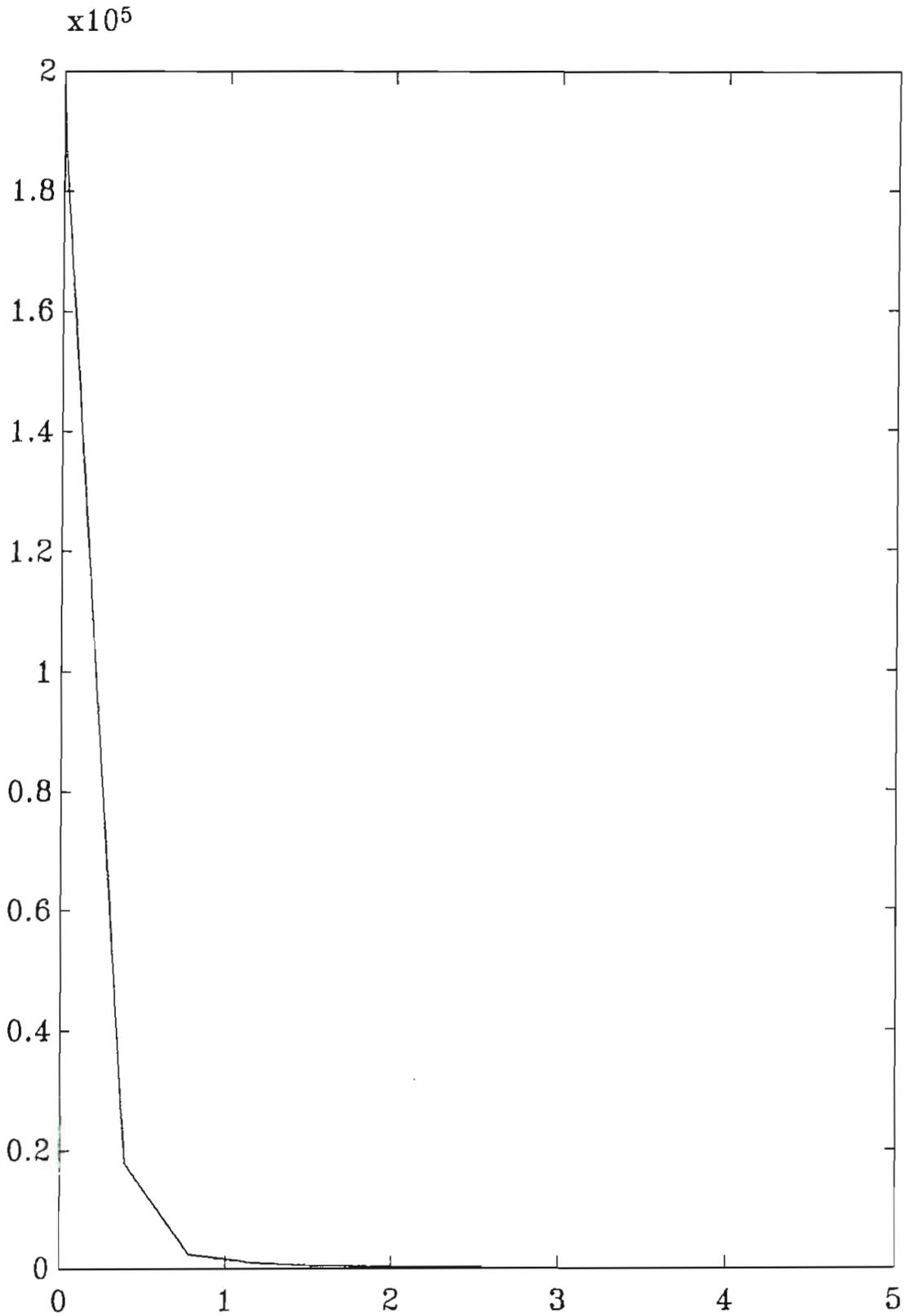


Fig. 5.8 Espectro ampliado el fondo de escala de la figura 5.7.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

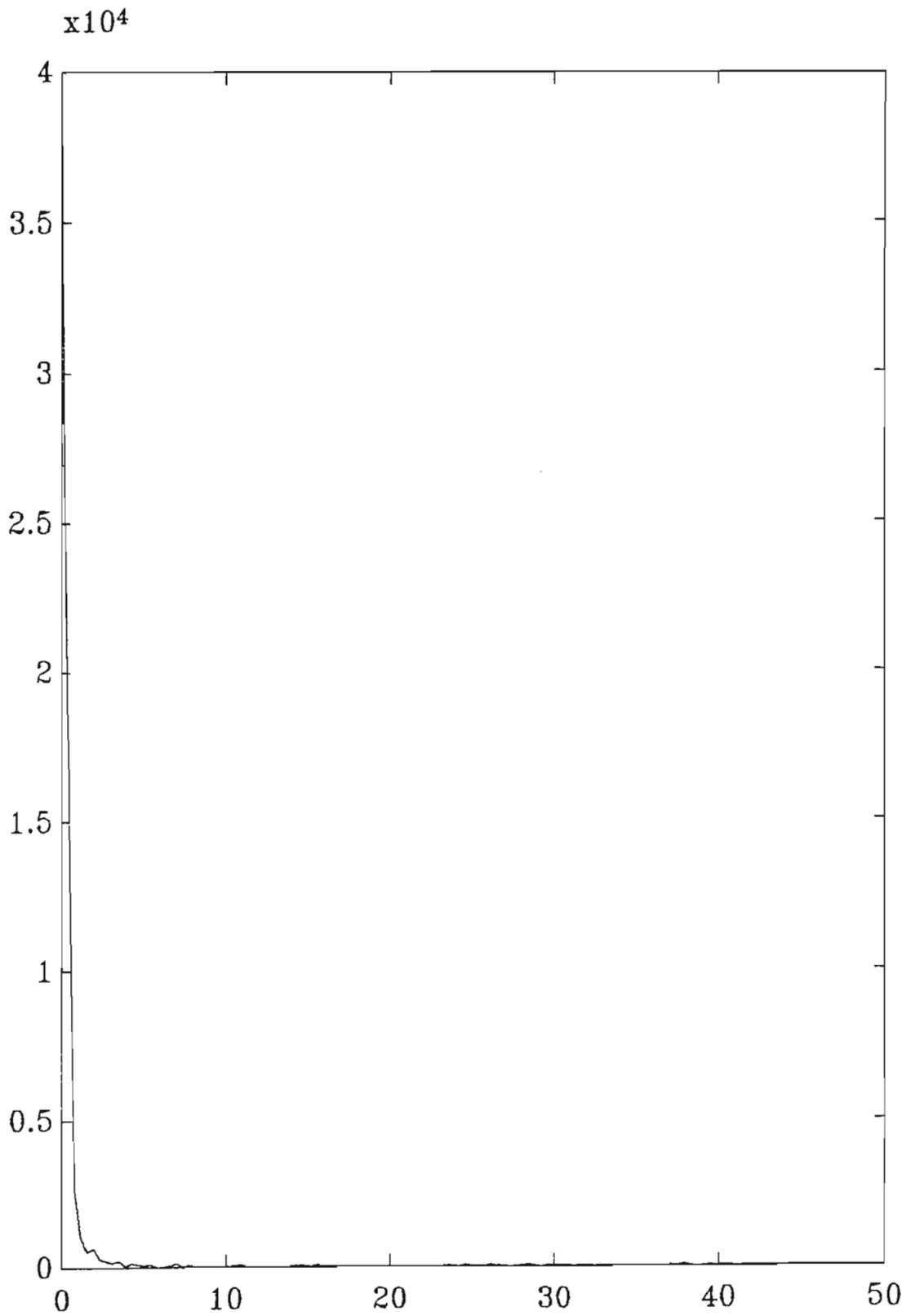


Fig. 5.9 Espectro de la señal contaminada de 5.1.1.2.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

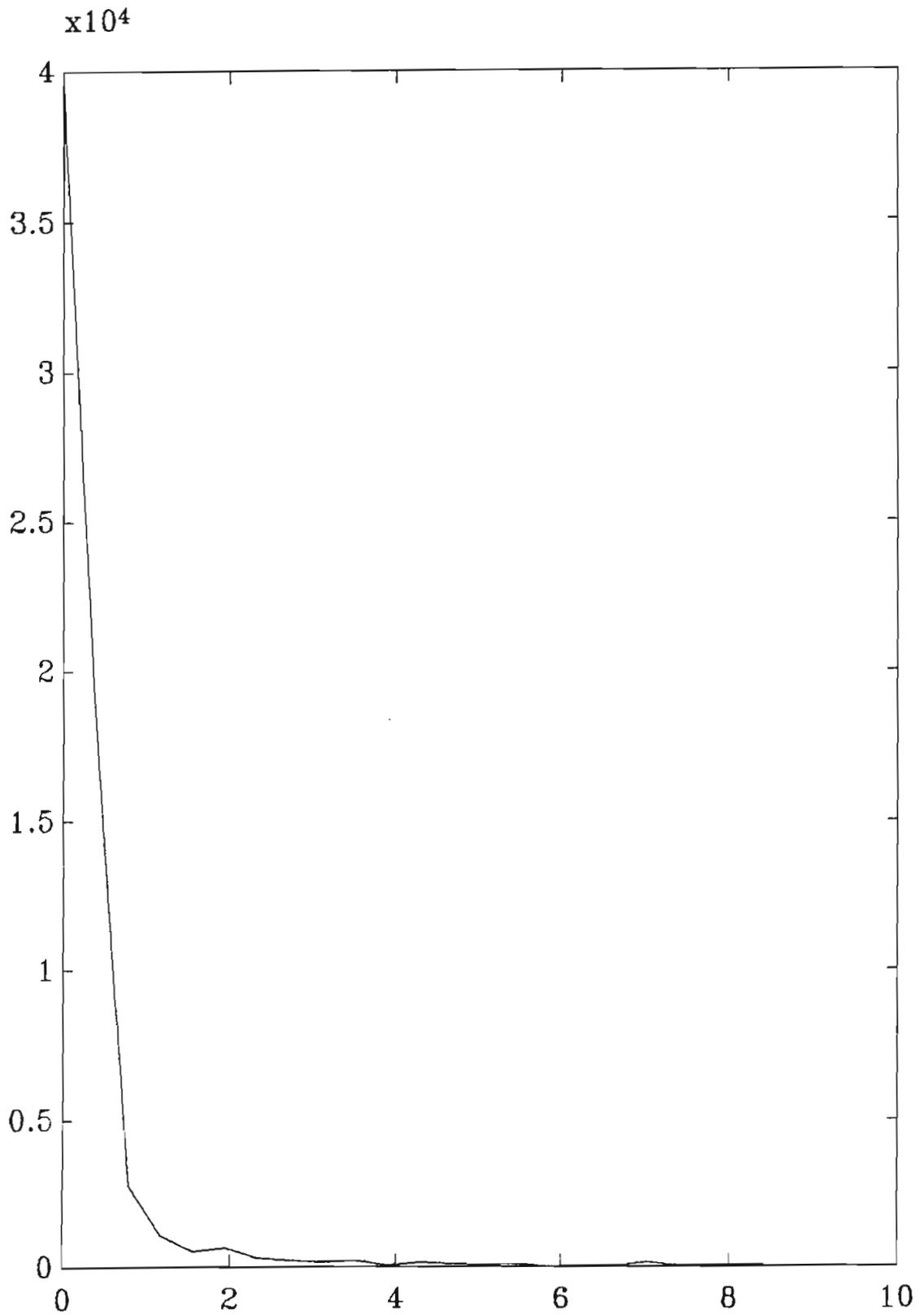


Fig. 5.10 Espectro ampliado de la figura 5.9.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

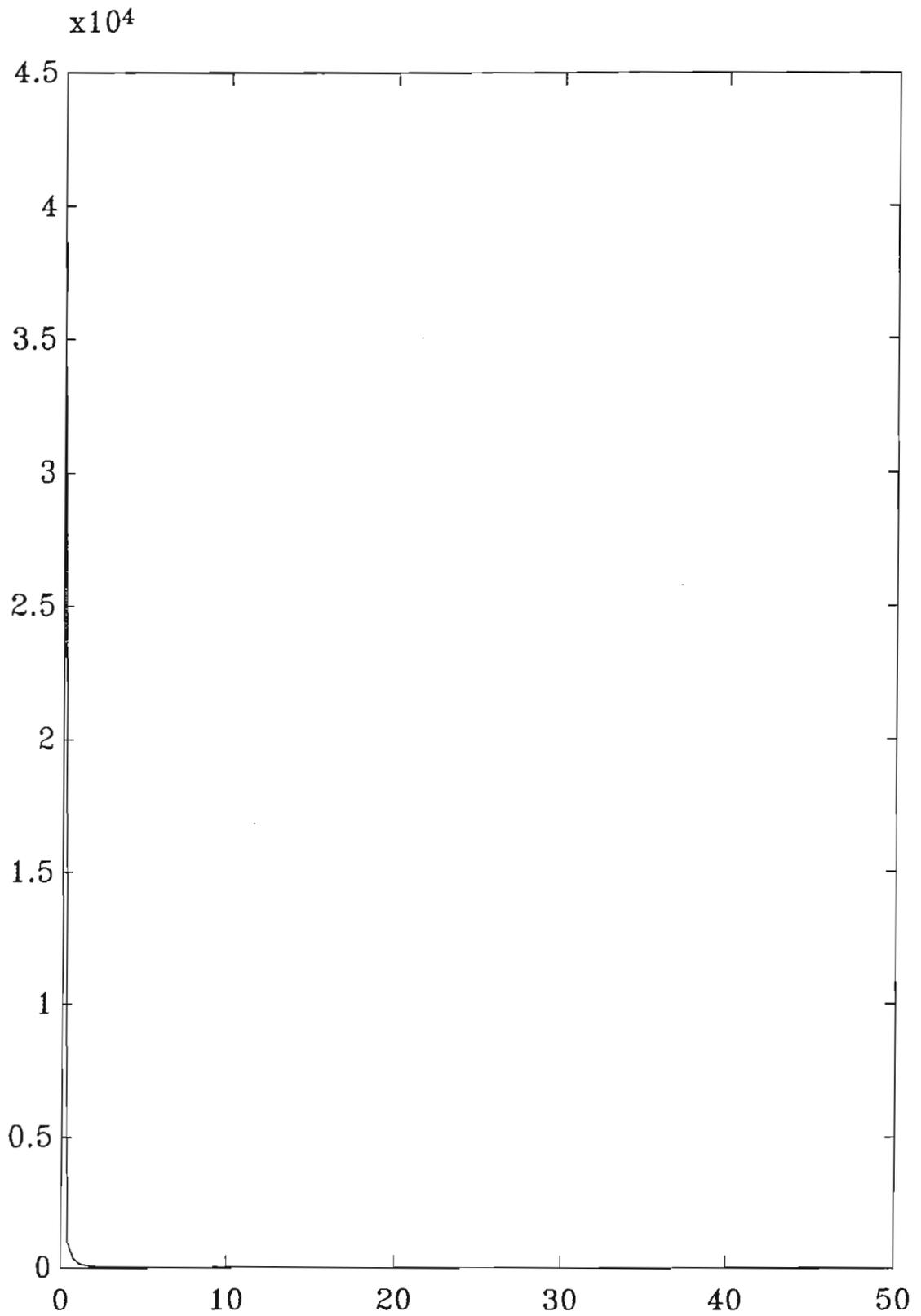


Fig. 5.11 Espectro de la señal contaminada de 5.1.2.3.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

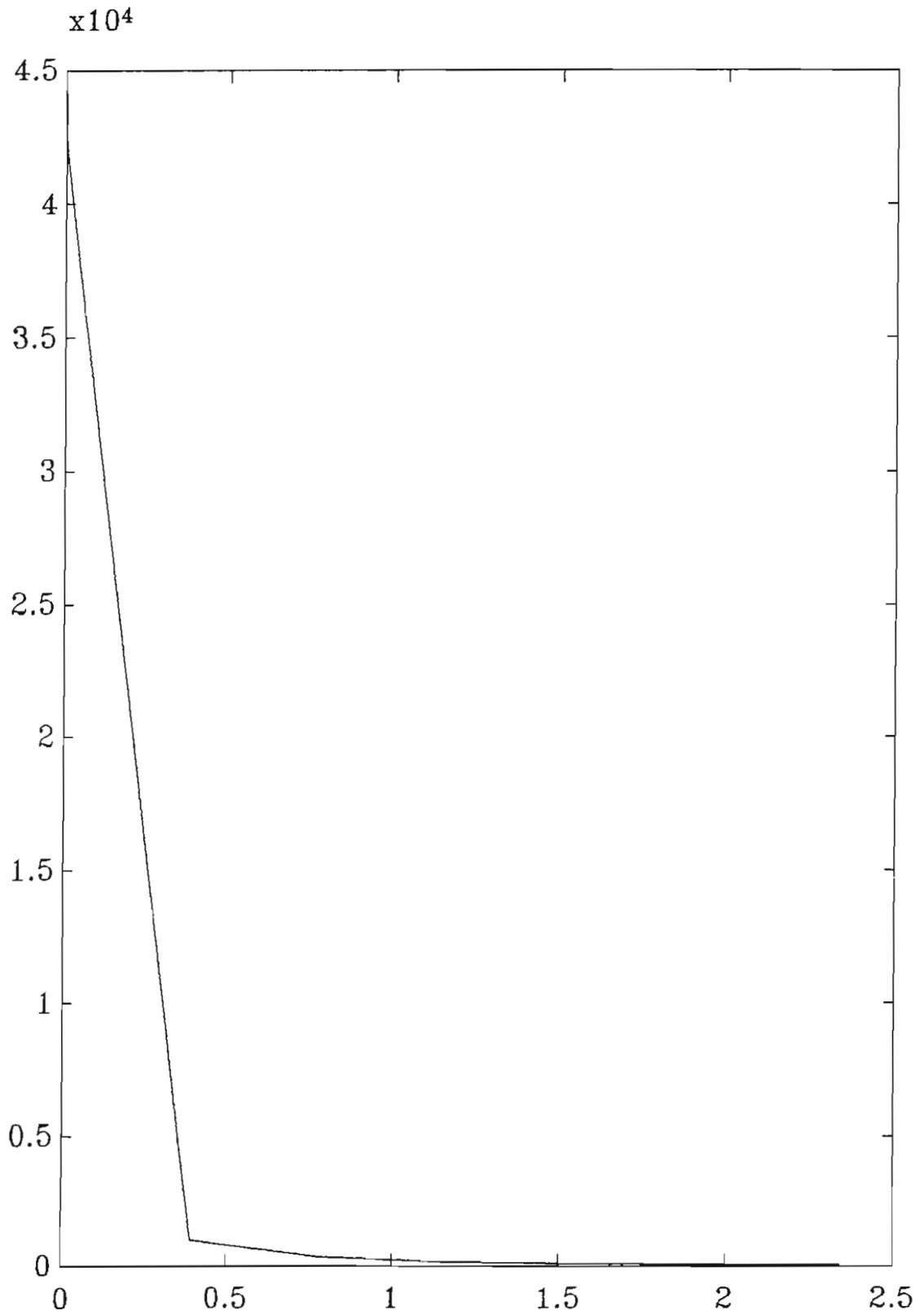


Fig. 5.12 Espectro ampliado de la figura 5.11.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

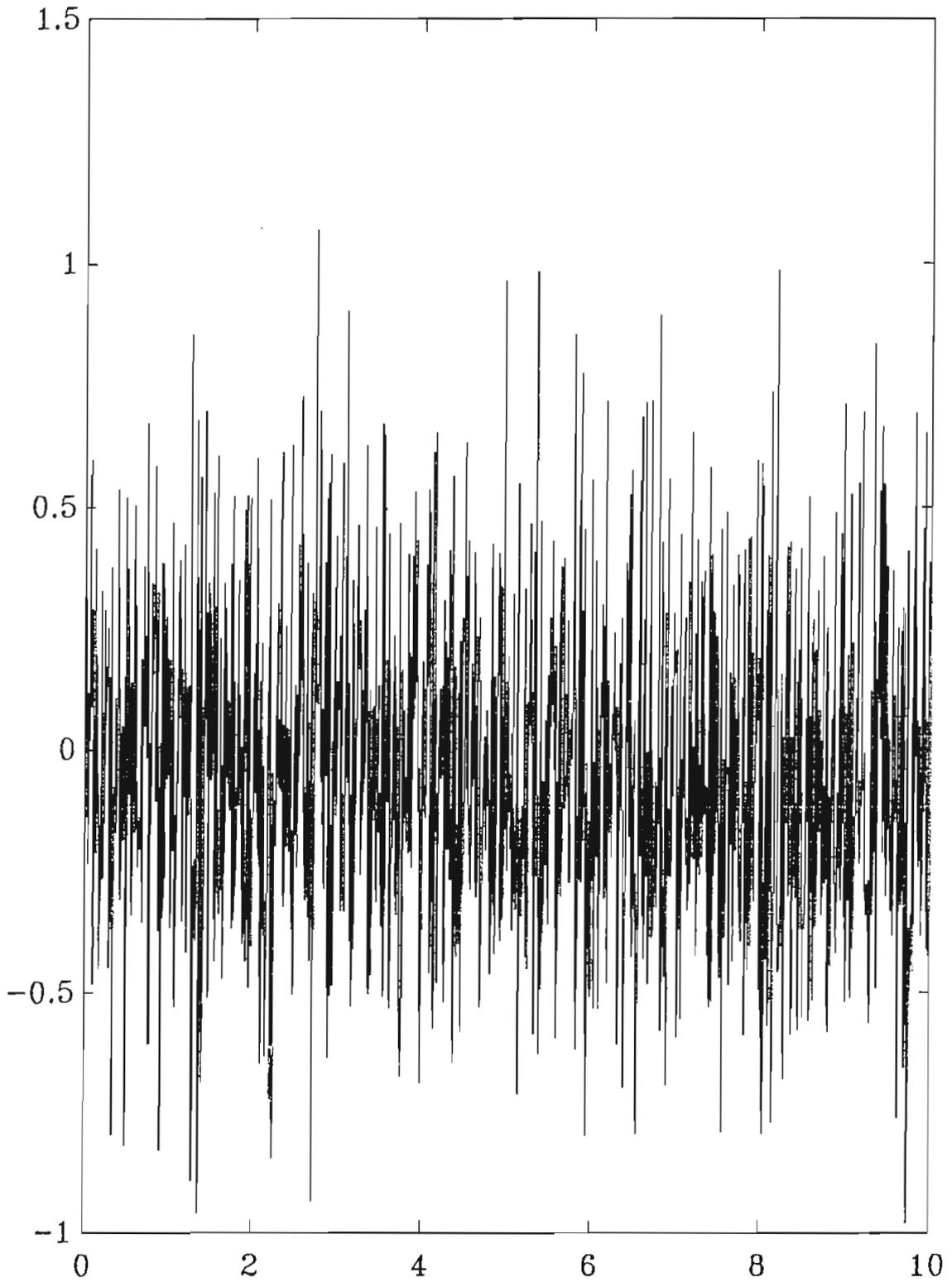


Fig. 5.13 Señal de ruido aleatoria con distribución normal.
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

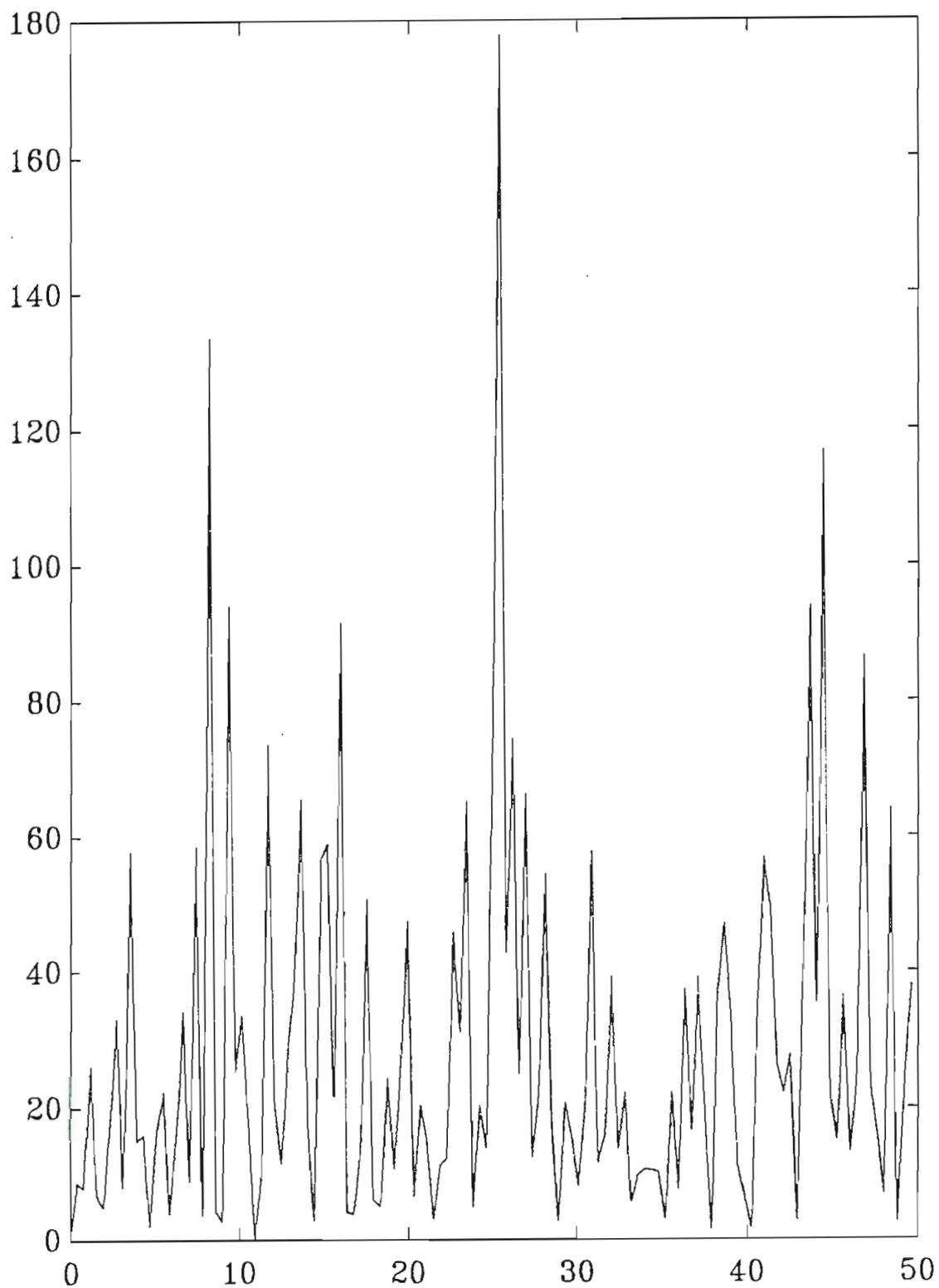


Fig. 5.14 Espectro del ruido con distribución normal.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

plitud 1. Esta señal se acerca a la forma del denominado "ruido blanco". La figura 5.14 muestra el espectro de frecuencia de esta señal de ruido; en esta figura se puede apreciar lo mencionado en el numeral 5.1.2.3 ya que se puede observar que dicho espectro posee todas las frecuencias, por lo que se puede decir que es una señal altamente no coherente. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz.

5.1.2.5. Espectro de la señal binaria pseudo aleatoria (PRBS).

La señal PRBS se muestra en la figura 5.15, donde se puede ver que varía entre +1 y -1, con tiempos aleatorios de permanencia en cada estado. El espectro de la señal PRBS se puede observar en la figura 5.16; en esta figura se puede notar que el espectro de esta señal es distinto a los espectros de las señales de ruido aleatorias con distribución normal y uniforme, ya que como se puede ver tiene densidad espectral alta solo a bajas frecuencias. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz.

5.1.2.6. Espectro de una suma de tres señales sinusoidales.

La figura 5.17 muestra el gráfico de la suma de tres señales sinusoidales de frecuencias 30, 60 y 100 Hz, realizado con una frecuencia de muestreo de 2 KHz. La figura 5.18 muestra la misma señal pero con una frecuencia de muestreo de 4 KHz. La figura 5.19 proporciona el espectro de frecuencias de la señal de estudio con una frecuencia de muestreo de 300 Hz.

Finalmente la figura 5.20 muestra el espectro de la señal de estudio, luego de haber sido filtrada por el filtro pasabanda del numeral 5.1.3.4, obteniéndose una señal sinusoidal de 60 Hz, y, la figura 5.21 posee el espectro de la misma señal, cuando ha sido filtrada por un filtro elimina banda del numeral 5.1.3.5, dejando las componentes de 30 y 100 Hz, eliminando la frecuencia de 60 Hz. Los espectros están realizados a una frecuencia de muestreo de 300 Hz.

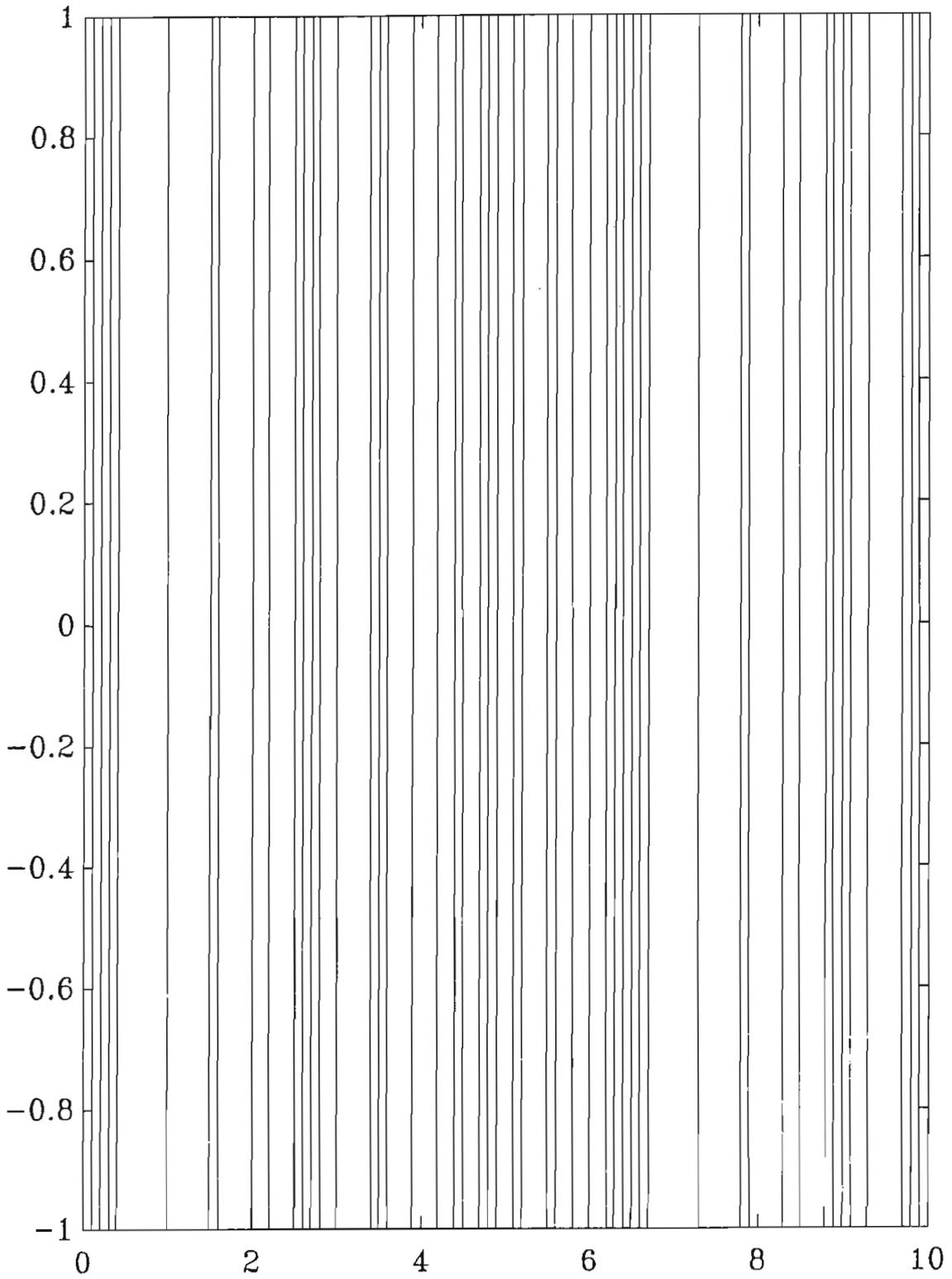


Fig. 5.15 Señal Binaria Pseudo Aleatoria (PRBS).
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

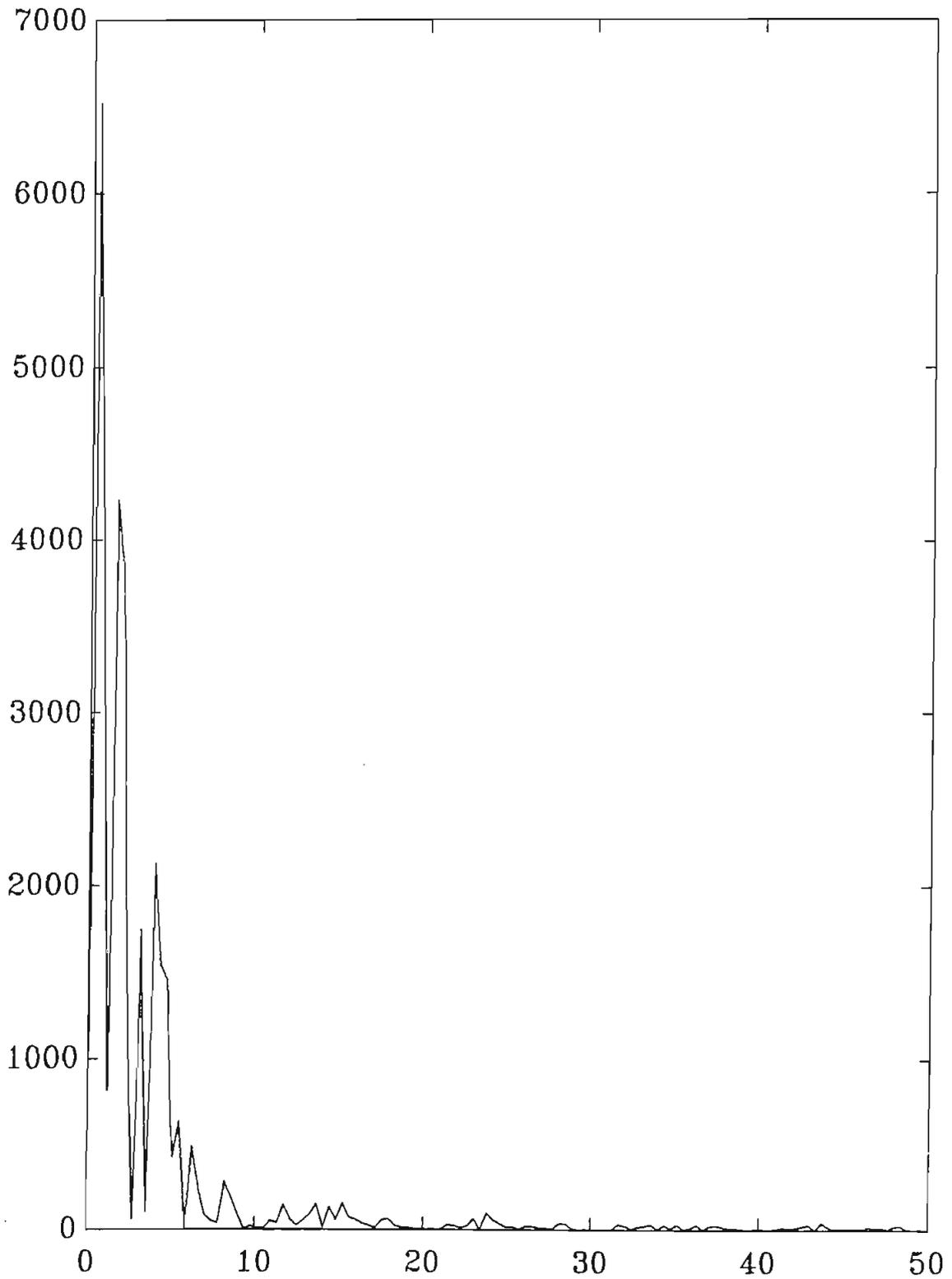


Fig. 5.16 Espectro de la señal PRBS.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

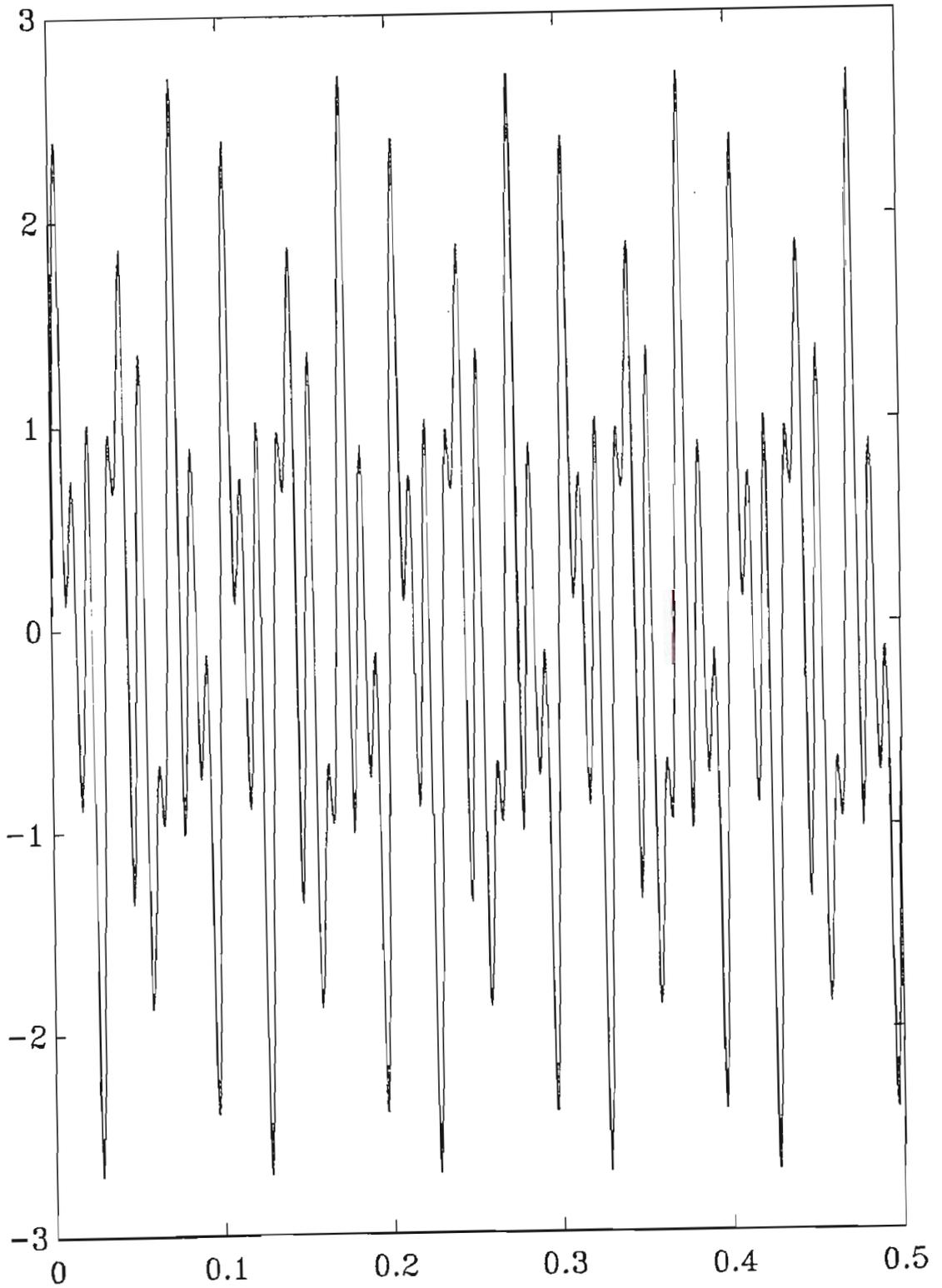


Fig. 5.17 Señal producida por la suma de 3 sinusoides.
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

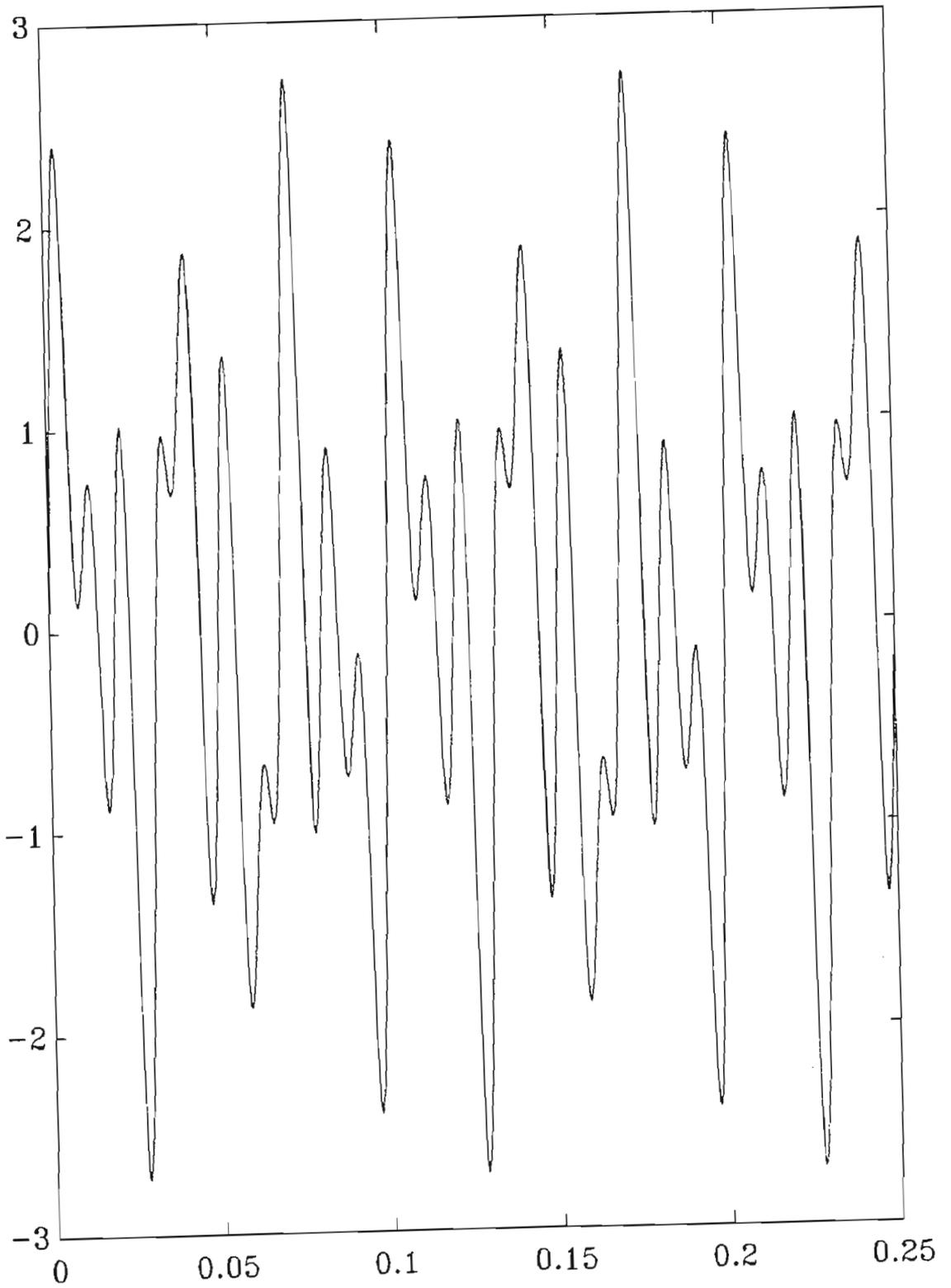


Fig. 5.18 Ampliación de la figura 5.17.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

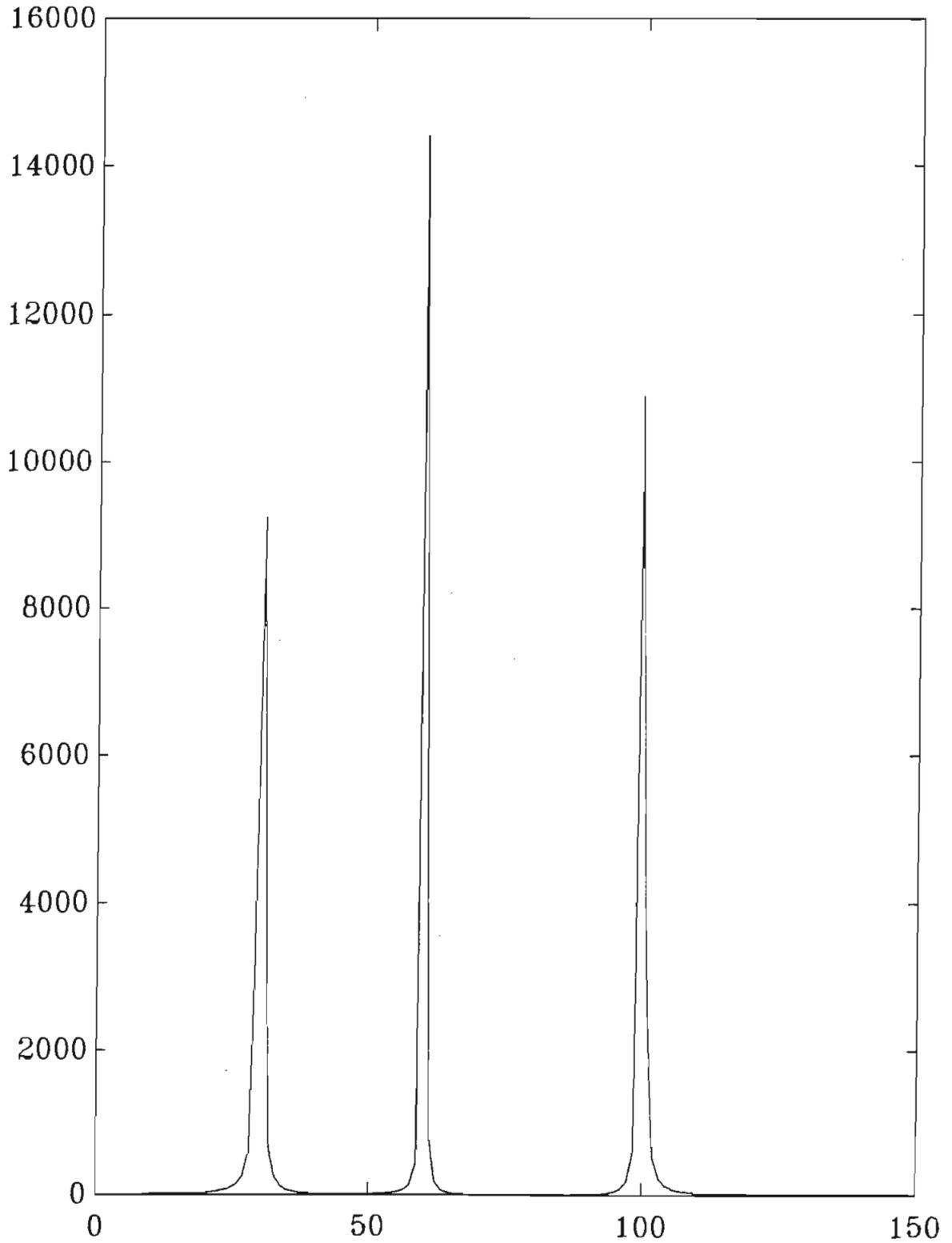


Fig. 5.19 Espectro de la señal con 3 componentes senoidales.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

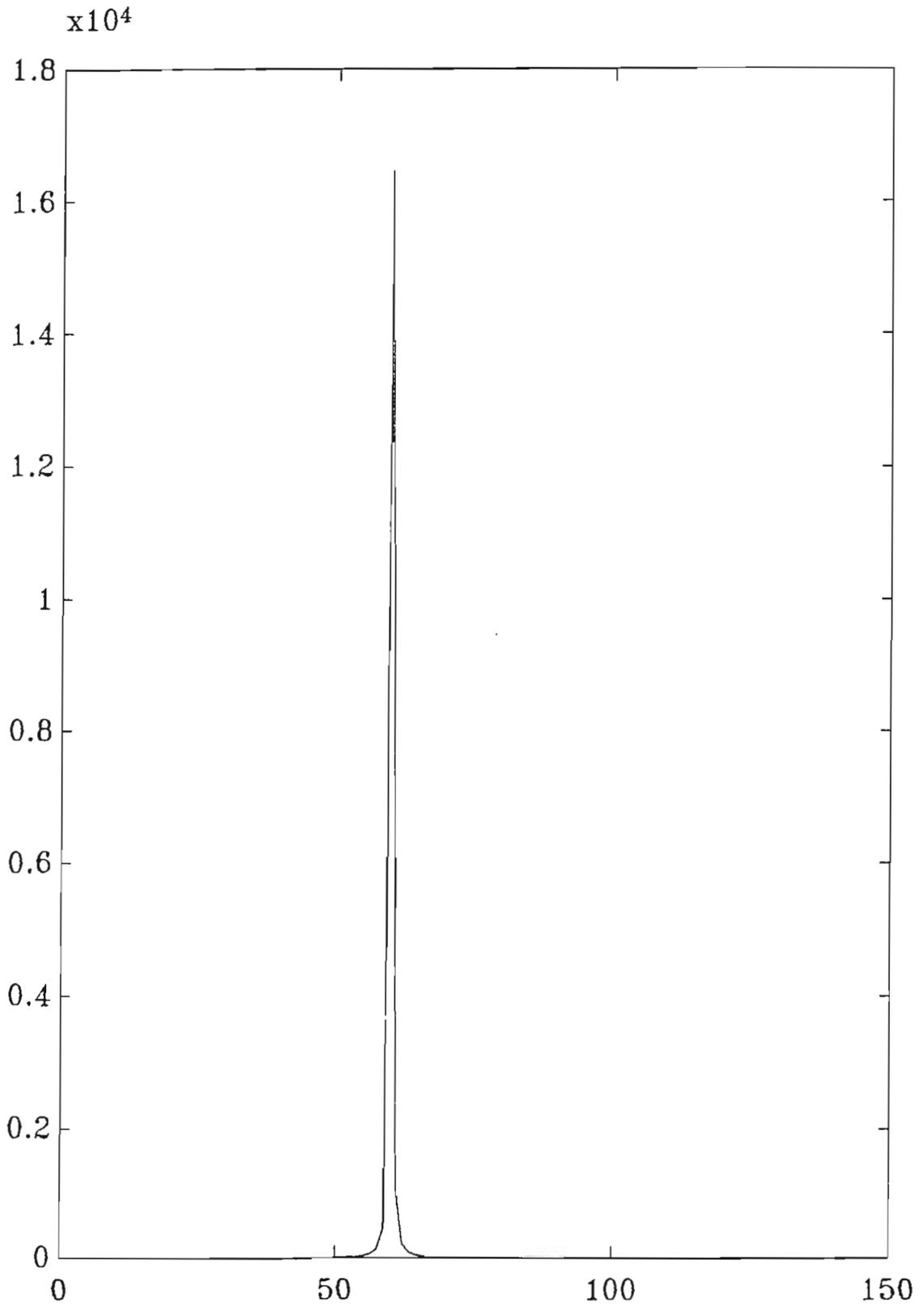


Fig. 5.20 Espectro de la señal con tres frecuencias luego de pasarla por un filtro pasabanda.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

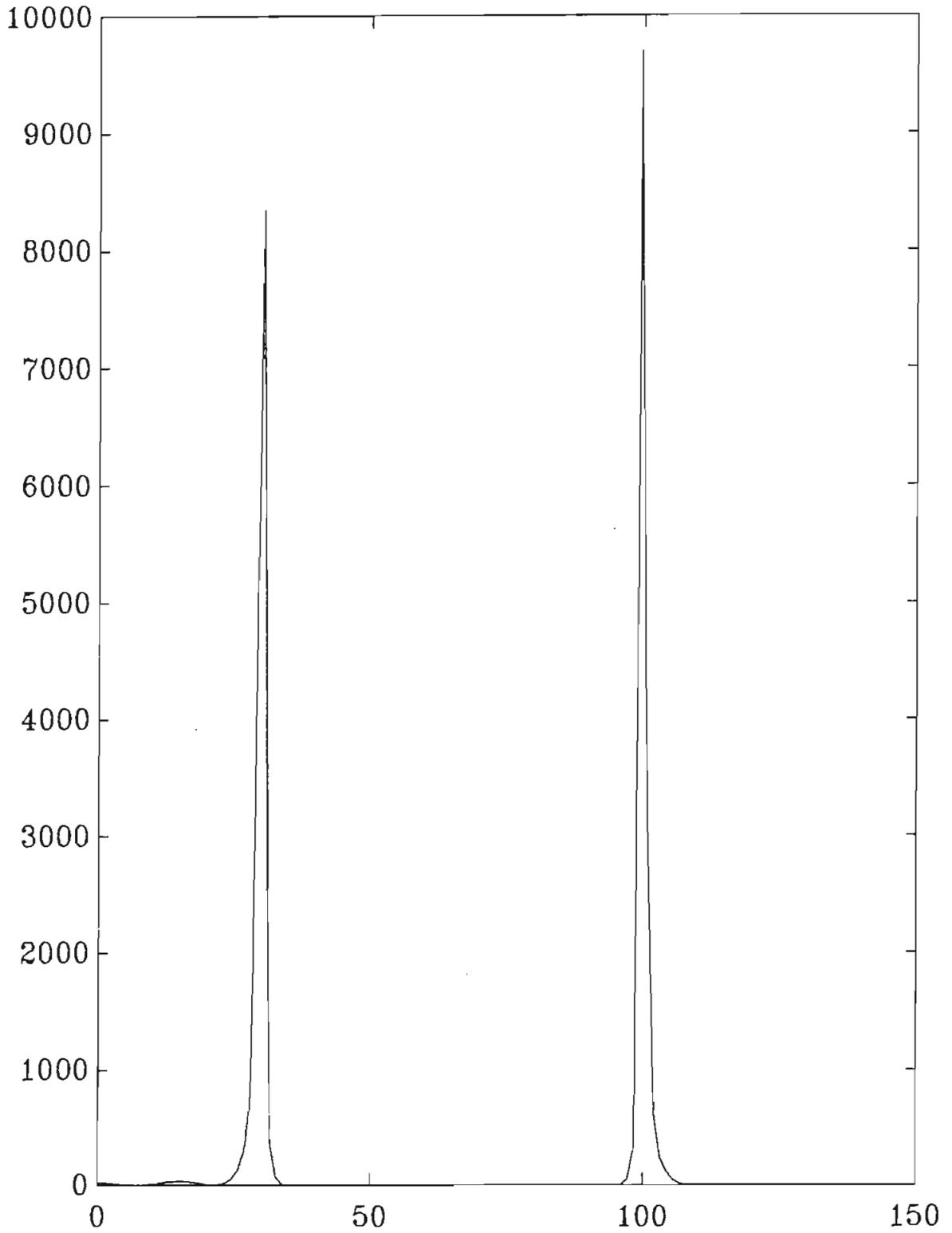


Fig. 5.21 Espectro de la señal de 3 frecuencias luego de pasarla por un filtro elimina banda.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

5.1.2.7. Espectro de una señal compuesta de componentes de continua y alterna.

La figura 5.22 muestra la señal compuesta de una señal continua de amplitud 1, y una señal alterna de frecuencia 60 Hz, la amplitud pico-pico es de dos y la frecuencia de muestreo es de 4000 Hz. El objeto de esta señal es observar su espectro y aplicar un filtro pasa alto para eliminar la componente de continua.

La figura 5.23 presenta el espectro de potencia de esta señal; en ella se puede ver que alrededor de la frecuencia cero, se halla localizado el espectro de la señal continua y en 60 Hz el de la componente alterna. Su frecuencia de muestreo es de 400 Hz.

La figura 5.24 muestra el espectro de la señal de la figura 5.22 luego de haber sido filtrada con un filtro pasa alto del numeral 5.1.3.6. En esta figura se observa que ha desaparecido el espectro de la componente de continua. La frecuencia de muestreo es de 200 Hz.

5.1.2.8. Espectro de potencia de una señal con cuatro componentes de frecuencia.

La figura 5.25 muestra el espectro de potencia de la señal con cuatro componentes de frecuencia que son: 100, 200, 300, y 400 Hz; la señal es muestreada con una frecuencia de 1 KHz. El objetivo de la señal es el de observar su espectro y filtrarla con un filtro multibanda del numeral 5.1.3.7.

La figura 5.26 muestra el espectro de la señal luego que ésta ha sido filtrada por el filtro multibanda. Las frecuencias de 200 y 400 Hz han sido eliminadas, permaneciendo las de 100 y 300 Hz. La frecuencia de muestreo es de 1 KHz.

Se puede decir que la presente aplicación es una de las más completas.

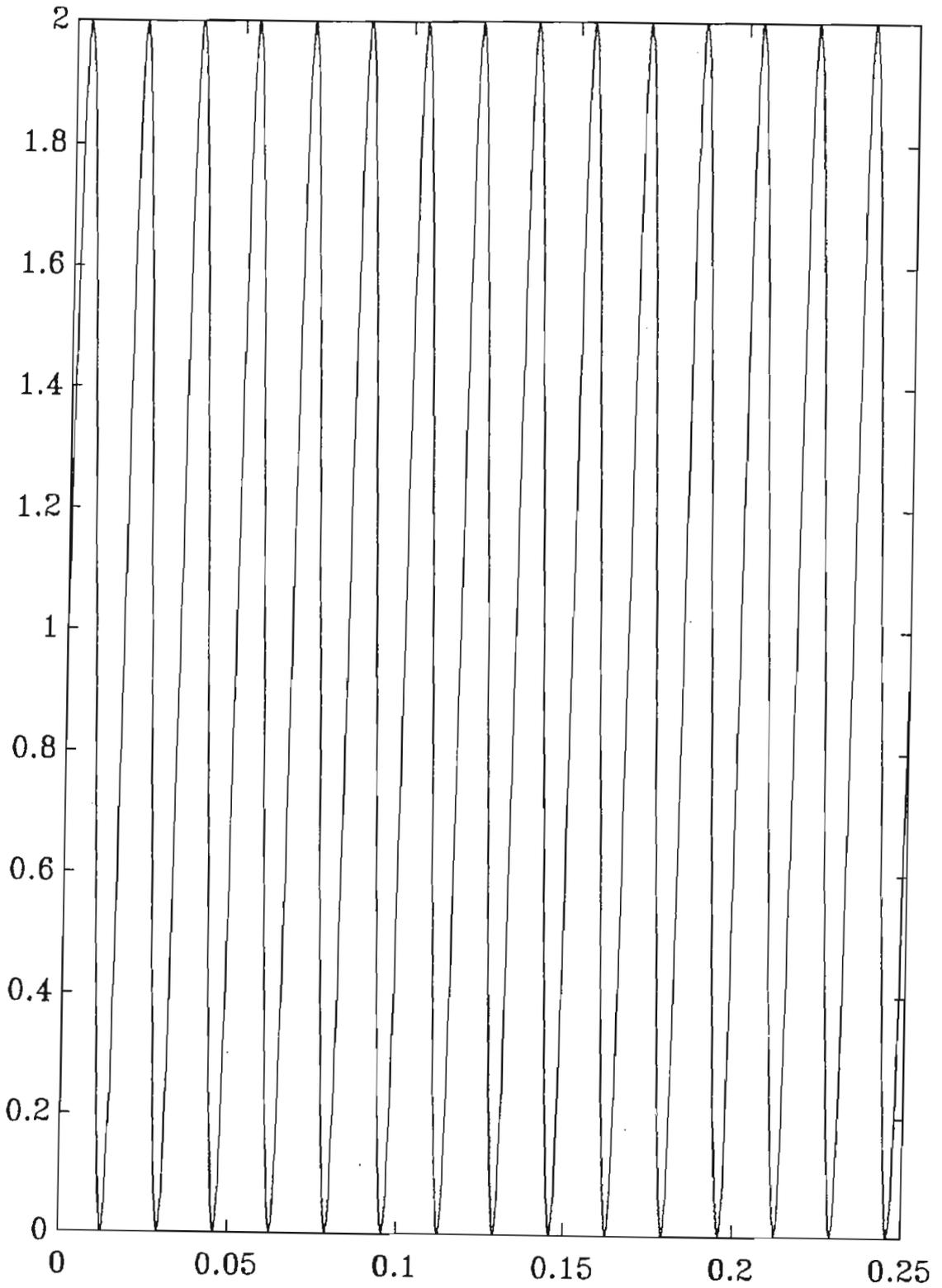


Fig. 5.22 Señal compuesta de componente continua y alterna.
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

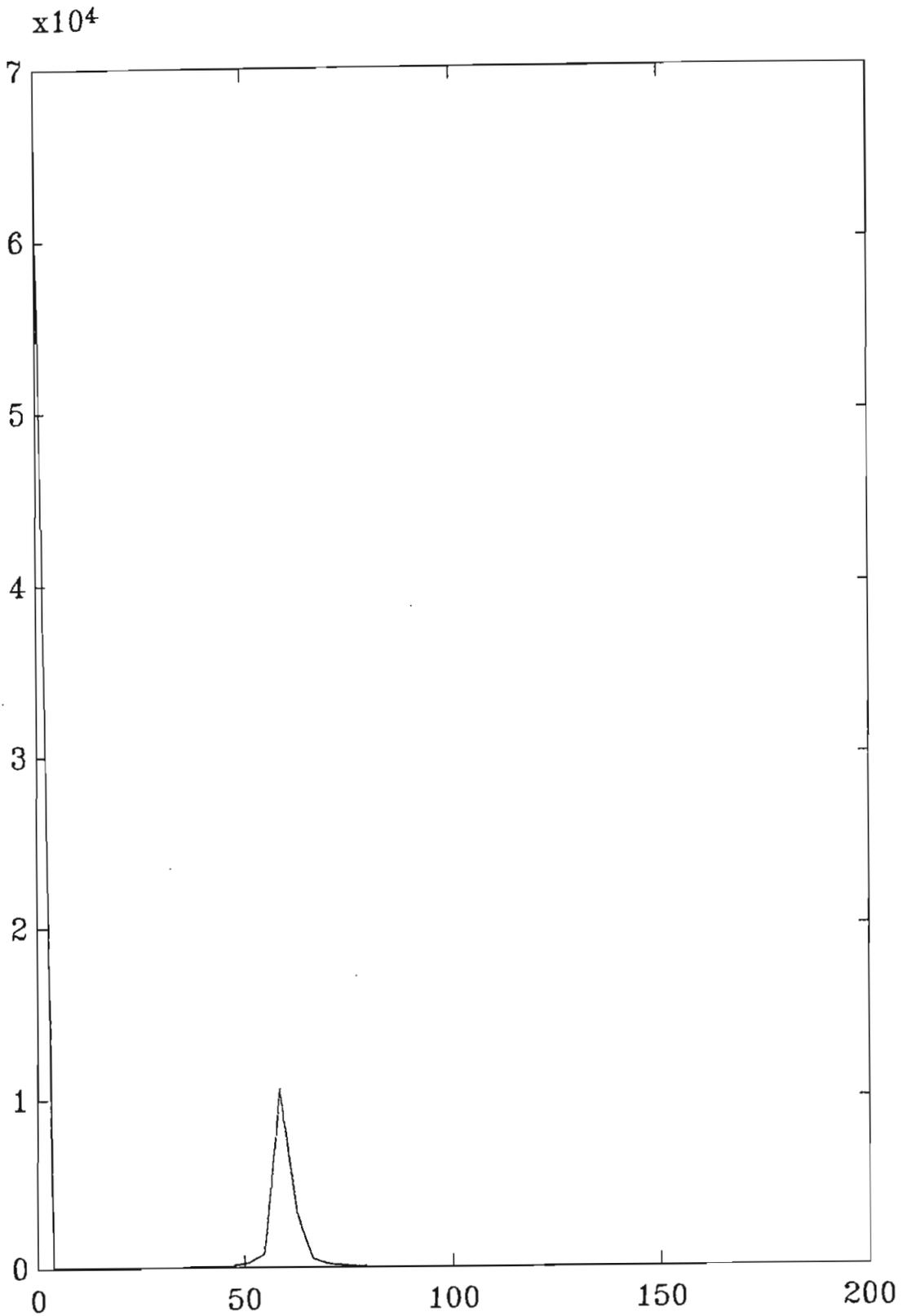


Fig. 5.23 Espectro de la señal compuesta de la figura 5.22.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

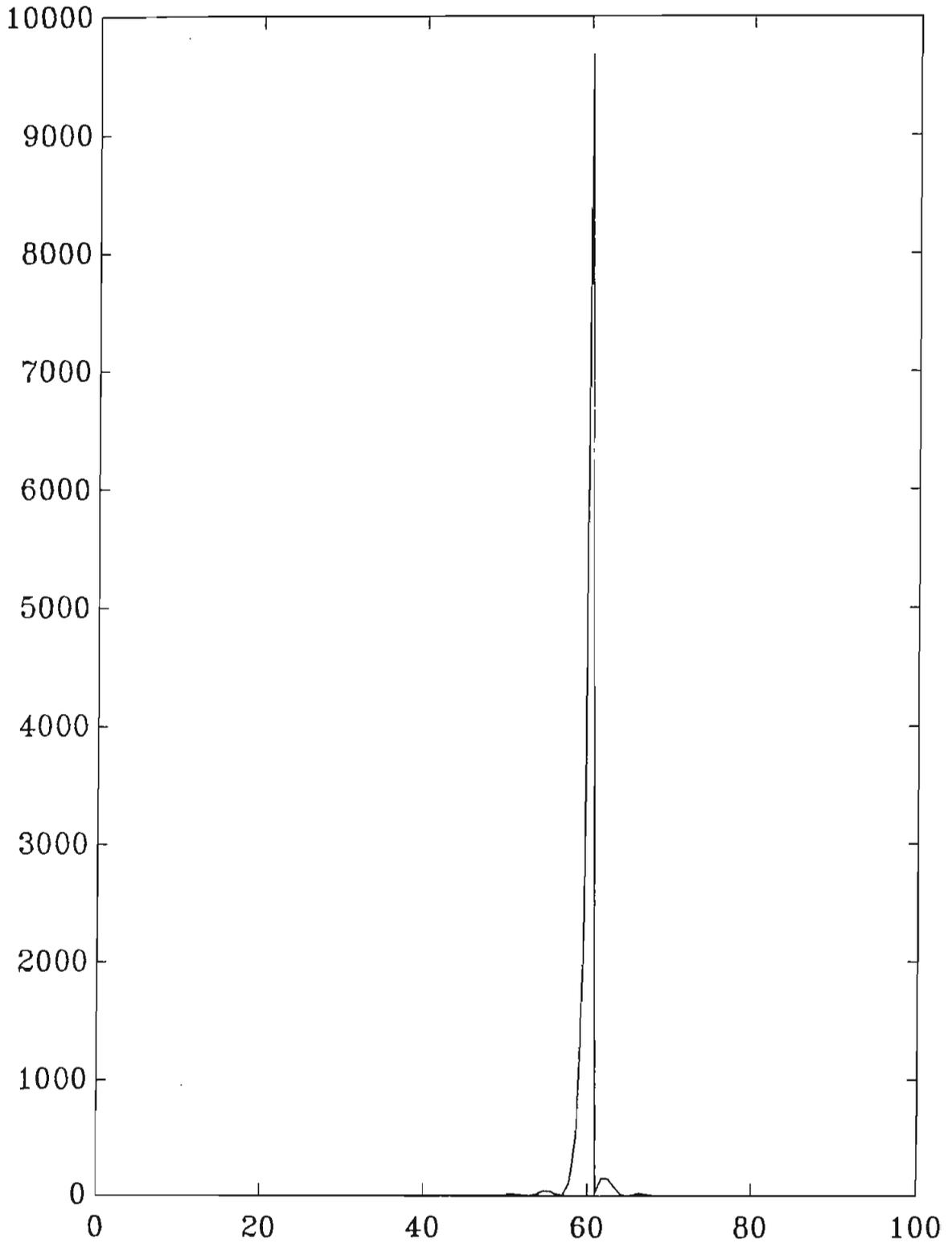


Fig. 5.24 Espectro de la señal filtrada por un filtro
pasa altos.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

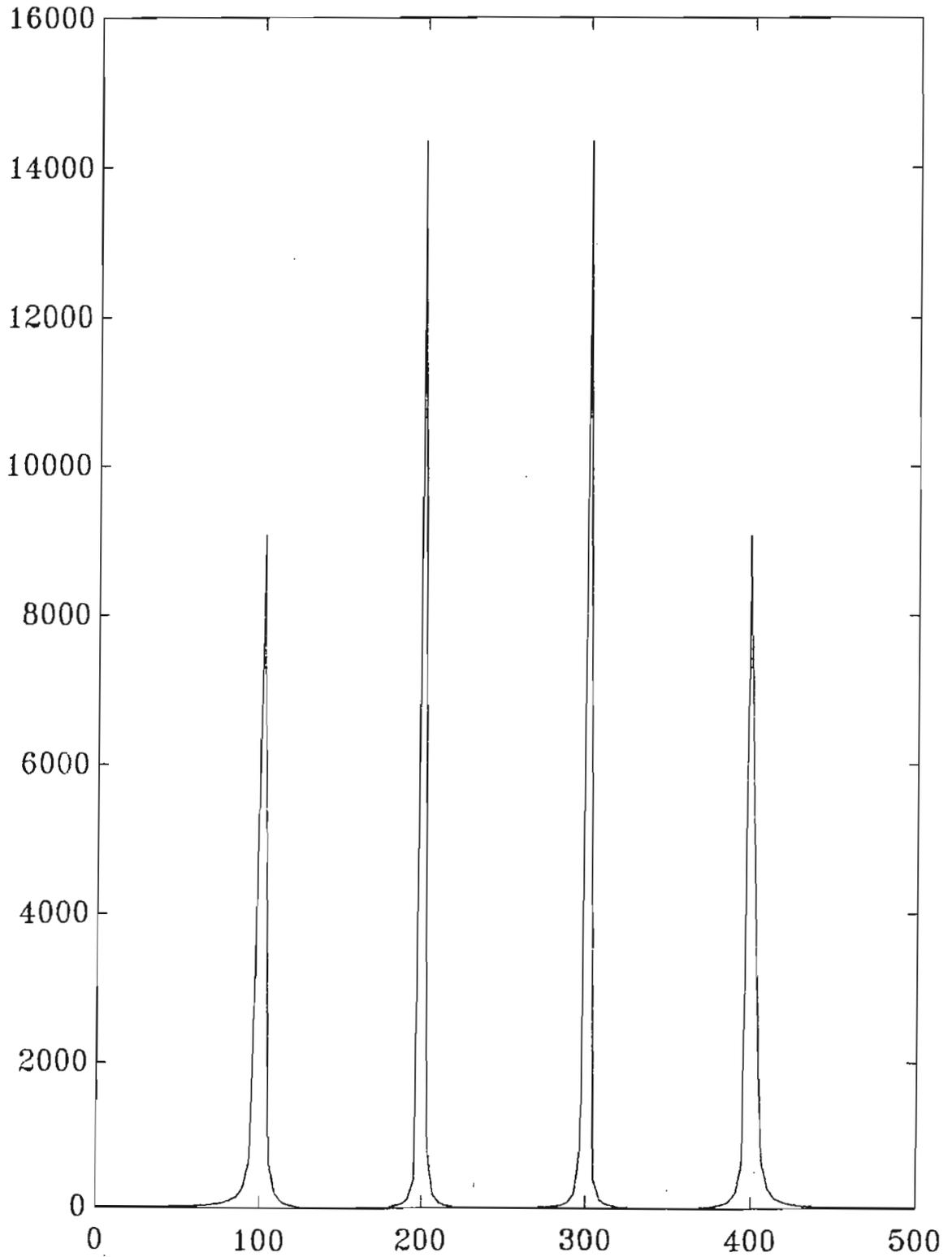


Fig. 5.25 Espectro de una señal con 4 componentes de frecuencia.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

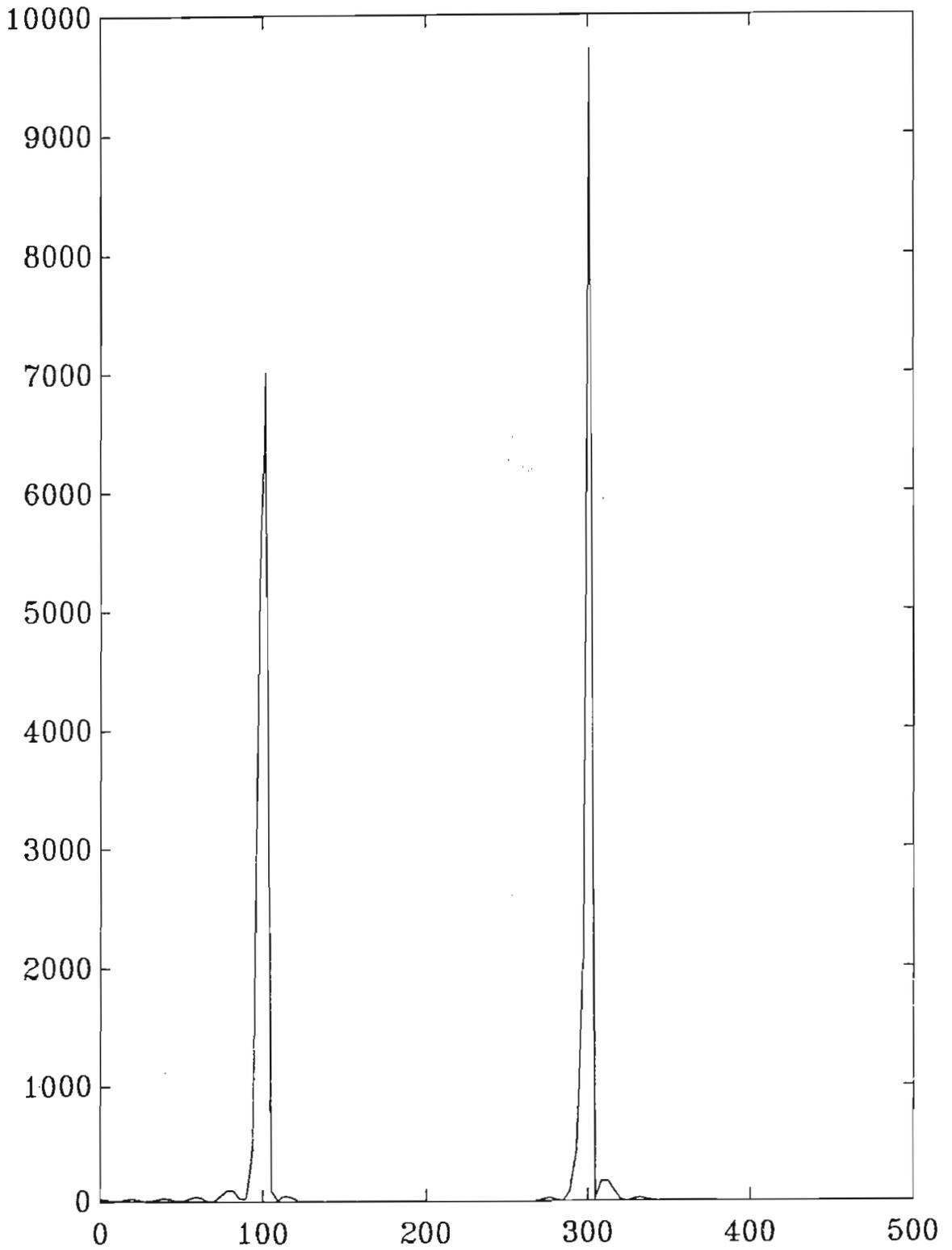


Fig. 5.26 Espectro de la señal con 4 componentes luego de ser filtrada por un filtro multibanda.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

5.1.3. DISEÑO DE FILTROS.

En este numeral se realizan algunos diseños de filtros recursivos y no recursivos, aplicando a ejemplos en los que se utiliza los cinco tipos de filtros que son: pasa bajos, pasa altos, pasa banda, elimina banda y multibanda.

5.1.3.1. Diseño de filtro recursivo por el método de la transformada bilineal (aproximación elíptica).

En el presente numeral se realiza el diseño de un filtro digital elíptico pasa bajos, mediante la transformada bilineal. Se lo utiliza para filtrar dos señales que son: la respuesta contaminada de la planta de segundo orden del numeral 5.1.1.1 y la respuesta contaminada de la planta de primer orden del numeral 5.1.1.3, con el fin de poder realizar una comparación de la acción de un mismo filtro (diseñado con los mismos parámetros) sobre las respuestas de dos plantas diferentes (primero y segundo orden). La frecuencia de muestreo es de 100 Hz y los parámetros de diseño son los siguientes:

- Frecuencia de paso $F_p = 0.4$ Hz.
- Frecuencia de bloqueo $F_s = 1.5$ Hz.
- Rizado de la banda de paso $R_p = 0.5$ dB.
- Rizado de la banda de bloqueo $R_s = 40$ dB.

Los anteriores parámetros dan como resultado un orden del filtro de $N=3$ y una frecuencia natural W_n de 0.008, de donde se escoje un orden de $N=4$ y el mismo valor de W_n . La magnitud de respuesta de frecuencia se presenta en la figura 5.27 y la misma respuesta ampliada con un fondo de escala de 3 Hz, se presenta en la figura 5.28.

5.1.3.2. Diseño de un filtro no recursivo mediante el método de fase lineal.

Este diseño se lo hace utilizando la ventana de Kaiser, con una frecuencia de muestreo de 100 Hz, y los siguientes

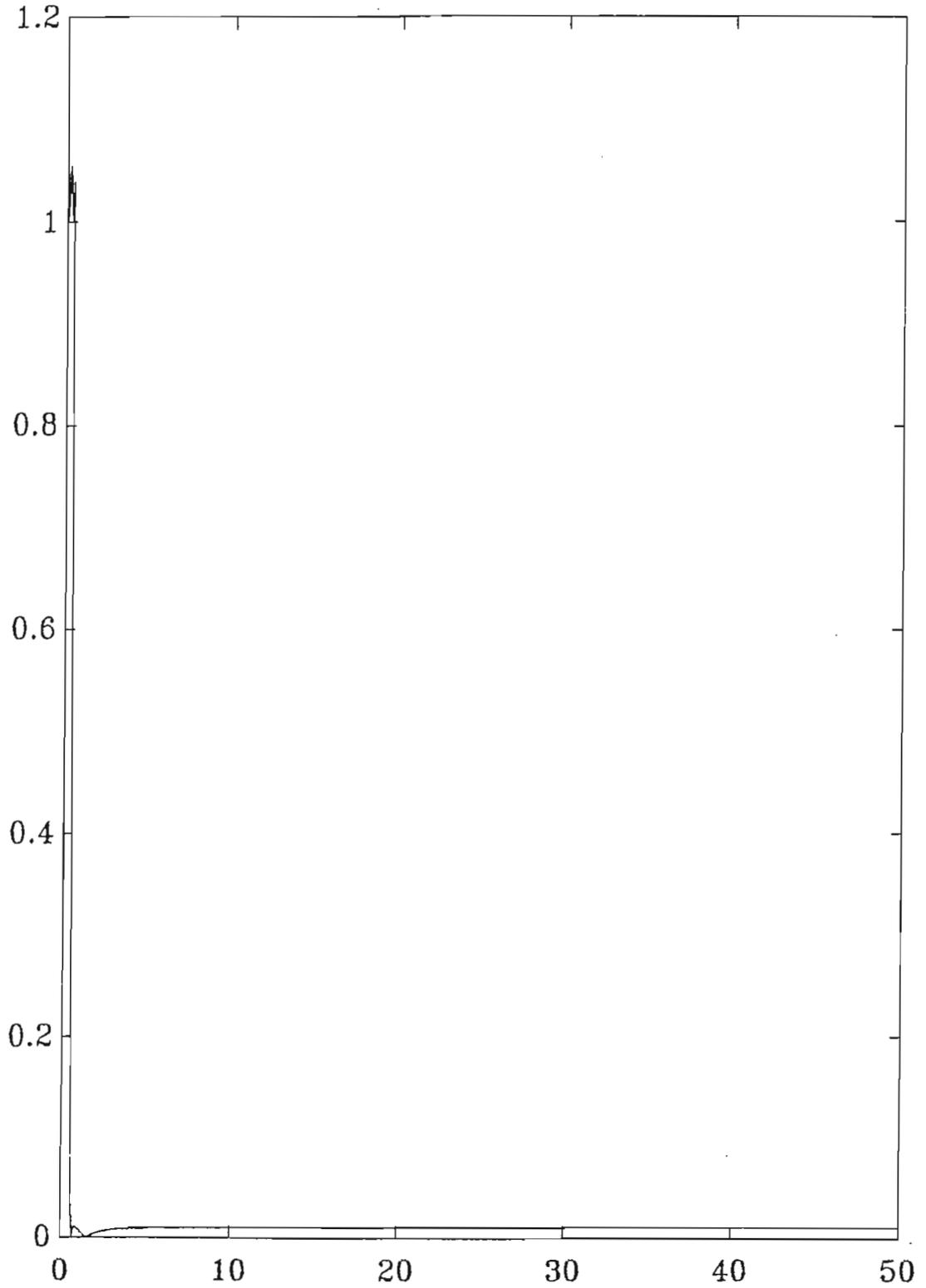


Fig. 5.27 Magnitud de respuesta de frecuencia de filtro
recursivo elíptico.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

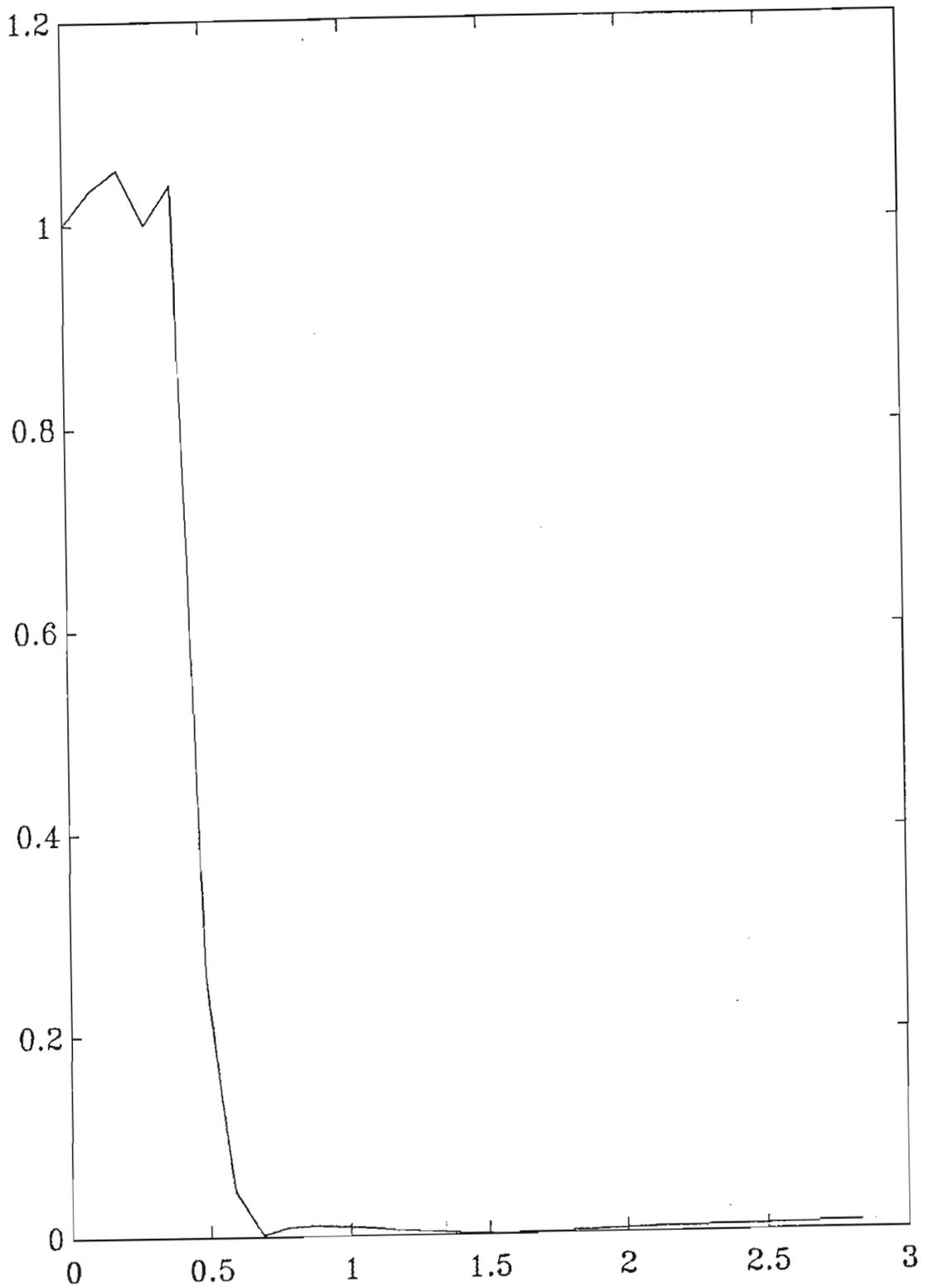


Fig. 5.28 Magnitud de respuesta de frecuencia ampliada.
EJE X: FRECUENCIA (Hz)
EJE Y: MAGNITUD

parámetros de diseño:

- Beta = 5 (aproximado a una ventana de Hamming).
- Frecuencia de corte = 0.4 Hz.
- Orden del filtro $N = 100$.

Mediante este filtro se quiere filtrar la señal contaminada de la planta de segundo orden del numeral 5.1.1.1, y poder comparar con la señal filtrada por el filtro elíptico (comparación entre filtros recursivos y no recursivos), en la misma señal de la planta. Las figuras 5.29 y 5.30 contienen la magnitud de respuesta de frecuencia de este filtro, pero en la figura 5.30 se amplía la figura con un fondo de escala de 5 Hz, para mejor apreciación.

5.1.3.3. Diseño de filtro recursivo mediante la transformada bilineal (aproximación de Butterworth).

Este diseño de filtro recursivo pasabajos, se lo realiza con el fin de filtrar la señal contaminada de la planta de segundo orden con retardo del numeral 5.1.1.2. Se utilizan las mismas especificaciones que en el diseño del filtro elíptico, debido a que los espectros de las señales contaminadas de las plantas de 5.1.1.1 y 5.1.1.2 son similares, además que así se puede realizar una comparación entre los dos filtros que utilizan transformada bilineal. La frecuencia de muestreo es 100 Hz, y sus parámetros son los siguientes:

- Frecuencia de paso = 0.4 Hz.
- Frecuencia de bloqueo = 1.5 Hz.
- Rizado en la banda de paso = 0.5 dB.
- Rizado en la banda de bloqueo = 40 dB.

Las anteriores especificaciones se cumplen con un filtro de orden 5 como mínimo y frecuencia natural ω_n de 0.0119, por lo que se escoge un orden $N=6$. La figura 5.31 presenta la magnitud de respuesta de frecuencia del filtro de Butterworth para las anteriores especificaciones; en la

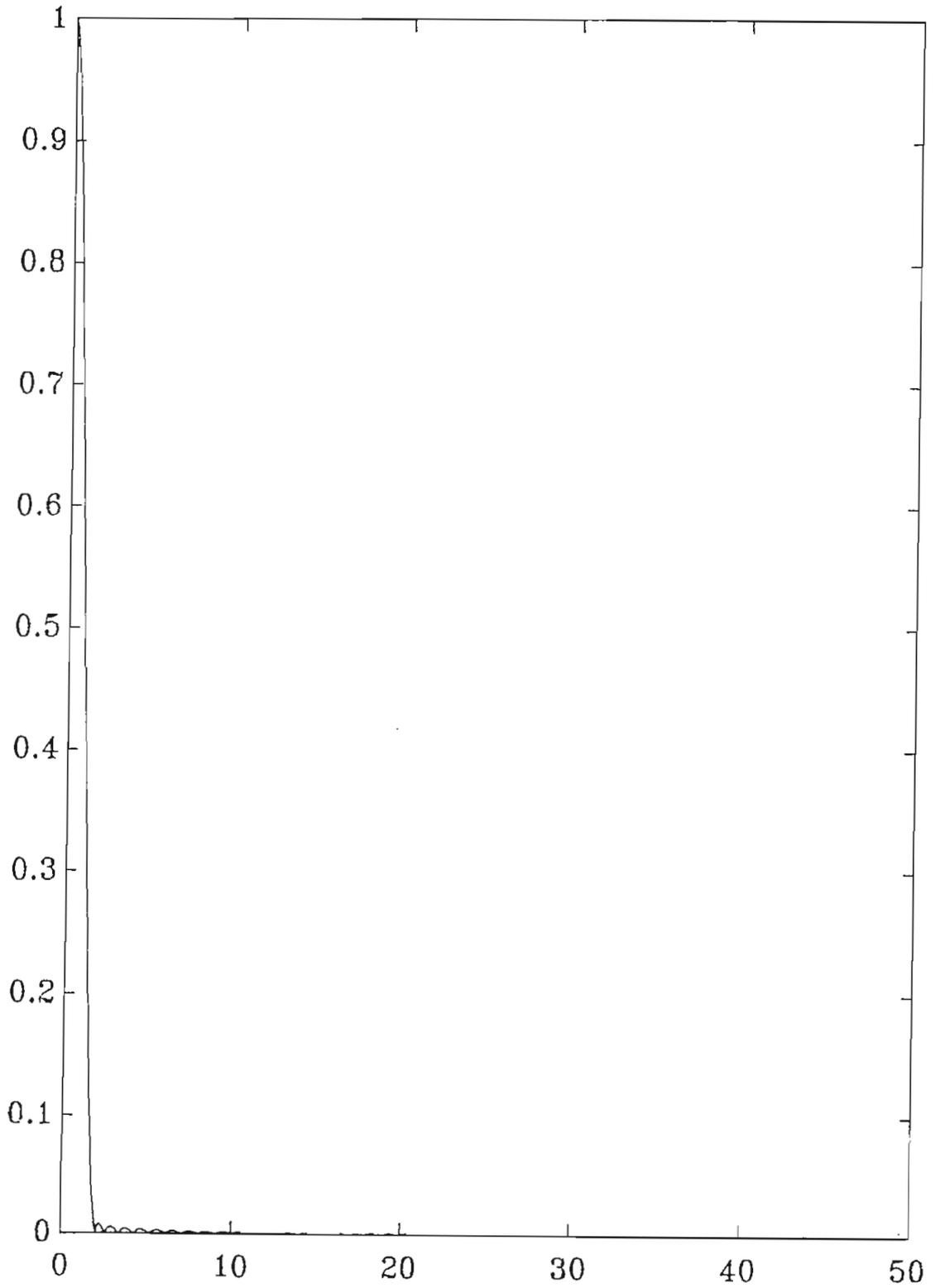


Fig. 5.29 Magnitud de respuesta de frecuencia del filtro no recursivo con ventana de Kaiser.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

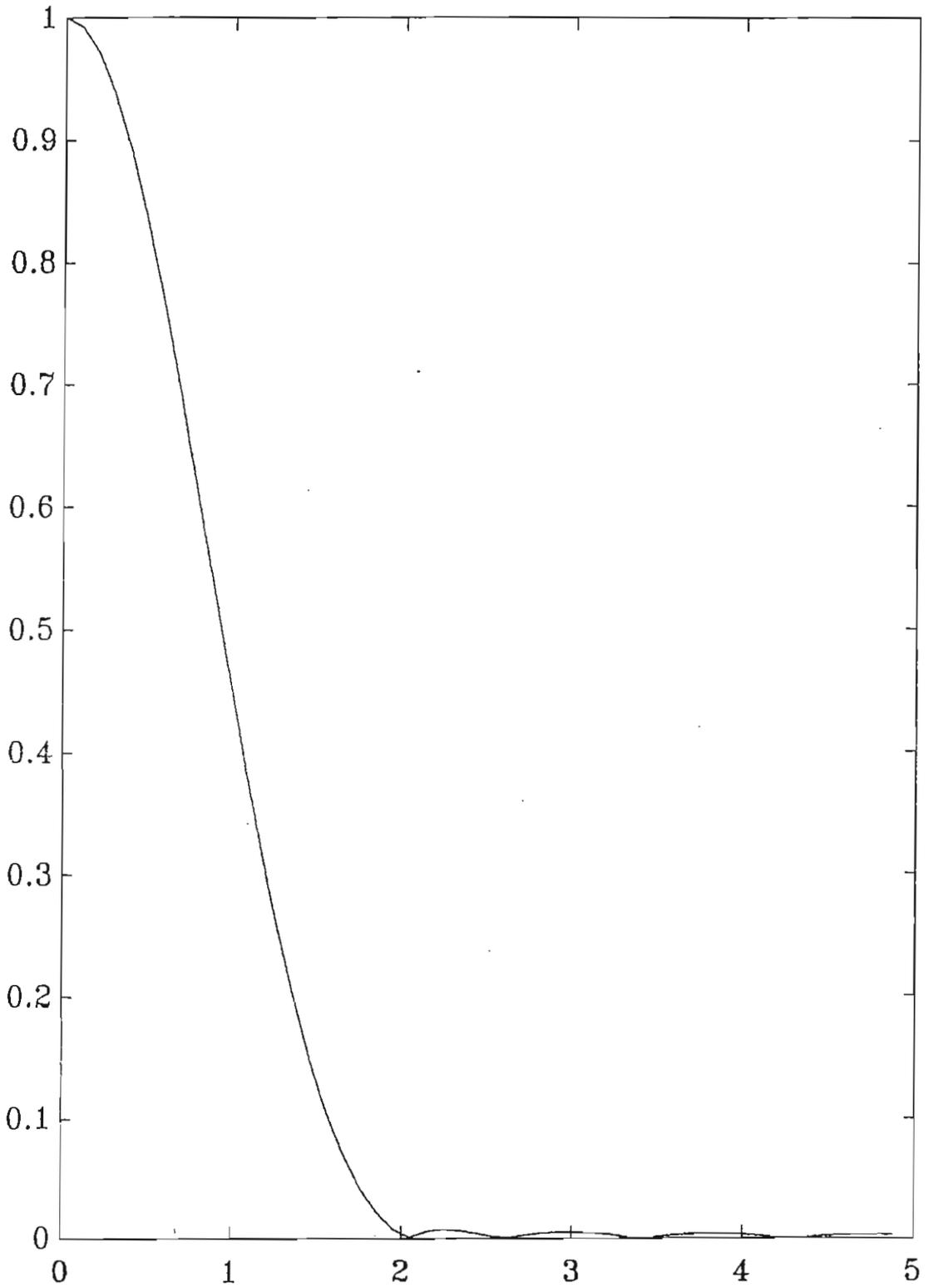


Fig. 5.30 Respuesta de frecuencia ampliada de la figura 5.29
EJE X: FRECUENCIA (Hz)
EJE Y: MAGNITUD

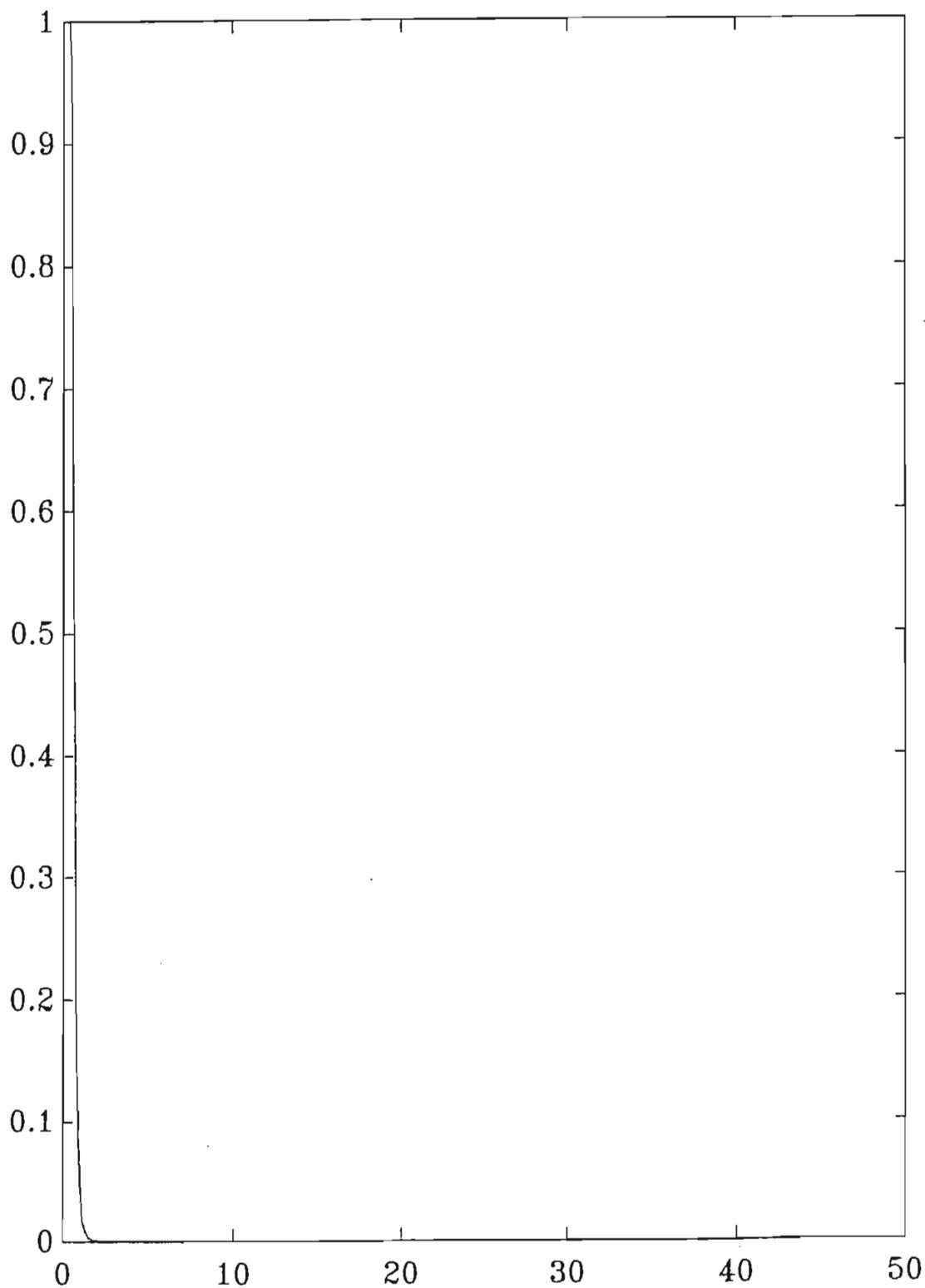


Fig. 5.31 Magnitud de respuesta de frecuencia del filtro recursivo de Butterworth.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

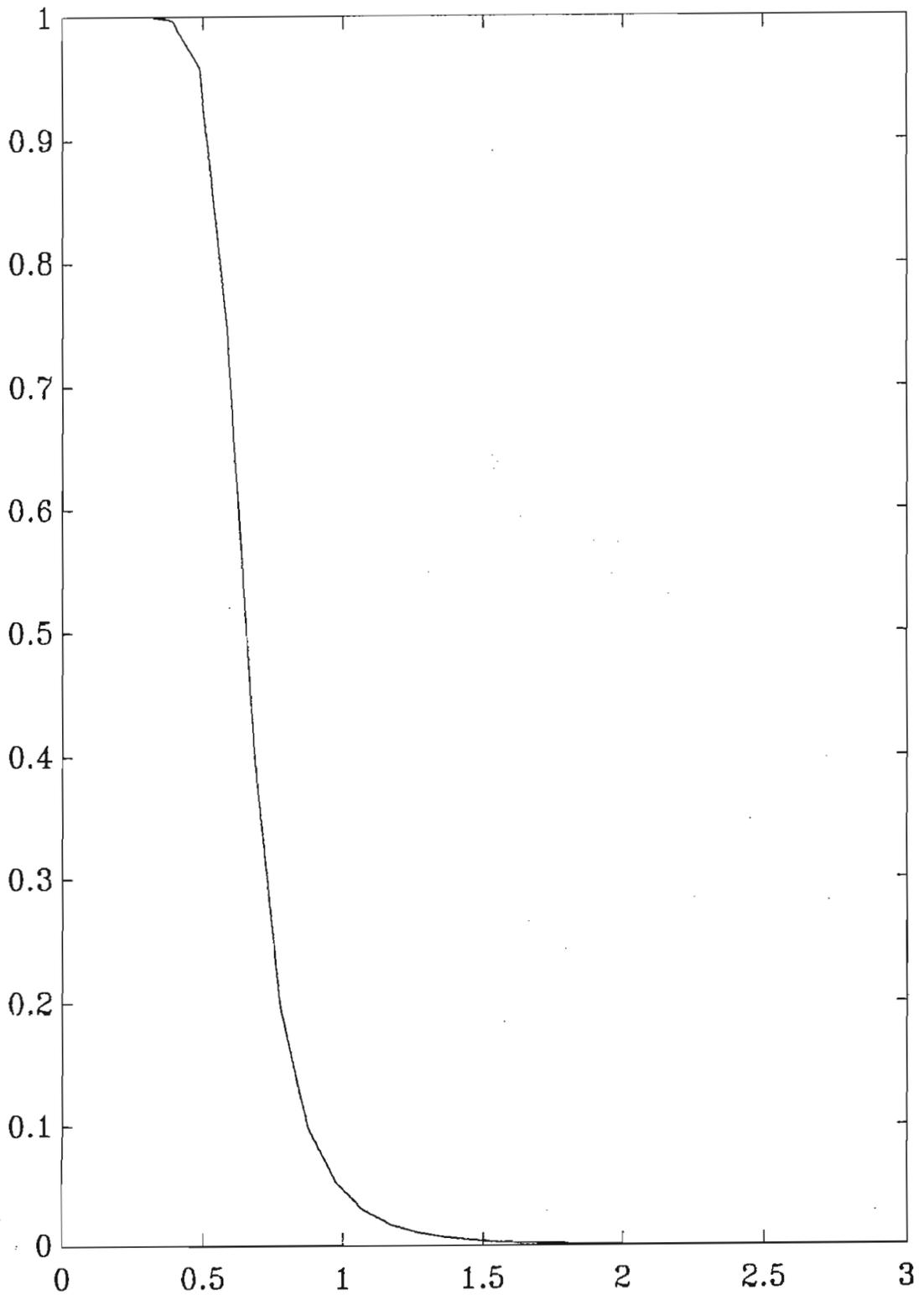


Fig. 5.32 Magnitud de respuesta de frecuencia ampliada de la figura 5.31

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

figura 5.32 se presenta la misma respuesta de frecuencia pero con un fondo de escala de 3 Hz.

5.1.3.4. Diseño de filtro pasa banda por el método de Yule-Walker.

Este filtro se diseña con el fin de filtrar la señal de suma de tres componentes de frecuencia del numeral 5.1.2.6 (figuras 5.17 y 5.18), para mantener solamente la frecuencia de 60 Hz y eliminar las frecuencias de 30 y 100 Hz. El diseño se realiza en el dominio de la frecuencia, por lo que se define la magnitud de respuesta de frecuencia ideal. La frecuencia de muestreo es de 300 Hz. Las especificaciones son las siguientes:

- Orden del filtro = 10.
- Vector de frecuencias = [0 50 50 70 70 150].
- Vector de magnitudes = [0 0 1 1 0 0].

En la figura 5.33 se puede apreciar la magnitud de respuesta de frecuencia del filtro de Yule-Walker ideal y real de diseño.

5.1.3.5. Diseño de filtro no recursivo elimina banda por el método de Parks-McClellan.

Este diseño se lo realiza con el fin de filtrar la señal con tres componentes de frecuencia del numeral 5.1.2.6 (figuras 5.17 y 5.18) para eliminar la frecuencia de 60 Hz y mantener las de 30 y 100 Hz. El filtro se diseña en el dominio de la frecuencia definiendo la magnitud de respuesta de frecuencia ideal. La frecuencia de muestreo es de 300 Hz y las especificaciones son:

- Orden del filtro = 40
- Vector de frecuencias = [0 50 50 70 70 150].
- Vector de magnitudes = [1 1 0 0 1 1].

La magnitud de respuesta de frecuencia ideal versus la real

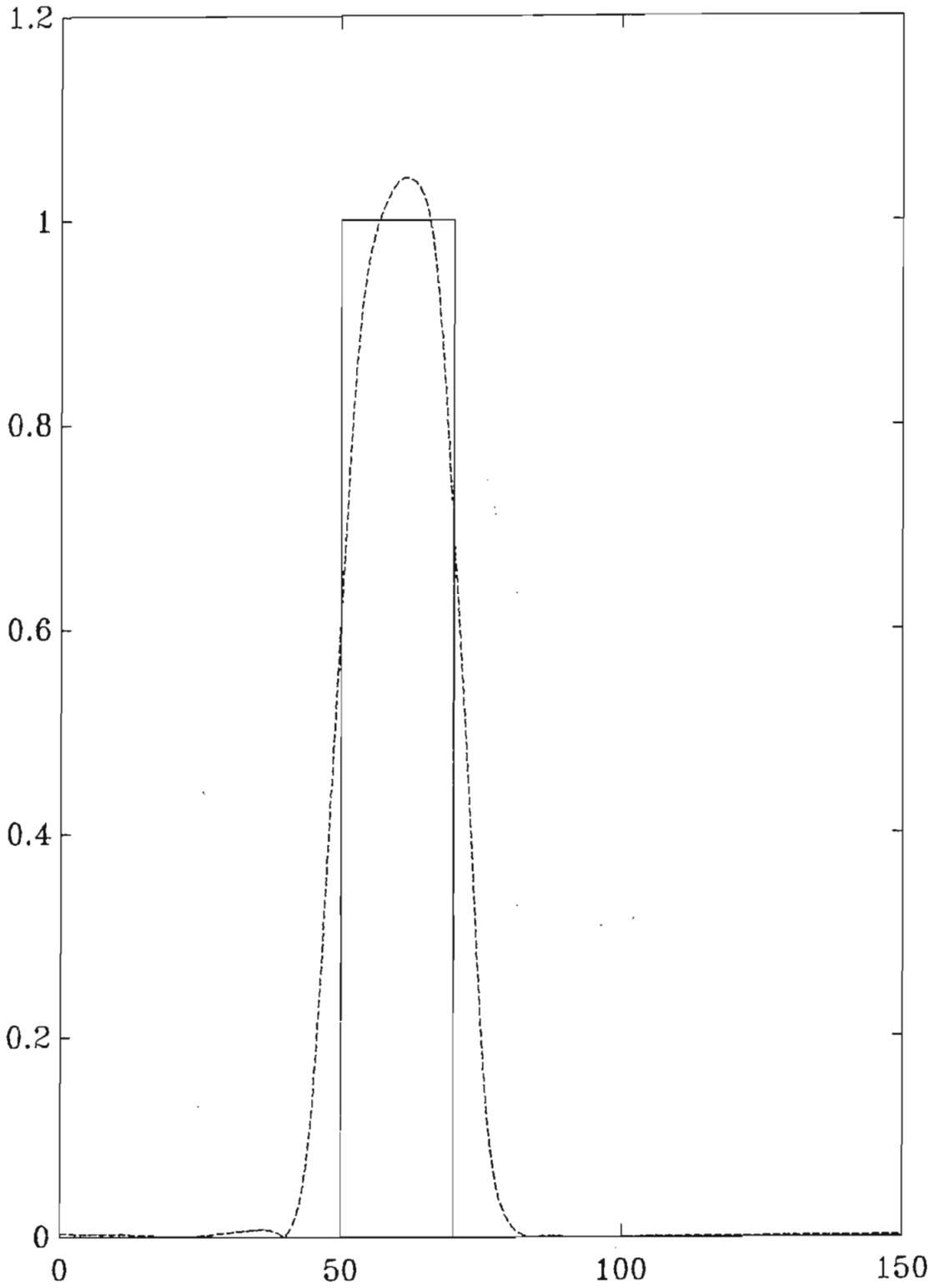


Fig. 5.33 Magnitud de respuesta de frecuencia del filtro pasabanda de Yule-Walker.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

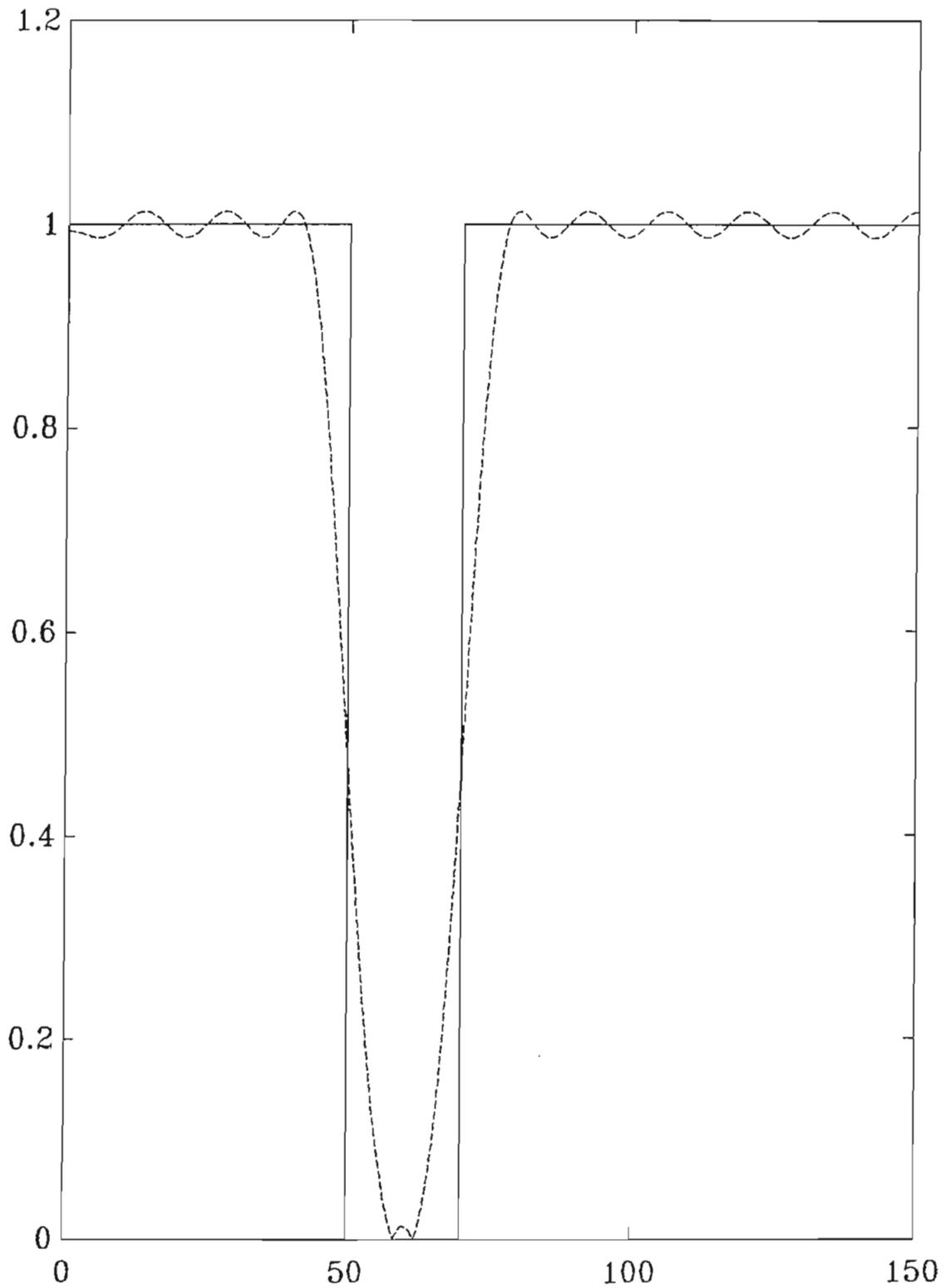


Fig. 5.34 Magnitud de respuesta de frecuencia del filtro elimina banda de Parks-McClellan.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

se muestra en la figura 5.34. Se puede notar el equirizado en las bandas de paso y de bloqueo del filtro, que caracterizan a este diseño.

5.1.3.6. Diseño de filtro no recursivo pasa alto de fase lineal usando la ventana de Hamming.

Este filtro se lo diseña con el objetivo de filtrar la señal compuesta de componente continua y alterna del numeral 5.1.2.7 (figura 5.22). Mediante este diseño, se mantiene la componente alterna, eliminando la componente de continua. La frecuencia de muestreo es 1000 Hz y los parámetros utilizados son los siguientes:

- Frecuencia de corte = 30 Hz.
- Orden del filtro = 100.

En la figura 5.35 se puede observar la magnitud de respuesta de frecuencia del filtro no recursivo con ventana de Hamming.

5.1.3.7. Diseño de filtro no recursivo de fase lineal en el dominio de la frecuencia con ventana de Bartlett.

Este filtro se lo diseña con el fin de filtrar la señal del numeral 5.1.2.8 (ver espectro en la figura 5.25) para eliminar las frecuencias de 200 y 400 Hz, manteniendo las frecuencias de 100 y 300 Hz. La frecuencia de muestreo es 1000 Hz y las especificaciones del filtro son las siguientes:

- Orden del filtro = 100.
- Vector de frecuencias:

$$F = [0 \ 150 \ 150 \ 250 \ 250 \ 350 \ 350 \ 450 \ 450 \ 500]$$

- Vector de magnitudes:

$$M = [1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1]$$

En la figura 5.36 se puede observar la magnitud de respuesta de frecuencia del filtro multibanda.

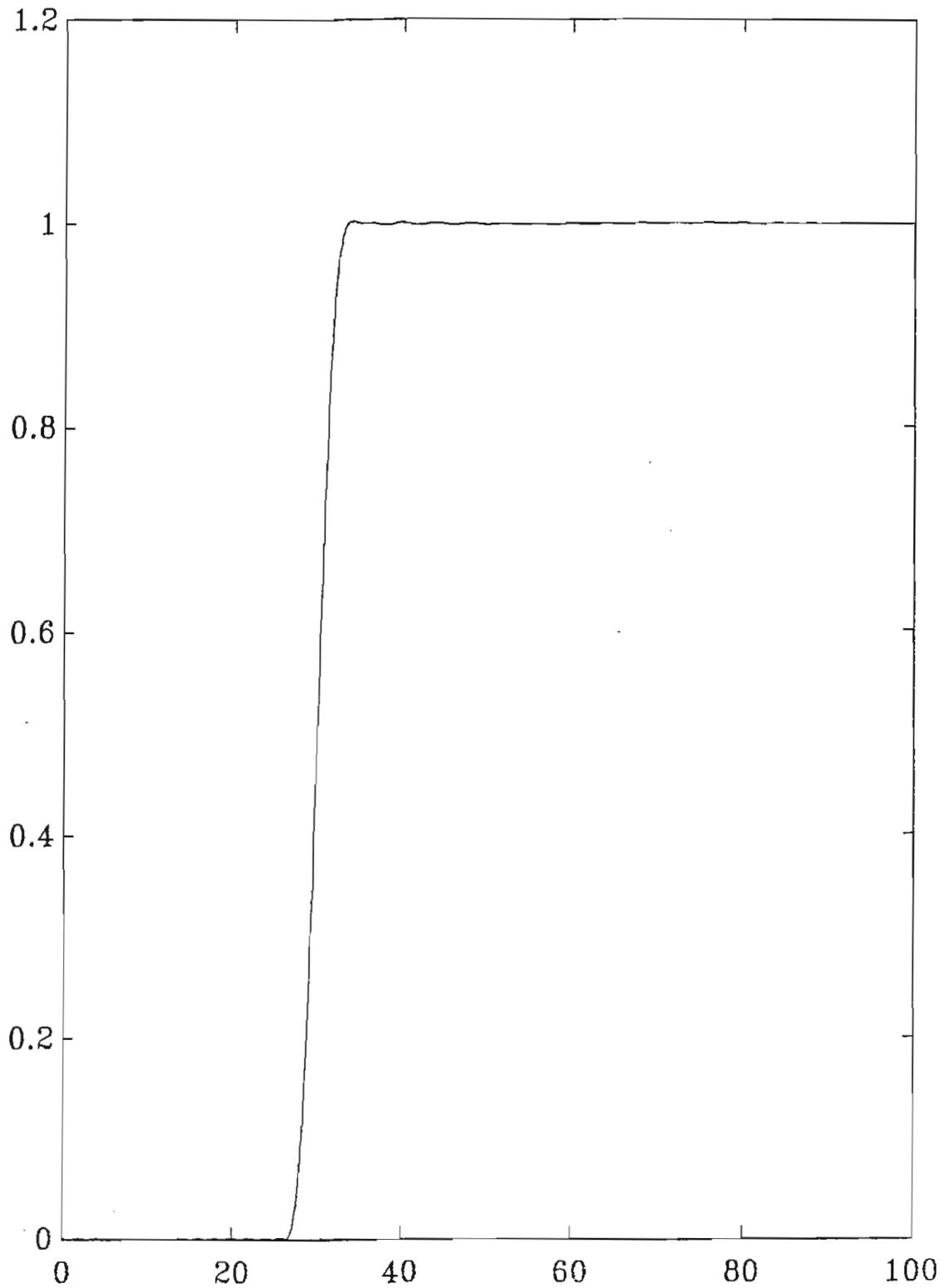


Fig. 5.35 Magnitud de respuesta de frecuencia del filtro pasa altos con ventana de Hamming.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

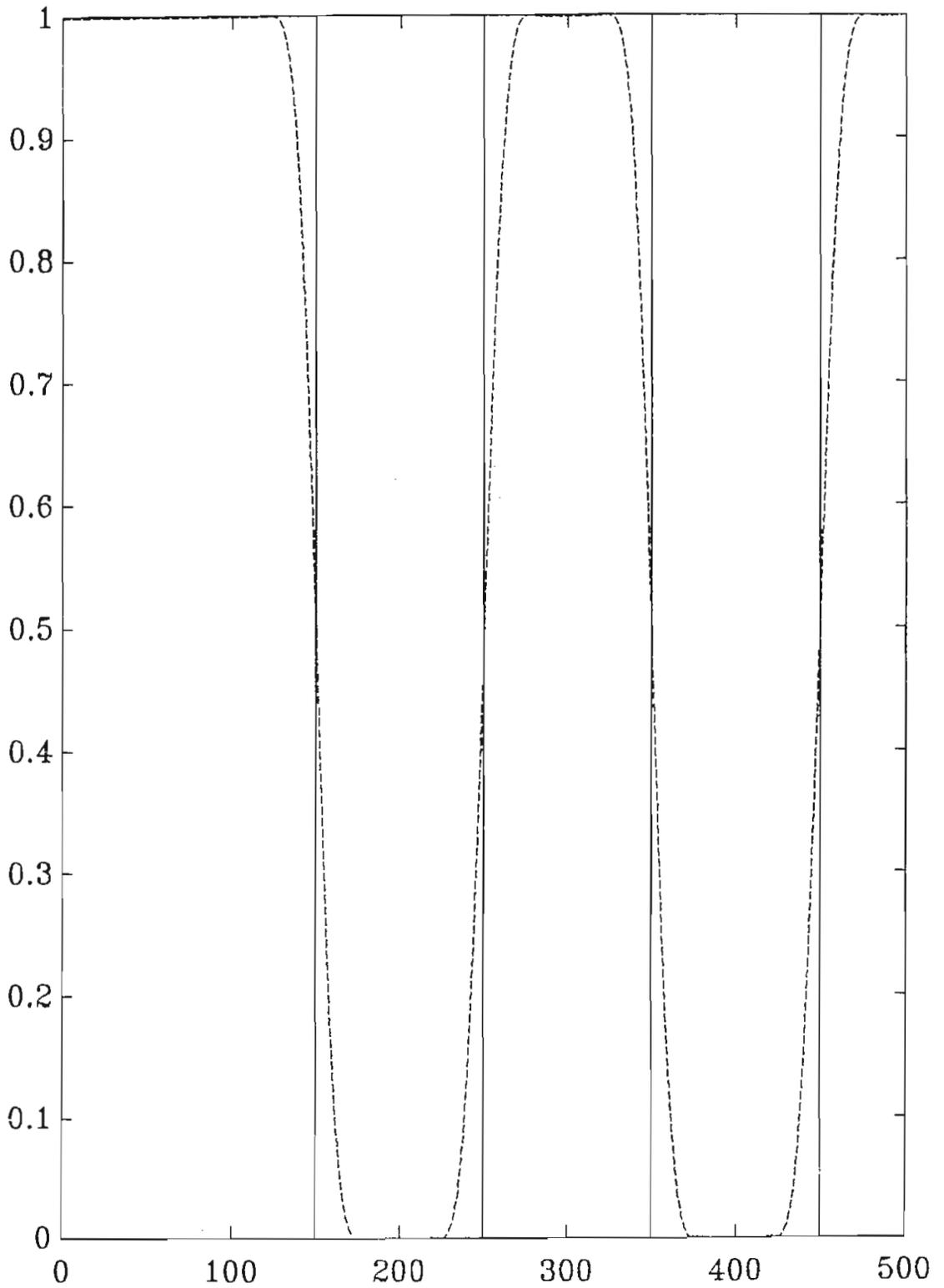


Fig. 5.36 Magnitud de respuesta de frecuencia del filtro multibanda con ventana de Bartlett.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)

EJE Y: MAGNITUD

5.1.4. FILTRADO DE SEÑALES.

5.1.4.1. Filtrado de la señal contaminada del numeral

5.1.1.1. con filtro recursivo, método de fase cero.

El proceso de filtrado de la señal contaminada con ruido de distribución normal del numeral 5.1.1.1 (figura 5.2), se realiza mediante el filtro recursivo de aproximación elíptica, utilizando el método de fase cero, que es el mejor de los dos métodos existentes para filtrado mediante filtros recursivos. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz. Como se puede observar en la figura 5.37, la señal filtrada es muy aproximada a la señal original sin ruido, por lo que se puede concluir que el filtro y el método de filtrado son bastante aceptables.

5.1.4.2. Filtrado de la señal contaminada del numeral

5.1.1.1 con filtro no recursivo, método de la TRF.

El presente proceso de filtrado se lo realizó mediante el filtro no recursivo de fase lineal con ventana de Kaiser, a una frecuencia de muestreo de 100 Hz, utilizando el único método de filtrado con filtros no recursivos que es a través de la TRF, de la señal contaminada con ruido de distribución normal (gaussiana) del numeral 5.1.1.1. Como se puede ver en la figura 5.38 la señal filtrada es aproximada a la original sin ruido, pero de inferior calidad a la obtenida en el numeral 5.1.4.1, sobre todo por la región de estabilización, donde se observan pequeñas deformaciones en relación a la anterior.

5.1.4.3. Filtrado de la señal contaminada del numeral

5.1.1.2 con filtro recursivo, método de fase cero.

El proceso de filtrado de la señal contaminada con ruido de distribución uniforme del numeral 5.1.1.2 (figura 5.4), se lo realiza mediante un filtro recursivo de aproximación de Butterworth, utilizando el método de filtrado de fase cero. La frecuencia de muestreo es 100 Hz. Como se puede observar

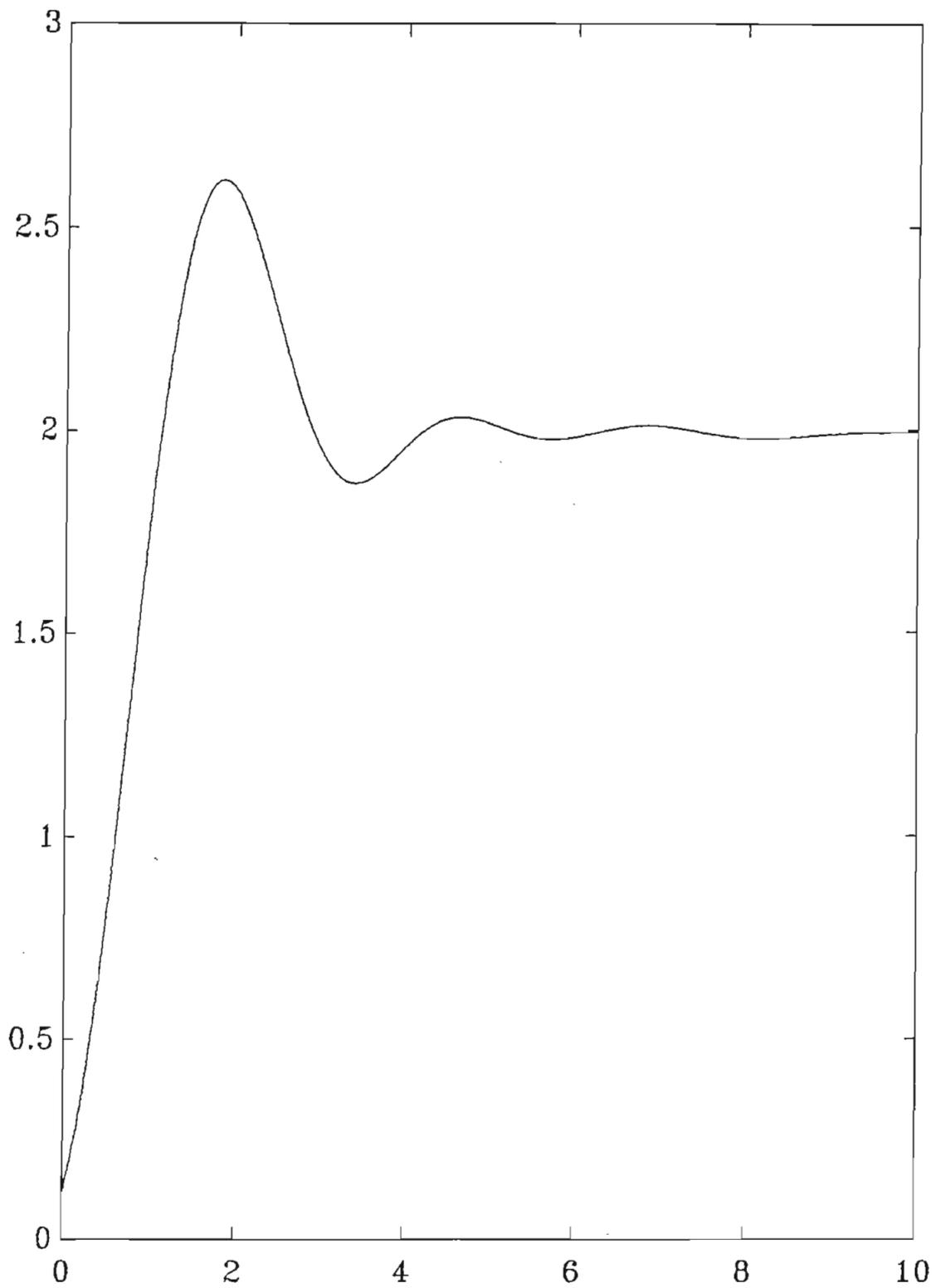


Fig. 5.37 Señal filtrada de la señal contaminada de 5.1.1.1
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

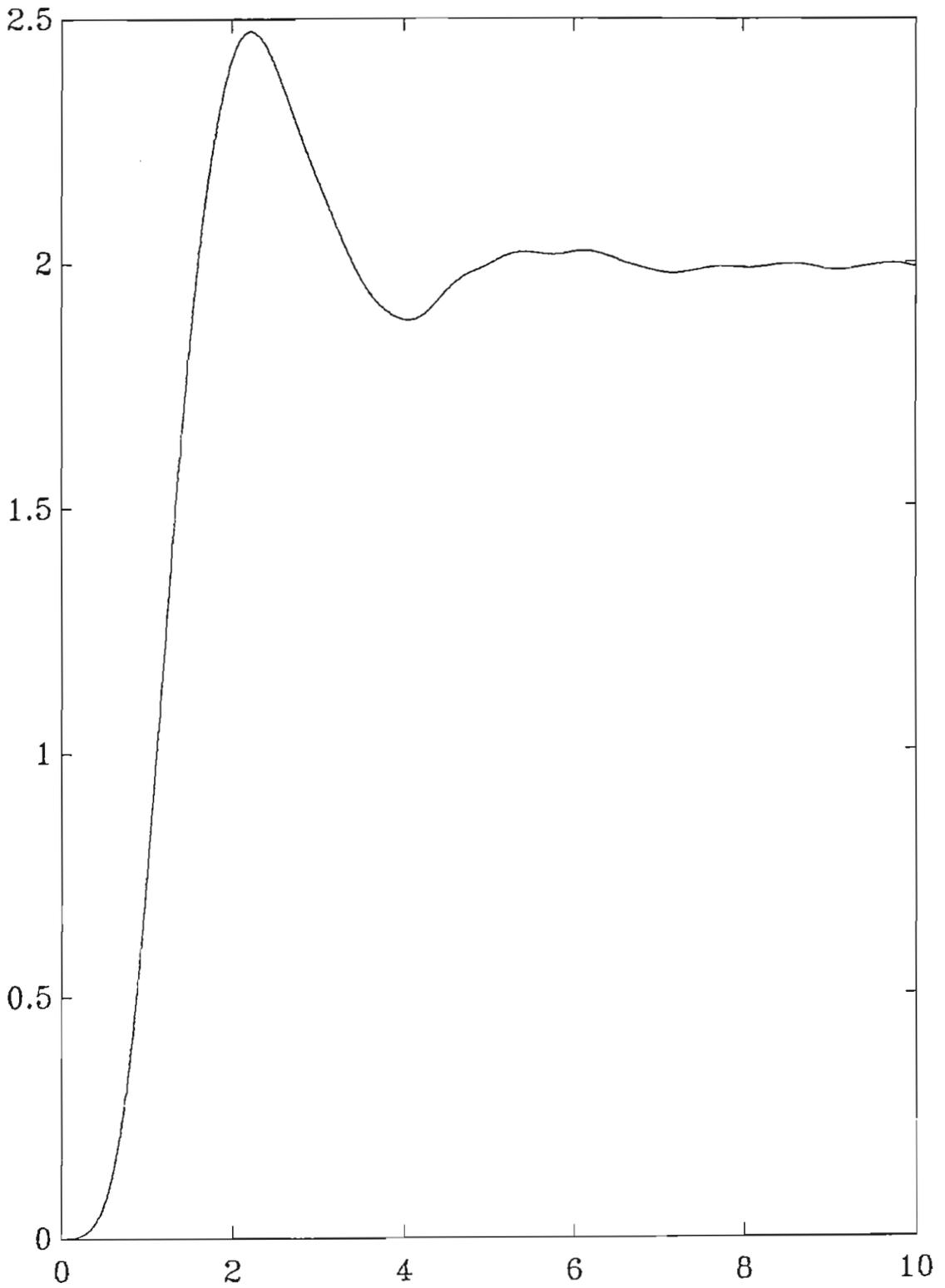


Fig. 5.38 Señal filtrada de la señal contaminada de 5.1.1.1 mediante filtro no recursivo.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

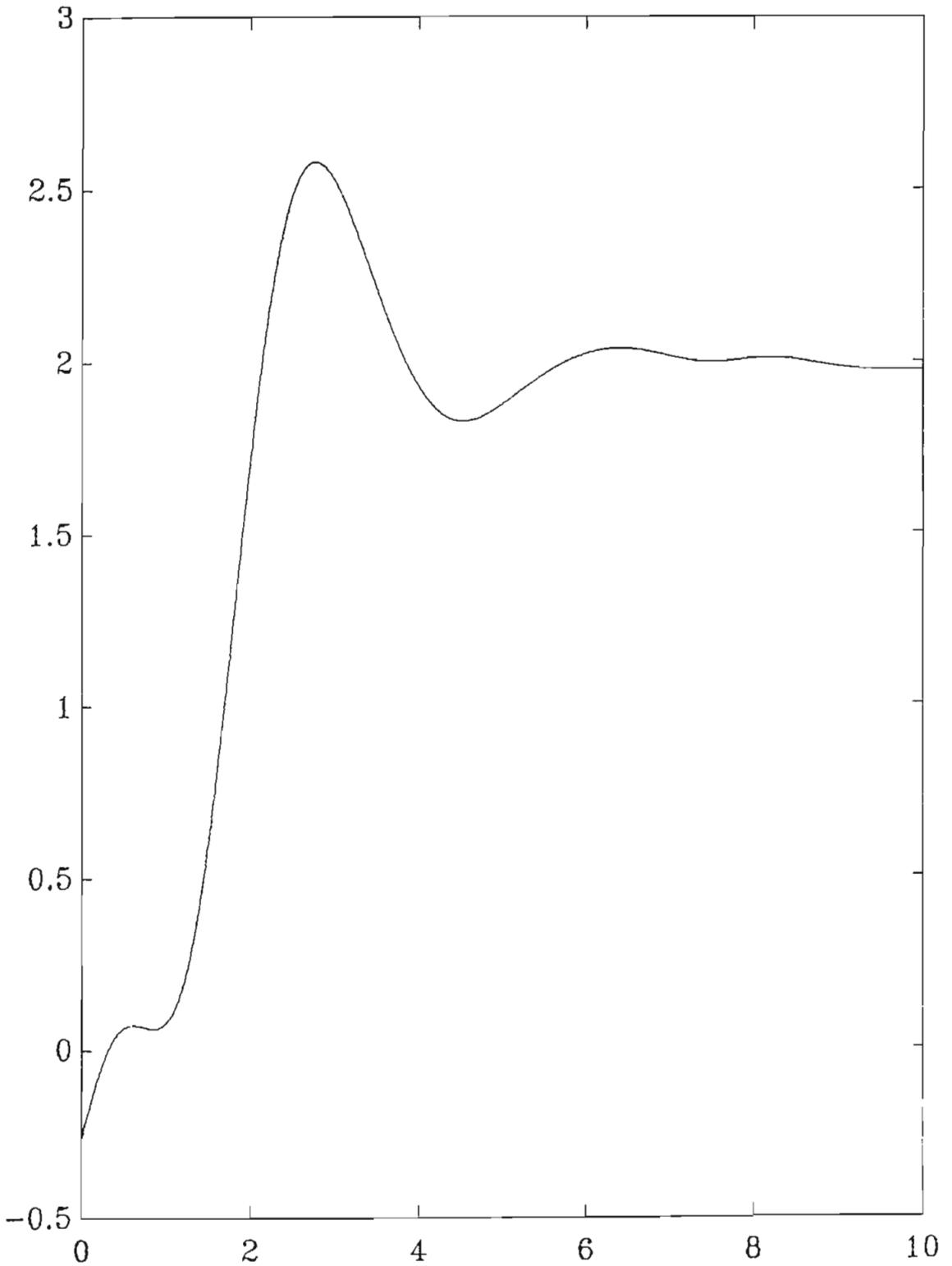


Fig. 5.39 Señal filtrada de la señal contaminada de 5.1.1.2
EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)
EJE Y: AMPLITUD

en la figura 5.39, la señal filtrada es similar a la original sin ruido, la cual tiene un retardo de transporte, con la diferencia de que la señal filtrada posee un offset en el origen (negativo en este caso), pero con una región de estabilización bastante aceptable. El offset se suele dar generalmente con este tipo de filtro.

5.1.4.4. Filtrado de la señal contaminada de 5.1.1.3 con filtro recursivo, método de fase cero.

El proceso de filtrado de la señal contaminada con ruido de distribución normal de la planta de primer orden del numeral 5.1.1.3, se realiza mediante un filtro recursivo de aproximación elíptica (numeral 5.1.3.1) con método de filtrado de fase cero. La frecuencia de muestreo es de 100 Hz. Como se puede ver en la figura 5.40 la señal filtrada posee en la región de estabilización oscilaciones que no presenta la señal original, pero ya no posee el ruido que tenía en un inicio. Una señal de respuesta de una planta de primer orden es un poco más complicada de filtrar que una señal de respuesta de una planta de segundo orden, como se puede observar de los numerales anteriores.

5.1.4.5. Filtrado de la señal con 3 componentes de frecuencia mediante un filtro pasa banda.

El proceso de filtrado de la señal que posee tres componentes sinusoidales (numeral 5.1.2.6, figura 5.18), cuyo espectro se muestra en la figura 5.19, de frecuencia diferente, se lo realiza mediante un filtro recursivo pasa banda de Yule-Walker (numeral 5.1.3.4, figura 5.33) dando como resultado una señal de una sola componente de frecuencia (60 Hz) como se puede ver en la figura 5.41 donde la señal filtrada se presenta y cuyo espectro se puede mirar en la figura 5.20.

5.1.4.6. Filtrado de la señal con 3 componentes de frecuencia mediante un filtro elimina banda.

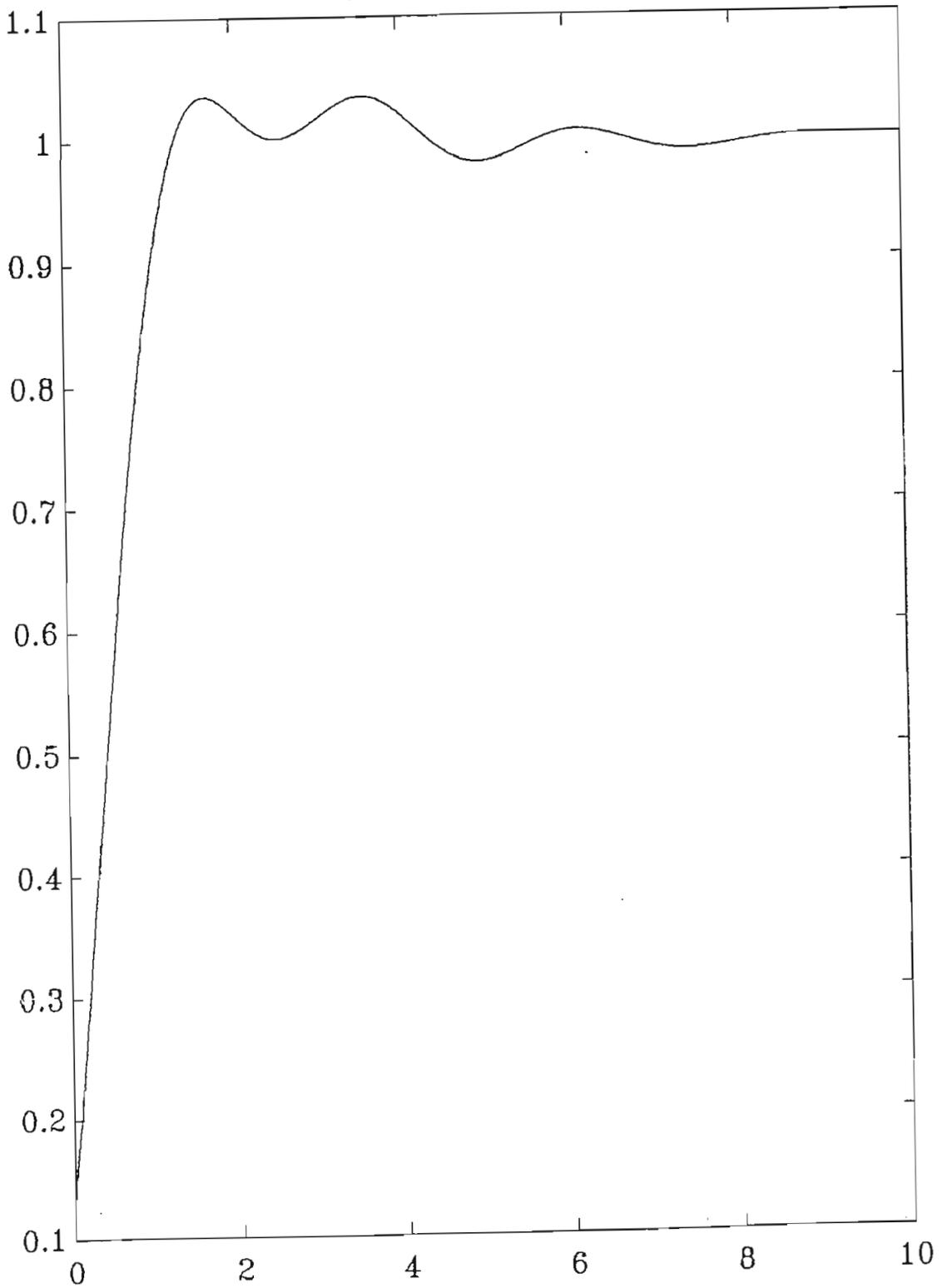


Fig. 5.40 Señal filtrada de la señal contaminada de la planta de primer orden (numeral 5.1.1.3)

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

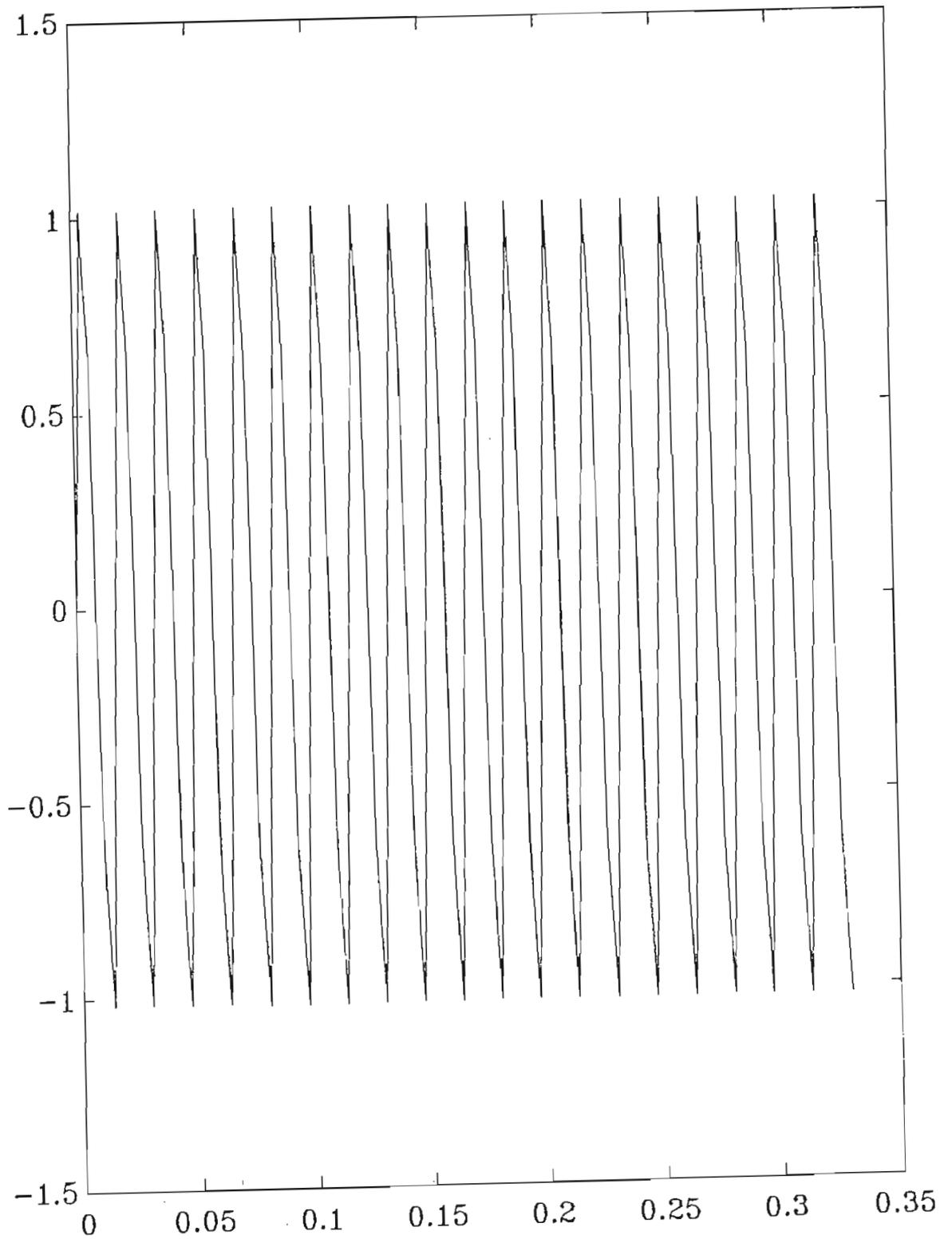


Fig. 5.41 Señal filtrada por un filtro pasa banda de la señal del numeral 5.1.2.6

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

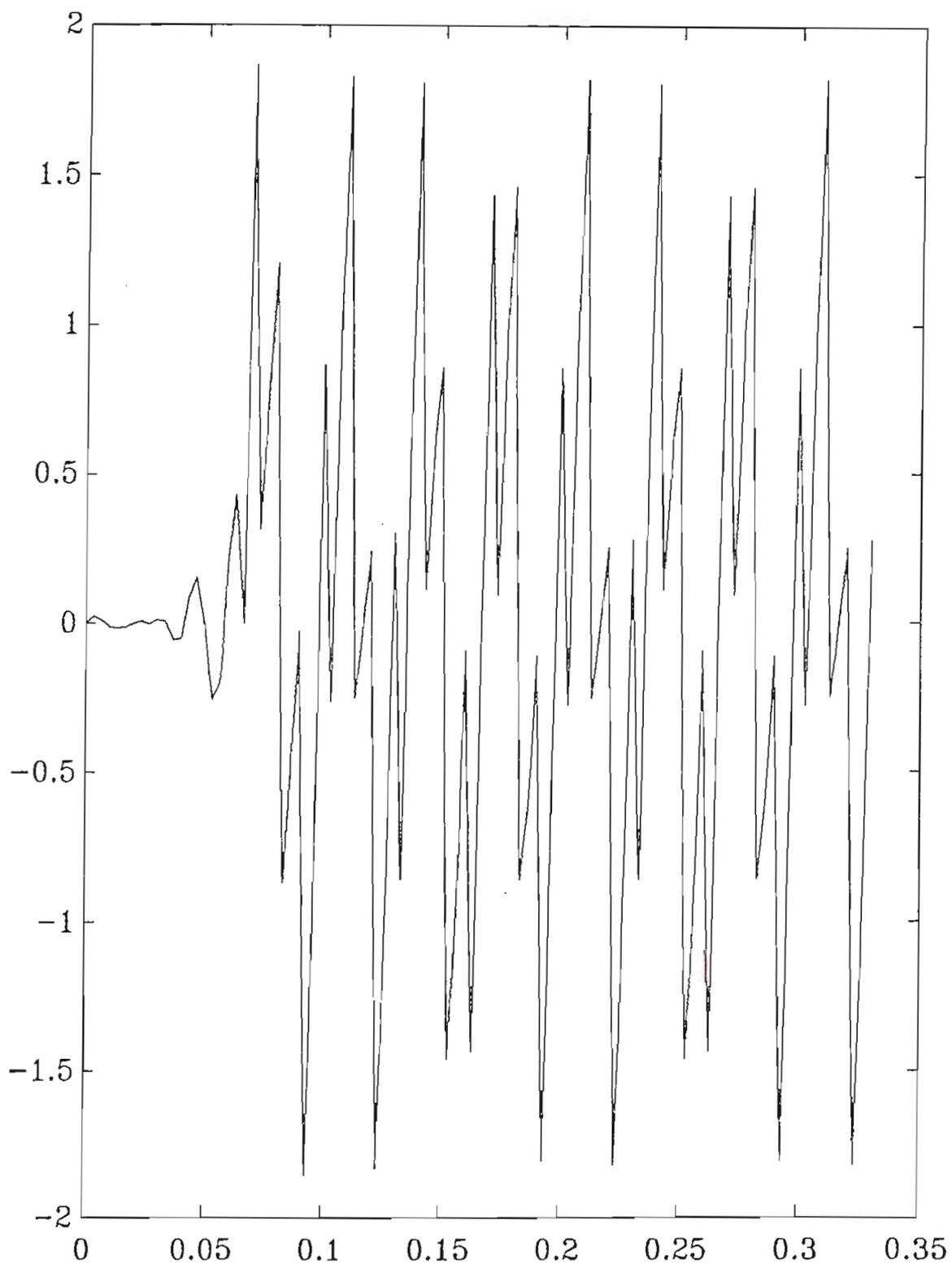


Fig. 5.42 Señal filtrada por un filtro elimina banda de la señal del numeral 5.1.2.6.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

Para este proceso de filtrado, se utiliza la misma señal que en el numeral anterior 5.1.4.5. Para el efecto se diseña un filtro elimina banda no recursivo por el método de Parks-McClellan (numeral 5.1.3.5, figura 5.34), filtrando la señal mediante el método de la TRF. Como se puede ver en la figura 5.42, la señal resultante del filtrado posee un retardo, originado por el filtro utilizado (no recursivo que introduce un grupo de retardo); el espectro de la señal filtrada se puede mirar en la figura 5.21, numeral 5.1.2.6.

5.1.4.7. Filtrado de la señal compuesta de continua y alterna por un filtro pasa altos.

El proceso de filtrado de esta señal (numeral 5.1.2.7, figura 5.22) cuyo espectro se puede observar en la figura 5.23, se realiza mediante un filtro pasa altos no recursivo con ventana de Hamming, por el método de la TRF a una frecuencia de muestreo de 200 Hz. En la figura 5.43, se puede mirar la señal filtrada que ya no posee la componente de continua, pero tiene un retardo de 0.25 segundos, debido al filtro no recursivo que introduce dicho retardo. El espectro de la señal filtrada se puede observar en la figura 5.24.

5.1.4.8. Filtrado de una señal con 4 componentes de frecuencia mediante un filtro multibanda.

El proceso de filtrado de la señal con 4 componentes de frecuencia (numeral 5.1.2.8, figura 5.25), se lo realiza mediante un filtro multibanda no recursivo con ventana de Bartlett en el dominio de la frecuencia, cuya respuesta de frecuencia se muestra en la figura 5.36, eliminando la segunda y la cuarta componente, dando como resultado la señal de la figura 5.44, donde se observa también la presencia de un retardo producido por el filtro. El espectro de la señal de la figura 5.44 se puede ver en la figura 5.26, donde se observa también una disminución de la magnitud del espectro luego de haber filtrado la señal, lo cual se traduce en una disminución de la amplitud de la

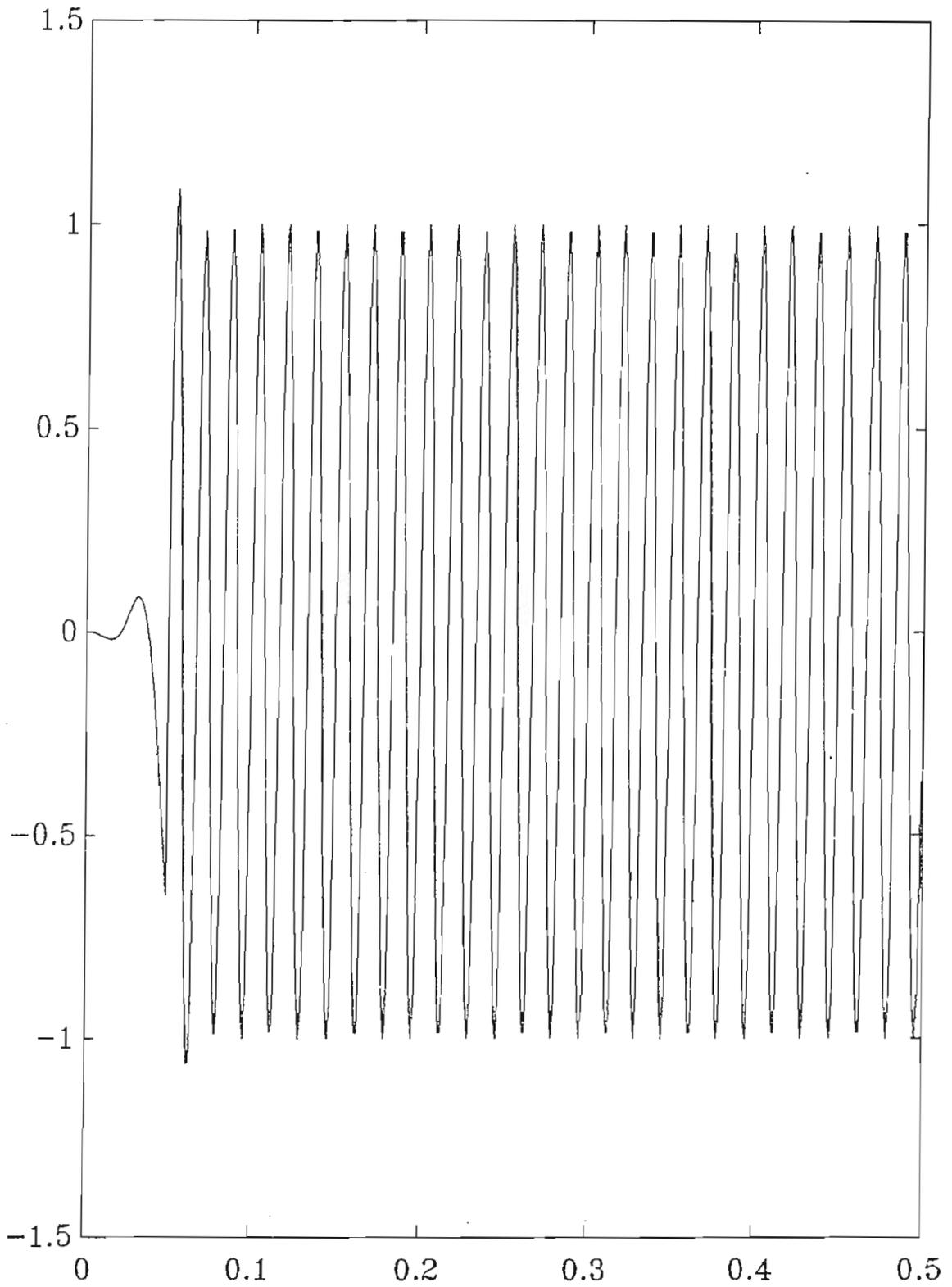


Fig. 5.43 Señal filtrada por un filtro pasa altos de la señal del numeral 5.1.2.7.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

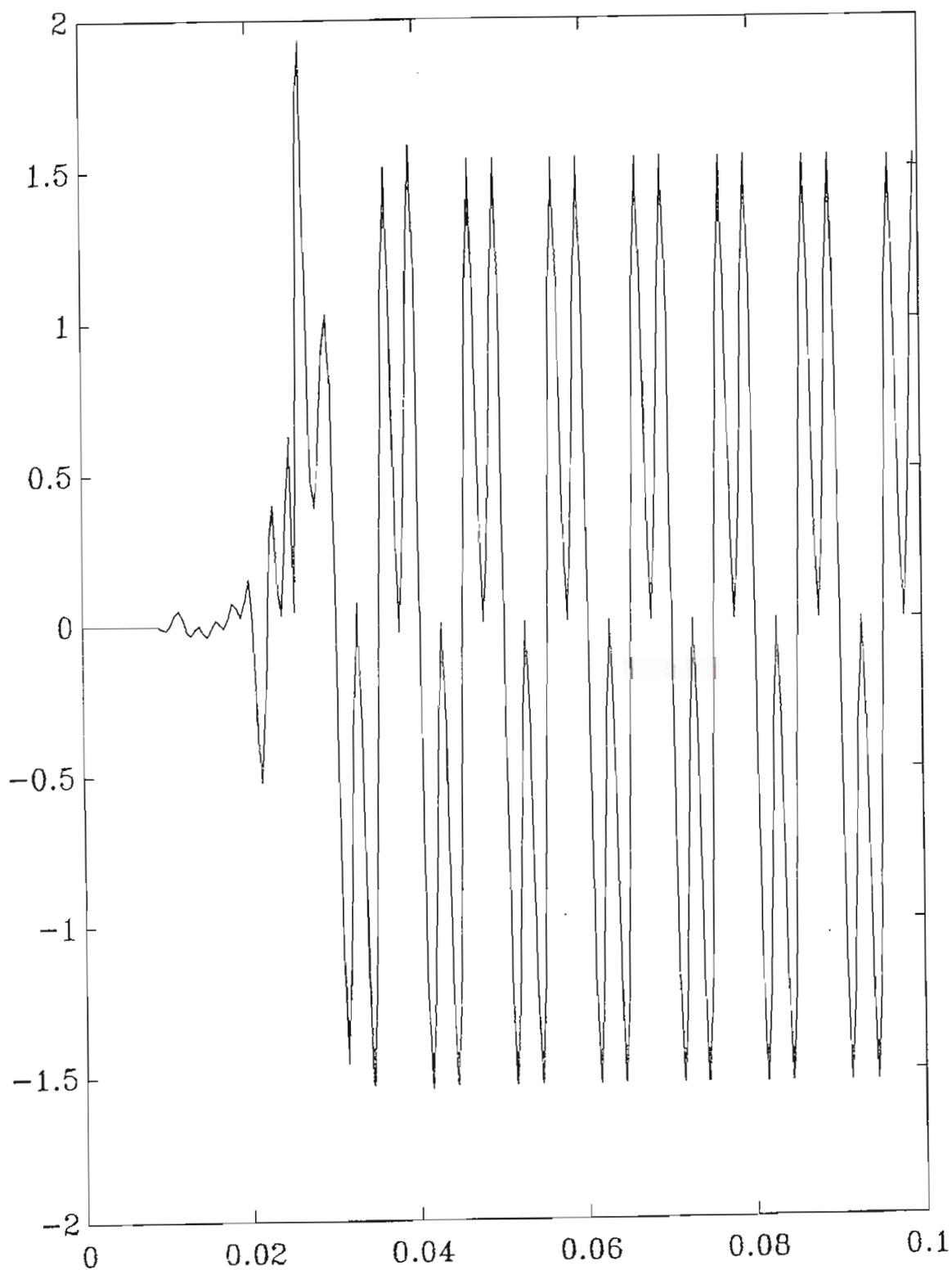


Fig. 5.44 Señal filtrada por un filtro multibanda de la señal del numeral 5.1.2.8.

EJE X: TIEMPO (SEGUNDOS)

EJE Y: AMPLITUD

señal filtrada (1.5 en lugar de 2).

5.1.5. AJUSTE POLINOMIAL.

5.1.5.1. Ajuste.

El ajuste polinomial o modelación polinomial, se lo ha realizado mediante la definición discreta de un semiciclo de la función SENO, para aproximar dicha función a un modelo polinomial, donde las especificaciones han sido:

- El vector $k = [0:\pi/10:\pi]$
- El vector $x(k) = [\sin(xk)]$
- El orden del polinomio = 10

El modelo polinómico resultante es de la forma:

$$P(t) = -0.0002*t^7 + 0.0083*t^5 - 0.1667*t^3 + t$$

La tabla 5.1 muestra los valores originales y aproximados por el ajuste:

vector k(rad)	SIN(k)	P(t=k)
0	0	0
0.3142	0.309	0.309
0.6283	0.5878	0.5878
0.9425	0.809	0.809
1.2566	0.9511	0.9511
1.5708	1	1
1.885	0.9511	0.9511
2.1991	0.809	0.809
2.5133	0.5878	0.5878
2.8274	0.309	0.309
3.1416	0	0

Tabla 5.1 Ajuste polinomial.

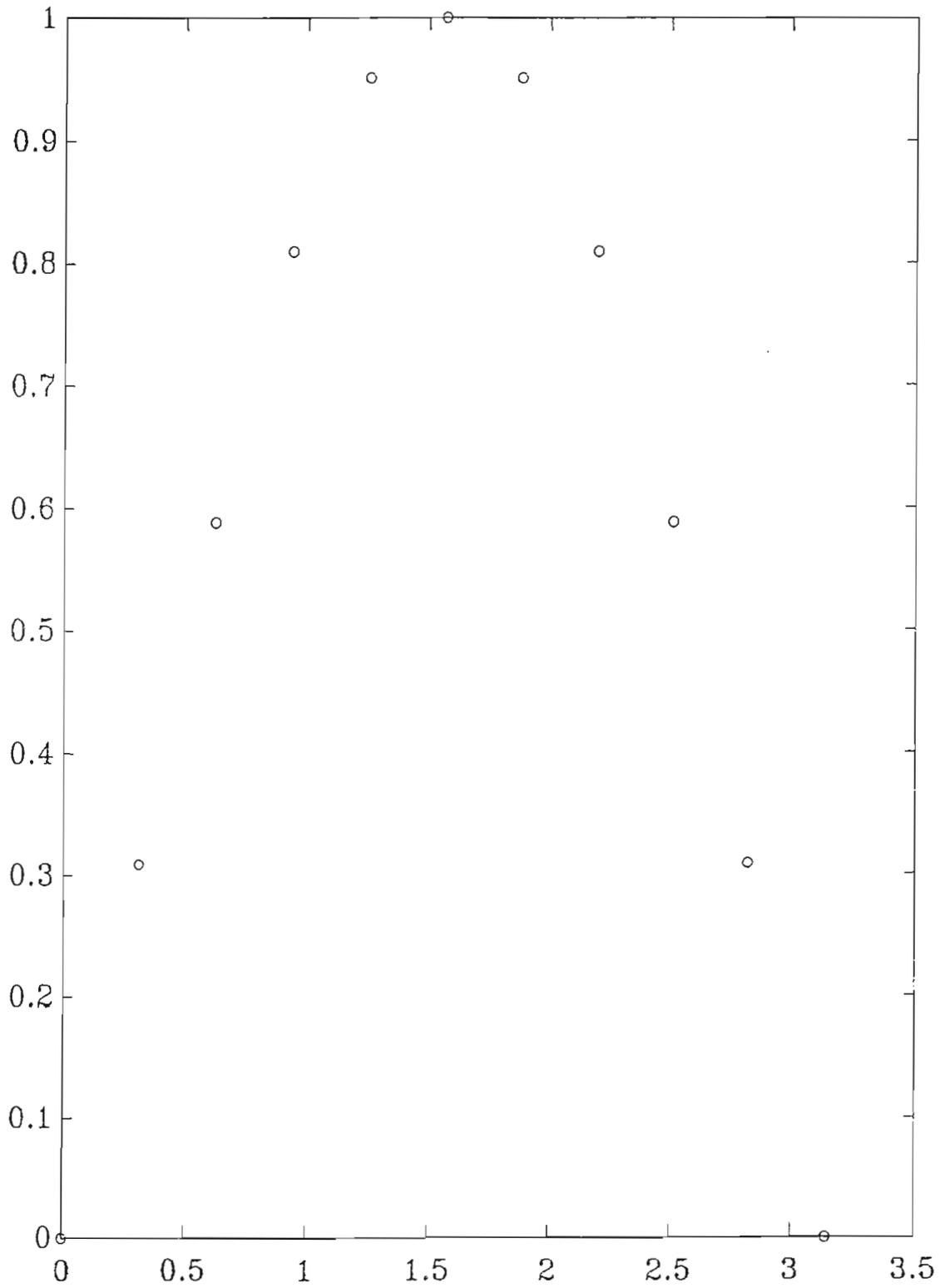


Fig. 5.45 Puntos de datos discretos de la función SENO.

EJE X: RADIANTES

EJE Y: AMPLITUD

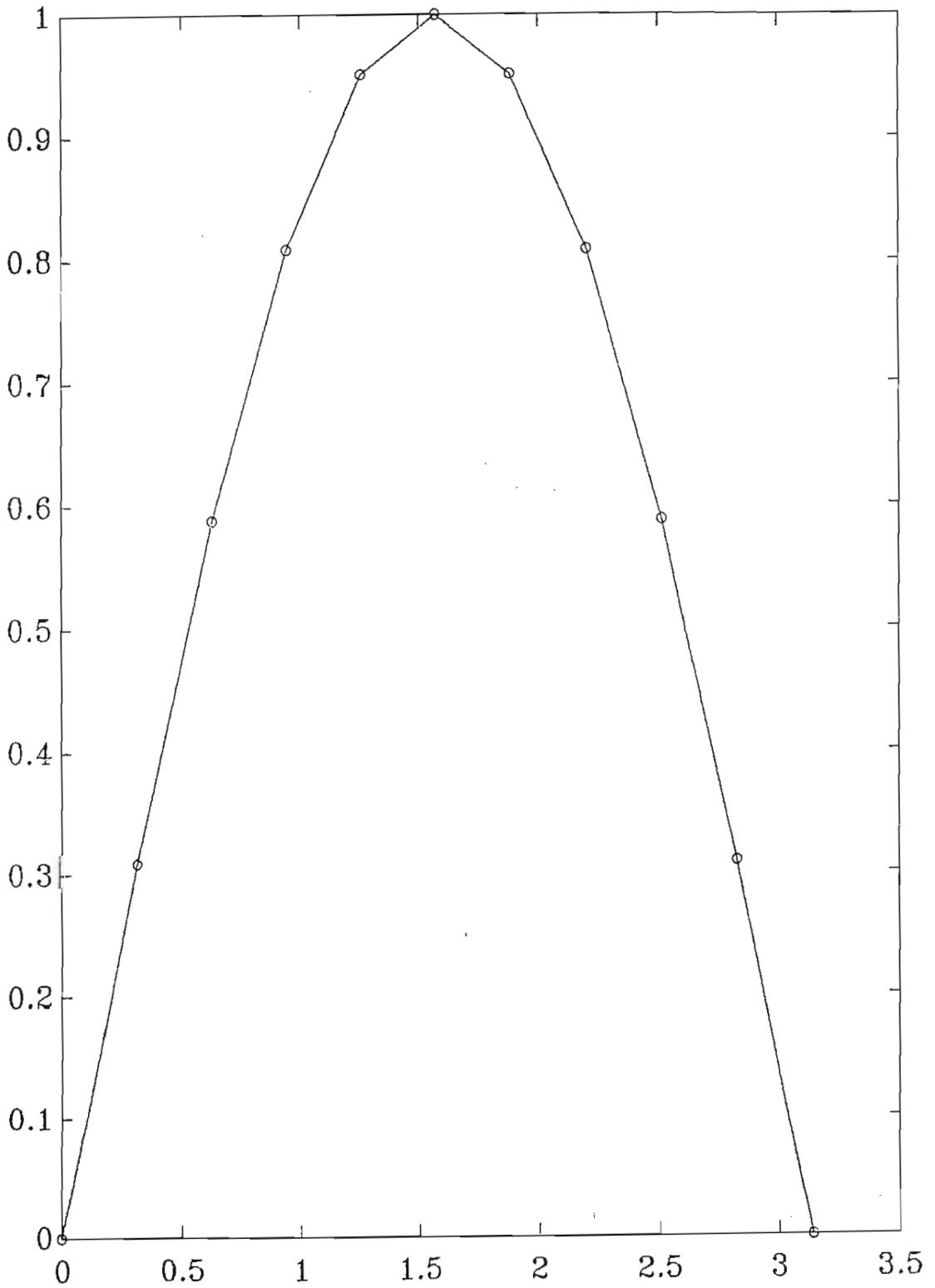


Fig. 5.46 Resultado del ajuste polinomial.

EJE X: RADIANTES

EJE Y: AMPLITUD

La figura 5.45 muestra los puntos resultantes de los vectores k y $x(k)$, y la figura 5.46 muestra el resultado del ajuste.

5.1.5.2. Interpolación.

La interpolación se realizó sobre el mismo semiciclo de la función SENO , tomando cada $\pi/11$ los puntos de interés para conocer los valores de la función en dichos valores de k' . Los resultados de la interpolación se muestran en la figura 5.47, donde el vector k' se definió como:

$$k = [0:\pi/11:\pi]$$

Los resultados de la interpolación se presentan en la tabla 5.2, donde los valores $\text{Sin}(k')$ son evaluados de la función seno (original).

vector k' (rad)	$\text{SENO}(k')$	Interpolación
0	0	0
0.2856	0.2817	0.2817
0.5712	0.5406	0.5406
0.8568	0.7558	0.7557
1.1424	0.9096	0.9096
1.428	0.9898	0.9898
1.7136	0.9898	0.9898
1.9992	0.9096	0.9096
2.2848	0.7557	0.7557
2.5704	0.5406	0.5406
2.856	0.2817	0.2817
3.1416	0	0

Tabla 5.2 Resultado de la interpolación.

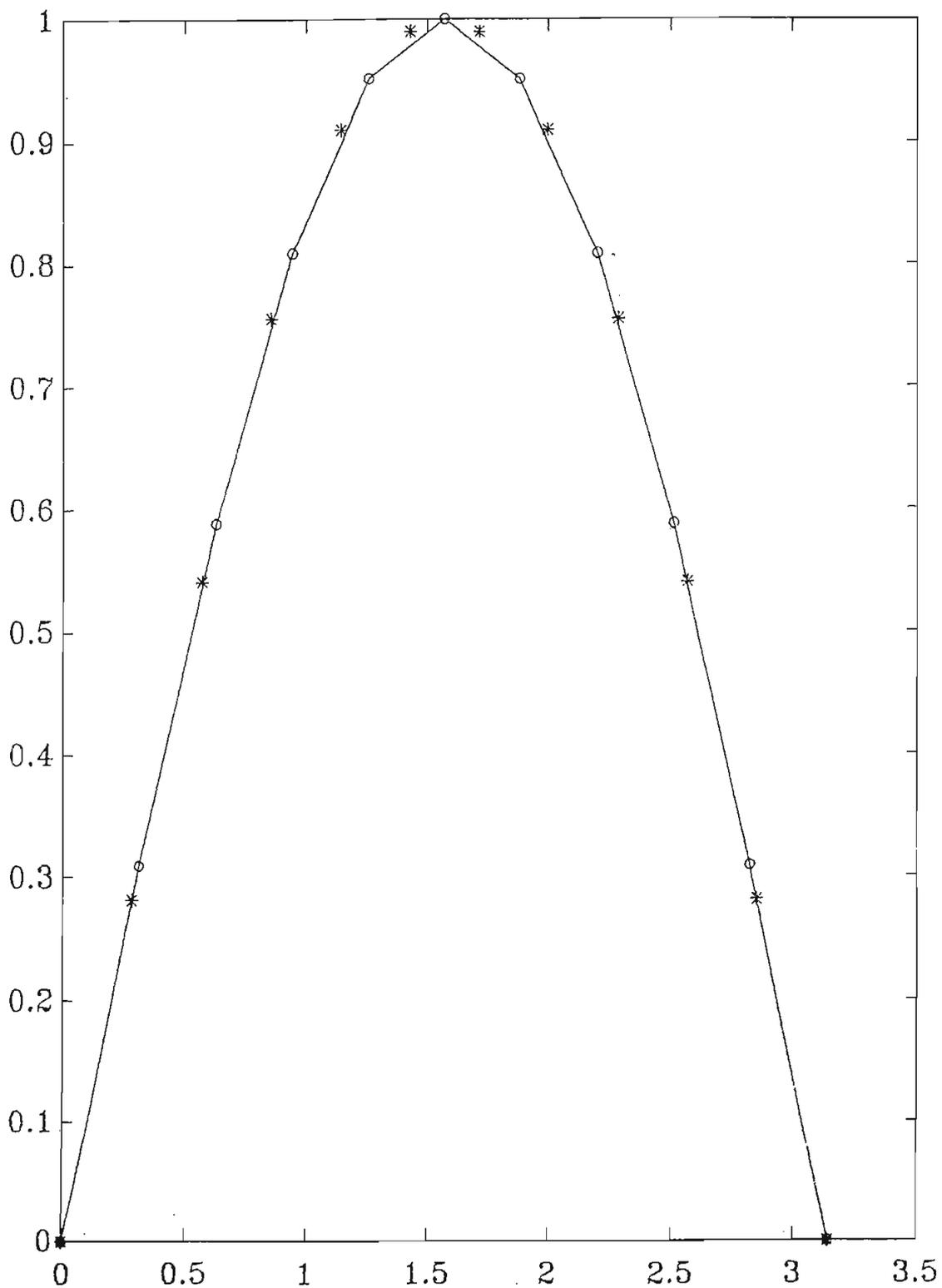


Fig. 5.47 Resultado de la interpolación (*).

EJE X: RADIANTES

EJE Y: AMPLITUD

5.1.5.3. Extrapolación.

La extrapolación se realizó sobre la misma función SENO , tomando cada $\pi/10$ los puntos de interés para conocer los valores de la función en dichos valores de k' . Los resultados de la extrapolación se muestran en la figura 5.48, donde el vector k' se definió como:

$$k = [\pi:\pi/10:2*\pi]$$

Los valores de la extrapolación se presentan en la tabla 5.3, donde los valores $\text{Sin}(k')$ son evaluados de la función seno (original).

vector k' (rad)	$\text{SENO}(k')$	Extrapolación
3.1416	0	0
3.4558	-0.3091	-0.309
3.7699	-0.5878	-0.5878
4.0841	-0.8090	-0.8091
4.3982	-0.9510	-0.9513
4.7124	-1	-1.001
5.0265	-0.9511	-0.9544
5.3407	-0.8090	-0.8193
5.6549	-0.5878	-0.616
5.969	-0.3090	-0.3803
6.2832	0	-0.1672

Tabla 5.3 Resultado de la extrapolación.

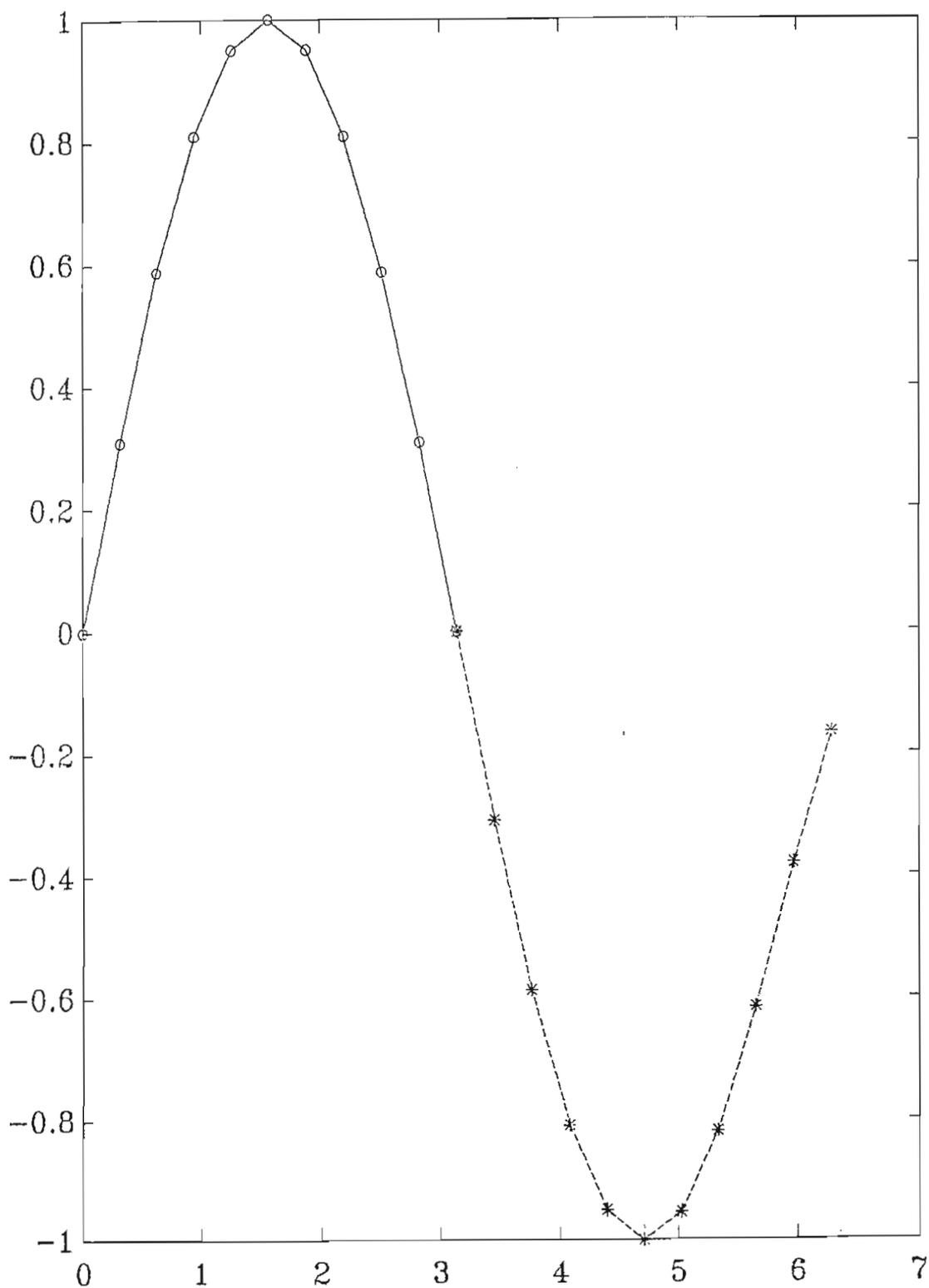


Fig. 5.48 Resultado de la extrapolación (*).

EJE X: RADIANTES

EJE Y: AMPLITUD

5.1.6. RELACION ENTRE UN FILTRO DIGITAL Y UNO ANALOGO.

Si se toma en cuenta una red RC como la que se muestra en la figura 5.49, la descripción de ella como un sistema dinámico continuo en el tiempo, en términos de una ecuación diferencial, donde "x", "y" representan los voltajes de entrada y salida; se tiene:

$$RC \frac{dy}{dt} + y = x \quad (5.2)$$

Si se transforma esta ecuación diferencial en su equivalente discreta, se tiene la siguiente ecuación en diferencias que representa al filtro digital de la figura 5.50:

$$y(k) = a_0 \cdot x(k) + b_1 \cdot y(k-1) \quad (5.3)$$

La ecuación (5.3) representa a un filtro recursivo, donde los coeficientes a_0 y b_1 son los coeficientes del filtro que dependen de la constante RC y del período de muestreo que se utilice para discretizar las señales. [8]

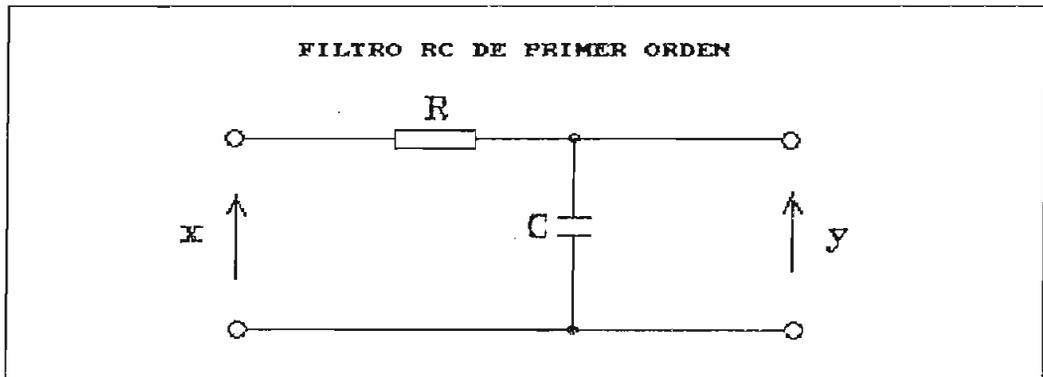


Fig. 5.49 Filtro RC de primer orden.

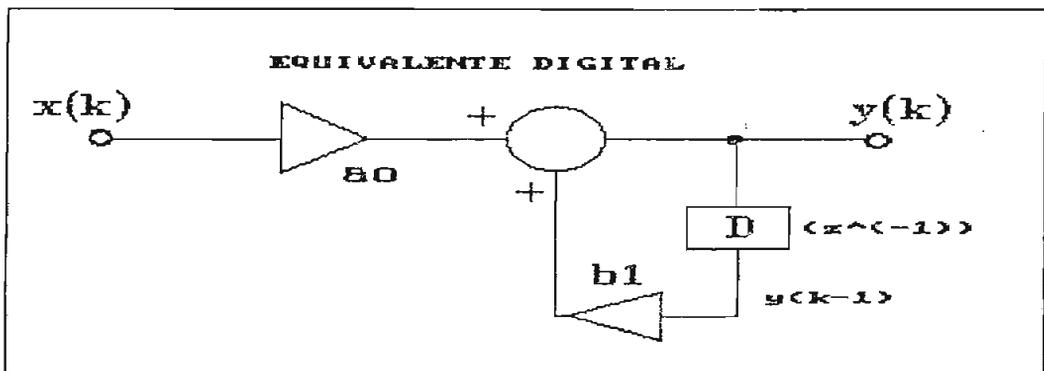


Fig. 5.50 Equivalente digital del filtro RC continuo.

5.1.7. VARIACION DEL NUMERO DE PUNTOS DE LA TDF EN EL CALCULO DE UN ESPECTRO.

Como se vió en el capítulo III, al variar el número de puntos de una TDF, se varía el ancho y el largo de su lóbulo principal y se disminuye o se agranda a los lóbulos laterales en la respuesta de frecuencia. En la figura 5.51 se muestra un gráfico de la densidad espectral de potencia de una señal con una TDF de 32 puntos. Como se puede observar en este gráfico, el espesor del lóbulo principal es muy extenso, en relación al gráfico de la densidad espectral de potencia de la misma señal; pero, con la TDF de 2048 puntos, como se muestra en la figura 5.52 se mejora el espectro el cual prácticamente no presenta lóbulos laterales y el ancho y alto del lóbulo principal han disminuido y aumentado respectivamente.

Mediante los gráficos 5.51 y 5.52 se puede apreciar claramente el efecto que produce la variación del número de puntos de la TDF; se ha utilizado para el efecto la función $\text{SIN}(2*\pi*60*t)$, con una frecuencia de muestreo de 400 Hz.

5.2. CONCLUSIONES.

En este numeral, se presentan las distintas conclusiones a las que se ha llegado a lo largo del desarrollo de la tesis, por los resultados obtenidos y el contexto de la misma.

Primeramente, se puede decir que los resultados del software implementado, aprovechando la amplia base algorítmica del paquete MATLAB, son satisfactorios ya que permiten cumplir con las especificaciones y necesidades de diseño, y el módulo proporciona una herramienta válida de análisis, estudio y comprensión de los distintos métodos del procesamiento digital de señales.

La gran variedad de métodos que posee el Tool Box de procesamiento digital de señales del MATLAB, en temas como

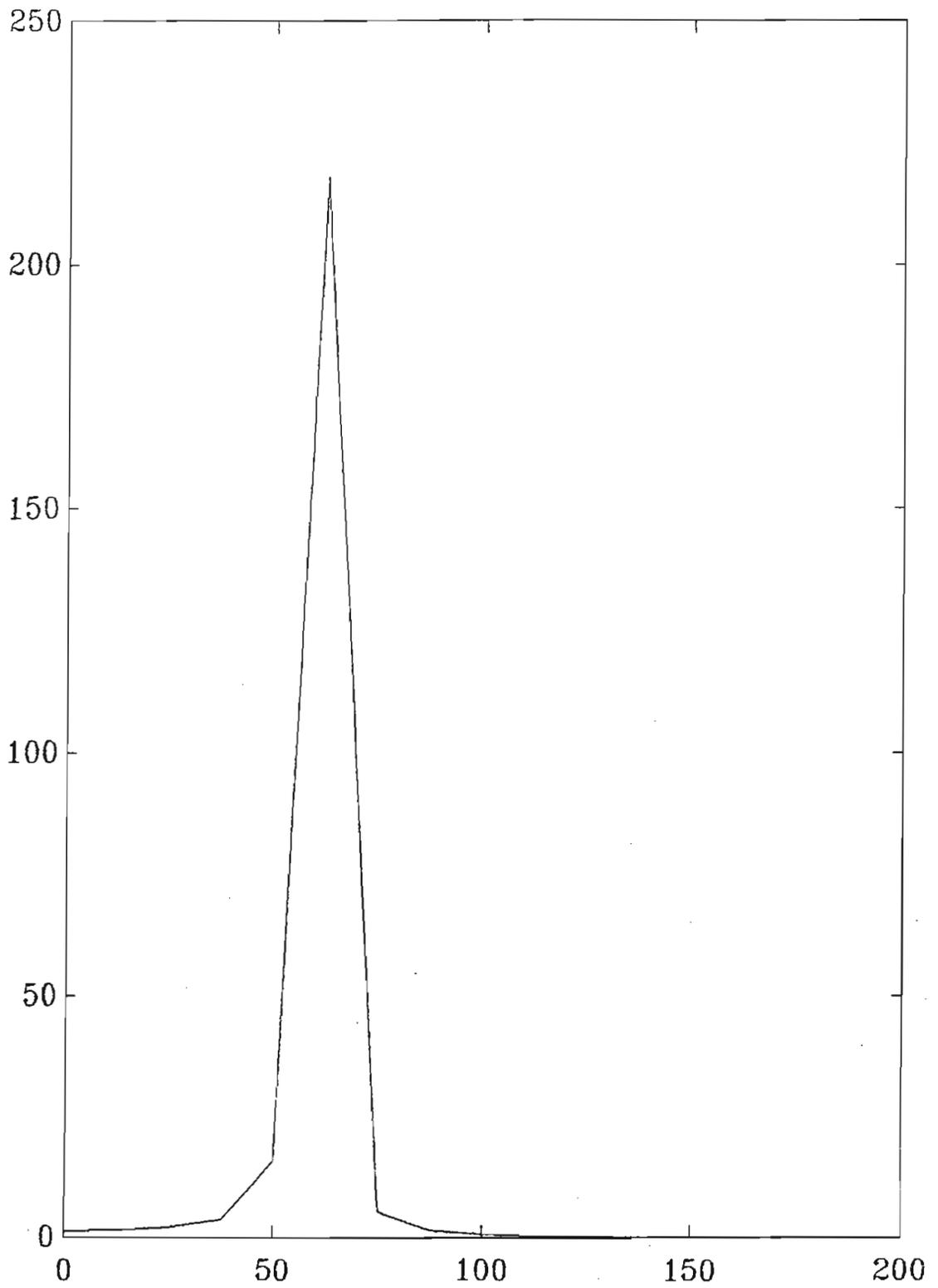


Fig. 5.51 Espectro de densidad de potencia con 32 puntos de la TDF.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)
EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

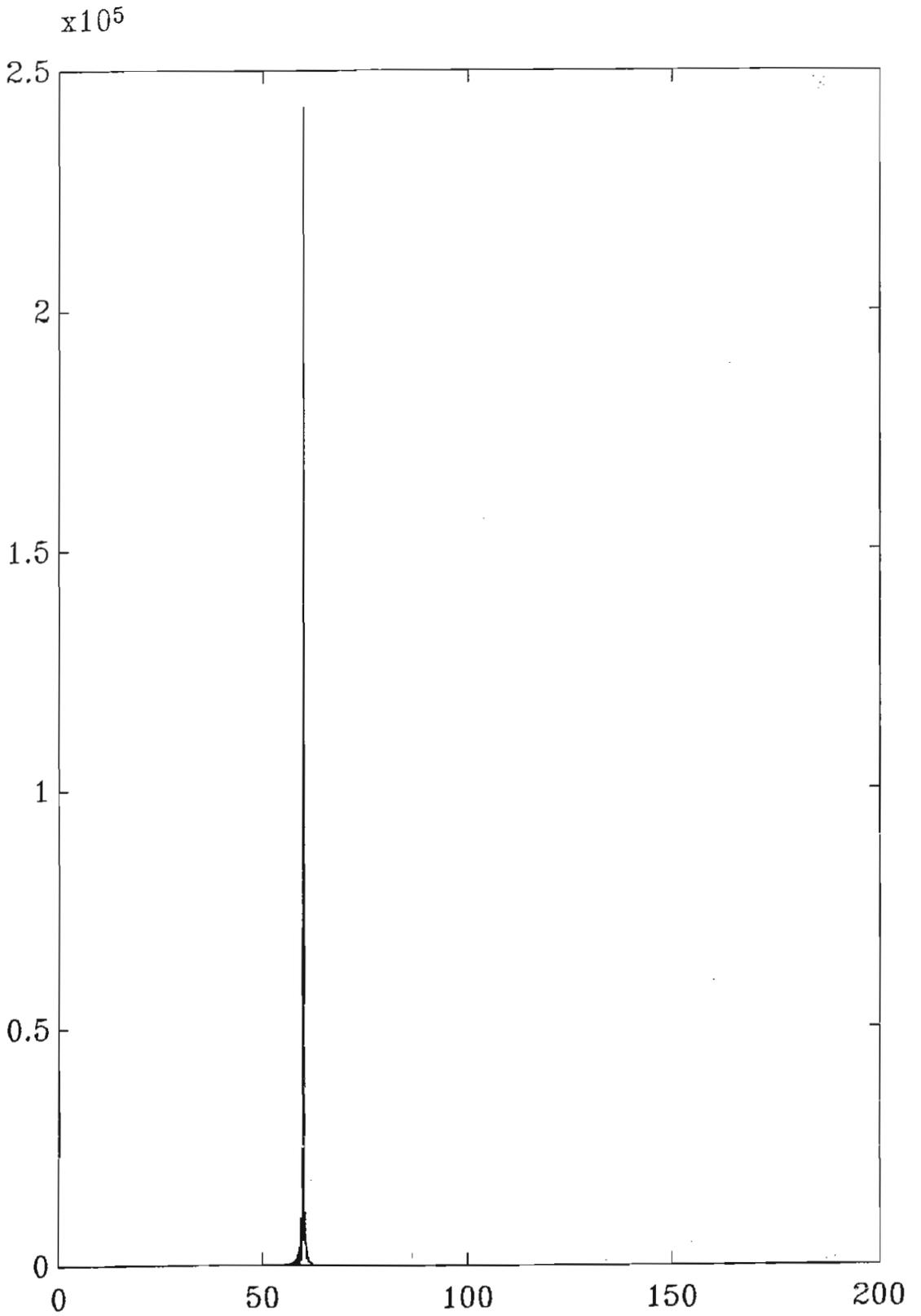


Fig. 5.52 Espectro de densidad de potencia de 2048 puntos de la TDF.

EJE X: FRECUENCIA (Hz)
EJE Y: MAGNITUD DEL ESPECTRO

el diseño de filtros digitales, y el filtrado de señales, ofrece un amplio campo de desarrollo y aplicación.

El desarrollo de rutinas que realicen un cierto trabajo, dentro del medio ambiente del MATLAB, requiere de conocimientos básicos de programación, ya que el MATLAB como paquete posee como los lenguajes de programación, sus propios comandos y similitud en sus estructuras de decisión, lazos de repetición, etc., con la gran ventaja de que ofrece una manipulación de sus algoritmos o rutinas propias para el desarrollo de nuevo software; esto es, para el desarrollo de nuevos "módulos" que utilicen las bondades de su base algorítmica. Es así que surgió en este caso el módulo PDS (Procesamiento Digital de Señales), el cual utilizando rutinas propias del MATLAB y rutinas creadas proporciona una gran herramienta en adiestramiento o introducción al procesamiento digital, de un usuario que posea conocimiento o no sobre este tema, respectivamente.

Se ha hecho lo posible en implementar éste módulo lo más amigable que se pueda hacia el usuario, colocándose tutoriales en todas las rutinas y ejemplos en muchas de ellas, que guíen a una persona que posea o no un conocimiento profundo del tema.

Como conclusiones generales del presente trabajo, se puede citar las siguientes:

- Se tiene la opción de simular plantas de primero y segundo orden con y sin retardo a entradas paso o escalón, o una entrada cualquiera definida por el usuario, con el fin de observar su respuesta y la manera en la que afecta a la señal de salida la introducción de una señal contaminante de ruido (fenómeno que se puede dar al monitorear una señal de interés de un proceso cualquiera que se quiera instrumentar, por ejemplo).

- En el análisis espectral se tiene la posibilidad de estudiar ya sea la señal contaminada de la planta simulada

en el punto anterior, o definir una señal de interés. Los resultados son muy prácticos, en cuanto al uso de esta técnica como herramienta de análisis de una señal y a una mejor comprensión del tema.

- La TDF es ampliamente usada para transformar datos desde el dominio del tiempo al dominio de la frecuencia; la TDIF realiza la transformada inversa. Con la TDF se puede calcular directamente la respuesta de frecuencia de un filtro desde su respuesta impulso y viceversa. Muchas veces es más conveniente conocer la respuesta de frecuencia que la respuesta impulso. La TDF también se utiliza para ordenar las componentes de frecuencia (espectro), pero depende de la longitud de la TDF (finita), por lo cual se pueden producir pérdidas espectrales, lo cual puede controlarse por medio de ventanas, o aumentando el número de puntos para el cálculo.

- La TRF realiza los mismos cálculos matemáticos que la TDF, pero de una manera más eficiente, es así que una TRF de N puntos requiere $N \cdot \log_2 N$ multiplicaciones y adiciones, en comparación a las N^2 operaciones demandadas por la TDF. El inconveniente de la TRF es que necesita un número de puntos de potencias de 2, pero se puede realizar un llenado de ceros para terminar una secuencia de datos para alcanzar a la potencia de 2 más cercana.

- Mediante el diseño de filtros, se puede visualizar de una mejor forma su utilidad y las distintas aplicaciones que se podrían dar, como las que se han observado, que son descontaminación de ruido de una señal, y eliminación de componentes de frecuencia indeseables en una señal cualquiera.

- La respuesta de frecuencia de un filtro digital es la caracterización más útil del mismo, ya que con ella se puede deducir si el filtro presentará una amplificación o una atenuación de las señales de entrada al mismo, y en ciertos casos se puede manejar la ganancia de la respuesta de frecuencia para corregir cualquiera de éstos fenómenos.

También se ha comprobado que se consigue una mejor aproximación a la respuesta de frecuencia deseada de un filtro, cuando se calculan más coeficientes, es decir cuando se aumenta el orden del filtro.

- Se ha observado las consecuencias indeseables de truncar filtros digitales de longitud infinita, las cuales son el producir un rizado y ensanchar la región de transición. Con el fin de atenuar estos efectos negativos, se estudia varios tipos de ventanas, entre las cuales se tiene las de Hamming, Hanning, Kaiser como las más importantes.

- La modelación polinomial de señales digitales, permite el ajuste de datos digitales a un modelo polinómico continuo en el tiempo, lo que posibilita realizar aplicaciones como interpolación y extrapolación de los datos digitales originales, así como también la factibilidad de realizar diferenciación o integración del modelo polinómico, que no se podría realizar directamente sobre el modelo digital por sus discontinuidades.

- La modelación polinomial de datos digitales constituye un puente entre las señales análogas y las digitales, ya que se pueden reemplazar datos digitales con modelos continuos. Esta herramienta es muy útil para el procesamiento digital de señales, siempre y cuando los datos digitales representen una curva suavizada y no abrupta.

En cuanto a los resultados obtenidos en el numeral anterior, se puede concluir, específicamente, en orden al desarrollo del mismo lo siguiente:

- En los gráficos de densidad espectral se puede observar que la señal PRBS no posee un espectro que represente una buena aproximación al ruido blanco, ya que tiene concentración de espectro a bajas frecuencias, disminuyendo éste a medida que aumenta la frecuencia. En cambio, el espectro de ruido con distribución normal y uniforme, sí es una buena aproximación al ruido blanco, ya que posee, como

se pudo observar, espectro en todas las frecuencias.

- De los filtros recursivos diseñados, se puede observar que el elíptico posee la ventaja de una región de transición muy estrecha, a cambio de presentar rizados en las bandas de paso y de bloqueo, por lo que se lo puede aplicar en transmisión de datos binarios mediante la red eléctrica.

El filtro de Butterworth posee en cambio la ventaja de no poseer rizado en ninguna de las dos bandas (paso y bloqueo) pero también tiene una región de transición más amplia que el elíptico. Por lo tanto, la aplicación del filtro de Butterworth se puede observar en procesos donde no se puede tolerar rizados, como es el caso de instrumentación biomédica.

El filtro elíptico, es el que mejores características posee para filtros pasabajos de acuerdo a los resultados obtenidos anteriormente.

- En los filtros no recursivos, se concluye que el filtro que utiliza la ventana de Hamming es óptimo, debido a que su respuesta de frecuencia no posee prácticamente rizado y la región de transición es corta; y el filtro que utiliza la ventana de Kaiser es el más versátil, ya que como se vió, cuando su parámetro β varía, puede representar a los otros tipos de ventana, incluyendo la de Hamming ($\beta = 5.5$).

El filtro de Parks-McClellan posee rizados en las bandas de paso y de bloqueo, que son de igual amplitud en ambas bandas; pero posee la ventaja de poder realizar filtros multibanda. Este filtro, en los resultados obtenidos presenta las mejores características para aplicaciones de filtro pasabanda y multibanda.

- Se puede observar que los órdenes utilizados en los filtros recursivos y en los no recursivos son bastante diferentes entre sí, ya que en los recursivos un orden 10 es más que suficiente para satisfacer requerimientos exigentes;

en cambio los filtros no recursivos pueden ser diseñados con órdenes superiores a 100 para obtener mejores respuestas de frecuencia sin ningún problema. Si en los filtros recursivos se utilizan órdenes superiores a 30, debido a que la especificación de la región de transición es muy estrecha en el diseño del filtro, se pueden producir errores de "overflow" en el programa del MATLAB, lo cual produce que el programa termine abruptamente.

- Cuando se filtran señales contaminadas con ruido blanco, la frecuencia de corte debe bajarse a un valor cercano a cero (muy pequeño) para eliminar el ruido en forma satisfactoria. En ciertos casos, se puede mejorar la señal filtrada, utilizando el filtrado en cascada (por ejemplo con la contaminación de la señal PRBS), lo cual se logra filtrando la señal ya filtrada inicialmente, mediante otro filtro diseñado para el efecto.

- Existe la posibilidad de observar el nuevo espectro de la señal filtrada, directamente después de realizar el proceso de filtrado, para comprobar si en el nuevo espectro, no se encuentran las frecuencias que inicialmente se deseaban eliminar.

Como conclusión final, se puede decir que el módulo de procesamiento digital de señales PDS, a través del paquete MATLAB proporciona una herramienta muy útil para una mejor comprensión de los sistemas discretos que se estudian en Control Automático, pues permite ajuste polinomial a partir de ecuaciones de diferencias, se puede observar en la simulación de plantas, las respuestas con retardo de transporte utilizando el aproximante de Paddé, se puede analizar las señales de interés mediante el espectro de frecuencia y observar la estructura y comportamiento de filtros digitales. Con estos recursos se puede utilizar el módulo PDS para una práctica del laboratorio de Control Automático; y, obviamente en laboratorio de Instrumentación.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Enciclopedia de la Electrónica, Ingeniería y Técnica, Ed. Océano Centrum, Tomo IV, 1984.
- [2] Williams Charles, "Designing Digital Filters", Prentice-Hall, New Jersey, 1986.
- [3] DFDP, "Digital Filter Design Package", Review of Digital Filtering and User's Guide.
- [4] MATLAB User's Guide, "Tutorial, PC-MATLAB, Control Toolbox User's Guide".
- [5] McGillem Clare, Cooper George, "Continuous and Discrete Signal and System Analysis", HRW Series in Electrical Engineering, Electronics, and Systems, 1974.
- [6] Hewlett-Packard, "HP-28S PROGRAMS", Signal Processing.
- [7] Faulkenberry Lucas M., "Introducción a los Amplificadores Operacionales (Con aplicaciones a CI lineales)", Ed. Limusa, México D.F., 1990, p.p. 248-253.
- [8] Bozic Svetozar Mile, "Digital and Kalman filtering", Ed. Edward Arnold (Publishers) Ltd., Londres, 1981.
- [9] Franklin Gene F., Powell J. David, "Digital Control of Dynamic Systems", Addison-Wesley Publishing Company, Londres, 1980.
- [10] Oppenheim A. V., Schafer R. W., "Digital Signal Processing", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, USA.
- [11] Kaiser J. F., "Some Practical Considerations in the Realization of Linear Digital Filters", Allerton.

[12] Steiglitz K., "Computer-Aided Design of Recursive Digital Filters", IEEE Transactions on Audio Electroacoustic, Vol. AU-18, No. 2, p.p. 123-129.

[13] Friedlander B., Porat B., "The Modified Yule-Walker Method of ARMA Spectral Estimation", IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems, Vol. AES-20, No. 2, p.p. 158-173, Marzo 1984.

[14] Parks T.W., Burrus C. S., "Digital Filter Design", John Wiley and Sons, 1987, p. 226.

[15] IEEE Press, "Programs for Digital Signal Processing", John Wiley and Sons, 1979.

[16] IEEE Press, "Selected Papers in Digital Signal Processing, II", 1976, p. 97.