

GENERACIÓN AUTOMÁTICA DE MALLAS TRIANGULARES CON CONTROL DE ERROR Y APLICACIONES EN LA INDUSTRIA

**Espinola Gonzales Jesús Edilberto,
Asís López Maximiliano Epifanio**

espinolj@gmail.com, maxasis@hotmail.com

Universidad Nacional “Santiago Antúnez de Mayolo” - UNASAM
Facultad de Ciencias
Ciudad Universitaria - Shancayán
Huaraz -Perú

RESUMEN

Se propone un método de aproximación de un objeto 3D representado por superficies de Bézier; a través de mallas triangulares con control de error.

El procedimiento realizado, se resume en tres etapas principales:

- i) Digitalización del objeto 3D en formato IGES.
- ii) Generación de un conjunto de puntos aleatoriamente en el dominio de la superficie; y
- iii) El mallado de la superficie que representa al objeto 3D, controlando el error con un modelo matemático obtenido en este trabajo y la implementación del algoritmo de mallado obtenido, en Visual Basic.NET para visualizar el resultado.

Palabras Clave: Superficie de Bézier, Mallas Triangulares, Objeto 3D, Formato IGES.

INTRODUCCIÓN

El Diseño Geométrico Asistido por Computador (CAGD) está relacionado con la representación, manipulación y diseño de objetos matemáticos mediante un computador, tales como curvas, superficies y sólidos.

Las herramientas matemáticas del CAGD son principalmente el análisis matemático, el análisis numérico, cálculo variacional, la geometría diferencial, etc. Las principales aplicaciones se encuentran donde se necesitan métodos para describir matemáticamente los objetos que van a ser manufacturados por máquinas controladas por computador, como por ejemplo: en la industria aeronáutica (diseño de alas, fuselajes de un avión, etc.), automotriz (diseño de las partes

de un auto), etc. Otras aplicaciones se encuentran en los gráficos por computador, visualización científica (para describir los fenómenos físicos, geológicos, médicos, etc.).

Para la representación gráfica de estos objetos matemáticos, como para su manejo de edición o modificación, no siempre resulta fácil trabajarlos en sus representaciones algebraicas. Una alternativa es trabajarlas mediante aproximaciones, aquí es donde aparece la idea de aproximar una superficie mediante una malla.

Las ideas básicas para la generación de mallas en geometrías generales pueden clasificarse en tres grandes grupos:

El primero que mencionaremos consiste en la modificación del dominio original por la remoción sucesiva de triángulos a partir de su borde. Esta idea es comúnmente conocida como Método frontal, o método del frente de avance, debido a la forma en que evoluciona la frontera del dominio durante el proceso de generación. El método frontal fue utilizado con éxito para la generación de mallas de elementos finitos en dos dimensiones, y ha sido extendido al caso tridimensional.

Otra alternativa a la generación de mallas consiste en generar puntos sobre el dominio de alguna manera, y luego conectarlos para formar una triangulación que satisfaga alguna propiedad de optimalidad, esta triangulación es conocida como Triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos.

Un tercer método se basa en la utilización de una cuadrícula que se superpone al dominio, las celdas exteriores se descartan, mientras que el resto se puede subdividir sucesivamente de acuerdo al grado de discretización deseado en cada región del dominio. Finalmente se dividen las celdas interiores en triángulos, de modo de mantener la compatibilidad con las celdas vecinas. Las celdas que intersecan a la frontera requieren un tratamiento especial (pueden triangularse por ejemplo utilizando el método frontal). Esta técnica es conocida como “método de árboles cuaternarios”, debido a la estructura de datos implícitos en la subdivisión sucesiva de cada celda, y ha sido utilizado en generación de mallas de elementos finitos tanto en dos como en tres dimensiones.

Una de las técnicas más utilizadas para realizar el mallado de objetos es la técnica de Delaunay; Es una técnica muy versátil, que permite asociar a una nube de puntos en 2 o 3

dimensiones un mallado con buenas propiedades geométricas (es decir los triángulos o tetraedros son tan próximos a ser equiláteros como es posible siguiendo la distribución de puntos).

En el diseño geométrico se manipula el diseño de una curva o superficie por el cambio de los llamados puntos de control. Las superficies y curvas se construyen por polinomios de Bézier o B-splines, en ambos casos estas superficies o curvas se encuentran en la capsula convexa de sus puntos de control. Las curvas pasan por lo general por el primer y último punto de control y las superficies son limitadas por curvas de Bézier o B-splines.

OBJETIVOS

Objetivo General

El objetivo de este trabajo es, a partir de Superficies en representación paramétrica de Bézier, obtener para cada superficie una malla triangular con control de error de la malla respecto de la superficie que representa al objeto 3D. Así como la implementación de un programa de mallado de superficie que visualice dicho resultado en Visual Basic.NET.

Objetivos Específicos.

- Diseñar un programa computacional, con interfaz gráfica adecuada que pueda generar mallas a partir de Superficies Bézier.
- Presentar aplicaciones del método desarrollado en la industria del automóvil.
- El programa debe ser capaz de generar mallas a partir de las Superficies de Bézier y controlar el error cometido al aproximar al objeto a través de mallas triangulares.
- Crear un algoritmo óptimo que permita el mallado de superficies con control del error.

RESULTADOS

ALGORITMO PARA EL MALLADO

El algoritmo utilizado en este trabajo para el mallado del dominio paramétrico de la superficie de Bézier es el algoritmo de Triangulación de Delaunay y se construye de la siguiente manera:

Se ordenan los puntos de datos según una clave compuesta primero por su coordenada x y luego por su coordenada y . Esta ordenación tiene como fin disminuir los tiempos de búsqueda de los puntos que

cumplan las condiciones de mínimas distancias o máximos ángulos.

Para la implementación del mallado del conjunto de puntos generados aleatoriamente en el dominio paramétrico se ha utilizado el tercer algoritmo de Delaunay pero con una pequeña modificación; es decir el algoritmo queda así:

Paso 1: Creación de un triángulo ficticio, el cual abarca todos los puntos generados, es decir, encierra el conjunto de puntos usando una triangulación ficticia.

Paso 2: Avanza por incremento, insertando nuevos puntos a la triangulación existente.

Paso 3: Por cada punto de la nube, buscar el triángulo que lo contiene, es decir la búsqueda es hecha por todos los triángulos cuyos círculos inscritos contienen el nuevo punto. Para ello se realiza los siguientes pasos:

- Sea T el triángulo que contiene al punto p a insertar. Unir p con cada uno de los vértices del triángulo T , creando tres nuevos triángulos.
- Por cada uno de los tres triángulos, generados al insertar un punto se realiza el test del círculo circunscrito; es decir se legalizan las aristas.

Paso 4: Una vez insertado todos los puntos se borran todos los lados del triángulo ficticio.

CONTROL DE ERROR PARA EL MALLADO

Esta propuesta se concentra en encontrar una estimación matemática que permita modelar los detalles finos de las Superficies de los objetos; para ello, se propone un método para la generación de la Superficie de Bézier que incorporen en su construcción mallas triangulares, tal que se aproxime a la geometría de la superficie del objeto físico obtenido del fichero IGES, la generación de malla se realiza a partir de un conjunto de puntos desorganizados que se generan aleatoriamente en el dominio paramétrico de la superficie de Bézier del objeto original.

EL modelo que se plantea en este trabajo para resolver el problema de aproximar la superficie de un objeto a través de mallas triangulares; es decir el modelo matemático para controlar el error cometido al aproximar la superficie del objeto es el siguiente:

Dado un punto $\bar{P}_i \in S(u, v)$ de la superficie y un punto \bar{P} cercano a la superficie $S(u, v)$ nuestro problema es calcular $\|S(u, v) - \bar{P}\|$ tal que sea mínimo.

Es decir dado un punto \bar{P} cercano a la superficie, el sistema a resolver es:

$$\text{Minimizar } f(u, v) = \|S(u, v) - \bar{P}\|$$

Que es equivalente a minimizar

$$f(u, v) = \|S(u, v) - \bar{P}\|^2$$

Si igualamos las derivadas parciales a cero obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial v}(u, v) \end{bmatrix} = 0$$

Desarrollando tenemos:

$$A = \begin{bmatrix} 2(S(u, v) - \bar{P}) \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \\ 2(S(u, v) - \bar{P}) \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \end{bmatrix} = 0$$

El cual es un sistema de ecuaciones no lineales y lo resolveremos utilizando el método de Newton-Rapson para un sistema no lineal.

Es decir utilizaremos el siguiente algoritmo:

Paso 1: Tomar $k=1$

Paso 2: Mientras $k \leq N$, hacer los pasos 3-7

Paso 3: Calcular A y el jacobiano J en el punto $x = (u_0, v_0)$

Paso 4: Resolver el sistema para y :
 $Jy = -A$

Paso 5: Tomar $x = x + y$

Paso 6: Si $\|y\| < tol$, entonces salida de la solución aproximada

Paso 7: $k = k + 1$

Paso 8: termina la iteración

Donde

N es el número de iteraciones.

tol es el error cometido al resolver el sistema.

$x = (u_0, v_0)$ es el punto inicial

J es el matriz jacobiano y su expresión es:

$$J = 2 \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$a = \left(\frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \right)^2 + (S(u, v) - \bar{P}) \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u^2}$$

$$b = \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} + (S(u, v) - \bar{P}) \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial v \partial u}$$

$$c = \frac{\partial S(u, v)}{\partial u} \frac{\partial S(u, v)}{\partial v} + (S(u, v) - \bar{P}) \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial u \partial v}$$

$$d = \left(\frac{\partial S(u, v)}{\partial v} \right)^2 + (S(u, v) - \bar{P}) \frac{\partial^2 S(u, v)}{\partial v^2}$$

En este trabajo el punto \bar{P} considerado como cercano a la superficie es obtenido calculando el centroide de cada triángulo del mallado realizado al objeto.

EJECUCIÓN DEL PROGRAMA IMPLEMENTADO

Para prueba del programa se ha utilizado el fichero IGES que representa la capota del carro:

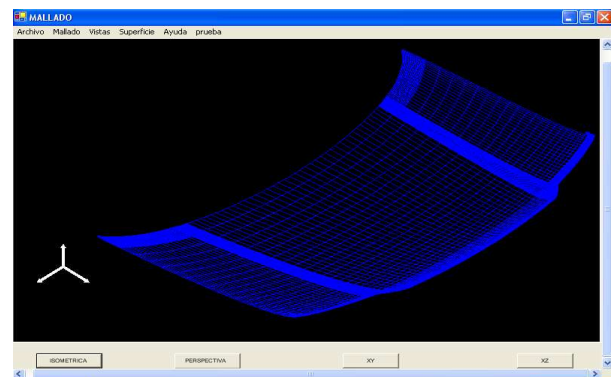


Figura 1: Visualización del archivo IGES del objeto vista Isométrica

Luego tomamos una sola superficie para realizar el mallado con el programa implementado

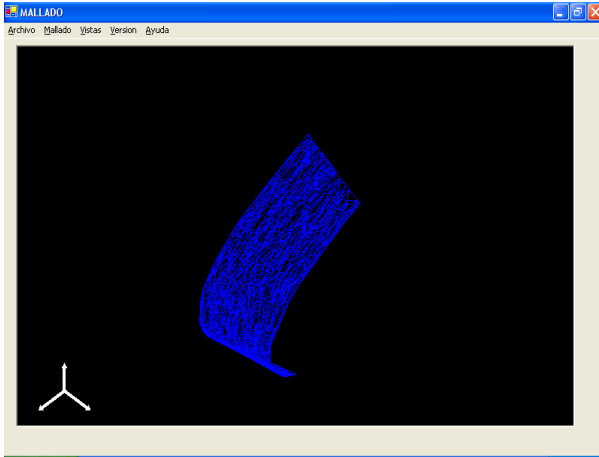


Figura 2: Visualización isométrica del mallado

CONCLUSIONES

- Se ha planteado un modelo matemático adecuado a partir de las Superficies de Bézier, para el control de error en la aproximación de objetos 3D a través de mallas triangulares.
- Se ha creado un algoritmo que permite generar mallas automáticamente para Superficies de Bézier controlando el error. Esto último muy importante en las aplicaciones industriales donde se aplica el método de elementos finitos.
- Se ha creado un software con prestaciones gráficas que implementa el algoritmo, desarrollado en este trabajo, que realiza el mallado con control de error a partir de Superficies de Bézier.
- La aplicación desarrollada lee la información geométrica de las Superficies desde ficheros en formato IGES. Luego realiza el proceso de mallado, y presenta el resultado de forma gráfica; también se puede obtener los resultados numéricos
- El mallado que se obtiene es de tipo conforme con control de error, por lo que es muy importante para procesos de simulación en la industria, donde se usa el método de los elementos finitos.

El mallado de objetos bidimensionales y tridimensionales es un tema de gran

importancia en muchas aplicaciones pero se utiliza generalmente para los siguientes propósitos:

- Visualización de un objeto en un ordenador. Las primitivas básicas de visualización son los triángulos o tetraedros, por lo tanto en general, cualquier objeto para poder ser visualizado requiere previamente ser dividido (mallado) utilizando estas primitivas.
- Diseño Industrial. Para diseñar puentes, aviones, carros, barcos, etc. es muy útil tener un modelo de objeto en tres dimensiones que se utilice para simular en un ordenador el comportamiento físico del modelo.

REFERENCIAS BIBLIOGRAFICAS

- [1]. BARNHILL R.E., BOEHM W.(1984) "*Computer Aided Geometric Design*". Vol.1.
- [2]. BURDEN, R.L. Y FAIRES, J.D.(2002). "*Análisis Numérico*". Séptima edición. Editorial Internacional Thompson Editores. México
- [3]. CARVALHO P, FIGUEIREDO L, GOMES J.(2003), "*Mathematical Optimization in Graphics and Vision. Monografías del IMCA*", Perú,.
- [4]. DOBSON, RICK(2002). "*Programación de Microsoft Sql Server 2000 con microsoft Visual Basic.Net*". Editorial McGraw Hill. España.
- [5]. FARIN, GERALD(1993). "*Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design A practical Guide*". Second Edition. Academic Press, Inc. 3rd Ed.
- [6]. FOLEY ET AL.(1983) "*Fundamentals of interactive computer graphics*". Editorial Addison Wesley,.
- [7]. FOLEY, J., A. VAN DAM, S. FEINER, Y J. HUGHES(1996). "*Computer Graphics: Principles and Practice*". 2nd ed. in C, editorial Addison-Wesley.
- [8]. GEORGE P.L.(1991). "*Automatic Mesh Generation*". Edit JOHN Wiley & Sons, New York.
- [9]. HOSCHEK J, LASSER D. (1993) "*Fundamentals of Computer Aided Geometric Design*". A K Peters.
- [10]. HEARN, DONALD Y PAULINE M. "*Gráficas por computadora*". Segunda edición. Editorial Prentice Hall.

- [11]. IGES/PDES (1991) "Organization: The Initial Graphics Exchange Specification" (IGES) Version 5.1. National Computer Graphics Association. Virginia - USA.
- [12]. KREIYSZIG, E. "Matemáticas Avanzadas para Ingeniería". Editorial Limusa.
- [13]. LANCATER P. AND SALKAUSKAS(1997). "Curve and surface Fitting ,And Introsuction" Editorial Academic Press .
- [14]. LO S. H.(1685) "A new mesh generation scheme for arbitrary planar domain,Int. J. Numer. Methods".
- [15]. MORTENSON E. M.(1985) "Geometric Modeling".Editorial John Wiley & Sons.
- [16]. NAKAMURA, S. "Métodos Numéricos Aplicados con Software". Editorial Prentice Hall.
- [17]. NIEVES ANTONIO Y FEDERICO C. DOMÍNGUEZ (2003). "Métodos numéricos Aplicaciones a la Ingeniería". Segunda edición. Compañía editorial Continental. México.
- [18]. PORTELA, A. AND CHARAFI(2002). "A. Finite Elements Using Maple".Editorial Springer. Berlin..
- [19]. PATRIKALAKIS N. M.(1989). "Aproximate Conversion of Rational Splines. Computer Aided Geometric Design" .Sexta edicion.
- [20]. ROGERS D. F., ADAMS J. A(1990). "Mathematical Elements for Computer Graphics".Editorial McGraw Hill. 2nd Ed.
- [21]. ROGERS DAVID F.(2001). "An Introduction to Nurbs". Academic Press San Diego, Annapolis, USA ,.
- [22]. R. LÖHNER AND P. PARIKH(1988). "Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing front method. Int. j. numer. methods fluids".
- [23]. RAFAEL. FERRÉ MASIP."Diseño Industrial por computador 2. Colección Productiva".
- [24]. VALLIERE D. (1990). "Computer Aided Design in Manufacturing". Prentice Hall.

- [25]. VDA87 VDA WORKING GROUP 'CAD/CAM'(1987). "VDA Surface, Data Interface (VDAFS) Ver. 2.0. Verband der Automobilindustrie e.v. (VDA)". Frankfurt.
- [26]. PRAUTZSCH H., BOEHM W. PALUSZNY M.(2002). "Methods of Bézier and B-Spline".Editorial Springer-Verlag.Berlin.

De los autores



JESUS E. ESPINOLA GONZALES actualmente es profesor de Ciencias de la Computación en la Facultad de Ciencias – UNASAM, Universidad Nacional en Huaraz (Perú). Obtuvo su Bachillerato en Ciencias Físicas y Matemáticas en la Universidad Nacional de Trujillo (Perú), y su Maestría y Doctorado en Ciencias de la Computación en la Universidad de Cantabria (España). Ha trabajado como investigador, desarrollando algoritmos matemáticos en CANDEMAT (Industria dedicada a la fabricación de moldes para carrocerías de vehículos y fuselaje de aviones) y en la Universidad de Cantabria. Sus líneas de investigación son la modelación geométrica, la computación gráfica y la optimización.



MAXIMILIANO E. ASIS LÓPEZ es profesor de Matemáticas en la Facultad de Ciencias – UNASAM, Universidad Nacional en Huaraz (Perú). Obtuvo su Bachillerato en Matemática y su Maestría en Computación e Informática en la UNASAM. Actualmente está realizando su tesis doctoral en la misma Universidad. Las líneas de investigación de su interés son el CAGD, Computación Gráfica, y los Métodos Numéricos.