

S I N T E S I S   D E   O N D A S   P E R I O D I C A S  
N O   S I N U S O I D A L E S

Tesis previa a la obtención del título  
de Ingeniero en la especialización de  
Electrónica y Telecomunicaciones de la  
Escuela Politécnica Nacional

EFRAIN DEL PINO V.

QUITO

Julio de 1968

Certifico que este trabajo ha  
sido realizado en su totalidad  
por el Sr. Efraín del Pino V.

A handwritten signature in dark ink, appearing to read "Luis Silva E.", written over a horizontal line.

Ing. Luis Silva E.  
Consultor de Tesis

Quito, Julio de 1968

A MIS PADRES

P R O L O G O

El presente trabajo es el resultado de una idea sugerida por el Dr. Enrique Vélez, experto de UNESCO, quien durante su permanencia en el Ecuador y en cumplimiento de sus labores en la Escuela Politécnica Nacional intentó lograr experimentalmente la síntesis de ondas periódicas no sinusoidales de acuerdo con la teoría de Fourier.

La teoría de Fourier es de importancia fundamental en el estudio de la Ingeniería Eléctrica, pero al igual que muchas ramas de la Matemática adolece de demasiada abstracción. De ahí que muchas veces el estudiante de Ingeniería no llegue a comprender cabalmente el alcance de dicha teoría. Para él constituye entonces una ayuda muy valiosa la verificación experimental de los conceptos teóricos. Si bien es cierto que es relativamente fácil el analizar una onda periódica no sinusoidal, esto es, encontrar sus componentes individuales; el proceso inverso, o sea lograr la síntesis de una onda periódica no sinusoidal, conociendo cuáles deben ser sus componentes individuales de acuerdo con la teoría de Fourier ofrece algunas dificultades. En el presente trabajo he intentado sintetizar algunas formas de onda. Los resultados los expongo en forma de fotografías de oscilogramas que muestran las componentes individuales de cada onda y las ondas resultantes de sumas parciales correspondientes a cada serie

Para el logro de este trabajo he tenido a mi disposición todos los equipos de los laboratorios de Electrónica de la Escuela Politécnica Nacional. Así mismo he dispuesto de toda la bibliografía concerniente a través de la Biblioteca de dicha Institución y para los trabajos de fotografía, el laboratorio correspondiente en la Facultad de Ingeniería Química. Por estos motivos deseo manifestar mi agradecimiento más profundo a la Escuela Politécnica en la persona de su digno Rector, Ing. Rubén Orellana.

Así mismo deseo agradecer a los miembros del Departamento de Electrónica, Control y Comunicaciones de la Escuela: Sr. Ing. Luis Silva E., consultor de tesis, Sr. Ing. Marco Hurtado y Srs. Mario Cevallos, Nelson Díaz y Mario Cuesta por la invalorable ayuda y estímulo que siempre me han brindado.

Efraín del Pino

Quito, Julio de 1968

I N D I C E   G E N E R A L

	Página
PROLOGO	IV
INTRODUCCION	1
<u>Capítulo Primero:</u> LAS SERIES DE FOURIER	7
1.1   La Motivación del Problema.	8
1.2   Desarrollo de una Función en Forma de una Serie Trigonométrica.	17
1.3   Demostración de la Convergencia de las Series de Fourier para Funciones que Satisfagan las Condiciones de Dirichlet.	21
1.4   Desarrollo de Funciones con Período Arbitrario.	30
1.5   Simplificación del Desarrollo de Fourier para Funciones Pares e Impares.	31
1.6   Desarrollo en Serie de Fourier de Algunas Funciones Periódicas.	33
<u>Capítulo Segundo:</u> GENERACION DE COMPONENTES	38
2.1   Generalidades.	39
2.2   Principios Básicos de un Oscilador.	40

2.3	El Oscilador con Red R-C en Cascada.	43
2.4	El Oscilador "Puente de Wien".	45
2.5	Control de Amplitud y de Frecuencia.	48

Capítulo Tercero: SINCRONIZACION Y CONTROL DE

	FASE	50
3.1	Introducción.	51
3.2	Sincronización de Generadores R-C.	52
3.3	Medición de la Relación de Frecuencias. Figuras de Lissajous.	56
3.4	Corrección del Angulo de Fase.	60

Capítulo Cuarto: SINTESIS DE SUMAS PARCIALES DE

	SERIES DE FOURIER	67
4.1	Exposición del Problema.	68
4.2	Amplificadores Operacionales.	69
4.3	Obtención de la Frecuencia Fundamental y de Armónicas.	73

Capítulo Quinto: RESULTADOS FINALES DEL EXPERI-

	MENTO Y CONCLUSIONES	75
5.1	Generalidades.	76

5.2	Síntesis Experimental de una Onda Triangular.	76
5.3	Síntesis Experimental de una Onda Cuadrada.	81
5.4	Síntesis Experimental de una Sinusoide Rectificada en Media Onda.	83
5.5	Síntesis Experimental de una Sinusoide Rectificada en Onda Completa.	86
5.6	Conclusiones.	89
BIBLIOGRAFIA		91

I N T R O D U C C I O N

La teoría de Fourier, que en realidad constituye un capítulo bastante amplio de la Matemática Pura y Aplicada, nació al intentar la solución de algunos problemas físicos descritos matemáticamente como ecuaciones diferenciales parciales, sujetas a condiciones de contorno. Para el presente trabajo consideraré sin embargo solamente lo concerniente a las denominadas series de Fourier. De acuerdo con la teoría de estas series, cualquier función periódica que satisfaga condiciones determinadas puede ser expresada en forma de una serie trigonométrica, esto es, que sus términos sean funciones seno o coseno.

Empiezo el presente trabajo dando en el primer capítulo la base matemática de las series de Fourier, esto es, la motivación del problema, el desarrollo propiamente dicho de las series, una justificación de condiciones suficientes que una función periódica debe cumplir para poder ser descrita en forma de una serie de Fourier y finalmente expongo el desarrollo de algunas series de ondas usualmente encontradas en problemas de Ingeniería Eléctrica, la síntesis de algunas de las cuales constituirá el resto del trabajo. No pretendo en este desarrollo utilizar el rigor de la Matemática Pura, ya que eso constituiría por si solo material suficiente para algunos tratados. Así por ejemplo no entro en consideracio-

nes respecto de las condiciones necesarias que una función periódica debe poseer para poder ser desarrollada en una serie de Fourier. Unicamente expongo la base matemática necesaria para la comprensión y valoración correctas del resto del trabajo.

Como mencioné anteriormente, una serie de Fourier está constituida por términos que son funciones seno o coseno, de ahí que para lograr la síntesis experimental de una serie de este tipo, el primer paso será el obtener funciones sinusoidales representables físicamente. De las diferentes posibilidades para conseguir este propósito, quizá la más cómoda y flexible sea la utilización de señales sinusoidales eléctricas, que pueden ser visualizadas y medidas cuantitativamente en un osciloscopio. Por comodidad he escogido el rango de frecuencias en el orden de kilociclos, las cuales pueden ser logradas fácilmente con generadores R-C. En el segundo capítulo describo brevemente la generación de éstas señales. Hubiese sido de mi agrado el construir los generadores necesarios, pero por dificultades debidas a la falta de componentes especiales no me fué posible, y entonces he recurrido a la utilización de los generadores disponibles en el laboratorio.

Cada uno de los términos de la serie tiene que estar en una relación fija de fase con respecto al primer término. Si bien es cierto que la generación de señales no constituye un problema muy difícil, la sincronización de dos generadores, o más aún de un número mayor de ellos, ofrece algunos problemas, la solución de los cuales me ha exigido algunos meses de trabajo experimental. Los métodos empleados los expongo en el tercer capítulo.

Disponiendo ya de señales sinusoidales de frecuencias y amplitudes adecuadas y además sincronizadas en el tiempo, o sea disponiendo de algunos términos de una serie, solamente restaría para la sintetización de la misma, el sumar dichos términos. Esto lo he llevado a cabo utilizando amplificadores operacionales dispuestos para la operación de suma. En el cuarto capítulo expongo brevemente la teoría del funcionamiento de dichos amplificadores y describo con algún detalle todo el montaje experimental que fué necesario para llevar a cabo la síntesis de algunas ondas. Especial énfasis he puesto en la descripción de los métodos empleados para lograr la sincronización de señales, lo cual lo ilustro con oscilogramas de figuras de Lissajous que muestran la relación de frecuencia y

la estabilidad de fase. Esto último se puede apreciar claramente ya que los oscilogramas indicaban una figura estable durante algunos minutos y en algunos casos, durante algunas horas. De esta manera no tuve mayores dificultades para la realización de las fotografías de dichos oscilogramas. Me permito en este punto felicitar al laboratorio de Electrónica por sus magníficos osciloscopios que facilitaron enormemente la realización de este trabajo, esto es, la observación simultánea de algunas señales. En dos fotografías doy una idea del montaje experimental realizado.

Como se puede comprender fácilmente, es imposible la síntesis exacta de una serie, puesto que ésta posee términos en un número infinito. Lo que he logrado con mi experimento es solamente sintetizar sumas parciales de algunas series. He escogido la correspondiente a una onda triangular porque debido a su rápida convergencia permite apreciar su forma con bastante exactitud requiriendo para ello solamente de pocos términos. Luego he realizado la síntesis de una onda cuadrada, que a pesar de ser lentamente convergente, pertenece a la clase de funciones denominadas continuas seccionalmente y permite apreciar claramente el hecho que una serie de Fourier de una función que tenga puntos de discontinuidad, da como resul-

tado la semi-suma de los límites de los valores laterales de la función en dicho punto. Sin embargo, a pesar de haber utilizado pocos términos, se puede apreciar la aproximación de esta suma parcial a la onda verdadera. Finalmente he realizado síntesis de sumas parciales de ondas sinusoidales rectificadas en media onda y en onda completa por parecerme que este tipo de ondas tiene una importancia particular para los problemas de Ingeniería Eléctrica. Con el análisis de Fourier de estas dos últimas formas de onda es por ejemplo posible una comprensión más objetiva del proceso de rectificación de una señal de corriente alterna.

He fotografiado los oscilogramas que muestran las componentes individuales y las diferentes sumas parciales de cada una de las cuatro formas de onda indicadas anteriormente. Estas fotografías las expongo en el quinto capítulo y constituyen la muestra objetiva de todo el trabajo llevado a cabo en este experimento.

CAPITULO PRIMERO

LAS SERIES DE FOURIER

## 1.1 La Motivación del Problema:

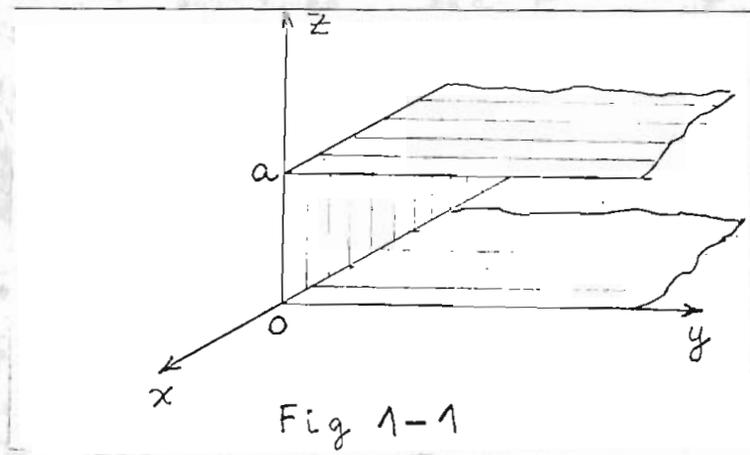
Como mencioné en la introducción, muchos problemas físicos quedan descritos matemáticamente en forma de ecuaciones diferenciales parciales. Me referiré concretamente a la determinación del potencial eléctrico existente en la región del espacio definida por una cierta configuración de electrodos sujetos a potenciales constantes. Si en esa región no existen cargas eléctricas, dicho potencial debe ser una solución de la ecuación diferencial de Laplace:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (1-1)$$

Donde  $\nabla^2$  representa el operador de Laplace que puede ser escrito explícitamente en cualquier sistema de coordenadas y equivale a la operación vectorial divergencia del gradiente. Este operador aplicado al potencial eléctrico  $V$  debe ser igual a cero. Existen infinitas funciones que satisfacen esta ecuación, lo cual está de acuerdo con el hecho físico que existen infinitas configuraciones posibles de electrodos. Para una configuración particular hay que especificar entonces las llamadas "condiciones de contorno".

Escojeré el problema de la determinación del campo

eléctrico existente entre dos planos paralelos de extensión semi-infinita sujetos a un potencial cero y un tercer plano perpendicular a los dos anteriores. Refiriendo lo anterior a un sistema de coordenadas cartesianas rectangulares, según la figura 1-1



Sea el un plano:  $z = 0; y \geq 0$  . Con un potencial:

$$V(x,y,0) = 0 \quad (1-2)$$

El otro plano:  $z = a; y \geq 0$  . Con un potencial:

$$V(x,y,a) = 0 \quad (1-3)$$

El plano perpendicular a los dos anteriores sea:

$y = 0; 0 \leq z \leq a$  . Con un potencial:

$$V = f(z) \quad (1-4)$$

Donde por el momento  $f(z)$  representa una función arbitraria.

La consideración física del potencial  $V$  a determinarse impone que éste sea acotado, esto es, que al extenderse en el espacio indefinidamente en dirección " $x$ " o " $y$ ", el potencial debe permanecer finito.

Se puede ver que el potencial es independiente de la coordenada " $x$ ", entonces el problema a solucionarse constituye la resolución de la ecuación 1-1 en el sistema de coordenadas rectangulares, con coordenadas  $y, z$ , o sea:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0 \quad (1-5)$$

sujeta a las condiciones especificadas en las ecuaciones 1-2, 1-3, 1-4 y además que el potencial sea acotado.

Se puede resolver la ecuación 1-5 por el método de separación de variables o también denominado método del producto. Asumamos que el potencial  $V(y, z)$  sea expresado como el producto de dos funciones: cada una de las cuales dependa solamente de " $y$ " o solamente de " $z$ ".

$$V(y, z) = F(y) G(z) \quad (1-6)$$

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{d y^2} = -p \quad (1-11)$$

Donde  $p$  es por el momento una constante indeterminada, esto es, que puede ser cero, mayor que cero o menor que cero. Como se ve, se ha logrado transformar el problema de la ecuación 1-5 al de la resolución de dos ecuaciones diferenciales ordinarias.

Supongamos que  $p = 0$ . Entonces de la ecuación 1-10 se tiene:

$$\frac{d^2 G}{d z^2} = 0 \quad (1-12)$$

Una doble integración de esta ecuación da como resultado:

$$G = Az + B \quad (1-13)$$

La condición expresada en la ecuación 1-2 exige que la constante  $B = 0$ , con lo cual:

$$G = Az \quad (1-14)$$

Que con la condición expresada en la ecuación 1-3 resulta  $A = 0$ , o sea que la función  $G$  es idénticamente nula, o sea que la posibilidad de que  $p$  sea igual a cero trae como consecuencia la solución trivial  $V \equiv 0$

Consideremos ahora la posibilidad que  $p$  sea mayor que cero, sea:  $p = h^2$ , entonces la ecuación 1-10 queda:

$$\frac{d^2 G}{dz^2} = h^2 G \quad (1-15)$$

Esta ecuación tiene como solución general:

$$G = M e^{hz} + N e^{-hz} \quad (1-16)$$

La condición de la ecuación 1-2, esto es que  $V$  tiene que ser igual a cero para todo valor de  $z$ , exige que:

$$N = -M \quad (1-17)$$

Con lo cual la ecuación 1-16 queda:

$$G(z) = M (e^{hz} - e^{-hz}) = 2M \operatorname{senh} hz \quad (1-18)$$

La condición expresada en la ecuación 1-3, esto es que el potencial  $V$  tiene que ser igual a cero cuando  $z$  es igual a " $a$ " para todo valor de  $y$ , exige que:

$$0 = 2M \operatorname{senh} ha \quad (1-19)$$

De donde resulta que la constante  $M$  tiene que ser cero, pero según la ecuación 1-17, resulta que  $N$  también tiene que ser cero, o sea que se obtiene al igual que en el caso anterior la misma solución trivial  $V \equiv 0$ . Queda por lo tanto única-

mente la posibilidad que la constante  $p$  sea un número negativo, digamos  $p = -k^2$ . Entonces la ecuación 1-10 queda:

$$\frac{d^2 G}{dz^2} = -k^2 G \quad (1-20)$$

Que tiene como solución general:

$$G = C_1 \operatorname{sen} kz + C_2 \operatorname{cos} kz \quad (1-21)$$

La condición de la ecuación 1-2 exige que la constante  $C_2$  sea cero. Con la condición de la ecuación 1-3 se tiene entonces:

$$0 = C_1 \operatorname{sen} ka \quad (1-22)$$

A fin de obtener una solución distinta de  $V \equiv 0$ , tiene que cumplirse entonces que:

$$\operatorname{sen} ka = 0 \quad (1-23)$$

Para que esto se cumpla es necesario que:

$$ka = m\pi ; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1-24)$$

O sea:

$$k = \frac{m\pi}{a} \quad (1-25)$$

De modo que la solución para la función  $G(z)$  es:

$$G(z) = C_1 \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} z ; \quad m = 1, 2, 3, \dots \quad (1-26)$$

Queda ahora por determinarse la función  $F(y)$  . Según la ecuación 1-11 se tiene:

$$\frac{d^2 F}{dy^2} = -p = k^2 = \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 = \lambda_m^2 \quad (1-27)$$

Llamando  $\frac{m\pi}{a} = \lambda_m$

La solución de la ecuación 1-27 es:

$$F = B_1 e^{-\lambda_m y} + B_2 e^{\lambda_m y} \quad (1-28)$$

La consideración física que el potencial tiene que ser acotado exige que la constante  $B_2$  sea cero ya que de lo contrario al extenderse indefinidamente en dirección "y" la función  $F$  y por lo tanto el potencial crecerían también indefinidamente. De este modo se obtienen infinitas soluciones para el potencial  $V$  . Según las ecuaciones 1-6, 1-26, y 1-28:

$$V_m(y, z) = C_m e^{-\lambda_m y} \sin \frac{m\pi}{a} z \quad (1-29)$$

que satisfacen la ecuación de Laplace, las condiciones de contorno expresadas en las ecuaciones 1-2 y 1-3 y la condición que  $V$  sea acotado. Queda sin embargo por satisfacerse la condición de contorno 1-4, a saber que para  $y = 0$ , el potencial  $V$  tiene que ser una función arbitraria de  $z$ :

$$f(z) = C \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} z \quad (1-30)$$

Este último requisito sólo puede satisfacerse si la función  $f(z)$  es una función sinusoidal. Por ejemplo:

$$f(z) = 3 \operatorname{sen} bz \quad (1-31)$$

Sin embargo la realidad física del problema no permite esta limitación en cuanto a la función  $f(z)$ . Cabe entonces hacer el siguiente raciocinio que puesto que la ecuación 1-29 es una solución para cada valor de  $m$ , una suma de dichas soluciones también es solución, ya que la ecuación de Laplace es una ecuación lineal. Ahora bien,  $m$  puede tomar todos los valores enteros desde uno hasta infinito. Entonces la solución más general será:

$$V(y, z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m e^{-\lambda_m y} \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} z \quad (1-32)$$

De esta manera se puede cumplir con la condición de contorno de la ecuación 1-4:

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} C_m \operatorname{sen} \frac{m\pi}{a} z \quad (1-33)$$

Este último resultado constituiría el desarrollo de la función arbitraria  $f(z)$   $0 \leq z \leq a$  en forma de una serie

cuyos términos son funciones sinusoidales.

En problemas análogos al expuesto se obtiene que la función  $f(z)$  quedaría desarrollada en forma de una serie cuyos términos serían funciones seno y coseno. Esto indujo a Fourier a desarrollar su famosa teoría, empezando con el problema del desarrollo de una función en forma de una serie trigonométrica. Cabe aquí indicar, haciendo referencia al problema expuesto, que esta función arbitraria  $f(z)$  solamente está definida en el intervalo  $0 \leq z \leq a$ . Sin embargo, el problema hubiese sido idéntico si se hubiese considerado el intervalo  $a \leq z \leq 2a$ , etc. De modo que se puede pensar en la función  $f(z)$ , como definida para todo valor de "z", pero con la propiedad de periodicidad, con período "a". Del desarrollo de una función en una serie trigonométrica se tratará en lo que continúa.

## 1.2 Desarrollo de una Función en Forma de una Serie Trigonométrica

Sea por el momento  $f(x)$  una función definida en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$  y tal que:  $f(x) = f(x + 2\pi)$ . Asumamos que esta función admita un desarrollo en forma de una

serie trigonométrica, a saber:

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1-34)$$

y determinemos los coeficientes  $a_0$ ,  $a_n$ , y  $b_n$ . Para esto

recordemos que:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases} \quad (1-35)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \begin{cases} 0 & n \neq m \\ \pi & n = m \end{cases} \quad (1-36)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos nx \, dx = 0 \quad (1-37)$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, dx = 0 \quad (1-38)$$

Integremos los dos miembros de la ecuación 1-34 desde  $-\pi$

hasta  $\pi$  y teniendo presente las ecuaciones 1-38 se obtiene:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} a_0 dx = 2\pi a_0 \quad (1-39)$$

De donde:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (1-40)$$

Multipliquemos los dos miembros de la ecuación 1-34 por  $\cos mx$ , donde  $m$  es por el momento un número entero positivo fijo, e integremos los dos miembros desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ .

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx &= a_0 \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \cos mx dx \right) \end{aligned} \quad (1-41)$$

Teniendo presente las ecuaciones 1-35, 1-37 y 1-38 resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx dx = a_m \pi \quad (1-42)$$

De donde:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx \quad (1-43)$$

De una manera análoga, para la determinación de los coeficientes  $b_n$ , multipliquemos los dos miembros de la ecuación 1-34 por  $\sin mx$  e integremos desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ , con lo cual

tuye un capítulo muy profundo de la Matemática Teórica. Sin embargo es relativamente fácil establecer condiciones suficientes, las así llamadas condiciones de Dirichlet. Felizmente la mayoría, por no decir la totalidad, de las funciones periódicas que ocurren en problemas de ingeniería satisfacen estas condiciones.

1.3  Demostración de la Convergencia de las Series de Fourier para Funciones que satisfagan las Condiciones de Dirichlet.

Sea  $F(x)$  definida en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , con periodicidad  $2\pi$  y además tal que  $F(x)$  y  $F'(x)$  sean continuas seccionalmente en dicho intervalo. Asumamos que la serie indicada en el segundo miembro de la ecuación 1-45 converja uniformemente a un valor  $f(x)$ , nos toca entonces demostrar que:

$$f(x) = \frac{1}{2} \{ F(x+0) + F(x-0) \} \quad (1-48)$$

Para llevar a cabo esta demostración necesitamos establecer primeramente que la serie de la suma de los cuadrados

de los coeficientes de Fourier dados por las ecuaciones 1-46 y 1-47 es convergente. Para ello multipliquemos la ecuación 1-45 por  $F(x)$  e integremos término a término desde  $-\pi$  hasta  $\pi$ . Esta operación es lícita ya que se ha asumido la convergencia uniforme de la serie del segundo miembro de la ecuación 1-45.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{F(x)\}^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx dx \right) \quad (1-49)$$

Pero teniendo presente las ecuaciones 1-46 y 1-47, resulta:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \{F(x)\}^2 dx = \frac{a_0^2}{2} \pi + \pi \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) \quad (1-50)$$

Puesto que el primer miembro de esta ecuación existe, ya que  $F(x)$  y por lo tanto  $\{F(x)\}^2$  son continuas seccionalmente en el intervalo  $-\pi \leq x \leq \pi$ , se deduce que la serie del segundo miembro es convergente y tiene como suma la integral indicada en el primer miembro. Si dicha serie es convergente, sus términos tienen que terminar decreciendo indefinidamente, esto es:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0 \quad ; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad (1-51)$$

Pero teniendo presente las ecuaciones 1-46 y 1-47, resulta:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \cos nx \, dx = 0 \quad (\text{a})$$

(1-52)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) \sin nx \, dx = 0 \quad (\text{b})$$

Estos dos últimos resultados constituyen el denominado teorema de Riemann. Debo sin embargo indicar que él mismo tiene validez bajo condiciones más amplias para la función  $F(x)$  que las especificadas de Dirichlet.

Consideremos la suma parcial de los primeros  $M + 1$  términos de la serie indicada en el segundo miembro de la ecuación 1-45, o sea:

$$S_M(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^M (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1-53)$$

Debemos ahora demostrar que el límite de esta suma cuando  $M$  crece indefinidamente es igual al segundo miembro de la ecuación 1-48. Según la ecuación 1-46:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \, du \quad (1-54)$$

Además según las ecuaciones 1-46 y 1-47:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos nu \, du \right) \cos nx + \left( \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \sin nu \, du \right) \sin nx \quad (1-55)$$

O sea:

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \left( \cos nu \cos nx + \sin nu \sin nx \right) du \quad (1-56)$$

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos n(u-x) \, du \quad (1-57)$$

Reemplazando las ecuaciones 1-54 y 1-57 en la ecuación 1-53

se tiene entonces para la suma parcial  $S_m$  :

$$S_M = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \, du + \sum_{n=1}^M \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \cos n(u-x) \, du \quad (1-58)$$

O lo que es lo mismo:

$$S_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(u) \left( \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos n(u-x) \right) du \quad (1-59)$$

Hagamos ahora el cambio de variable  $u - x = t$ , con lo cual

se tiene:

$$S_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t+x) \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos nt \right\} dt \quad (1-60)$$

Transformemos ahora la expresión:  $\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos nt$

de la siguiente manera: Consideremos la expresión  $\cos nt \sin \frac{1}{2}t$  y sumémosla desde  $n=1$  hasta  $n=M$ .

$$\sum_{n=1}^M \cos nt \sin \frac{1}{2}t = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^M \left\{ \sin(n + \frac{1}{2})t - \sin(n - \frac{1}{2})t \right\} \quad (1-61)$$

Expresando la suma indicada en el segundo miembro de una manera explícita se tiene:

$$\begin{aligned} \sin \frac{1}{2}t \sum_{n=1}^M \cos nt &= \frac{1}{2} \left\{ (\sin \frac{3}{2}t - \sin \frac{1}{2}t) + \right. \\ &\left. + (\sin \frac{5}{2}t - \sin \frac{3}{2}t) + \dots + (\sin(M + \frac{1}{2})t - \sin(M - \frac{1}{2})t) \right\} \quad (1-62) \end{aligned}$$

O sea:

$$\sin \frac{1}{2}t \sum_{n=1}^M \cos nt = \frac{1}{2} \left\{ \sin(M + \frac{1}{2})t - \sin \frac{1}{2}t \right\} \quad (1-63)$$

Dividamos los dos miembros para  $\sin \frac{1}{2}t$ , con lo que:

$$\sum_{n=1}^M \cos nt = \frac{\sin(M + \frac{1}{2})t}{2 \sin \frac{1}{2}t} - \frac{1}{2} \quad (1-64)$$

De donde finalmente:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^M \cos nt = \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} \quad (1-65)$$

Reemplazando este resultado en la ecuación 1-60 se tiene:

$$S_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} F(t+x) \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt \quad (1-66)$$

Puesto que el integrando tiene período  $2\pi$ , esta última expresión puede ser escrita:

$$S_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(t+x) \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt \quad (1-67)$$

O lo que es lo mismo:

$$S_M = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 F(t+x) \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(t+x) \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt \quad (1-68)$$

Por otra parte, integrando la ecuación 1-65 entre los límites  $-\pi$  y  $0$ , y  $0$  y  $\pi$  y teniendo presente que:

$$\int_{-\pi}^0 \cos nt dt = \int_0^{\pi} \cos nt dt = 0$$

Se tiene:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{\operatorname{sen}(M + \frac{1}{2})t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}t} dt \quad (1-69)$$

es también continua seccionalmente en el intervalo  $0 < t \leq \pi$ .

Además  $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t}$  existe ya que:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} &= \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{F(t+x) - F(x+0)}{t} \cdot \frac{t}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \end{aligned} \quad (1-73)$$

Y el límite del primer factor del segundo miembro de esta última ecuación existe, puesto que la función  $F'(x)$  es continua seccionalmente y por lo tanto tiene derivada finita a la derecha. Además el límite del segundo factor también existe y es igual a uno. Entonces la función  $\frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t}$  es continua seccionalmente en el intervalo  $0 \leq t \leq \pi$ .

Haciendo tender a la variable  $t$  a cero por valores negativos, se puede demostrar de una manera análoga que esa función es también continua seccionalmente en el intervalo  $-\pi \leq t \leq 0$ . Siguiendo un razonamiento similar se puede demostrar que la función

$$\frac{F(t+x) - F(x-0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t}$$

es continua seccionalmente en el intervalo  $-\pi \leq t \leq \pi$ , entonces la ecuación 1-72 puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} S_M - \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left( \frac{F(t+x) - F(x+0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} + \right. \\ &\left. + \frac{F(t+x) - F(x-0)}{2 \operatorname{sen} \frac{1}{2} t} \right) \operatorname{sen} \left( M + \frac{1}{2} \right) t dt \end{aligned} \quad (1-74)$$

Llevemos al límite cuando M crece indefinidamente, y teniendo presente la ecuación 1-52b resulta:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \left( S_M - \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} \right) = 0 \quad (1-75)$$

O lo que es lo mismo:

$$\lim_{M \rightarrow \infty} S_M = \frac{F(x+0) + F(x-0)}{2} \quad (1-76)$$

Con lo cual queda demostrada la convergencia de las series de Fourier de funciones que satisfacen las condiciones de Dirichlet. Esto significa que la serie correspondiente a una función  $F(x)$ , tiene como suma el valor de dicha función en cualquier punto de continuidad de la misma ya que en ese caso los límites laterales de la función son idénticos, esto es que:  $F(x + 0) \equiv F(x - 0)$ , o lo que es lo mismo:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) \equiv \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x - \varepsilon) \equiv F(x)$$

Puesto que  $F(x)$  es seccionalmente continua, puede tener puntos de discontinuidad, en este caso la serie correspondiente converge a y da como resultado la semi-suma de los límites laterales de la función en dicho punto de acuerdo con la ecuación 1-76.

1.4 Desarrollo de Funciones con Período Arbitrario

Si en las ecuaciones 1-45, 1-46 y 1-47 hacemos el siguiente cambio de variable:  $x = \frac{\pi}{T} t$  se obtiene:

$$F\left(\frac{\pi}{T} t\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \sin \frac{n\pi}{T} t \right) \quad (1-77)$$

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T F\left(\frac{\pi}{T} t\right) \cos \frac{n\pi}{T} t dt \quad (1-78)$$

$$n = 0, 1, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T F\left(\frac{\pi}{T} t\right) \sin \frac{n\pi}{T} t dt \quad (1-79)$$

Pero  $F\left(\frac{\pi}{T} t\right) = f(t)$  es una función seccionalmente continua, definida en el intervalo  $-T \leq t \leq T$  y periódica, con periodicidad  $2T$ , de modo que las ecuaciones anteriores constituyen el desarrollo de Fourier y los coeficientes correspondientes, llamados de Euler, de la función  $f(t)$ . Lo anterior podemos resumir de la siguiente manera: es suficiente que una función  $f(t)$ , tal que  $f(t) = f(t + 2T)$  satisfaga las condiciones de Dirichlet para que admita un desarrollo en serie de Fourier de

la forma:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left( a_n \cos \frac{n\pi}{T} t + b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} t \right) \quad (1-80)$$

Con coeficientes:

$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \cos \frac{n\pi}{T} t dt \quad (1-81)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T}^T f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} t dt \quad (1-82)$$

En las dos últimas expresiones los límites de integración pueden ser cambiados de tal modo que permanezca un intervalo de integración de amplitud  $2T$ .

### 1.5 Simplificación del Desarrollo de Fourier para Funciones Pares e Impares.

Se dice que una función  $f(t)$  es par, si se cumple que  $f(t) = f(-t)$ , por ejemplo:  $f(t) = \cos nt$ . De la misma manera se define una función como impar si se cumple que  $f(t) = -f(-t)$ , por ejemplo:  $f(t) = \operatorname{sen} nt$ . Es de anotarse que puede darse que una función no sea ni par ni impar, por

ejemplo:  $f(t) = 2 + \text{sen } t$ .

Teniendo presente que el producto de una función par por una función impar da como resultado también una función impar, que el producto de dos funciones impares da como resultado una función par y que además:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0 \quad (1-83)$$

si es que  $f(x)$  es una función impar,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx \quad (1-84)$$

si es que  $f(x)$  es una función par, se puede simplificar el desarrollo de Fourier indicado en las ecuaciones 1-80, 1-81 y 1-82.

Consideremos el desarrollo de una función  $f(t)$  que sea par, entonces los coeficientes  $b_n$  dados por la ecuación 1-82 serán idénticamente nulos puesto que,  $\text{sen } \frac{n\pi}{T} t$  es una función impar. Entonces teniendo presente la ecuación 1-84, el desarrollo de la función  $f(t)$  solamente tendrá términos coseno, cuyos coeficientes estarían dados por:

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{n\pi}{T} t dt \quad (1-85)$$

Si por otra parte la función  $f(t)$  es impar los coeficientes  $a_n$  del desarrollo de Fourier dados por la ecuación 1-81 serían idénticamente nulos, de modo que el desarrollo de una función impar solamente tendría términos seno, que de acuerdo con lo expuesto anteriormente respecto del producto de dos funciones impares y con la ecuación 1-84, estarían dados por:

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi}{T} t \, dt \quad (1-86)$$

#### 1.6 Desarrollo en Serie de Fourier de algunas Funciones Periódicas.

Como aplicación de lo expuesto anteriormente desarrollaremos la serie de Fourier correspondiente a la función:

$$f(x) = \begin{cases} K & ; \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ -K & ; \quad \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \end{cases} \text{ y tal que } f(x) = f(x + 2\pi)$$

véase la figura 1-2.

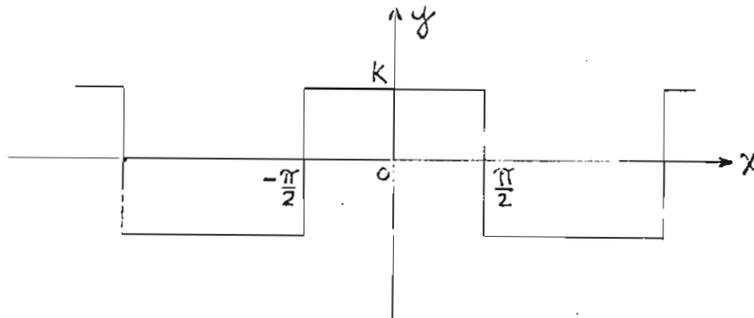


Figura 1-2

Esta función es par, de modo que solamente hay que determinar los coeficientes  $a_n$ . Además el período es  $2\pi$ , de tal manera que dichos coeficientes pueden ser determinados utilizando la ecuación 1-46, teniendo presente lo expuesto anteriormente respecto del desarrollo de Fourier de funciones pares e impares.

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (1-87)$$

Teniendo presente la definición de la función  $f(x)$  se obtiene de 1-87 para los coeficientes  $a_n$ :

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^{\pi/2} K \cos nx \, dx + \int_{\pi/2}^{\pi} (-K) \cos nx \, dx \right\} \quad (1-88)$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{K}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} - \frac{K}{n} \operatorname{sen} nx \Big|_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \right\} \quad (1-89)$$

Si  $n$  es un número par, los coeficientes  $a_n$  dados por 1-89 son cero. Si  $n$  es un número impar se tiene de dicha ecuación:

$$a_n = \frac{4K}{n\pi} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2} \quad ; \quad n = 1, 3, 5, \dots \quad (1-90)$$

Entonces la función  $f(x)$  tiene el siguiente desarrollo:

$$f(x) = \frac{4K}{\pi} \left( \cos x - \frac{\cos 3x}{3} + \frac{\cos 5x}{5} + \dots \right) \quad (1-91)$$

Se puede ver que la serie indicada en la ecuación 1-91 da el valor cero en los puntos de discontinuidad de  $f(x)$ . Este valor (cero) es la semi-suma de los límites laterales de  $f(x)$  en dichos puntos. Se ve pues verificado con este ejemplo lo demostrado en la sección 1-3.

De un modo análogo se puede encontrar el desarrollo de Fourier de otras funciones, en particular exponemos los resultados de las funciones indicadas en las figuras 1-3, 1-4 y 1-5.

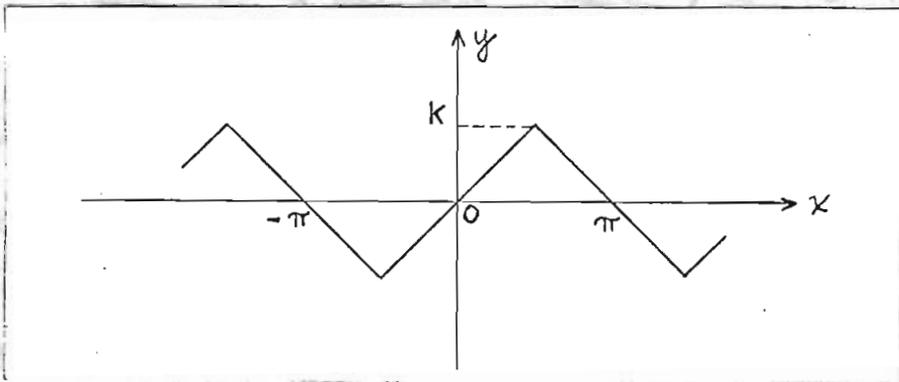


Figura 1-3  
Onda triangular.

$$f(x) = \frac{8K}{\pi^2} \left( \sin x - \frac{1}{9} \sin 3x + \frac{1}{25} \sin 5x - \dots \right) \quad (1-92)$$

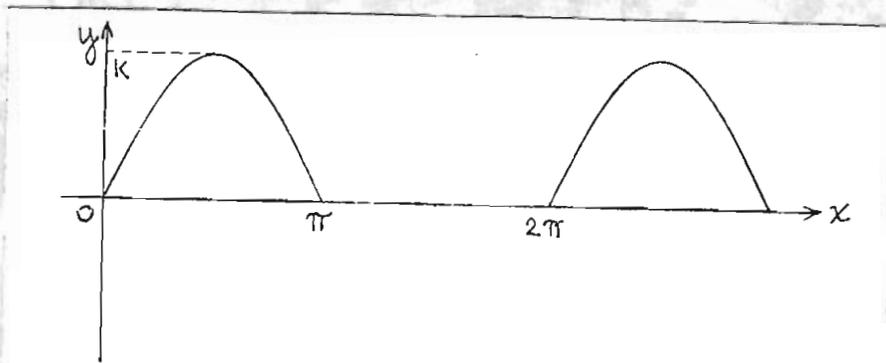


Figura 1-4  
Gráfico de la función  $f(x) = \begin{cases} K \sin x & ; 0 \leq x \leq \pi \\ 0 & ; \pi \leq x \leq 2\pi \end{cases}$

(sinusoide rectificada en media onda)

y que:  $f(x) = f(x + 2\pi)$ .

El desarrollo de Fourier correspondiente está dado por:

$$f(x) = \frac{K}{\pi} + \frac{K}{2} \operatorname{sen} x - \frac{2K}{\pi} \left( \frac{1}{1.3} \cos 2x + \right. \quad (1-93)$$

$$\left. + \frac{1}{3.5} \cos 4x + \dots \right)$$

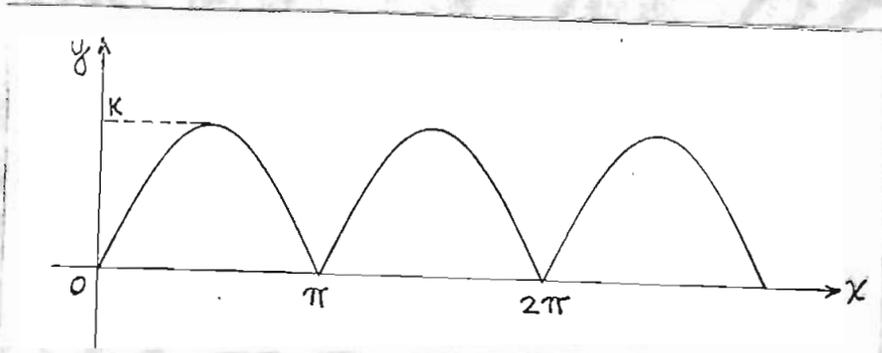


Figura 1-5

Gráfico de la función:  $f(x) = K|\operatorname{sen} x|$ ;  $f(x) = f(x + 2\pi)$   
(Senoide rectificada en onda completa)

El desarrollo de Fourier correspondiente es:

$$f(x) = \frac{4K}{\pi} \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{1.3} \cos 2x - \frac{1}{3.5} \cos 4x - \dots \right) \quad (1-94)$$

Los conceptos matemáticos y los ejemplos expuestos en este capítulo nos servirán para una mejor comprensión de los temas a desarrollarse en los capítulos siguientes.

C A P I T U L O   S E G U N D O

G E N E R A C I O N   D E   C O M P O N E N T E S

## 2.1 Generalidades.

Como indiqué en la introducción, he escogido el rango de frecuencias en el orden de kilociclos para la realización del experimento. Deseo entonces ahora indicar en el presente capítulo los principios básicos en los cuales se fundamenta la generación de señales sinusoidales de este orden de magnitud de frecuencia. No es sin embargo mi propósito exponer exhaustivamente la teoría de los generadores denominados "de audio" ya que eso no constituye el tema central de mi trabajo.

Trataré brevemente de la realimentación aplicada a un oscilador R-C e indicaré el sistema general de un generador de bajas frecuencias, esto es hasta unos 300 kilociclos aproximadamente. En cuanto al oscilador mismo expondré el sistema de red resistencia-capacidad en cascada, denominado también oscilador por desviamiento de fase, como ejemplo para ilustrar el hecho que es posible la generación de señales sinusoidales utilizando circuitos constituidos por elementos pasivos conectados adecuadamente a un amplificador. Además trataré brevemente del oscilador denominado "puente de Wien" a fin de ilustrar problemas relativos a la estabilización de las oscilaciones producidas.

2.2 Principios Básicos de un Oscilador.

Si la señal de salida de un amplificador, eventualmente modificada en amplitud o en fase, o en ambos factores se conecta a la entrada del mismo, se dice que hay realimentación.

Considérese un amplificador de ganancia  $A$ , conectado en un circuito de acuerdo con la figura 2-1.

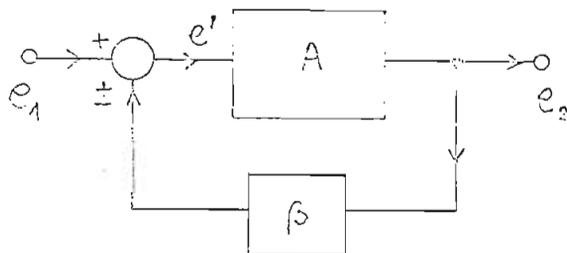


Figura 2-1

El conjunto puede ser considerado como un amplificador diferente e interesa conocer la ganancia total  $A' = \frac{e_2}{e_1}$ .

La ganancia  $A$  está definida por:

$$A = \frac{e_2}{e'} \quad (2-1)$$

Pero en este caso:

$$e' = e_1 \pm \beta e_2 \quad (2.2)$$

Eliminando  $e'$  entre las ecuaciones 2-1 y 2-2 se obtiene para la nueva ganancia:

$$A' = \frac{e_2}{e_1} = \frac{A}{1 \mp \beta A} \quad (2-3)$$

Si el denominador de esta expresión es mayor que la unidad, la nueva ganancia será menor que la original. Se habla entonces de realimentación negativa que trae como consecuencia entre otras cosas, una disminución de la distorsión y un mejoramiento de la estabilidad del amplificador. Por el contrario si dicho denominador es un número menor que la unidad, la ganancia  $A'$  es mayor que la original  $A$  y se habla de realimentación positiva o regeneración.

En general el valor de  $\beta$  depende de la frecuencia y puede darse el caso, que a algunas frecuencias exista realimentación negativa y a otras regeneración. Cabe considerar la posibilidad que :

$$\beta = \pm \frac{1}{A} \quad (2-4)$$

En este caso el denominador de la ecuación 2-3 es cero, lo que significaría una ganancia infinita. Este hecho se puede interpretar físicamente en el sentido que habría una señal de salida  $e_2$ , sin necesidad de la existencia de una señal de entrada  $e_1$ . Se dice entonces que se tiene un oscilador, esto es un dispositivo capaz de generar señales.

Es posible dar una explicación de este fenómeno, si se considera que inicialmente alguna señal, por ejemplo una señal de ruido está presente a la entrada del amplificador A, si esta señal una vez amplificada es introducida nuevamente a la entrada del amplificador con la misma fase que la señal inicial, será nuevamente amplificada y reforzará la señal de salida. De este modo se obtendría a la salida una señal que contendría muchas componentes de frecuencias distintas y que iría aumentando en amplitud hasta saturar el amplificador. Es por lo tanto necesario proveer de algún circuito que permita que las oscilaciones se produzcan a una sola frecuencia y que discrimine las otras frecuencias. Además debe haber circuitos que estabilicen la amplitud de las oscilaciones producidas.

A fin de que la señal de realimentación esté en fase con la señal de entrada, es necesario utilizar el signo +

En la figura 2-3 se expone un circuito muy simplificado. Así por ejemplo no se indica métodos para la polarización de la grilla de control, etc. Sin embargo se debe recalcar que a frecuencias distintas de la dada por la ecuación 2-7 no se cumple la condición de fase ( $180^\circ$ ) y por lo tanto no se produce oscilación. La señal generada aumentaría sin embargo en su amplitud hasta saturar el amplificador. Si se quisiese emplear dicho circuito para la generación de señales utilizables, habría que complementarlo con alguna forma de estabilización de amplitud.

#### 2.4 El Oscilador "Puente de Wien".

En este tipo de oscilador se utiliza el circuito básico indicado en la figura 2-4

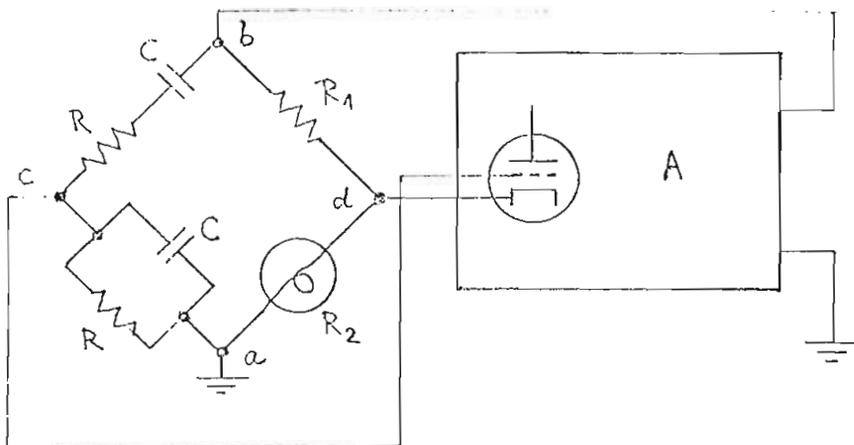


Figura 2-4

El voltaje de salida se conecta a los puntos a-b de la configuración puente y el voltaje desarrollado entre los puntos c-d se aplica a la entrada del amplificador. La relación de fase y amplitud del voltaje c-d respecto del voltaje a-b se muestran en las figuras 2-5 y 2-6.

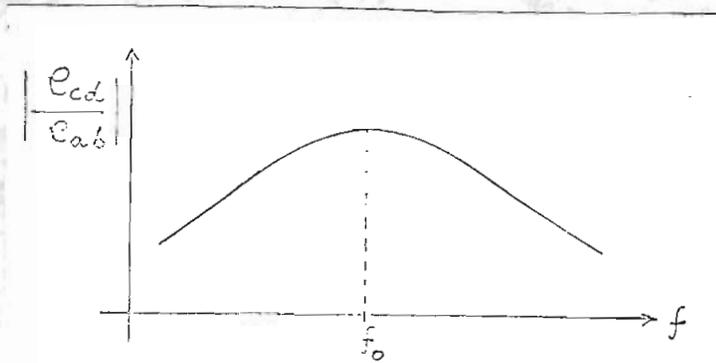


Figura 2-5

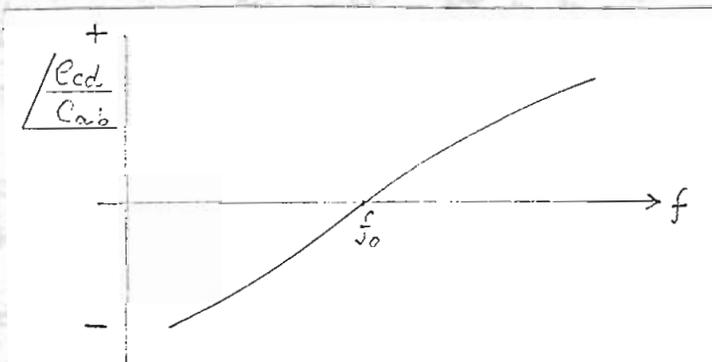


Figura 2-6

La frecuencia  $f_0$  está dada por:  $f_0 = \frac{1}{2\pi RC}$

Entonces si el amplificador tiene una ganancia adecuada y no ofrece cambio de fase (por ejemplo si está constituido por un número par de etapas en cascada), se producirán oscilaciones a la frecuencia  $f_0$ .

La resistencia  $R_2$  está constituida generalmente por el filamento de tungsteno de una lamparita de incandescencia. Inicialmente este filamento está frío y el puente está desbalanceado, o sea el voltaje c-d es relativamente grande. Al aumentar la amplitud de las oscilaciones, aumenta también la corriente a través de  $R_2$ , lo cual trae como consecuencia también un aumento del valor de dicha resistencia tendiendo a balancear el puente. El resultado final es que se establece un estado de equilibrio con el puente casi balanceado y entonces la amplitud de la señal generada se mantiene constante.

Un ejemplo comercial de un generador basado en este principio es el modelo 200 CD de la casa Hewlett-Packard. Este generador ha sido utilizado para obtener las señales componentes para la síntesis experimental de ondas periódicas. Este desarrollo experimental será expuesto en capítulos posteriores.

## 2.5 Control de Amplitud y de Frecuencia.

Un oscilador R-C de los tipos expuestos anteriormente no puede ser utilizado adecuadamente. Entre otros factores, sería por ejemplo sensible a la carga que le sea conectada. Por esta razón es necesario reunir otros circuitos a fin de obtener lo que se denomina un generador de señales. La señal obtenida del oscilador debe ser amplificada a fin de independizar el mismo de la carga. Además se debe proveer de un atenuador calibrado a fin de poder controlar la amplitud de la señal de salida.

La frecuencia varía inversamente proporcional a R y a C, de modo que diseñando el oscilador con estos elementos ajustables se puede controlar la frecuencia de la señal generada.

En la figura 2-7 se muestra un diagrama de bloques de un generador R-C .

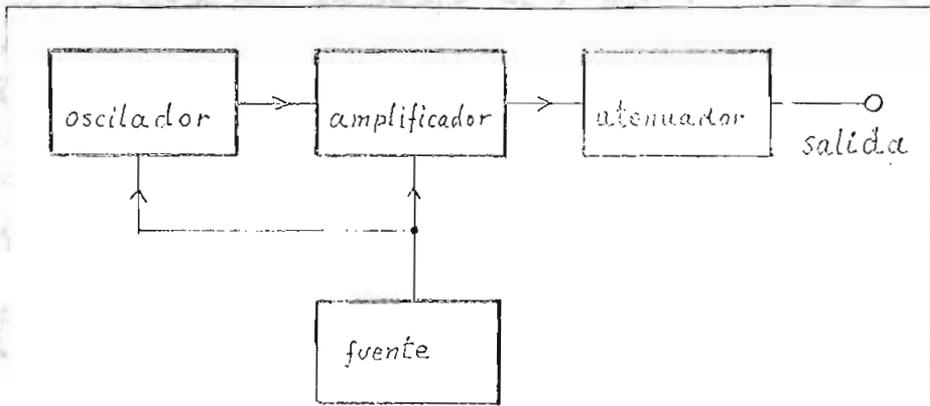


Figura 2-7

C A P I T U L O   T E R C E R O

S I N C R O N I Z A C I O N   Y   C O N T R O L   D E  
F A S E

### 3.1 Introducción.

Con generadores del tipo descrito en el capítulo anterior se dispondría de señales sinusoidales. Estas señales podrían constituir términos individuales de sumas parciales de desarrollos de Fourier de series determinadas. Sin embargo dichos términos individuales además de ser de la frecuencia adecuada, deben estar sincronizados en el tiempo, ya que en caso contrario no se obtendría una imagen estable en la pantalla del osciloscopio. Entonces disponiendo de generadores que produzcan señales sinusoidales de la frecuencia y amplitud convenientes se confronta el problema de la sincronización de los mismos.

Constituye una propiedad de los osciladores R-C que se sincronizan con señales inyectadas casi en cualquier parte del circuito, según lo mencionan casi todos los autores que tratan de este tema. Dichas señales deben ser de la misma frecuencia del generador que se desea sincronizar, o deben estar en relación armónica con ella. Sin embargo no he encontrado ninguna fuente de información acerca de cómo sincronizar generadores R-C . En este trabajo, dicha sincronización ha sido entonces realizada de modo experimental. Al cabo de algunos ensayos y pruebas llegué a la determinación del mejor si-

tio del generador para la inyección de la señal sincronizante. Me limito a exponer lo realizado experimentalmente con los resultados obtenidos, ya que la sincronización de generadores R-C no constituye el tema central del trabajo.

### 3.2 Sincronización de Generadores R-C .

Después de haber realizado algunos ensayos se consiguió sincronizar la señal de un generador Hewlett-Packard modelo 200 CD con la señal de otro generador del mismo tipo.

El generador mencionado está basado en el principio del puente de Wien, acoplado a un amplificador balanceado en contrafase (push-pull). El diagrama de bloque del mismo lo muestro en la figura 3-1, tomada del manual de operación de dicho generador.

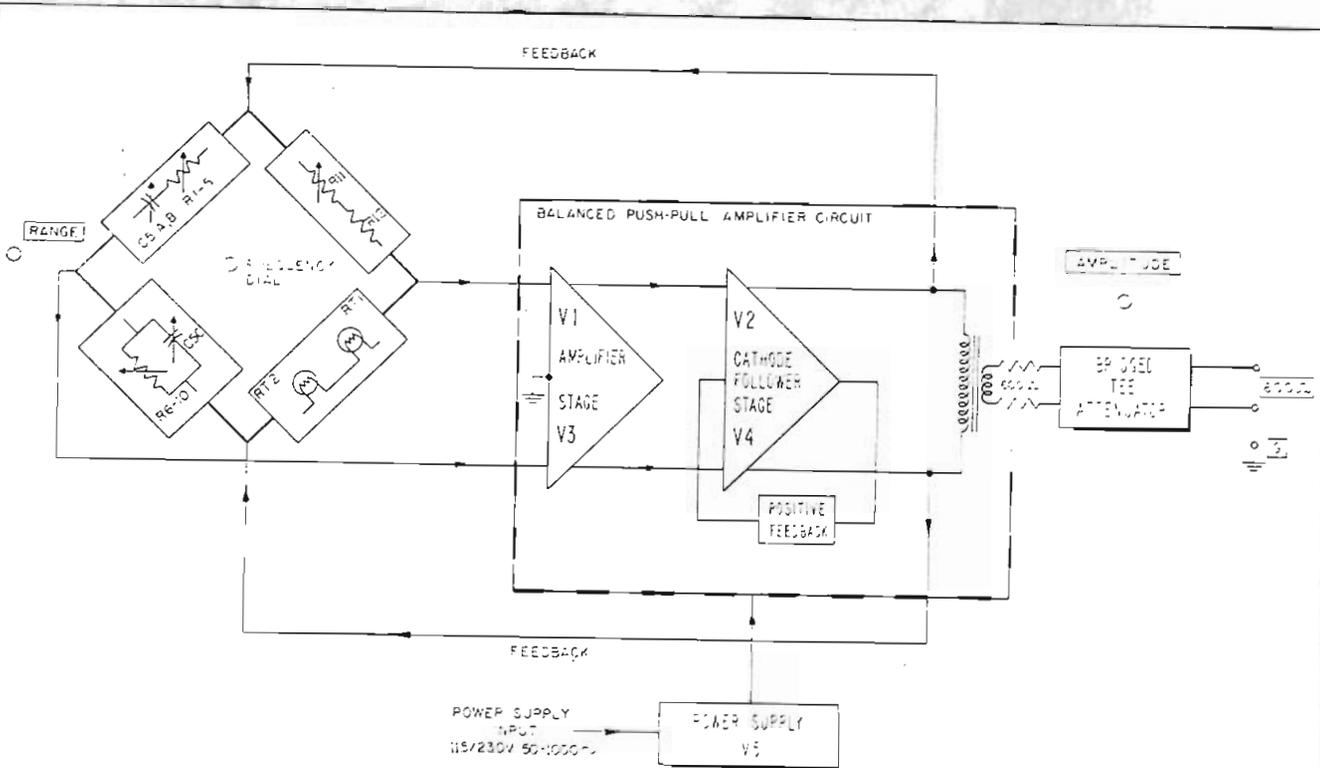


Figura 3-1

La primera etapa de amplificación de este generador está constituida por dos tubos 6 AU6 . En las placas de estos tubos fue en donde determiné que la sincronización se realizaba más fácilmente. La señal sincronizante fue aplicada a dichos electrodos a través de condensadores de papel, de 4700  $\mu$  47000 pF . El valor de la capacidad de estos condensadores no era crítico y casi no se notaba diferencia al utilizar uno u otro valor. El fenómeno de sincronización sin embargo exigía un mínimo de magnitud de la señal sincronizante. Si

dicha señal era muy pequeña no había sincronización y si por el contrario era grande (alrededor de 100 mV.) daba lugar a distorsión de la forma de onda de salida del generador.

Al llevar a cabo la sincronización de un generador he determinado el hecho fundamental que la frecuencia de la señal sincronizante debe ser igual o mayor que la señal del generador. En el caso que sea mayor, debe ser aproximadamente un múltiplo entero de dicha frecuencia.

Comparando la señal sincronizante con la del generador, llegué a la determinación que entre las dos señales había un ángulo de defasamiento. El control de frecuencia del generador podía ser ajustado ligeramente sin producir un cambio en la frecuencia de salida, pero afectaba al ángulo de defasamiento mencionado. Este fenómeno me ayudó posteriormente para realizar ligeros ajustes de fase entre las diferentes señales.

Para la medición y determinación del fenómeno de sincronización utilicé el método de las figuras de Lissajous y también la observación simultánea de las dos señales en un osciloscopio de dos canales, estando ambos sincronizados para

el barrido horizontal (tiempo) con la señal del generador (la señal sincronizante).

Cuando los generadores estaban sincronizados se podía observar en la pantalla del osciloscopio una figura de Lissajous estable. Al observar simultáneamente las dos señales, se podía ver de una manera estable la correspondiente a la señal sincronizante, mientras que la del generador a sincronizarse se desplazaba lateralmente. Solo cuando había sincronización, esta señal quedaba también fija. En la figura 3-2 muestro una fotografía de un oscilograma que ilustra una figura de Lissajous con una relación de frecuencia de 1:15 .

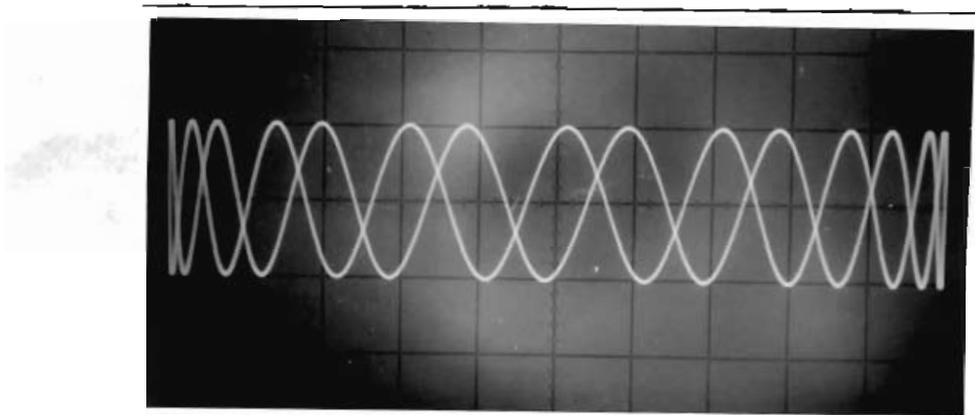


Figura 3-2

En la figura 3-3 expongo una fotografía de un oscilograma obtenido en el osciloscopio de dos canales, que muestra la señal sincronizante en la parte superior y la señal

sincronizada en la parte inferior. La relación de frecuencias es de 5:1 .

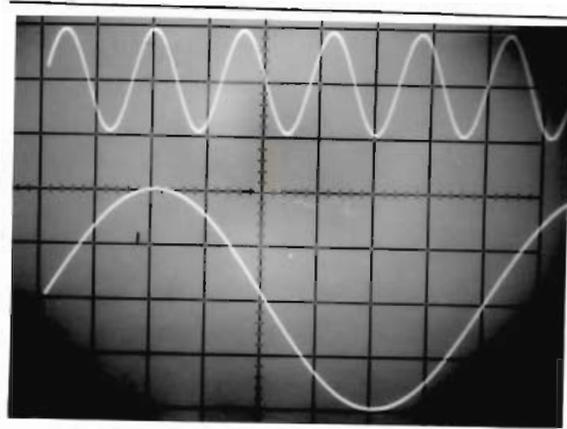


Figura 3-3

Comparando las figuras 3-2 y 3-3 se puede apreciar que en el primer caso existe un ángulo de defasamiento entre las dos señales, mientras que en la figura 3-3 dicho ángulo es cero.

### 3.3 Medición de Relación de Frecuencias. Figuras de Lissajous.

Si se dispone de un osciloscopio con entradas para la deflexión vertical y horizontal y se aplica a cada canal una señal de frecuencia distinta, se puede determinar la relación de frecuencias de las señales aplicadas de la figura resultante. La imagen que se obtiene corresponde a lo que se

denomina "figuras de Lissajous" . Llamando "x" a la deflexión horizontal y "y" a la vertical, entonces las ecuaciones paramétricas de una figura de Lissajous son:

$$x = A \operatorname{sen}(\omega_1 t + \varphi_1) \quad (3-1)$$

$$y = B \operatorname{sen}(\omega_2 t + \varphi_2) \quad (3-2)$$

donde A y B son coeficientes constantes que dependen de la amplitud de cada señal y de la sensibilidad correspondiente del osciloscopio. Puesto que la deflexión "x" solo puede variar entre - A y + A y la deflexión "y" entre - B y + B , la figura resultante queda inscrita dentro de un rectángulo de dimensiones 2A y 2B .

Si las frecuencias angulares  $\omega_1$  y  $\omega_2$  están en relación de números enteros, la figura resultante es estable. En casos sencillos se puede obtener su ecuación  $y = f(x)$  eliminando el parámetro "t" entre las ecuaciones 3-1 y 3-2.

Suponiendo que la relación de frecuencias es tal que  $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n}{m}$  , siendo "n" y "m" números enteros. Entonces durante el mismo tiempo en el cual la deflexión "x" alcanza

"n" máximos, la deflexión "y" alcanza "m" máximos. Pero estos máximos constituyen puntos de tangencia de la figura resultante con los lados del rectángulo en que se encuentra inscrita. Se puede entonces determinar la relación de frecuencias de las dos señales contando el número de puntos de tangencia de la figura de Lissajous con los lados horizontal y vertical del rectángulo circunscrito a la misma. Así por ejemplo se indica en la figura 3-4 la fotografía correspondiente al oscilograma de una figura de Lissajous que se obtuvo con una relación de frecuencias de 3:5.

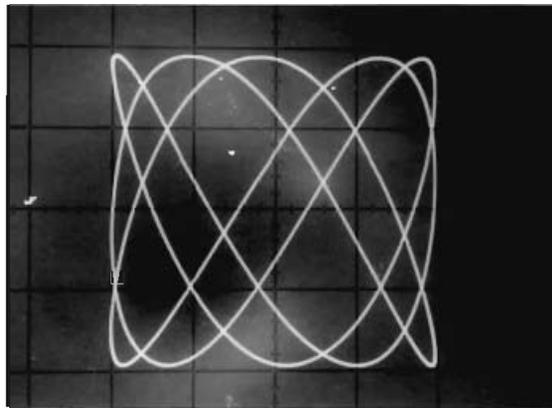


Figura 3-4

Si la diferencia de fase entre las dos señales es cero, esto es que para un instante determinado ambas señales tienen valor cero, la figura de Lissajous tiene que pasar por el origen de coordenadas. Como ejemplo de esto último se ilustra en las figuras 3-5 y 3-6 los oscilogramas que se ob-

tuvieron para una relación de frecuencias de 1:2 .

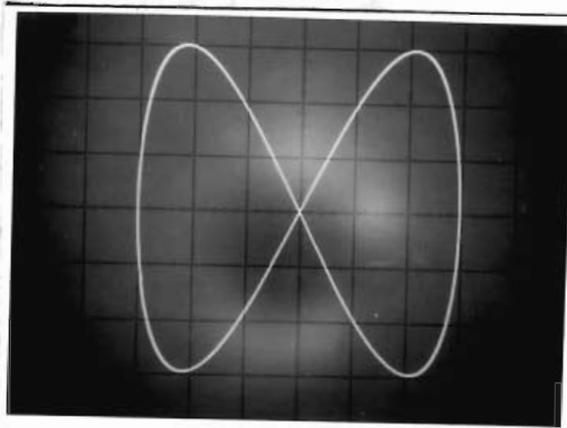


Figura 3-5

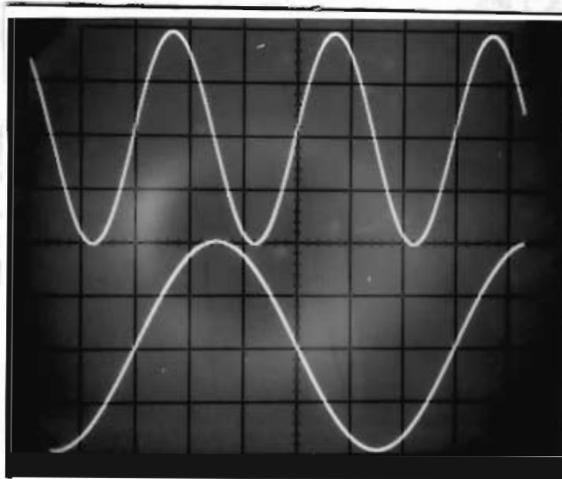


Figura 3-6

Ambas fotografías fueron obtenidas para las mismas señales en dos osciloscopios y en la figura 3-6 se puede ver claramente que no hay defasamiento entre dichas señales.

Los términos correctos correspondientes a sumas parciales de desarrollos de Fourier son funciones sinusoidales cuyas frecuencias están en relación de números enteros y cuya diferencia de fase debe ser nula. Se ha utilizado entonces el método de medición de las figuras de Lissajous para el ajuste correcto de estos factores. En la figura 3-7 se puede ver el oscilograma correspondiente a una relación de frecuencias de 2:5 con defasamiento nulo.

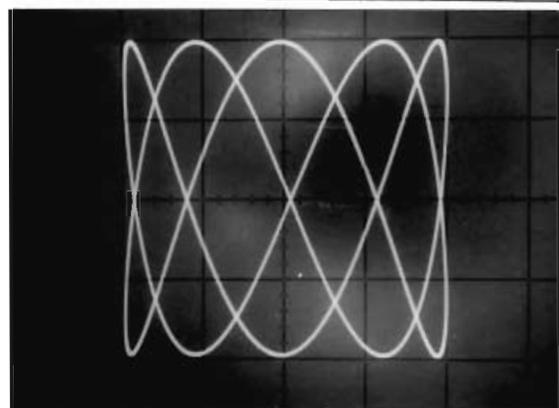


Figura 3-7

#### 3.4 Corrección del Angulo de Fase.

Se ha recalcado ya la necesidad de que todas las componentes, para lograr la síntesis de una suma parcial de un desarrollo de Fourier, deben tener la misma fase. También se ha

indicado que el control de frecuencia de un generador R-C , sincronizado con la señal de otro, afecta la fase de la señal de salida. Sin embargo al llevar a cabo el trabajo experimental se pudo establecer que las señales de los distintos generadores quedaban sincronizadas con ángulos de defasamiento diferentes para cada señal. La corrección de fase posible de obtenerse ajustando los controles de frecuencia de cada generador no era suficiente para conseguir que todas las señales tuviesen fase cero. Por este motivo fue necesario recurrir a la utilización de circuitos para corregir, o mejor para ajustar de un modo adecuado, el ángulo de fase de cada señal. Este circuito debía permitir dicho ajuste sin afectar la amplitud de la señal. En la figura 3-8 se muestra la disposición empleada.

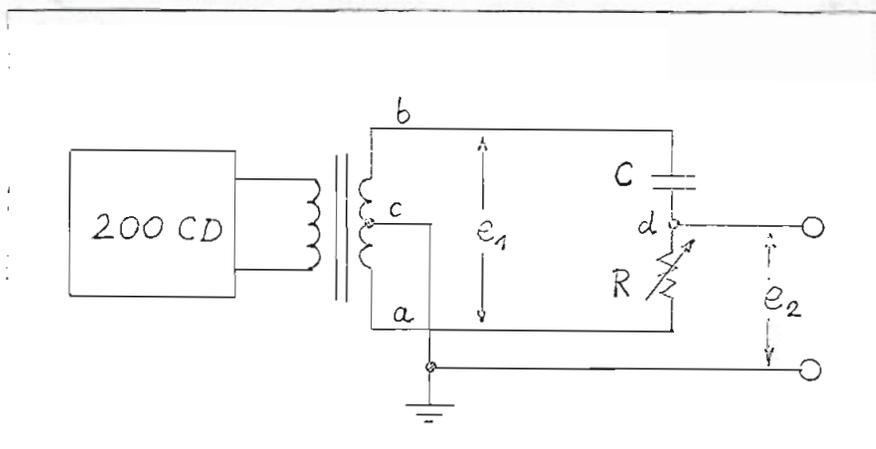


Figura 3-8

Si la impedancia de carga conectada a los terminales de salida es despreciable, la magnitud del voltaje  $e_2$  permanece constante. Esta condición se cumplía en el experimento, ya que la carga constituía la impedancia de entrada de un amplificador operacional.

Al variar la resistencia  $R$ , el extremo del fesor correspondiente al voltaje  $e_2$  describe una semicircunferencia.

Véase la figura 3-9

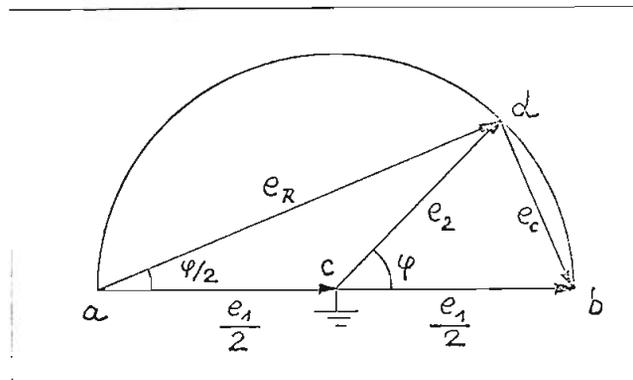


Figura 3-9

El voltaje  $e_2$  queda expresado por:  $e_2 = \frac{e_1}{2} e^{j\varphi}$

donde:  $\varphi = 2 \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{1}{\omega RC}$

De esta manera fue posible ajustar el ángulo de fase de cada señal a fin de poder utilizarlas para el propósito

buscado. En algunos casos se necesitaba términos seno y coseno para un mismo desarrollo, pero la función coseno puede ser considerada como la función seno del mismo argumento más un ángulo de defasamiento de  $90^\circ$  :  $\cos x = + \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$  .

Entonces la posibilidad de ajustar el ángulo de fase permitió la obtención de términos seno y coseno. Además en algún desarrollo podría ocurrir la existencia simultánea de términos seno y coseno de un mismo argumento. (Eventualmente con coeficientes diferentes). Pero es fácil establecer que:

$$A \operatorname{sen} x + B \operatorname{cos} x = \sqrt{A^2 + B^2} \operatorname{sen}(x + \varphi) \quad (3-3)$$

donde el ángulo  $\varphi$  está dado por :  $\operatorname{tg} \varphi = \frac{B}{A}$

De modo que el ajuste de la fase de cada señal permitiría la obtención de términos de la forma dada por la ecuación 3-3.

A fin de ilustrar la efectividad del control de fase, considérese el caso de dos señales sincronizadas, con una relación de frecuencias de 1:2 (por comodidad se ha escogido amplitudes iguales para las dos señales).

Sea entonces:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t ; \quad y = A \operatorname{sen} 2 \omega t \quad (3-4)$$

eliminando el parámetro "t" entre las ecuaciones 3-4 se obtiene:

$$y^2 = 4 x^2 - \frac{4}{A^2} x^4 \quad (3-5)$$

La figura de Lissajous correspondiente a la ecuación 3-5 se muestra en la figura 3-5 con el coeficiente  $A = 3$ . Se cambió luego el ángulo de fase para la señal aplicada al canal vertical del osciloscopio a fin de tener:

$$x = A \operatorname{sen} \omega t ; \quad y = A \operatorname{sen} \left( 2 \omega t - \frac{\pi}{2} \right) \quad (3-6)$$

De una manera similar a lo expuesto anteriormente, se obtiene de esta ecuación:

$$y = \frac{2}{A} x^2 - A \quad (3-7)$$

Esta es la ecuación de una parábola de segundo grado y la fotografía del oscilograma correspondiente puede verse en la figura 3-10.

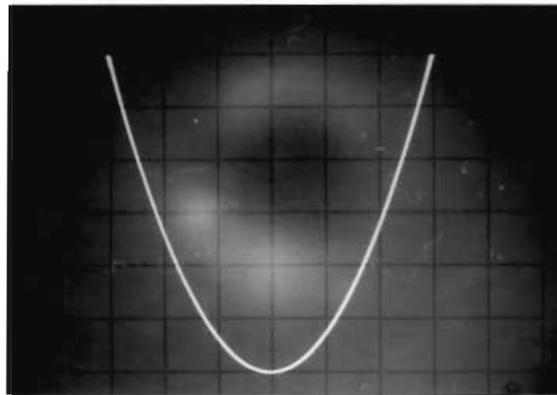


Figura 3-10

También en este caso la constante  $A$  tiene el valor 3 .

Finalmente para ilustrar la estabilidad de la sincronización que se obtuvo en este experimento, se muestra en la figura 3-11 el oscilograma simultáneo de dos figuras de Lissajous con relaciones de frecuencia 1:3 y 1:5.

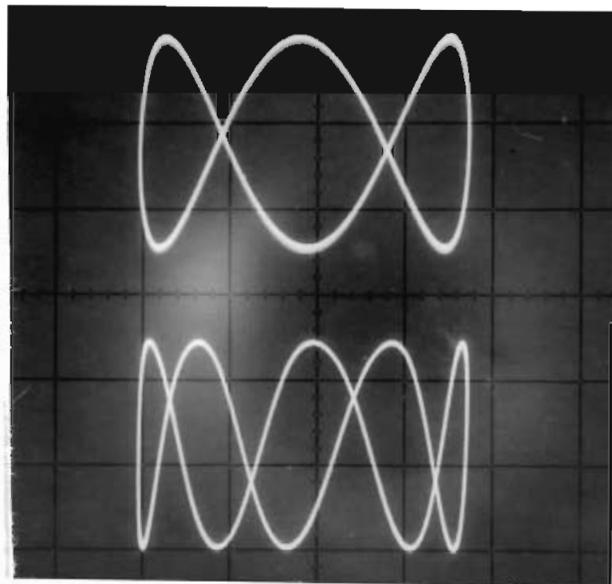


Figura 3-11

En la figura 3-12 se muestra el oscilograma correspondiente a una señal y su tercera armónica. Ambas señales tienen la misma amplitud y no existe defasamiento entre ellas.

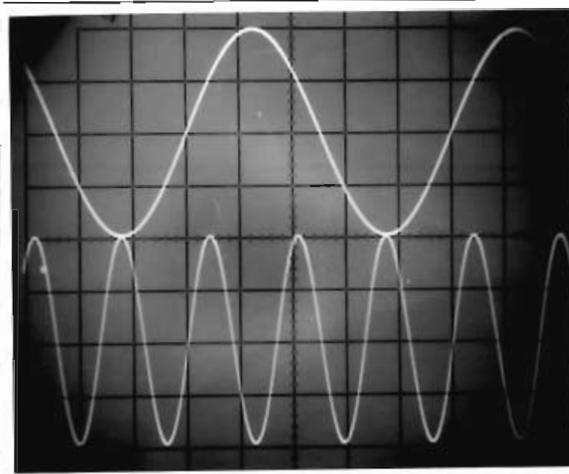


Figura 3-12

C A P I T U L O   C U A R T O

S I N T E S I S   D E   S U M A S   P A R C I A L E S

D E   S E R I E S   D E   F O U R I E R

#### 4.1 Exposición del Problema.

En el capítulo anterior se han indicado los métodos utilizados para conseguir señales sinusoidales sincronizadas en el tiempo y además la manera de ajustar la fase de cada una de estas señales. Sin embargo para lograr la síntesis de sumas parciales de desarrollos de Fourier, cada señal debe poseer una frecuencia que sea un múltiplo entero de la frecuencia del primer término. Se presentó una dificultad, ya que, como se expuso anteriormente, el fenómeno de sincronización tenía lugar solamente si la frecuencia de la señal sincronizante era mayor que la del generador a sincronizarse. De este modo, llamando  $f_0$  a la frecuencia de la señal sincronizante, se podía obtener señales sincronizadas de frecuencias:

$\frac{f_0}{2}$  ,  $\frac{f_0}{3}$  , ....  $\frac{f_0}{n}$  , pero lo que se requería eran señales de frecuencias:  $f_0$  ,  $2f_0$  ,  $3f_0$  , ...  $nf_0$  .

Además en algunos desarrollos se necesitaba términos con signos alternados (véase por ejemplo la ecuación 1-92). Finalmente era necesario ajustar la amplitud de cada señal al valor correcto y por último quedaba pendiente el problema de sumar las diferentes señales.

La obtención de las frecuencias adecuadas fue lograda escogiendo relaciones convenientes entre la señal sincronizante y las señales de cada generador particular, como se indicará más adelante. Las otras dificultades expuestas fueron resueltas utilizando amplificadores operacionales.

#### 4.2 Amplificadores Operacionales.

Si se dispone de un amplificador de alta ganancia conectado en un circuito adecuado se puede llevar a cabo operaciones matemáticas, simulando analógicamente las diferentes variables con señales eléctricas.

Considérese un amplificador de ganancia  $A$  con impedancia de entrada de valor muy elevado conectado en el circuito indicado en la figura 4-1

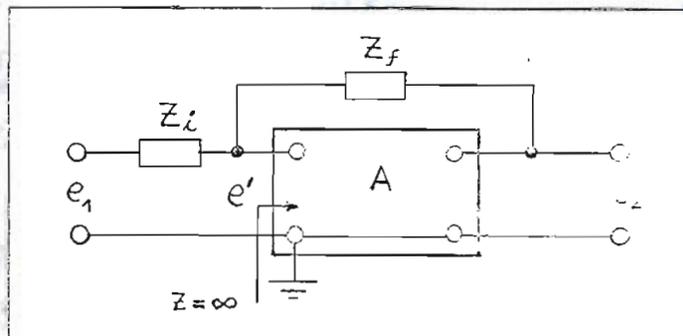


Figura 4-1

La corriente "i" debe pasar por  $Z_i$  y por  $Z_f$ , de modo que:

$$i = \frac{e_1 - e'}{Z_i} = \frac{e' - e_2}{Z_f} \quad (4-1)$$

Pero los voltajes  $e_2$  y  $e'$  están relacionados por la ganancia del amplificador:

$$A = \frac{e_2}{e'} \quad (4-2)$$

Eliminando  $e'$  entre las ecuaciones 4-1 y 4-2 se obtiene:

$$e_2 Z_i \left[ 1 - \frac{A}{A} \left( 1 + \frac{Z_f}{Z_i} \right) \right] = - Z_f e_1 \quad (4-3)$$

Si la ganancia  $A$  del amplificador es suficientemente grande, tal que:

$$1 \gg \frac{1}{A} \left( 1 + \frac{Z_f}{Z_i} \right) \quad (4-4)$$

Se puede escribir la ecuación 4-3 con suficiente aproximación:

$$e_2 = - \frac{Z_f}{Z_i} e_1 \quad (4-5)$$

Si las impedancias  $Z_i$  y  $Z_f$ , denominadas de entrada y de realimentación respectivamente, están constituidas por resistencias de valores iguales se tiene:  $e_2 = -e_1$  y el

conjunto de la figura 4-1 recibe el nombre de inversor.

Si la relación  $\frac{Z_f}{Z_i}$  es igual a una constante  $K$ , se logra la multiplicación de la variable  $e_1$  por dicha constante. Finalmente si se provee de varias resistencias  $R_i$  (véase figura 4-2).

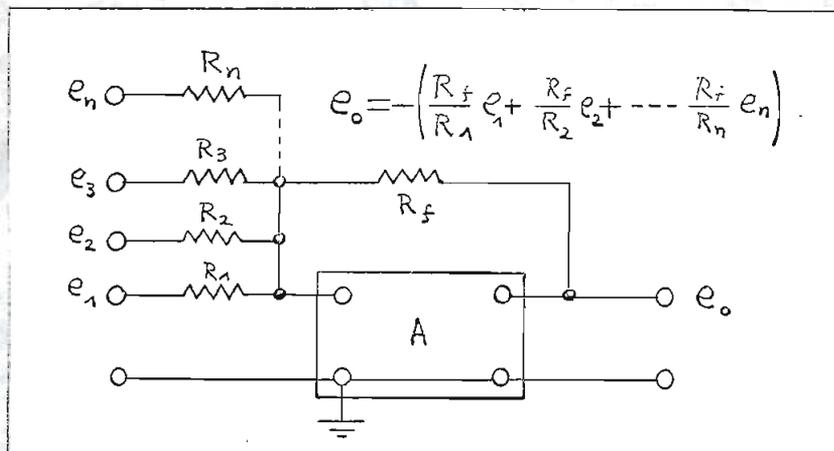


Figura 4-2

Se puede conseguir la suma de varias variables, cada una de ellas multiplicada por una constante. (Esta suma aparece cambiada de signo). Se habla entonces de un sumador. Estos dispositivos se representan esquemáticamente de la manera ilustrada en la figura 4-3.

Se empleó amplificadores operacionales para ajustar la amplitud de cada señal al valor necesario y para realizar

la suma (con eventuales cambios de signo) de las señales componentes.

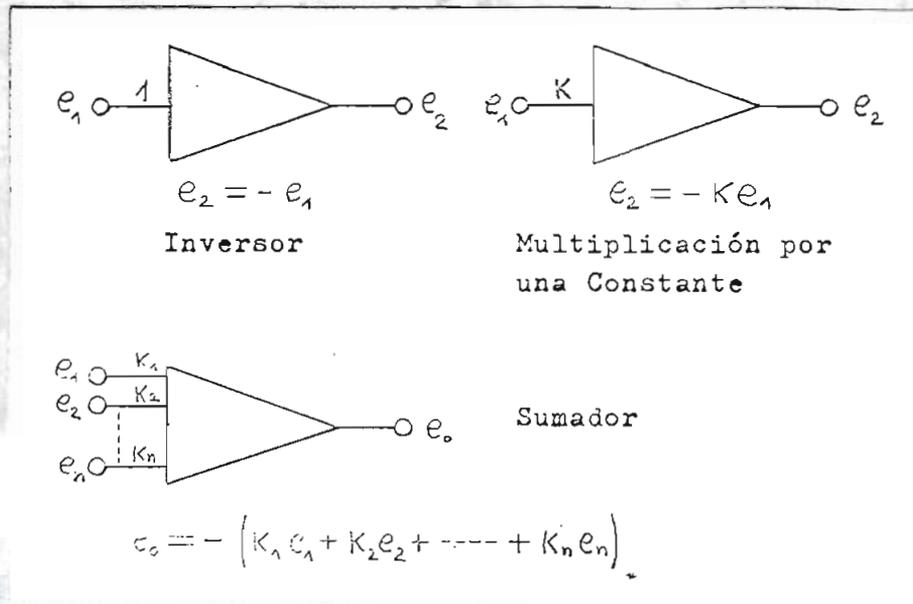


Figura 4-3

A fin de poder llevar a cabo los diferentes ajustes y conexiones de una manera cómoda se dispuso de un panel en el que fueron montados potenciómetros para el ajuste de coeficientes, interruptores a fin de poder conectar las diferentes señales a voluntad y enchufes tipo banana para el conexionado a los generadores y a los amplificadores operacionales. Este panel fue instalado, como se puede ver en la figura 4-4, en la parte central del rack que contiene en su parte superior los amplificadores operacionales. En la parte inferior se puede apreciar la fuente de alimentación para los mismos.

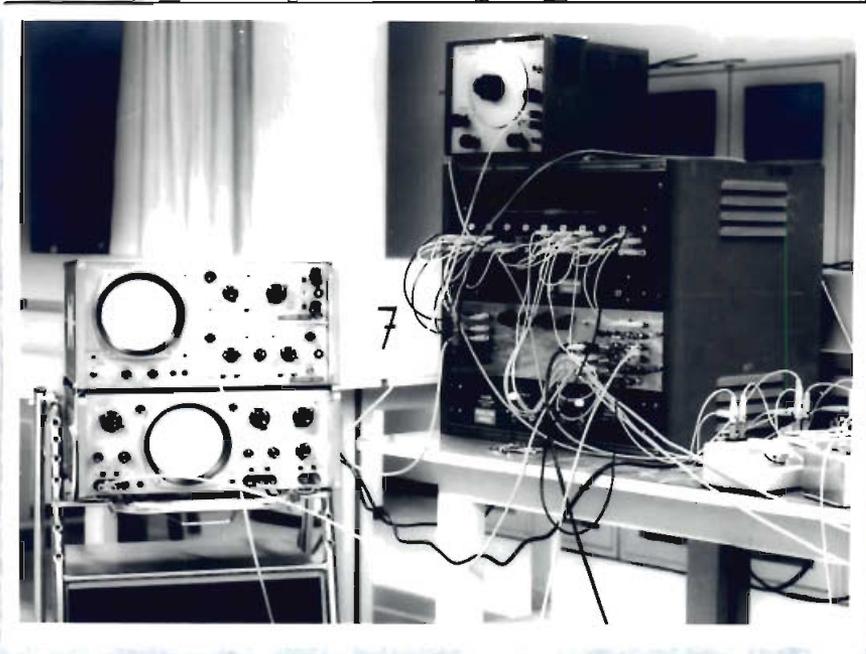


Figura 4-4

4.3 Obtención de la Frecuencia Fundamental y de Armónicas.

Puesto que cada generador quedaba sincronizado a una frecuencia menor que la de la señal sincronizante, fue necesario escoger los submúltiplos de dicha frecuencia de tal modo que entre ellos exista la relación adecuada de multiplicidad a fin de que puedan constituir términos de la suma parcial particular a sintetizarse. A veces fue necesario sincronizar algún generador con la señal de otro ya previamente sincroni-

zado. Así por ejemplo para obtener una frecuencia fundamental y su tercera y quinta armónica se utilizó la disposición indicada esquemáticamente en la figura 4-5.

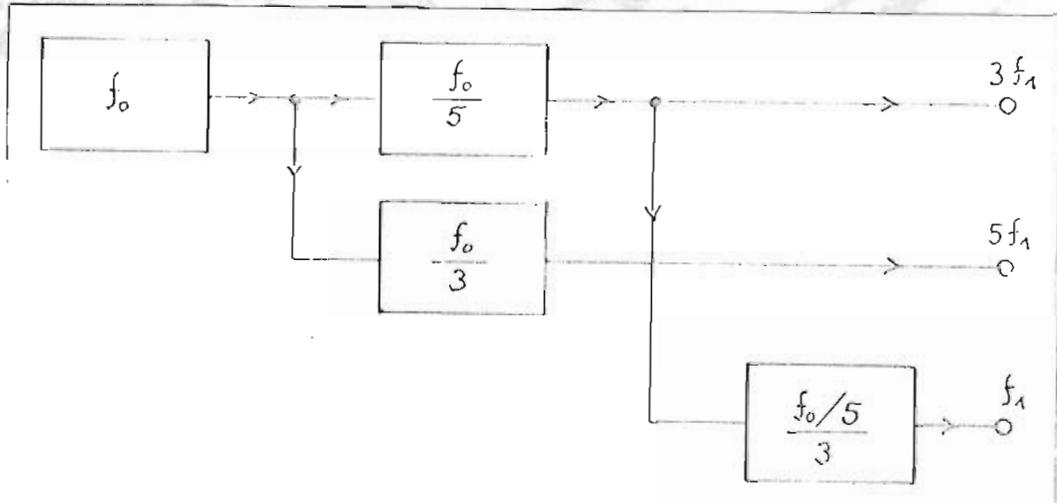


Figura 4-5

El diagrama indicado solo muestra la disposición básica para la obtención de las frecuencias requeridas. En la figura 4-6 se puede ver el oscilograma de las señales resultantes. (Todavía sin corrección de fase).

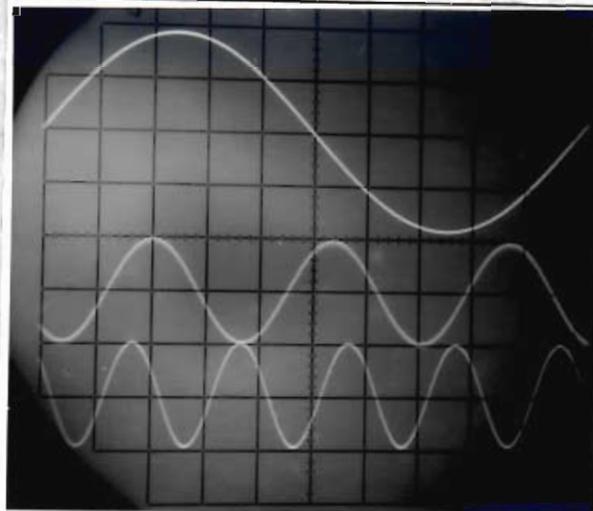


Figura 4-6

C A P I T U L O   Q U I N T O

R E S U L T A D O S   F I N A L E S   D E L

E X P E R I M E N T O   Y   C O N C L U S I O N E S

## 5.1 Generalidades.

En los capítulos precedentes se ha expuesto el trabajo realizado a fin de obtener señales que puedan ser consideradas como términos individuales de sumas parciales de desarrollos de Fourier. A continuación se expondrá el montaje experimental utilizado para cada caso particular y los resultados obtenidos.

Puesto que la frecuencia de las señales no tiene ninguna importancia para el propósito del experimento, no se denominará a los argumentos de los diferentes términos con:

$\omega t$  ,  $2 \omega t$  , ... sino sencillamente con:  $x$ ,  $2x$ ,  $3x$ ,... Además ya que un cambio del valor del período de una función periódica representa, según lo expuesto en la sección 1.4 , simplemente un cambio de escala para la variable independiente, se considerará dicho período igual a  $2 \pi$  para todos los casos. Con el control de barrido horizontal del osciloscopio ha sido posible obtener imágenes que permitan apreciar adecuadamente la forma de las ondas resultantes.

## 5.2 Síntesis Experimental de una Onda Triangular.

Se ha escogido esta forma de onda, ya que la serie

de Fourier correspondiente converge muy rápidamente, (véase la ecuación 1-92). Para la constante  $K$  se ha elegido el valor  $\frac{\pi}{2}$ , con lo que las sumas parciales a sintetizarse corresponderían a la serie:

$$f(x) = \frac{4}{\pi} (\text{sen } x - 0,111 \text{ sen } 3x + 0,040 \text{ sen } 5x - \dots) \quad (5-1)$$

Se obtuvo en el laboratorio la suma de los tres primeros términos de esta serie. Las magnitudes de la tercera y quinta armónicas fueron referidas a la de la componente fundamental, tomada como unidad. El factor constante  $\frac{4}{\pi}$ , que afecta a todos los términos, se consiguió ajustando adecuadamente el control de sensibilidad vertical del osciloscopio.

El montaje completo se indica en el diagrama de bloques de la figura 5-1

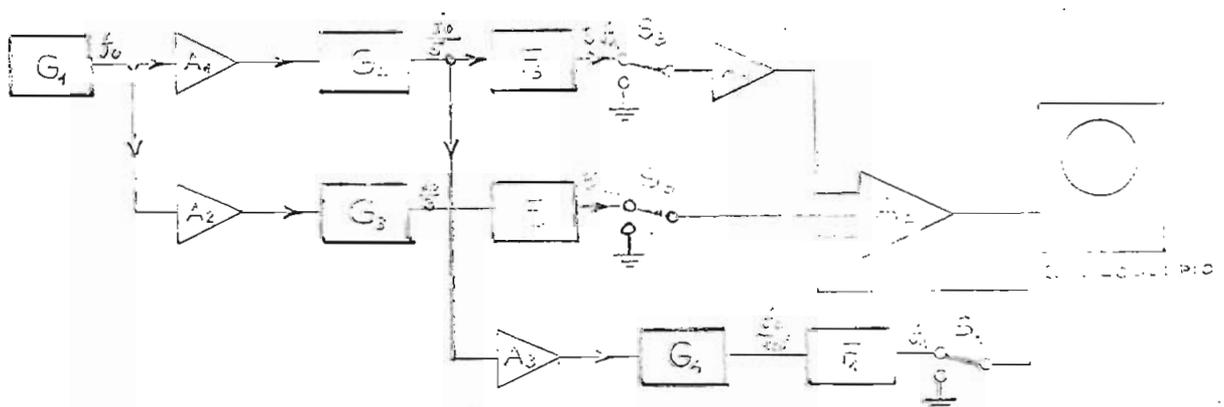


Figura 5-1

La señal sincronizante se obtuvo de un generador modelo RCO-6K de la casa Oltronix. Esta señal, que tenía una frecuencia  $f_0$  de 5 Kc/s., servía para sincronizar dos generadores Hewlett-Packard modelo 200CD ( $G_2$  y  $G_3$  en la figura 5-1) a frecuencias  $f_0/5$  y  $f_0/3$  respectivamente. A fin de evitar interferencias entre las señales de los generadores mencionados fue necesaria la utilización de los inversores  $A_1$  y  $A_2$ . La señal del generador  $G_2$  servía para sincronizar el generador  $G_4$  a una frecuencia  $f_0/15$ , (también en este caso fue necesario el amplificador separador  $A_3$ ). Llamando  $f_1$  a la frecuencia de la señal de salida del generador  $G_4$ , se tiene que las salidas de los generadores  $G_2$  y  $G_3$  son  $3f_1$  y  $5f_1$  respectivamente. Estas señales fueron introducidas a redes  $F_1$ ,  $F_3$ ,  $F_5$ , para el ajuste de fase, (de acuerdo con lo expuesto en la sección 3.4). Finalmente, las señales de frecuencias  $f_1$ ,  $3f_1$ , y  $5f_1$ , con la relación de fase correcta, fueron conducidas al sumador  $A_5$  a través de los interruptores  $S_1$ ,  $S_3$ , y  $S_5$ . Las resistencias de entrada de este sumador (véase la sección 4.2) estaban constituidas por potenciómetros, a fin de poder ajustar correctamente la amplitud de cada señal. Los interruptores  $S_1$ ,  $S_3$ , y  $S_5$  permitían la observación individual de cada

componente o sumas de las mismas. El inversor  $A_4$  tenía como finalidad la obtención del signo menos para el término correspondiente a la tercera armónica.

En la figura 5-2 se puede ver una fotografía del montaje experimental completo.

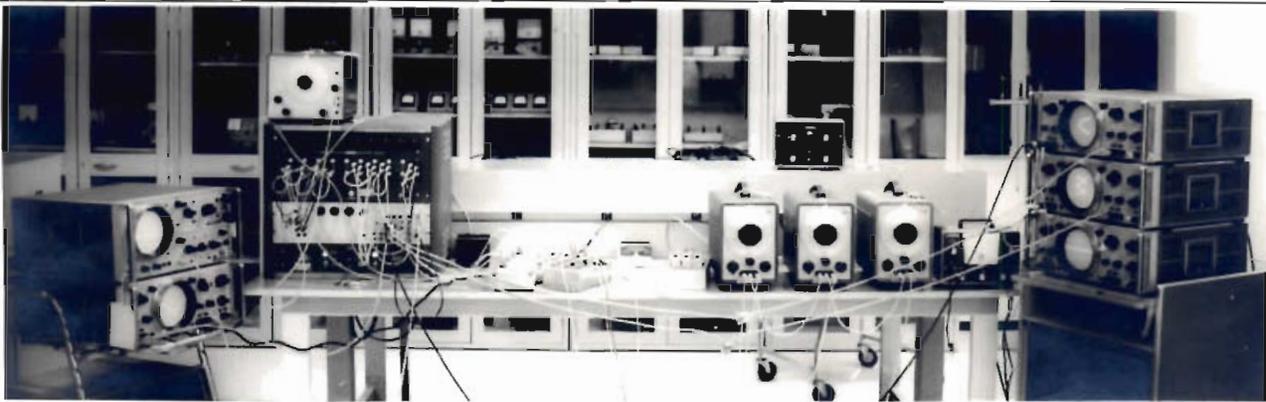


Figura 5-2

Sobre la mesa a la derecha se pueden ver los generadores  $G_2$ ,  $G_3$  y  $G_4$ . En la parte central se encuentran las redes para la corrección de fase y a la izquierda el rack que contenía los amplificadores operacionales. En el osciloscopio superior del lado izquierdo se obtenía la imagen de la onda final resultante. Los otros osciloscopios sirvieron para la determinación de las relaciones correctas de fase. El generador que daba la señal sincronizante primaria se encontraba colocado sobre el rack de los amplificadores operacionales.

En la figura 5-3 se muestra el oscilograma correspondiente a la suma parcial de los dos primeros términos de la ecuación 5-1.

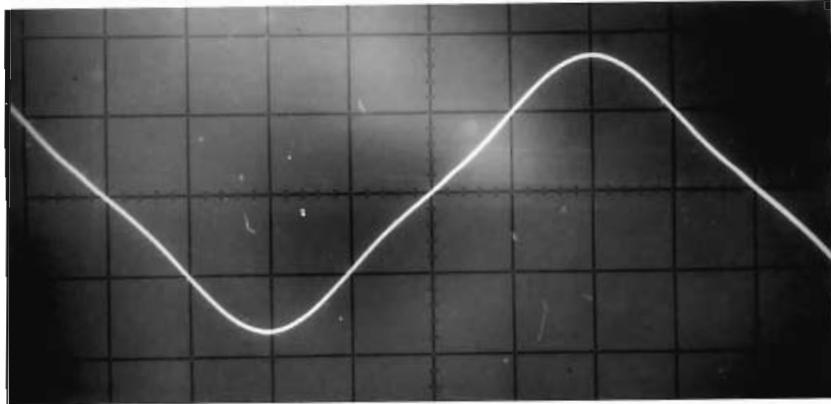


Figura 5-3

La suma parcial de los tres primeros términos de la ecuación 5-1 se puede ver en el oscilograma indicado en la figura 5-4.

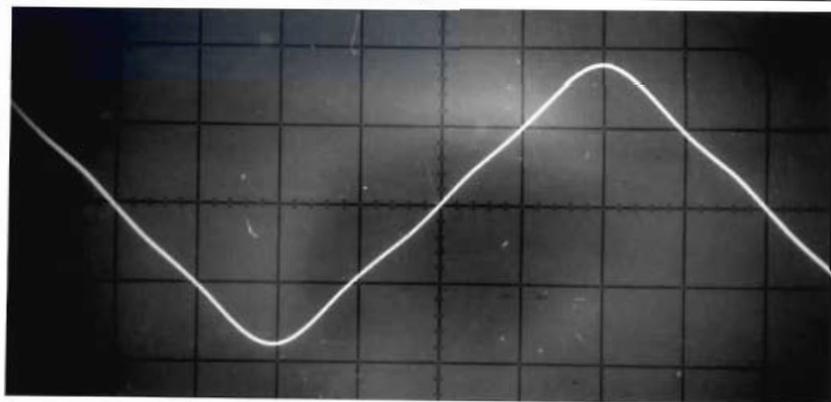


Figura 5-4

Para la obtención de las fotografías 5-3 y 5-4, se ajustaron los controles del osciloscopio de tal manera que  $\frac{\pi}{2}$  correspondiese a dos unidades del retículo de la pantalla del mismo.

### 5.3 Síntesis Experimental de una Onda Cuadrada.

La función que describe esta onda es continua seccionalmente (véase sección 1.6) y la serie de Fourier correspondiente está dada por la ecuación 1-91 . Se ha escogido la constante  $K$  igual a  $\frac{\pi^2}{8}$ , con lo que la serie queda:

$$f(x) = \frac{\pi}{2} (\cos x - 0,333 \cos 3x + 0,200 \cos 5x - \dots) \quad (5-2)$$

El montaje experimental utilizado para la síntesis de sumas parciales correspondientes a esta serie es el mismo que el empleado para la síntesis de una onda triangular y que fue descrito en la sección 5.2 . Unicamente hubo que ajustar adecuadamente la fase y la magnitud de cada componente.

En las figuras 5-5, 5-6 y 5-7 se pueden ver los oscilogramas correspondientes al primer término y a las sumas parciales de los dos y tres primeros términos de la serie in-

dicada en la ecuación 5-2 .

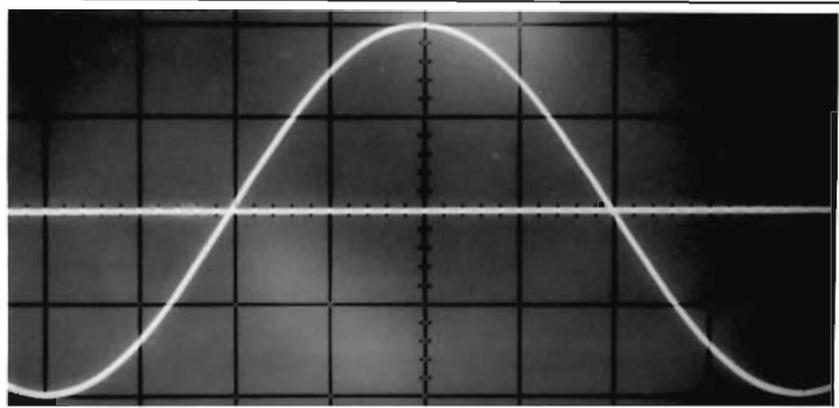


Figura 5-5

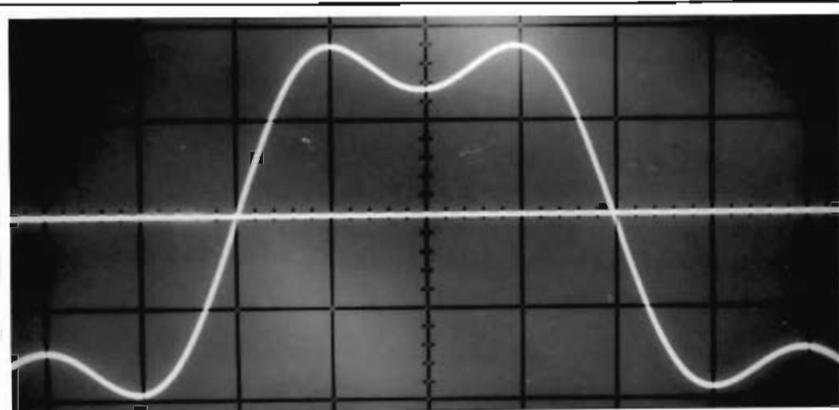


Figura 5-6

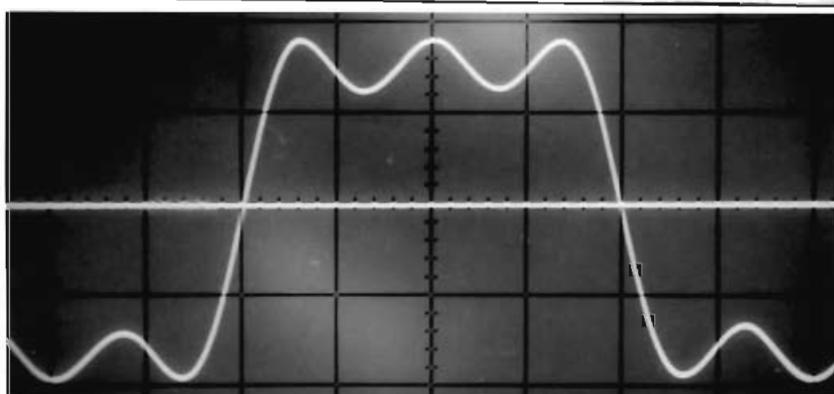


Figura 5-7

Estos oscilogramas fueron obtenidos en un osciloscopio de dos canales, sin señal en el segundo canal para conseguir un trazo horizontal que represente el eje "x". También en este caso dos unidades del retículo corresponden a  $\frac{\pi}{2}$ .

5.4 Síntesis Experimental de una Sinusoide Rectificada en Media Onda.

La serie correspondiente a esta función está dada por la ecuación 1-93 y a diferencia de las otras dos anteriores, incluye además un término constante. Para la constante K se ha escogido el valor  $2\pi$ , con lo cual la serie de la ecuación 1-93 queda:

$$f(x) = 2 + 3,142 \text{ sen } x - 1,333 \text{ cos } 2x - 0,267 \text{ cos } 4x - \dots$$

(5-3)

Para la obtención de armónicas pares se utilizó el principio básico de sincronización indicado en la figura 5-8.

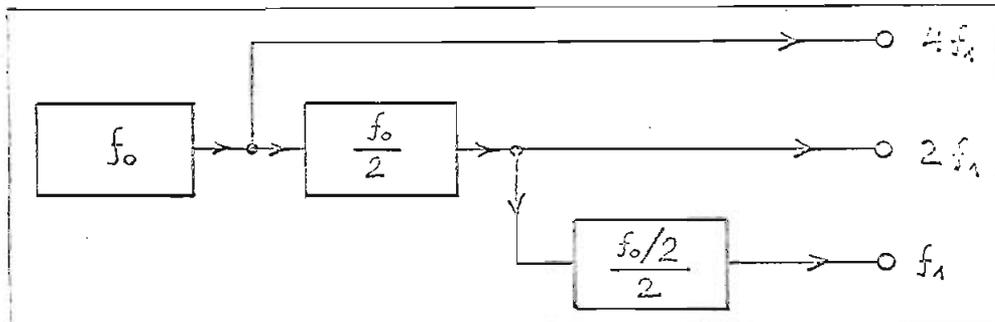


Figura 5-8

El ajuste de fase permitió la obtención de los términos coseno para las armónicas superiores y utilizando amplificadores operacionales se consiguió los signos adecuados para cada término.

Los potenciómetros en el sumador permitieron ajustar la magnitud de los coeficientes al valor correcto. Para la obtención del término constante se recurrió a la utilización de una fuente de corriente continua, cuyo voltaje de salida fue conectado al sumador.

En las figuras 5-9, 5-10, 5-11 y 5-12 se puede ver los oscilogramas correspondientes a las cuatro primeras sumas parciales de la serie indicada en la ecuación 5-3.

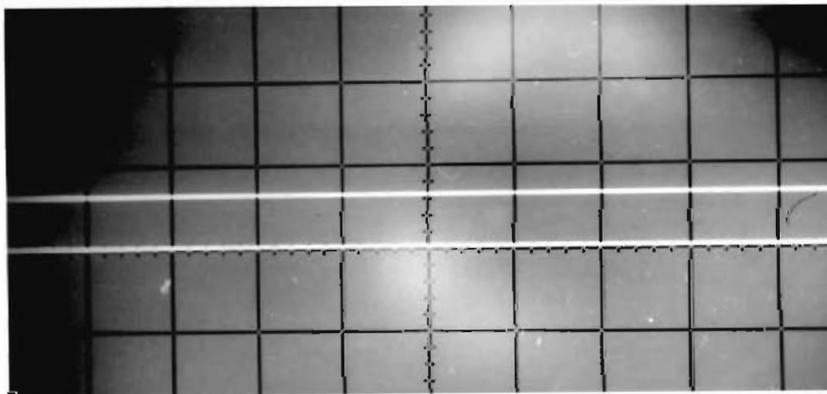


Figura 5-9

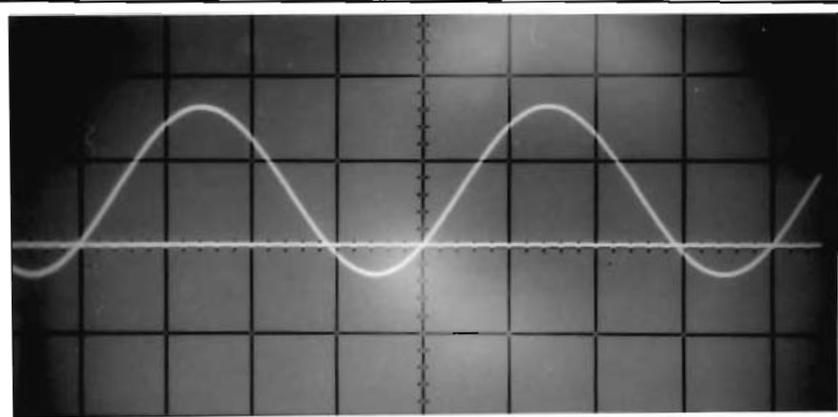


Figura 5-10

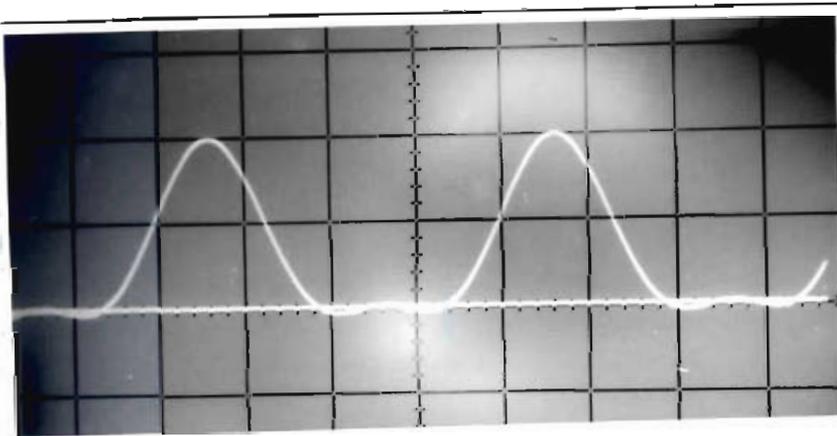


Figura 5-11

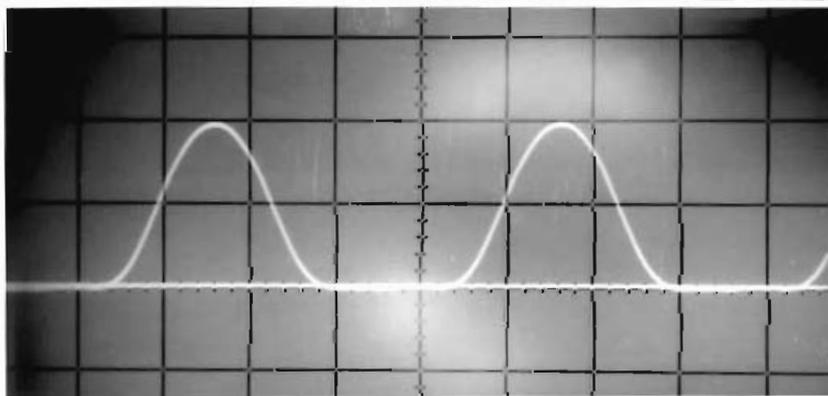


Figura 5-12

En estos oscilogramas corresponde una unidad del retículo a  $\frac{\pi}{2}$  para el eje "x" y a " $\pi$ " para el eje "y" .

### 5.5 Síntesis Experimental de una Sinusóide Rectificada

#### en Onda Completa.

La serie correspondiente a esta función está dada por la ecuación 1-94 . Se ha escogido para la constante K el valor  $\frac{\pi^2}{4}$  con lo que la serie resulta:

$$f(x) = 1,57 - 1,04 \cos 2x - 0,209 \cos 4x - 0,089 \cos 6x \\ - 0,05 \cos 8x - \dots \quad (5-4)$$

En esta serie no existe término de frecuencia fundamental, entonces se puede pensar la frecuencia del término  $\cos 2x$  como fundamental, de modo que las frecuencias de los siguientes términos serían la segunda, tercera y cuarta armónica de dicha frecuencia. Para la obtención de señales con la relación de frecuencias indicada se utilizó la disposición indicada esquemáticamente en la figura 5-13.

Para el ajuste de los valores correctos de fase y amplitud, así como de signo de cada uno de los términos se procedió según lo indicado en secciones anteriores de este capítulo.

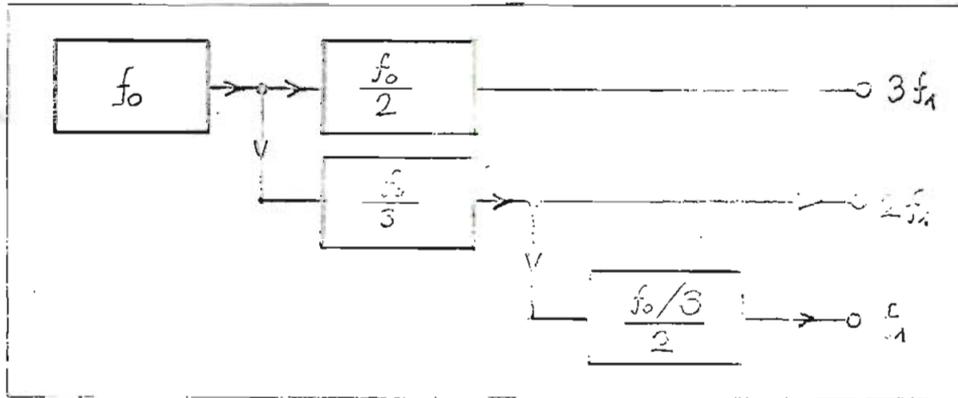


Figura 5-13

En la figura 5-14 se muestra el oscilograma correspondiente a la suma de los dos primeros términos de la serie indicada en la ecuación 5-4 . La señal resultante, más los dos términos siguientes se puede ver en las figuras 5-15 y 5-16.

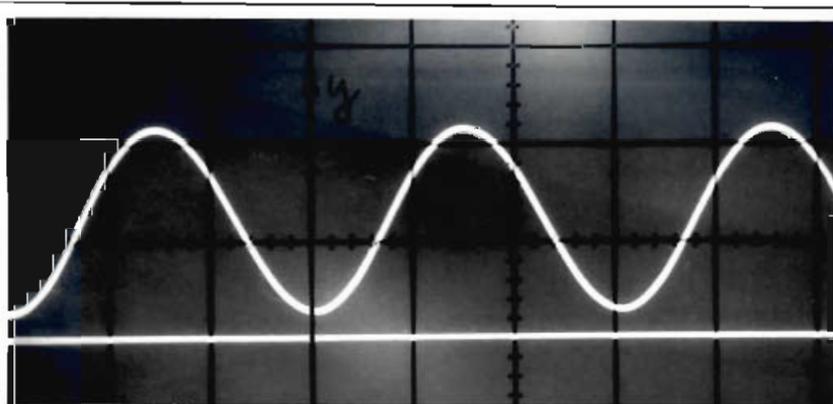


Figura 5-14

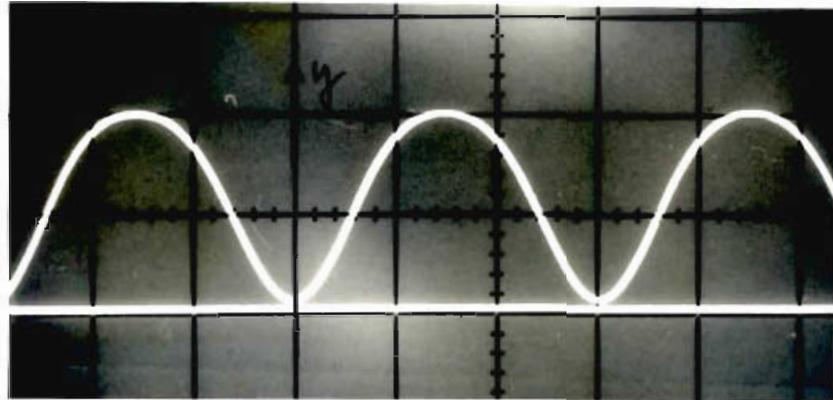


Figura 5-15

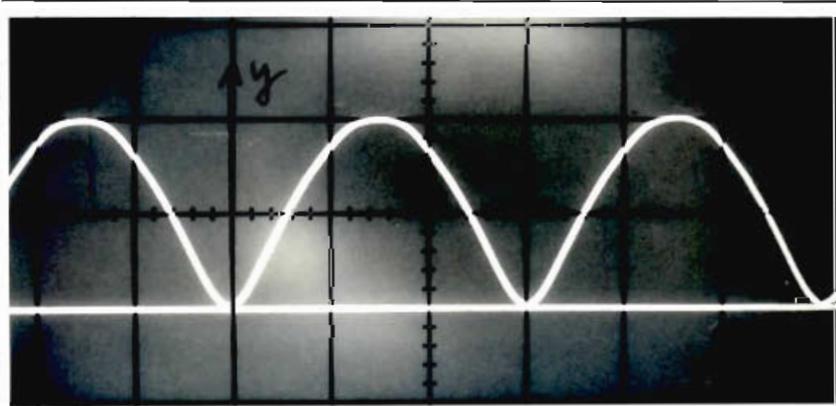


Figura 5-16

En estas últimas fotografías se ha desplazado intencionalmente el eje "y" dos unidades del retículo hacia la izquierda a fin de permitir una apreciación mejor de las formas de onda de las señales resultantes. Tres unidades del retículo corresponden a  $\pi$  .

5.6 Conclusiones.

Habiendo terminado la exposición de los fundamentos teóricos de las series de Fourier y habiendo descrito el experimento realizado cabe hacer algún comentario sobre los resultados obtenidos.

La serie de Fourier correspondiente a la onda triangular (ecuación 5-1) converge muy rápidamente ya que los coeficientes decrecen de valor según el inverso del cuadrado de los números impares. Entonces una suma parcial de dicha serie constituye una buena aproximación a la función, aunque se considere solamente pocos términos. Esto se puede apreciar muy claramente al comparar las figuras 5-3 y 5-4.

En el primer capítulo se demostró que la serie de Fourier de una función que sea continua seccionalmente da como resultado la semi-suma de los límites laterales de dicha función en un punto de discontinuidad. Este hecho se ve verificado experimentalmente al lograr la síntesis de sumas parciales correspondientes a la serie indicada en la ecuación 5-2, como se puede apreciar al comparar la serie de fotografías 5-5 hasta 5-7 .

Al aproximar una función por sumas parciales de un desarrollo en serie se consigue un error menor, si se considera un número mayor de términos. Esto puede ser apreciado de una manera muy clara al comparar las series de fotografías 5-9 hasta 5-12 y 5-14 hasta 5-16. La serie de fotografías correspondiente a la síntesis de una senoide rectificada en media onda muestra de una manera muy clara que si se suprimen las componentes alternas queda solamente la componente continua (término constante) con una magnitud igual al valor medio aritmético.

Se ha verificado pues con este trabajo, de un modo experimental algunos hechos fundamentales concernientes a las series de Fourier.

---

B I B L I O G R A F I A

- CARSLAW, H.S., Introduction to the Theory of Fourier's Series and Integrals, Tercera Edición, Dover Publications, Inc., New York, 1930.
- CHIRLIAN, P.M., Análisis y Diseño de Circuitos Electrónicos, Traducción y Adaptación por Gustavo Nieto y Luis F. Juste, Mc Graw-Hill Book Company, New York, 1967.
- HEATH COMPANY, Heathkit Assembly Manual Audio Generator Model IG-72 , Heath Company, Benton Harbor. Michigan, 1962.
- HEWLETT-PACKARD COMPANY, Operating and Service Manual 200CD Wide Range Oscillator, Hewlett-Packard Company, Loveland. Colorado, 1964.
- KREYSZIG, E., Advanced Engineering Mathematics, John Wiley and Sons, Inc., New York. London, 1966.
- PETERSON, G.R., Basic Analog Computation, The Macmillan Company, New York, 1967.
- PHILBRICK, G.A., Electronic Analog Computing Instruments: Instruction Sheets for the Model K2-XA Operational Amplifier and for the 6009 Operational Manifold, Philbrick Researches, Inc., 1962
- SCHWENKHAGEN, H.F., Allgemeine Wechselstromlehre, Primer Tomo, Springer Verlag, Berlin. Göttingen. Heidelberg, 1951.

SPIEGEL, M.R., Theory and Problems of Laplace Transforms,  
Schaum Publishing Co., New York, 1965.

SVENSKA A.B. OLTRONIX, RC Oscillators RCO-6 and RCO-6K  
Instruction Manual, Svenska A.B. Oltronix, Estocolmo, 1964.

TERMAN, F.E., Electronic and Radio Engineering, Cuarta Edi-  
ción, Mc Graw-Hill Book Company, Inc., New York, 1955.

TERMAN, F.E., Radio Engineers' Handbook, Mc Graw-Hill Book  
Company, Inc., New York, 1943.