

# **ESCUELA POLITÉCNICA NACIONAL**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**RELACIÓN ESTADÍSTICA DE VARIABLES DE CALIDAD  
DE PROCESOS PRODUCTIVOS EN “FRANZ  
VIEGENER”, CASO: DIVISIÓN SANITARIOS**

**PROYECTO PREVIO A LA OBTENCIÓN  
DEL TÍTULO DE  
INGENIERO MATEMÁTICO**

**PAÚL WILLIAM CASALIGLLA GER**

**DIRECTOR:  
DR. HOLGER CAPA SANTOS**

[holger.capa@epn.edu.ec](mailto:holger.capa@epn.edu.ec)

[paulwcg@hotmail.com](mailto:paulwcg@hotmail.com)

## **DECLARACIÓN**

Yo, Paúl William Casalglla Ger, declaro bajo juramento que el trabajo aquí descrito es de mí autoría; que no ha sido previamente presentada para ningún grado o calificación profesional; y que he consultado las referencias bibliográficas que se incluyen en este documento.

A través de la presente declaración cedo mis derechos de propiedad intelectual correspondientes a este trabajo, a la Escuela Politécnica Nacional, según lo establecido por la Ley de Propiedad Intelectual, por su Reglamento y por la Normatividad Institucional vigente.

---

Paúl William Casalglla Ger

## **CERTIFICACIÓN**

Certifico que el presente trabajo fue desarrollado por Paúl William Casalglla Ger, bajo mi supervisión.

---

Dr. Holger Capa Santos  
DIRECTOR DEL PROYECTO

## **AGRADECIMIENTO**

Expreso mi profundo  
agradecimiento al Dr. Holger  
Capa Santos, Director del  
Proyecto, por la gran colaboración  
brindada de su parte para la  
elaboración del mismo.

## **DEDICATORIA**

A mis padres por su apoyo condicional, por su gran esfuerzo para ampliar mis conocimientos y por estar ahí cuando más los necesité. A mis hermanos por la asesoría, sabiduría y consejos plasmados en este trabajo. A mis amistades por sus ideas, intercambios, alegría, confianza y compañerismo durante la etapa estudiantil. Y a mi novia Tatiana por ayudarme y apoyarme en los momentos más difíciles. Dios los bendiga a todos.

Paúl.

# CONTENIDO

<b>DECLARACIÓN</b> .....	<b>i</b>
<b>CERTIFICACIÓN</b> .....	<b>ii</b>
<b>AGRADECIMIENTO</b> .....	<b>iii</b>
<b>DEDICATORIA</b> .....	<b>iv</b>
<b>CONTENIDO</b> .....	<b>v</b>
<b>RESUMEN</b> .....	<b>ix</b>
<b>PRESENTACIÓN</b> .....	<b>x</b>
<b>CAPÍTULO 1. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN.....</b>	<b>1</b>
1.1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.2 TÍTULO DEL PROYECTO .....	2
1.3 OBJETIVOS .....	2
1.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN .....	3
1.4.1 Proceso de Control de Materia Prima .....	4
1.4.2 Proceso de Elaboración de Barbotina .....	4
1.4.3 Proceso de Preparación de Esmaltes .....	6
1.4.4 Proceso de la sección Matricería .....	7
1.4.5 Proceso de la sección Yesería .....	7
1.4.6 Proceso de la sección Colado y Secado .....	8
1.4.7 Proceso de la sección Terminación y Esmaltación .....	10
1.4.7.1 Terminación .....	10
1.4.7.2 Esmaltación .....	11
1.4.8 Proceso de la sección Hornos .....	12
1.4.9 Proceso de la sección Clasificación y Montaje .....	13
1.4.10 Proceso de la sección Control de Calidad .....	14
1.4.11 Proceso de la sección Programación y Control de la Producción PCP .....	15
<b>CAPÍTULO 2. TÉCNICAS ESTADÍSTICAS UTILIZADAS .....</b>	<b>16</b>
2.1 ELEMENTOS ESTADÍSTICOS BÁSICOS .....	16
2.1.1 Introducción .....	16

2.1.2	Media, Varianza y Moda de una variable aleatoria .....	16
2.1.3	Covarianza y Correlación de variables aleatorias .....	17
2.1.4	Distribución Normal Multivariante .....	20
2.2	HERRAMIENTAS DE CONTROL .....	21
2.2.1	Introducción .....	21
2.2.2	Diagramas de Pareto .....	21
2.2.3	Gráficos de Control .....	23
2.2.3.1	Gráficos de Control por atributos.....	24
2.3	REGRESIÓN MÚLTIPLE .....	26
2.3.1	Introducción .....	26
2.3.2	Estimación de los Coeficientes de los Regresores .....	26
2.3.3	Propiedades del Estimador de Mínimos Cuadrados .....	27
2.3.4	Validación del Modelo de Regresión .....	28
2.3.4.1	Coeficiente de Determinación .....	28
2.3.4.2	Significancia de los parámetros estimados del modelo ...	29
2.3.4.2.1	Contrastes de significación de conjuntos de parámetros .....	29
2.3.4.2.2	Contrastes de significación individual .....	29
2.4	ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES .....	30
2.4.1	Introducción .....	30
2.4.2	Bases geométricas y algebraicas de los Principales Componentes .....	31
2.4.3	Criterios para seleccionar el número de Componentes .....	35
2.4.3.1	Gráfico de Sedimentación .....	36
2.4.3.2	Retención de Componentes de acuerdo a la varianza total explicada .....	36
2.4.3.3	Promedio de los valores propios .....	36
2.4.3.4	Prueba de significación de los componentes .....	37
2.4.4	Información contenido en el análisis de Componentes Principales .....	37
2.5	ANÁLISIS DE CONGLOMERADOS .....	39
2.5.1	Introducción .....	39
2.5.2	Medidas de proximidad .....	39

2.5.2.1	Medidas de semejanza .....	40
2.5.2.2	Medidas de desemejanza .....	40
2.5.2.2.1	Distancia euclídea .....	40
2.5.2.2.2	Distancia euclídea al cuadrado .....	40
2.5.3	Técnicas de Clasificación Jerárquicas .....	41
2.5.3.1	Método de Vinculación Simple .....	41
2.5.3.2	Método de Vinculación Completo .....	42
2.6	ANÁLISIS DISCRIMINANTE .....	42
2.6.1	Introducción .....	42
2.6.2	Cálculo de las funciones discriminantes .....	43
2.6.2.1	Porcentaje relativo .....	45
2.6.2.2	Coeficiente de Correlación Canónica .....	45
2.6.2.3	Estadístico Lambda de Wilks .....	46
2.6.3	Interpretación de los resultados .....	46
2.6.3.1	Estadístico de Wilks .....	46
2.6.3.2	Distancia de Mahalanobis .....	47

### **CAPÍTULO 3. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL PROCESO DE**

#### **PRODUCCIÓN..... 48**

3.1	DETERMINACIÓN DE DEFECTOS CRÍTICOS EN LA PRODUCCIÓN Y ECONÓMICAMENTE REPRESENTATIVOS .....	48
3.1.1	Introducción .....	48
3.1.2	Objetivos .....	49
3.1.3	Descripción de los Datos .....	49
3.1.4	Análisis Estadístico .....	49
3.2	ESTUDIO DE POSIBLES RELACIONES ENTRE DEFECTOS DE PRODUCCIÓN .....	56
3.2.1	Objetivos .....	56
3.2.2	Planteamiento del Problema .....	57
3.2.3	Descripción de los Datos .....	57
3.2.4	Metodología .....	57
3.2.5	Análisis Estadístico .....	58
3.3	DETERMINACIÓN DE CONDICIONES QUÍMICAS Y FÍSICAS DE	



BARBOTINA INFLUYENTES EN CONDICIONES TÉCNICAS DE COLADO .....	70
3.3.1 Objetivos .....	70
3.3.1.1 Objetivo general .....	70
3.3.1.2 Objetivos específicos .....	71
3.3.2 Planteamiento del Problema .....	71
3.3.3 Descripción de los Datos .....	71
3.3.4 Desarrollo .....	72
3.3.4.1 Varriables SEB27 y SEB28.....	72
3.3.4.2 Variables SEB12, SEB25 y SEB26.....	75
3.3.5 Conclusiones .....	77
3.3.6 Desarrollo .....	78
3.3.6.1 Línea de Producción # 3 .....	78
3.3.6.1.1 Variable SEB27 .....	77
3.3.6.1.2 Variable SEB32.....	79
3.3.6.1.3 Variable SEB33.....	79
3.3.6.2 Línea Piloto .....	80
3.3.6.2.1 Primeras coladas, ensayos completos.....	80
3.3.6.2.1.1 SEB12... .....	80
3.3.6.2.1.2 SEB25 y SEB29.....	80
3.3.6.2.1.3 SEB30 .....	80
3.3.6.2.2 Totalidad Coladas .....	82
3.3.6.2.2.1 SEB12.....	81
3.3.6.2.2.2 SEB25 y SEB29 .....	81
3.3.6.2.2.3 SEB30.....	82
3.3.7 Conclusiones .....	83
<b>CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES .....</b>	<b>86</b>
4.1 CONCLUSIONES .....	86
4.2 RECOMENDACIONES .....	87

## **ANEXOS**

## **BIBLIOGRAFÍA**

## **RESUMEN**

En el presente trabajo se desarrolla una metodología de utilización de técnicas y herramientas estadísticas en la mejora de procesos de producción, combinando técnicas descriptivas multidimensionales como son: Análisis de Componentes Principales, Regresiones Múltiples, Conglomerados Jerárquicos y Análisis Discriminantes; y Herramientas de Control como son: Diagramas de Pareto y Gráficos de Control; de tal manera que se proporcione resultados teóricos para el mejoramiento del proceso productivo de porcelana sanitaria, con la identificación de relaciones de defectos y entre variables de procesos consecutivos como son: Elaboración de Barbotina, a través del control de condiciones de la Barbotina por medio de ensayos en laboratorios; y Colado principalmente con los tiempos de tomas de espesores, espesores y plasticidades, de acuerdo a las necesidades de “F.V. Área Andina S.A”.

## PRESENTACIÓN

La Estadística Multivariante es la parte de la Estadística y del Análisis de Datos que permite el estudio, descripción, análisis, e interpretación de información proveniente de un conjunto de observaciones de un número  $p > 1$  de variables estadísticas sobre una muestra de  $n$  individuos, analizadas conjuntamente. Por tal razón, consiste en una colección de métodos utilizados en el Análisis de Datos, cuya meta principalmente es la simplificación de la información. Esta simplificación se puede expresar en términos de reducción de dimensionalidad.

La importancia de la Estadística Multivariante ha ido evolucionando en los últimos años para convertirse en un pilar para resolver los problemas de la vida cotidiana, aplicándose las diferentes técnicas, métodos y análisis en problemas financieros, de ciencias biológicas y sociales, químicas, físicas, psicológicas, médicas, de marketing, productivas, etc.

Algunas técnicas estadísticas de las mencionadas se utilizan en este trabajo, conforme al objetivo planteado y por las características de las variables relevantes.

Se menciona y aclara que para realizar el presente Proyecto de Titulación “Relación Estadística de Variables de Calidad de Procesos Productivos en “Franz Viegner”, Caso: División Sanitarios”, se firmó un Convenio Interinstitucional de confidencialidad de datos y propiedades de información entre la Escuela Politécnica Nacional y F.V. Área Andina S.A. (firmado el 13 de abril de 2007), por el cual se prohíbe la publicación de datos relacionadas con variables de F.V. Área Andina y la publicación de resultados obtenidos en el análisis, razón para que se codifiquen las variables de tal manera que las conclusiones no sean difundidas.

# **CAPÍTULO 1. DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN**

## **1.1 INTRODUCCIÓN**

“F.V. Área Andina, División Sanitarios” es una empresa multinacional estructurada con capitales nacionales y extranjeros, dedicada a la elaboración y comercialización de porcelana sanitaria, en toda una gama de productos, como son: inodoros, depósitos, lavatorios, columnas de lavatorios, urinarios, accesorios (jaboneras, toalleros, etc.), etc., clasificados en tres clases de producción: económica, intermedia y de lujo; además, que se producen en diferentes colores, como son: blanco, bone, mora, azul mediterráneo, verde primavera, azul cobalto, arena, azul cielo, caribe shell, negro, merlot, ciprés y gris.

El proceso de producción cuenta con diferentes secciones o etapas. Estas secciones son: Materia Prima, Elaboración de Barbotina, Preparación de Esmaltes, Matricería, Yesería, Colado y Secado, Terminación y Esmaltación, Hornos; y Clasificación y Montaje, las cuales se encargan de controlar, elaborar y proporcionar a la sección siguiente, si fuere el caso, de productos y/o insumos acordes para una buena producción. Adicional a estas secciones, se debe mencionar también a Control de Calidad y a Programación y Control de Producción, la cual rige la producción en la mayoría de secciones anteriores.

Como está estructurado el proceso, el producto puede ser recuperado hasta antes de la sección Hornos; una vez salido el producto de ahí, si tuviese algún problema crítico es imposible recuperarlo. Como en todo proceso en línea, se registran defectos o productos defectuosos, lo que ocasiona pérdidas cuantiosas para la empresa. Debido a esto, los productos una vez salidos de la Sección Hornos son clasificados de acuerdo a cinco calidades, siendo la mas negativa, económicamente para la empresa, la Quinta Calidad, por cuanto el producto clasificado en esta categoría tiene que desecharse.

## **1.2 TÍTULO DEL PROYECTO**

RELACIÓN ESTADÍSTICA DE VARIABLES DE CALIDAD DE PROCESOS PRODUCTIVOS EN “FRANZ VIEGENER”, CASO: DIVISIÓN SANITARIOS.

## **1.3 OBJETIVOS**

### **1.3.1 Objetivo General**

Relacionar variables de calidad y productivas en el proceso de elaboración de porcelana sanitaria para determinar posibles relaciones entre defectos y entre variables de los procesos Elaboración de Barbotina y Colado, respectivamente.

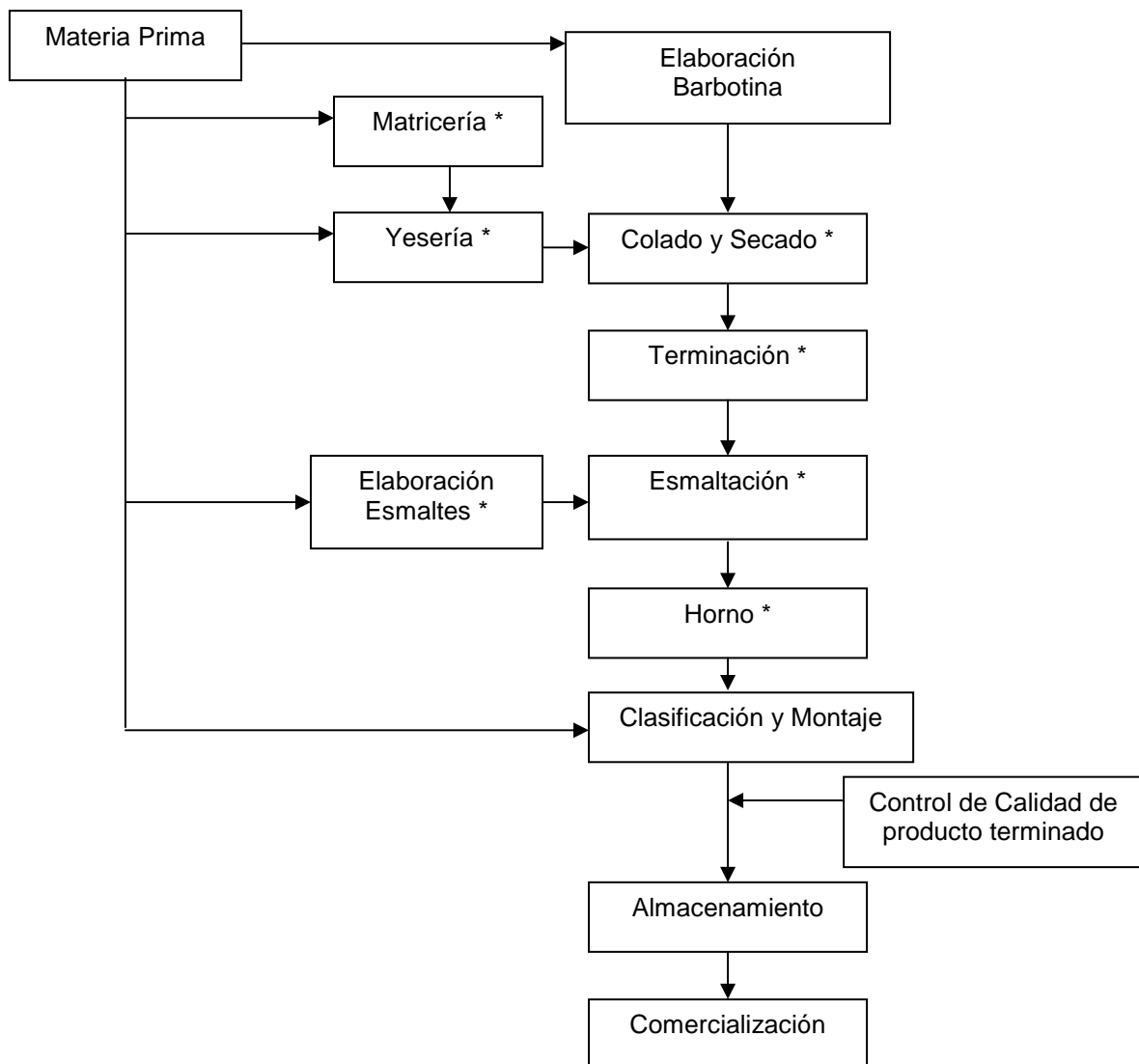
### **1.3.2 Objetivos Específicos**

- i) Aplicar técnicas estadísticas para reconocimiento de posibles relaciones entre defectos de producción.
- ii) Aplicar métodos estadísticos para encontrar variables influyentes del control de condiciones de Barbotina en Colado
- iii) Proporcionar resultados teóricos en la determinación de defectos críticos y fuera de control en la producción, a través de gráficos de control.
- iv) Planificar la obtención de datos confiables en los procesos productivos de elaboración de Barbotina y Colado.
- v) Analizar la información obtenida para proporcionar resultados satisfactorios para el personal de F.V.
- vi) Aportar con informaciones, conclusiones y recomendaciones para la mejora continua en la elaboración de porcelana sanitaria.

## 1.4 DESCRIPCIÓN DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN

Como se dijo anteriormente, el proceso de producción para la elaboración de porcelana sanitaria está conformado por varios sub-procesos. El proceso se inicia desde la aprobación y almacenamiento de la materia prima, pasando por diferentes secciones hasta su comercialización, como se aprecia en el siguiente diagrama.

Figura 1.1: Diagrama del Proceso de producción



\* Se cronograma de acuerdo a Programación y Control de Producción (PCP)

#### **1.4.1 Descripción del Proceso de Control de Materia Prima**

Esta sección se encarga de aprobar o no la recepción de materia prima, mediante la comprobación de estándares requeridos por la empresa y los dados por los proveedores; todos estos análisis se realizan en el Laboratorio de Materia Prima. Aquí se realizan pruebas de materiales para elaboración de Barbotina, preparación de Esmaltes y Yesería. El mecanismo de aceptación de la materia prima consiste en realizar un muestreo, dependiendo del producto, en el momento de la recepción del material.

Se prosigue a inspeccionar y realizar ensayos de laboratorio para aprobación del producto. Se inspecciona la densidad, viscosidad, conos de fusión, peso depositado en húmedo (PDH), entre otros ensayos. Si el producto no cumple con las especificaciones se realiza una segunda comprobación, y si en ésta no cumple la materia prima se almacena y se da a conocer a proveedores. Se guarda la materia prima en invernaderos etiquetando cada una de ellas de acuerdo a las observaciones, por lo general con etiqueta verde para aprobado y roja para rechazado.

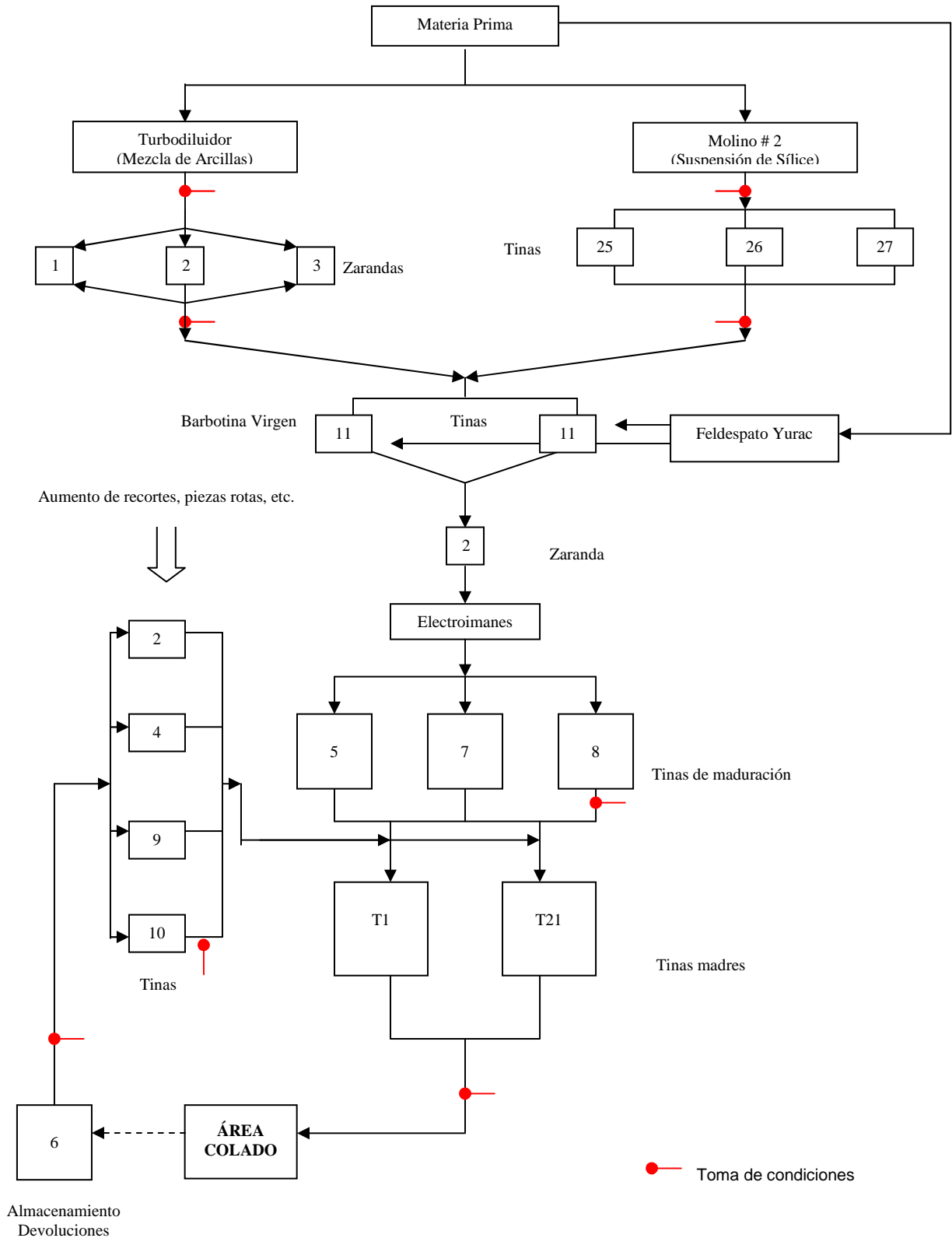
Estas materias primas son utilizadas con el método FIFO (First In First Out: Primeras en llegar, primeras en salir)

#### **1.4.2 Proceso de Elaboración de Barbotina**

La Barbotina es la pasta utilizada para realizar la porcelana sanitaria; esta pasta es la mezcla de algunos componentes provistos por la sección de Control de Materia Prima, como arcillas, talcos, feldespatos, etc. Cada uno de estos componentes se agregan en la conformación de la pasta en una cantidad determinada fijada con anterioridad, dependiendo del volumen total de Barbotina requerida; además se toman medidas de densidad de los componentes para recompensar la distribución de materias primas de la barbotina debido a la presencia de humedad en los componentes.

La elaboración de Barbotina sigue el siguiente proceso (ver figura 1.2), utilizando el Turbodiluidor para disolver y mezclar arcillas; y el molino #2 para mezclar Sílice y Caolines principalmente.

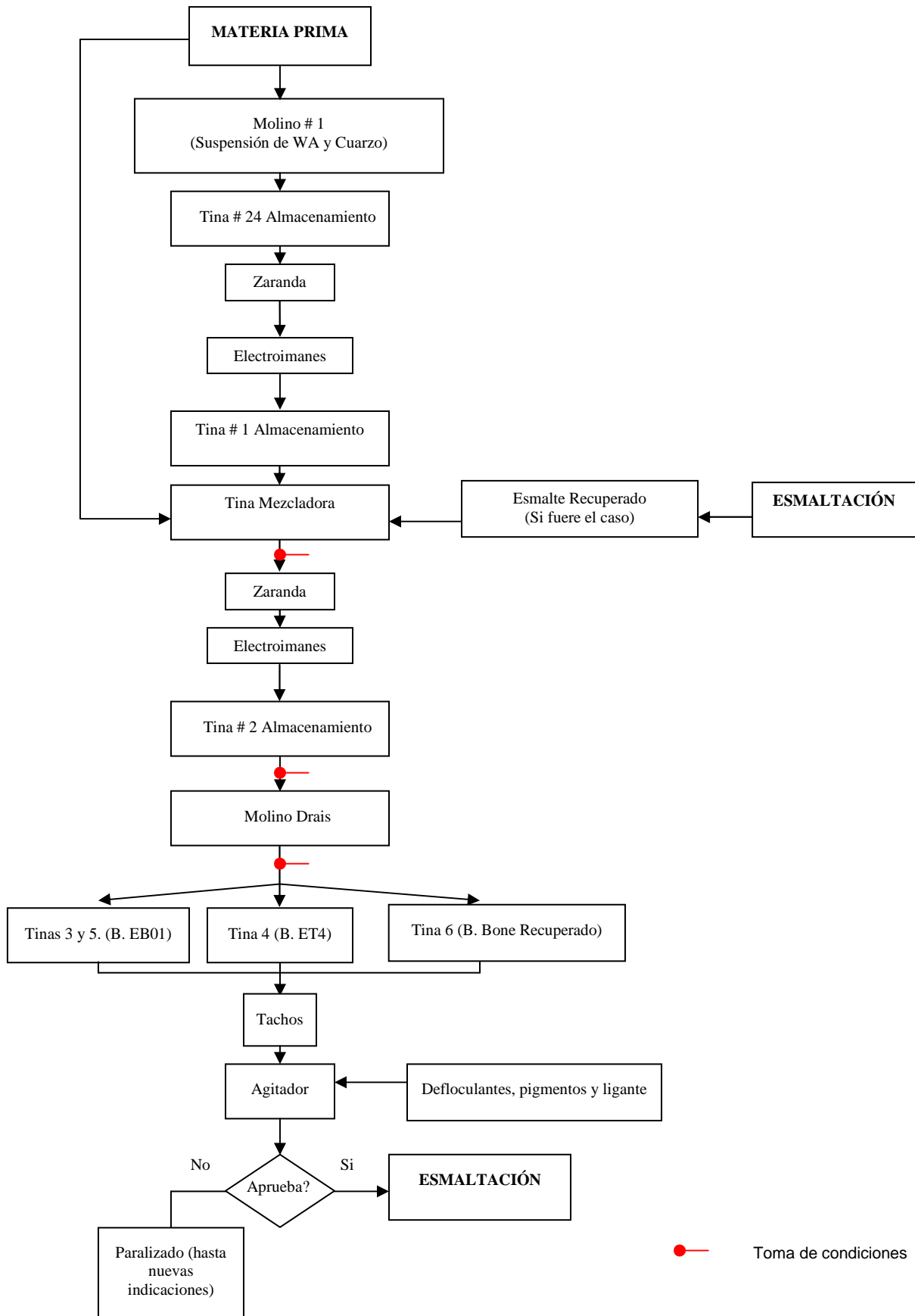
Fig.1.2: Diagrama del Proceso de Elaboración Barbotina





### 1.4.3 Proceso de Preparación de Esmaltes

Fig.1.3: Diagrama del Proceso de Preparación de Esmaltes



#### **1.4.4 Proceso de la Sección Matricería**

En esta sección se encargan de producir matrices (moldes) para los moldes que son provistas a Yesería, además de accesorios de desmontaje para la Sección Colado y Secado. Hay tres clases de matrices: de Yeso-Cemento, de Plástico y de Laminado. En la producción existen en su gran mayoría matrices de Yeso-Cemento debido al bajo costo de fabricación, pero su vida útil es de 200 utilizaciones aproximadamente. Si bien las matrices de Plástico son de costo elevado, causa para que en la producción no existan muchas, su vida útil es de 2.000 utilizaciones aproximadamente. Las matrices de laminado se utilizan para producir piezas pequeñas o accesorios para desmontaje.

Para aprobar una matriz se necesita realizar pruebas de los moldes producidos con ésta, revisando la estructura final de las piezas al salir del área de Colado y de la sección Hornos.

La cantidad de materia prima utilizada depende de la matriz que se esté realizando, debido a que éstas son diferentes unas de otras ya que varían la cantidad de piezas y subpiezas por matriz. Por ejemplo, en el caso de los lavatorios se necesitan dos piezas y para cada pieza se requieren seis subpiezas.

Para la fabricación de estas matrices se necesitan de dos moldes: molde maestro y molde patrón. El molde patrón se utiliza únicamente para comparar las dimensiones de las matrices, mientras que el molde maestro es rellenado para la fabricación de las matrices.

#### **1.4.5 Proceso de la Sección Yesería**

Se encarga de la producción de moldes de yeso en matrices de Yeso-Cemento y Plástico para proveer a la Sección Colado y Secado. Para la elaboración de los moldes se utilizan las matrices provistas por Matricería. Este procedimiento consiste en la realización de los siguientes pasos:

- i) Se limpian las partes de las matrices con aire comprimido y en el caso de las matrices de Yeso-Cemento además con agua. Se prosigue a pasar desmoldante (diesel mezclado con aceite en las matrices de plástico y jabón industrial en las matrices de Yeso-Cemento) por las partes internas de las matrices para que no exista pegado con los moldes y se prosigue a secar con guaípe.
- ii) Se arma la matriz uniendo las diferentes piezas y se continúa a prensarlas o ajustarlas. Se prepara la mezcla de yeso y agua. Esta proporción depende del molde a realizarse. Se espera hasta que la mezcla de yeso-agua tenga la consistencia adecuada (cremoso, sin burbujas) y luego se llenan las matrices de éste material.
- iii) Se deja por tiempo determinado hasta que el yeso fragüe. Se prosigue a aflojar las partes de la matriz es decir las prensas. Se aflojan las piezas laterales y tapas.
- iv) Se desmolda con aire a presión. Se pone talco en las partes principales de las piezas. Se ensamblan las partes para formar el molde.
- v) Posteriormente se los ubican sobre palets y se trasladan a un pre-secadero.
- vi) Luego se ingresan a un secadero en el cual se tiene el control de humedad y temperatura hasta lograr un secado adecuado, es decir, que el molde tenga un porcentaje de humedad mínimo. Este proceso de secado dura entre 8-10 horas, lapso en el cual la temperatura del secadero disminuye con el transcurrir del tiempo. Los moldes secos se transportan a la bodega de moldes para su almacenamiento.

#### **1.4.6 Proceso de la Sección Colado y Secado**

Es la sección o área de trabajo, en la cual la Barbotina atraviesa por un proceso complejo de formación para convertirse en estructuras de cada una de las piezas, proceso que consta del llenado de moldes provistos por la sección Yesería con barbotina. Este proceso se basa principalmente en el cumplimiento estricto de tiempos, los cuales son: tiempo de toma de espesor, tiempo de formación de pared, tiempo de moldeo con aire y tiempo de reposo o moldeo sin aire. Cada uno de estos tiempos varían de acuerdo al día de la semana y de acuerdo al número

de colada (llenada de moldes) diaria, debido a factores como la humedad en los moldes.

El detalle del cálculo de tiempos de toma de espesores se da a continuación:

- i) Se llena la línea piloto, con moldes de 50, 60 y 70 minutos, al inicio de cada colada. Después de los respectivos tiempos, se mide el espesor de las estructuras obtenidas. Los espesores de los moldes de 50 y 60 minutos sirven para determinar la velocidad de formación de pared. La estructura del molde de 70 minutos sirve para verificar si existe o no pasta líquida (dormida) en el interior de las estructuras.
- ii) El espesor del molde de 50 minutos es comparado; si es de la primera colada con el de la primera colada del día anterior (a excepción del lunes que es comparado con el del lunes anterior); si es de la segunda colada en adelante es comparado con el de llenada anterior del mismo día y así sucesivamente. Diariamente puede hacerse hasta cuatro coladas en piezas grandes, y cinco en accesorios.
- iii) Con esta comparación se logra determinar qué tiempo se debe compensar o disminuir para tomar el espesor deseado. Para este cálculo se utiliza lo que es la velocidad de formación de pared, obtenida con la diferencia de espesores de los moldes de 50 y 60. Este cálculo se lo realiza aplicando una regla de tres simple: si en la comparación de espesores del molde de 50 minutos se tiene una diferencia  $d$  y sabemos que para formar  $x$  minutos. necesitamos  $t$  min. (velocidad de formación de pared), entonces el tiempo que se debería compensar o disminuir es: 
$$T = \frac{d \times t}{x}$$
- iv) Este tiempo rige para todas las líneas de producción en el área de Colado; a éste hay que añadir el tiempo de toma de espesor de cada línea o de cada producto y se obtiene el tiempo total de toma de espesor por pieza. Para determinar el tiempo de toma de espesor por línea, en su mayoría, se sacrifica una pieza por línea o se utilizan piezas dañadas para tomar espesores y comparar con los sugeridos; de igual manera se realiza un regla de tres para determinar un tiempo de compensación o eliminación adicional.

## Detalle del proceso de la Sección Colado

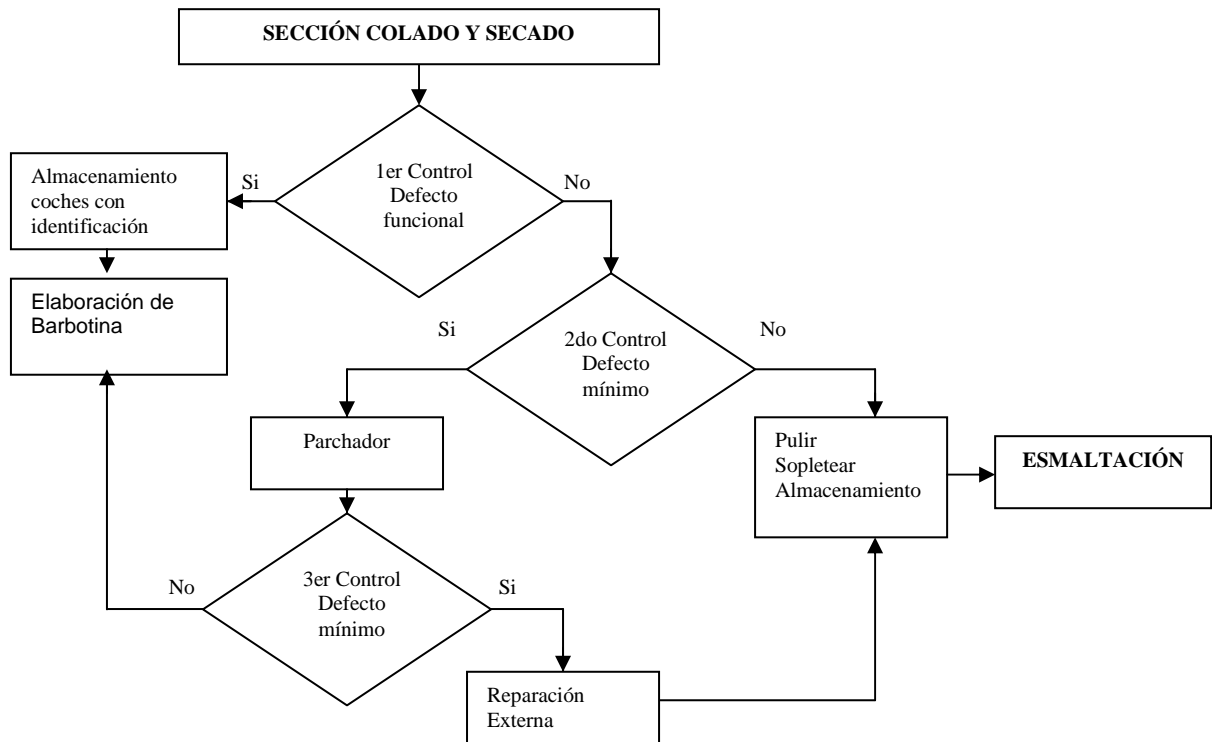
- i) Llenado de moldes; para esto los moldes deben estar perfectamente sellados y prensados.
- ii) Dejar abiertas válvulas de entrada de Barbotina por tiempo determinado (tiempo de llenado) hasta verificar que un embudo existente en cada línea se empieza a llenar. Este tiempo de llenado está de antemano fijado y varía de acuerdo al producto o pieza.
- iii) Cumplido el tiempo de llenado se prosigue a cerrar las válvulas, y se deja pasar el tiempo total de toma de espesor (calculado con los tiempos de la línea piloto y de cada una de las líneas de producción).
- iv) Se continúa colocando las válvulas de aire con presión de 2psi, en cada uno de los moldes, durante 20-25 minutos; se abren las cañerías para que el exceso de barbotina se vaya a las canaletas para luego retornar a elaboración de barbotina.
- v) Se quita la presión de aire y por un tiempo de 20-50 minutos (depende de la línea y del día), se levantan las tapas y se les deja reposar a las piezas (moldeo sin aire) y se prepara la pieza (quitado de tizas, limpiado interior).
- vi) Terminado el tiempo de moldeo sin aire se continúa a desmoldar las piezas y limpiar.
- vii) Por último, de acuerdo a la pieza se deja por determinado tiempo en parqueaderos aclimatados para su respectivo secado.

### **1.4.7 Proceso de la Sección Terminación y Esmaltación.**

1.4.7.1 *Terminación:* Los terminadores se encargan de revisar las piezas provistas por la Sección de Colado y Secado que cumplan las especificaciones pertinentes. Aquí se encargan de pulir, lijar, dar un buen acabado a la cerámica. Cuando se observan piezas con algún defecto se almacenan en coches previamente identificados. Dichas piezas se chequean por un operario capacitado para dicho trabajo, denominado parchador. Éste se encarga de arreglar, aprobar o no el traslado de las piezas a esmaltación. Si no son aprobadas se devuelven a lo que es producción de barbotina para ser trituradas e ingresadas a las tinas de

almacenamiento. Las piezas aprobadas, igualmente, se almacenan en coches para ser trasladadas a terminación. (ver figura 1.4).

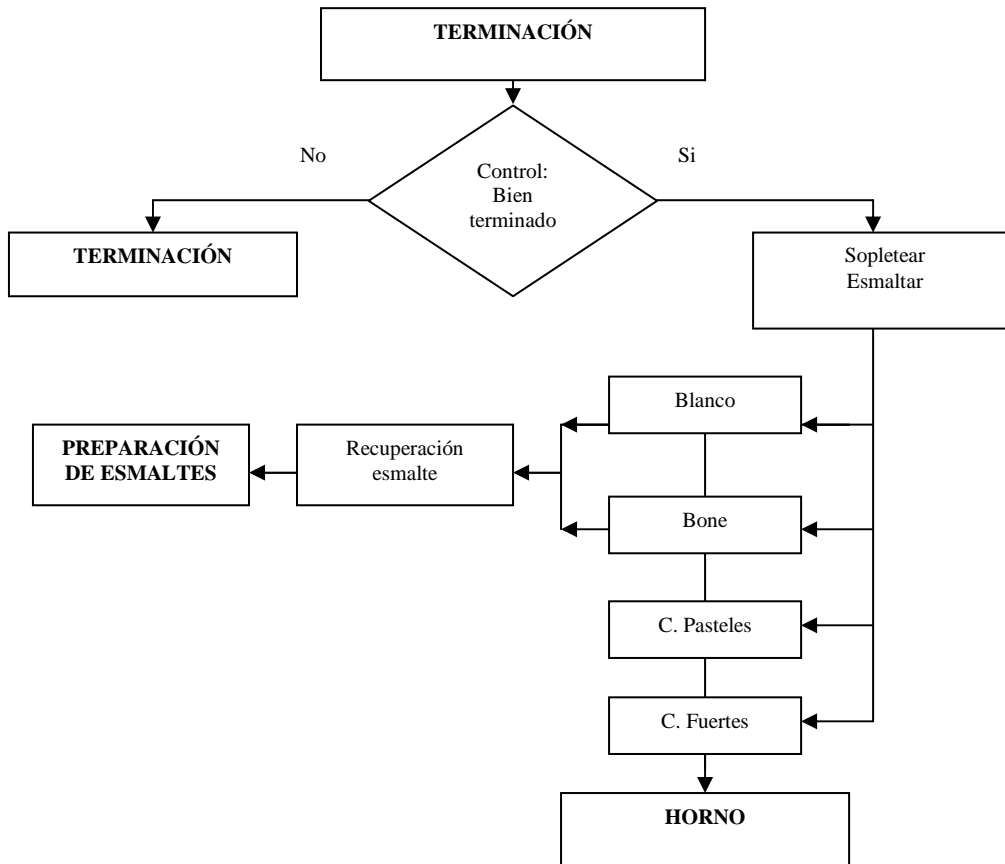
Fig. 1.4: Diagrama del Proceso de Terminación



1.4.7.2 *Esmaltación*: Los esmaltadores disponen de piezas aprobadas y pulidas por los terminadores. De acuerdo a Programación y Control de la Producción PCP, ellos se encargan de esmaltar en distintos colores las piezas. Existen 5 cabinas de esmaltación, las dos primeras solo para blanco, la tercera para bone, la cuarta para colores pasteles y la quinta para colores fuertes o contaminantes. En las cabinas de colores blanco y bone, los esmaltadores recuperan los desechos para enviarlos de nuevo al área de preparación de esmaltes.

En cada una de estas cabinas, cada 2 horas se encargan de medir el espesor del esmalte para verificar si la cantidad de esmalte y la viscosidad son correctas (ver figura 1.5).

Fig. 1.5: Diagrama Proceso de Esmaltación



#### 1.4.8 Proceso de la Sección Hornos

Es el área de trabajo conformada por tres hornos: Horno Túnel, Horno Coel y un horno pequeño. El proceso consiste en que los obreros se encargan de cargar, de acuerdo a Programación y Control de la Producción, las piezas esmaltadas, en carros o coches denominados zorras, para ser cocidas a través del Horno Túnel, constituyéndose en el horno principal y prioritario de producción. El proceso de quemado consiste en hornear las piezas crudas a altas temperaturas, a través de un proceso complejo que tiene una duración de 12 horas aproximadamente.

El Horno Coel, en cambio, es utilizado en las segundas quemadas, cuando las piezas ya cocidas tienen defectos de categoría Cuarta (Ver proceso de Clasificación y Montaje); las piezas se retocan con una capa fina de esmalte y se ingresan en el Horno Coel; a este retoque se lo denomina Retoque en Caliente.

El horno pequeño es únicamente utilizado para ciertas piezas de lujo y para la realización de toda clase de pruebas.

#### **1.4.9 Proceso de la Sección Clasificación y Montaje**

Es la sección encargada de controlar, clasificar, ensamblar y almacenar los productos obtenidos de la salida del horno. Realiza el control riguroso del producto determinando si éste presenta o no defectos, observando detalladamente los diferentes planos de los productos.

Clasifica de acuerdo a cinco calidades. La Primera Calidad, en la cual el producto no presenta defecto alguno o presenta defectos no graves en un grado mínimo. La Segunda Calidad, en la cual el producto presenta defectos en alto grado que no pueden ser corregidos pero que no alteran la funcionalidad del producto, por lo que es vendido pero a un precio menor al de la Primera Calidad.

En la Tercera Calidad, los productos salen con defectos, los cuales de acuerdo a los mismos clasificadores pueden ser tratados y eliminados; a este retoque se le denomina Retoque en Frío. Hay personal capacitado para realizar este retoque cuando se observa que se lo necesita realizar con mucho más cuidado, por lo que los clasificadores son encargados de trasladar los productos a éstos; este retoque se lo denomina Retoque en Frío Mecanizado.

La Cuarta Calidad se caracteriza porque se realizan retoques como en la Calidad Tercera pero de defectos más complicados, con la diferencia que para corregir estos defectos se necesita de una segunda quema; es decir, a los productos se los vuelve a ingresar a un segundo horno, para que el retoque desaparezca; este retoque se llama Retoque en Caliente.

La Quinta Calidad los defectos son funcionales, que imposibilitan su comercialización; por ende los productos son desechados. Existen coches de almacenamiento para cada una de las calidades, excepto Primera y Tercera, bien



identificados, que permiten a los clasificadores ubicarlos y tomar a continuación las acciones pertinentes.

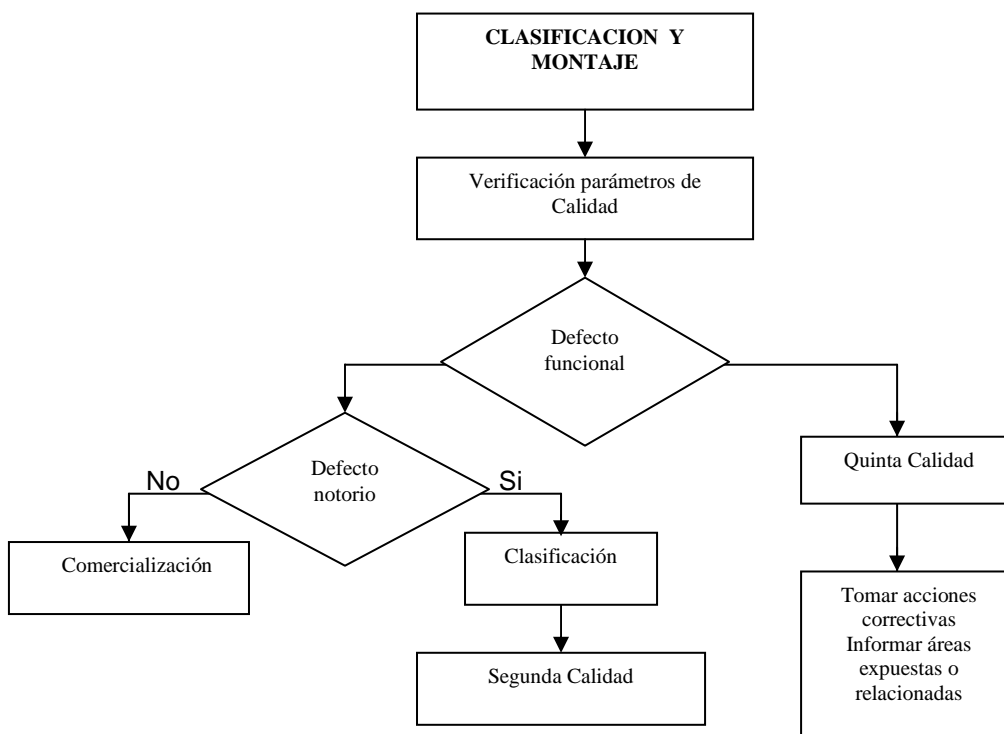
Ensamblan los productos de Primera y Tercera, los cuales pasan de ser partes y piezas a hacer un solo producto; es decir, aquí son embaladas las piezas, accesorios e incluso las indicaciones de uso, con sus respectivos cartones de ensamblaje.

Se ubican los productos en palets de acuerdo al tipo de producto y posteriormente en bodega para su comercialización.

#### 1.4.10 Proceso de la Sección Control de Calidad

En esta sección se encargan de verificar si los productos elaborados cumplen con todas las estandarizaciones técnicas, por lo que se encargan de comprobar la funcionalidad y calidad de productos ya empacados en el área de Clasificación y Montaje. Adicionalmente, son los responsables de aprobar o no la devolución de productos rechazados por clientes.

Fig. 1.6: Diagrama del Proceso de Control de Calidad



#### **1.4.11 Proceso de la Sección Programación y Control de la Producción PCP**

Es la sección encargada de la programación de la producción de la mayoría de las áreas mencionadas anteriormente. Su papel primordial es programar diariamente la cantidad de piezas en diferentes tipos y colores, basándose en pronósticos obtenidos del análisis de ventas de meses anteriores o por pedidos de clientes.

Por lo dicho anteriormente, se encarga de la programación de: las piezas obtenidas en la Sección de Colado y Secado, de las tratadas en la Sección de Terminación y Esmaltación, de la cantidad de esmalte y color en Elaboración de Esmaltes, de la gama de productos introducidos en la Sección Hornos, además del control de las áreas de Matricería y Yesería.

## CAPÍTULO 2. TÉCNICAS ESTADÍSTICAS UTILIZADAS

En el presente capítulo se dan a conocer las bases científicas utilizadas en el proyecto de titulación con el propósito de alcanzar los objetivos planteados; entre estas tenemos a Elementos Estadísticos Básicos, Herramientas de Control, Regresión Múltiple, Análisis de Componentes Principales, Análisis Factorial, Análisis de Conglomerados y Análisis Discriminante.

### 2.1 ELEMENTOS ESTADÍSTICOS BÁSICOS

#### 2.1.1 Introducción

La etapa más importante es, sin duda, el análisis de los datos recogidos y sus respectivas conclusiones. Se revisan resultados estadísticos básicos que serán de utilidad en los siguientes análisis a presentarse.

#### 2.1.2 Media, Varianza y Moda de una Variable Aleatoria

**Media:** La media de una variable aleatoria  $y$  se define como el promedio ponderado de todos los posibles valores de ésta. Esta medida también se conoce como la esperanza matemática de la variable, es decir:  $E(y)$

La media muestral de  $n$  observaciones de la variable  $y$  esta definida como:

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

mientras que la media poblacional de la misma variable es:

$$\begin{aligned} \mu = E(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} y dF(y) && \text{caso continuo} \\ &= \sum_{i=1}^n y_i p_i && \text{caso discreto} \end{aligned}$$

Donde:  $F(y)$  es la función de distribución de la variable aleatoria  $y$ ;  $y$   
 $p_i$  son las probabilidades que toman los valores  $y_i$  de la variable  
aleatoria discreta  $y$

Teóricamente se tiene que el mejor estimador insesgado para la media poblacional es la media muestral; es decir:

$$\mu = E(\bar{y})$$

**Varianza:** La varianza de una variable aleatoria mide la dispersión de las observaciones de ésta con respecto a su media. La varianza poblacional de una variable  $y$  está definida como  $\text{Var}(y) = E(y - \mu)^2 = \sigma^2$ , mientras que la varianza muestral como:

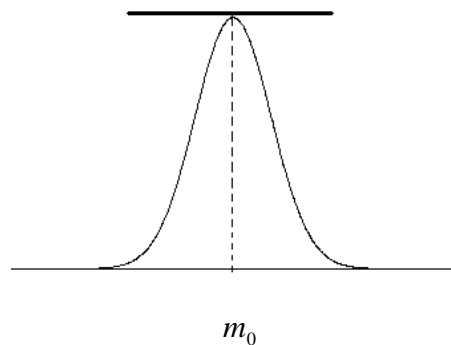
$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2$$

A la raíz positiva de la varianza muestral se le conoce como Desviación Típica o Estándar. Se interpreta como la distancia promedio entre las observaciones muestrales y la media muestral. De igual manera se tiene que el mejor estimador insesgado para la varianza poblacional es la varianza muestral, es decir:

$$\sigma^2 = E(s^2)$$

**Moda Poblacional y Moda Muestral:** Se define como moda poblacional  $m_0$  de una variable aleatoria al valor que tiene mayor frecuencia, es decir, el valor al que corresponde el máximo relativo de la curva de frecuencias. La moda muestral  $M_0$  es el valor de la muestra que tiene mayor frecuencia.

Figura 2.1: Moda poblacional



### 2.1.3 Covarianza y Correlación de Variables Aleatorias

**Covarianza:** La covarianza es una medida del grado de dependencia lineal entre dos variables. La covarianza poblacional de dos variables aleatorias está definida como:

$$Cov(x, y) = E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)] = \sigma_{xy}$$

mientras que la covarianza muestral como:

$$s_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n-1}$$

La covarianza tiene el problema de ser un indicador absoluto; es decir, no indica el grado de dependencia entre las variables, solo nos indica si existe o no dependencia entre ellas. ( $Cov(x, y) \neq 0$  entonces existe dependencia entre  $x$  e  $y$ ).

Si se tuviesen  $p$  variables aleatorias, se construye la matriz de varianzas-covarianzas, simétrica, de tamaño  $p$  de la siguiente manera: los elementos en la diagonal representan las varianzas de las  $p$  variables, mientras que la  $j$ -ésima columna (fila) representa las covarianzas entre la  $j$ -ésima variable y las demás variables. Si se define como  $Y$  la matriz que posee como columnas a las variables  $y_i$ , matemáticamente la matriz de varianzas – covarianzas se define como:

$$\begin{aligned} \Sigma = Cov(Y) &= E[(Y - \mu)(Y - \mu)^T] \\ &= E \left[ \begin{pmatrix} y_1 - \mu_1 \\ y_2 - \mu_2 \\ \vdots \\ y_p - \mu_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 - \mu_1, y_2 - \mu_2, \dots, y_p - \mu_p \end{pmatrix} \right] \\ &= \begin{pmatrix} E(y_1 - \mu_1)^2 & E(y_1 - \mu_1)(y_2 - \mu_2) & \dots & E(y_1 - \mu_1)(y_p - \mu_p) \\ E(y_2 - \mu_2)(y_1 - \mu_1) & E(y_2 - \mu_2)^2 & \dots & E(y_2 - \mu_2)(y_p - \mu_p) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ E(y_p - \mu_p)(y_1 - \mu_1) & E(y_p - \mu_p)(y_2 - \mu_2) & \dots & E(y_p - \mu_p)^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1p} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{p1} & \sigma_{p2} & \cdots & \sigma_{pp} \end{pmatrix}$$

Donde:  $\sigma_{ii} = \sigma_i^2$ .

En el caso de poseer una muestra de estas variables, la matriz de varianzas – covarianzas muestral está definida como:

$$S = \begin{pmatrix} s_1^2 & s_{12} & \cdots & s_{1p} \\ s_{21} & s_2^2 & \cdots & s_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{p1} & s_{p2} & \cdots & s_p^2 \end{pmatrix}$$

donde cada uno de los componentes de la matriz S fueron expresados anteriormente.

**Correlación:** El coeficiente de correlación lineal es un indicador adimensional del grado de dependencia lineal entre dos variables y por su estructura cumple que sus posibles valores están entre -1 o 1. Si la correlación se aproxima a 1 y -1, mayor será la dependencia lineal entre ambas variables. En cambio, si se aproxima a cero, no existirán indicios de dependencia lineal. Matemáticamente se define por:

$$\rho_{xy} = \text{Corr}(x, y) = \frac{E[(x - \mu_x)(y - \mu_y)]}{\sqrt{E(x - \mu_x)^2} \sqrt{E(y - \mu_y)^2}} = \frac{\sigma_{xy}}{\sigma_x \sigma_y}$$

con su estimador:

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}} = \frac{s_{xy}}{s_x s_y}$$

Si se tuviesen  $p$  variables, la matriz de correlaciones se representa por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & \rho_{12} & \cdots & \rho_{1p} \\ \rho_{21} & 1 & \cdots & \rho_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \rho_{p1} & \rho_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

mientras que la matriz de correlaciones muestrales se expresa como:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & r_{12} & \cdots & r_{1p} \\ r_{21} & 1 & \cdots & r_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{p1} & r_{p2} & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

#### 2.1.4 Distribución Normal Multivariante

Los datos en el análisis multivariante suelen provenir de una población caracterizada por una distribución multivariante. Muchas pruebas univariantes e intervalos de confianza son basados en la Distribución Normal Univariante. Similarmente, la mayoría de procesos multivariantes tienen un supuesto de distribución normal mutivariante de los datos. Este hecho matemáticamente se fundamenta en el Teorema Central del Límite que demuestra que la media de variables aleatorias independientes siguen una ley Normal.

**Teorema central del Límite:** Sea  $\{x_i\}_{i \geq 1}$  sucesión de vectores aleatorios independientes e igualmente distribuidos, de media  $\mu$  y varianza  $\Sigma$ ; se concluye que:

$$\sqrt{n}(\bar{x}_n - \mu) \rightarrow N(0, \Sigma) \text{ cuando } n \text{ es grande,}$$

donde  $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \left( \sum_{i=1}^n x_{1i}, \sum_{i=1}^n x_{2i}, \dots, \sum_{i=1}^n x_{ip} \right)$  vector de medias, siendo  $x_{ij}$  la  $i$ -ésima observación del  $j$ -ésimo vector.

La ley normal multivariante, se construye a partir de  $x_1, x_2, \dots, x_p$  variables aleatorias tales que:

$$x_i \rightarrow N(\mu_i, \sigma_i^2)$$

cuya función de densidad es:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{|\Sigma|}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-u)^T \Sigma^{-1}(x-u)\right) \quad x \in \mathbb{R}^p, \Sigma \text{ s.d.p.}^1$$

Donde:  $u = (\mu_1 \quad \mu_2 \quad \dots \quad \mu_p)^T$

$|\Sigma|$  = determinante de matrices.

En el caso que las variables  $x_i$  sean independientes, se tiene que:

$$f(x_1, \dots, x_p) = \prod_{i=1}^p \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right) \quad x_i \in \mathbb{R}$$

$$f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \frac{1}{(2\pi)^{p/2} \sqrt{\prod_{i=1}^p \sigma_i^2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{(x_i - \mu_i)^2}{\sigma_i^2}\right)$$

## 2.2. HERRAMIENTAS DE CONTROL

### 2.2.1 Introducción

Las herramientas de Control de Calidad son técnicas utilizadas en el análisis y solución de problemas aplicados en su mayoría en la industria. Su uso se extiende desde el control de calidad hasta las áreas de marketing, administración y producción. En su mayoría consisten en metodologías gráficas que proporcionan criterios con el objetivo de comprender los procesos de trabajo para promover el mejoramiento de las organizaciones.

### 2.2.2 Diagrama de Pareto

El diagrama de Pareto es una gráfica para representar datos organizados en forma descendente, dando así un orden de prioridades. Dichos diagramas son estructurados para representar el Análisis de Pareto.

**Análisis de Pareto:** El Análisis de Pareto es una comparación de elementos que contribuyen a una determinada causa. Dicha comparación es cuantitativa

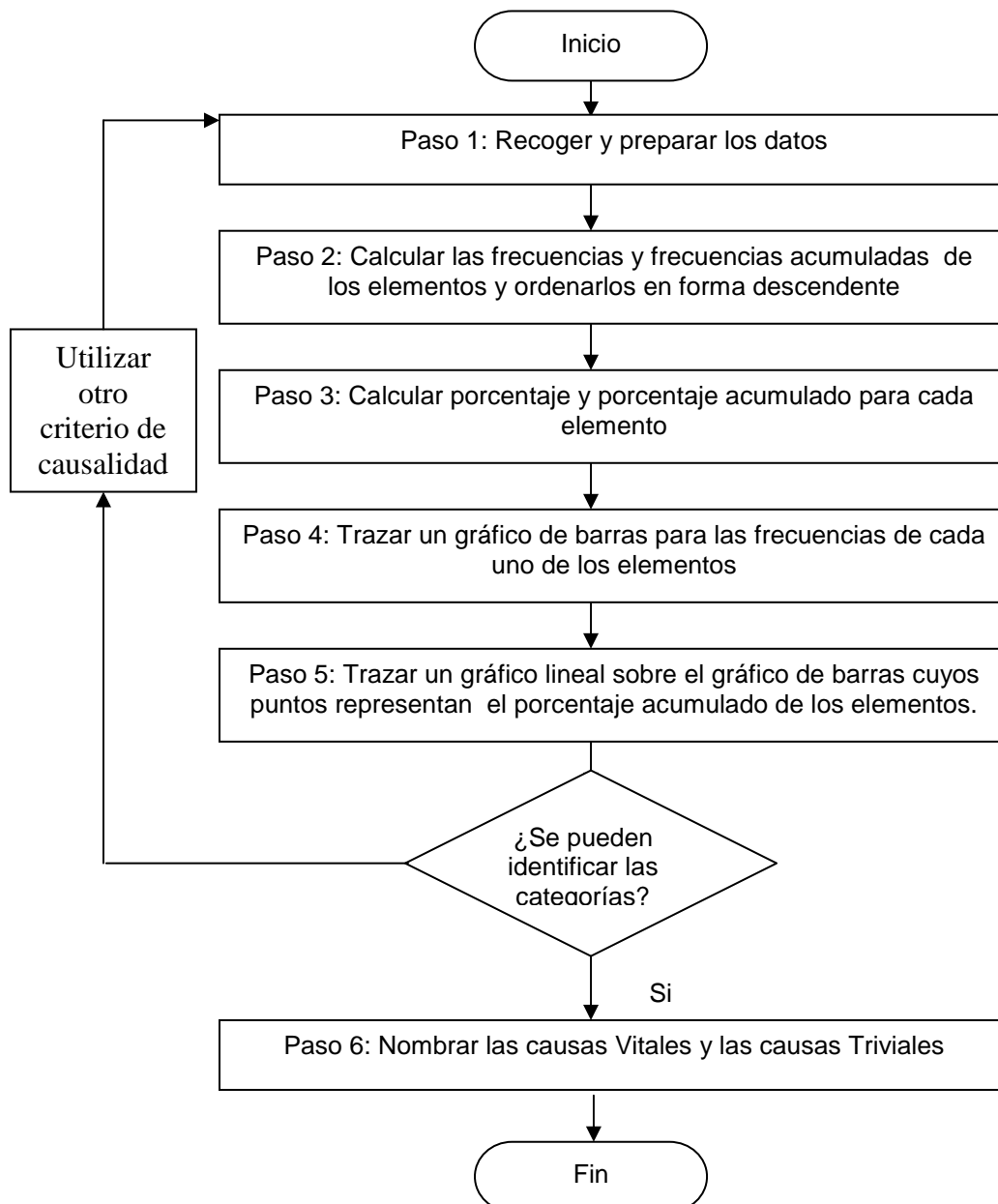
<sup>1</sup> s.d.p (Matriz simétrica definida positiva) Una matriz M de orden k, se define como s.d.p. si para todo  $a \in \mathbb{R}^k$  se tiene que  $a^T M a > 0$



permitiendo clasificar a dichos elementos en dos únicas categorías: “Causas Vitales” (elementos primordiales en la contribución de la causa) y “Causas Triviales” (elementos secundarios en la contribución de la causa).

Construcción del Diagrama de Pareto: El Diagrama de Pareto sigue una secuencia de pasos para su construcción, comenzando desde la selección del problema a investigar hasta la representación gráfica del mismo, según la figura 2.2.

Figura 2.2: Diagrama de Flujo de construcción de Diagramas de Pareto



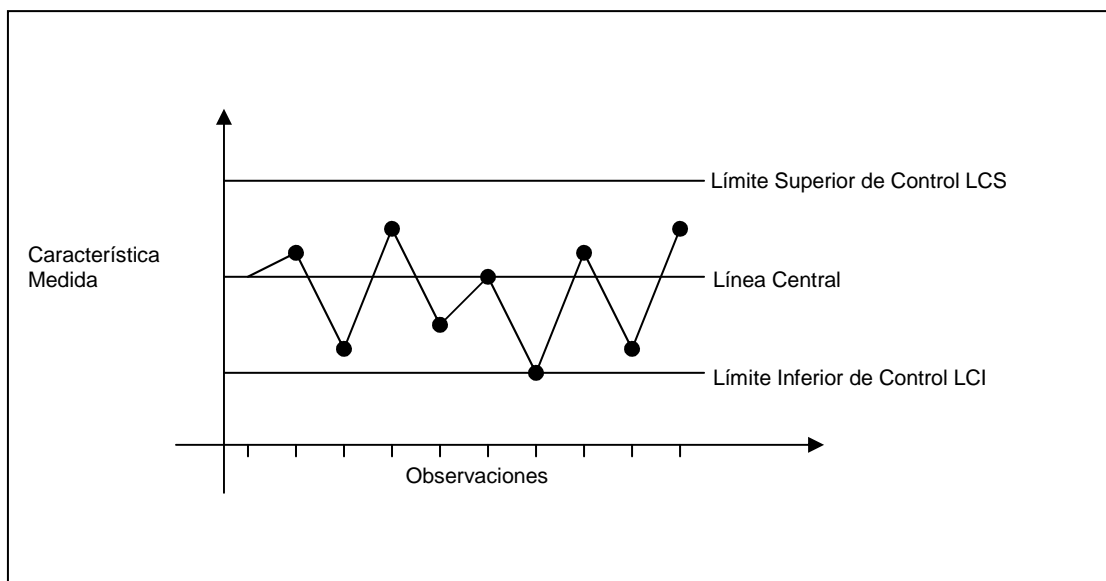
### 2.2.3 Gráficos de Control

Los gráficos de Control son dibujos cartesianos de los valores de una característica de calidad de un proceso medido o evaluado a partir de una muestra, que permite identificar si el modelo de probabilidad es estable o cambia a lo largo del tiempo. En la realidad no es posible realizar réplicas de las observaciones o se realizan muy pocas debido a la naturaleza del proceso o por los costos que conllevan éstos. Por tal razón, se asume el supuesto de normalidad de los datos medidos

Debido a la existencia de diferentes pautas de variabilidad en los datos medidos, existen distintos tipos de Gráficos de Control, habiendo una estructura similar en todos ellos, similares características y por ende interpretación.

Los gráficos de Control disponen de una Línea Central que representa el valor medio o promedio de la muestra de los datos medidos, y dos líneas denominadas Límite Superior de Control y Límite Inferior de Control, tal como se representa en la figura 2.3

Figura 2.3: Estructura de los Gráficos de Control



El modelo general de los Gráficos de Control se construye a partir del promedio  $\bar{x}_A$  de la muestra A obtenida y de su desviación estándar  $s_A$ , así, las líneas de control serán las siguientes:

$$\text{Límite Superior de Control LCS} = \bar{x}_A + 3s_A$$

$$\text{Línea Central LC} = \bar{x}_A$$

$$\text{Límite Inferior de Control LCI} = \bar{x}_A - 3s_A$$

### 2.2.3.1 Gráficos de Control por Atributos

Son Gráficos de Control basados en la observación de presencia o ausencia de determinadas características, o cualquier tipo de defecto en el objeto en estudio, es decir, cuando la variable a analizarse sólo puede tomar dos valores, correcto o incorrecto. Son de gran utilidad en los procesos en los que se tiene un gran número de características de calidad de tipo numérico.

Son cuatro gráficos de control por atributos comúnmente utilizados, los cuales se basan en el tipo de datos y si el tamaño de muestra es constante o variable. Hay solamente dos clasificaciones para el tipo de datos, la primera si es el producto es correcto o incorrecto (0 ó 1) y la otra el número de defectos por producto en una muestra. (0,1,2,3,...). Esto se muestra en la figura 2.4.

#### 2.2.3.1.1 Gráficos de Control $c$ y $u$ .

Un gráfico  $c$  es usado para el número de defectos por producto cuando el tamaño de muestra es constante, mientras que el gráfico  $u$  es usado para el número de defectos por producto con tamaño de muestra variable. Bajo ciertas condiciones, el número de defectos por producto tiene una distribución de Poisson, que constituye la base de estos gráficos. Es así que las líneas de control para el Gráfico de Control  $c$  son:

$$\text{Límite Superior de Control LCS} = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}$$

$$\text{Línea Central LC} = \bar{c}$$

$$\text{Límite Inferior de Control LCI} = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}$$

donde:  $\bar{c} = \frac{\sum_{i=1}^n c_i}{n}$

$c_i$ : número de defectos de la muestra  $i$

$n$ : número de muestras.

Mientras que para el Gráfico de Control  $u$  los límites de control están dados por:

**Límite Superior de Control LCS** =  $\bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$

**Línea Central LC** =  $\bar{u}$

**Límite Inferior de Control LCI** =  $\bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}}$

donde:  $\bar{u} = \frac{\sum_{i=1}^N u_i}{N}$

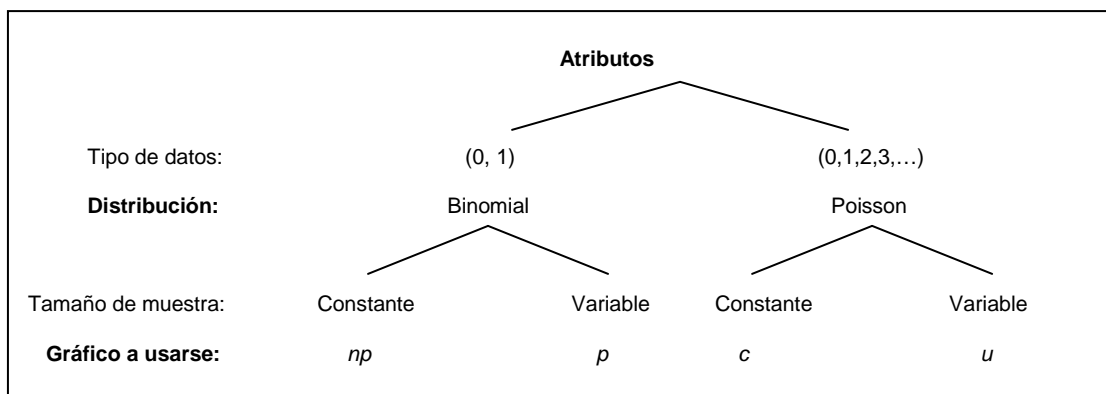
$u_i$ : número de defectos por unidad de la muestra  $i$

$N$ : número de muestras.

$\bar{n} = \frac{\sum_{i=1}^N n_i}{N}$

$n_i$ : tamaño de la muestra  $i$

**Figura 2.4:** Gráficos de control por atributos.



## 2.3 REGRESIÓN MÚLTIPLE

### 2.3.1 Introducción

El Análisis de Regresión es una técnica estadística mediante la cual se trata de investigar modelos de dependencia entre dos o más variables cuantitativas. El objetivo del análisis de Regresión es encontrar una ecuación que relacione estadísticamente una variable dependiente  $Y$  con una o más variables independientes  $X_1, \dots, X_p$ .

La relación entre las variables cuantitativas puede ser lineal, polinómica, potencial, exponencial, logarítmica, o cualquier función.

### 2.3.2 Estimación de los Coeficientes de los Regresores

En el modelo de Regresión se expresa cada observación de la variable independiente  $y$  como una combinación lineal de las observaciones de las variables independientes  $X_i$  de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_{11} + \beta_2 x_{12} + \dots + \beta_p x_{1p} + u_1 \\y_2 &= \beta_0 + \beta_1 x_{21} + \beta_2 x_{22} + \dots + \beta_p x_{2p} + u_2 \\&\vdots \\y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_{n1} + \beta_2 x_{n2} + \dots + \beta_p x_{np} + u_n\end{aligned}$$

Donde los  $\beta_i$  son parámetros desconocidos, denominados coeficientes de los regresores, los cuales se pretende estimar y los  $u_i$  son variables aleatorias no observables denominados errores, los cuales poseen o siguen los siguientes supuestos:

1.  $E(u_i) = 0 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
2.  $\text{var}(u_i) = \sigma^2 \quad \forall i = 1, 2, \dots, n$
3.  $\text{cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j$

Teóricamente existen gran cantidad de estimadores, por lo que se hace indispensable utilizar un criterio que permita escoger un estimador óptimo entre el conjunto de todos los posibles. Dicho criterio es la minimización de la magnitud de los residuos, entendiéndose por residuo a la diferencia entre el valor observado y

la estimación. La estimación se obtiene reemplazando los coeficientes estimados en el modelo. El método que permite introducir dicho criterio es el de Mínimos Cuadrados:

$$\min \sum_{i=1}^n (y_i - \beta_0 - \beta_1 x_{i1} - \dots - \beta_p x_{ip})^2$$

La obtención de los estimadores de Mínimos Cuadrados exige reescribir al modelo en notación matricial de la forma

$$Y = X\beta + U$$

Donde:  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$      $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1p} \\ 1 & x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{np} \end{pmatrix}$      $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}$      $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix}$

Con lo cual, el criterio de Mínimos Cuadrados queda expresado como:

$$\min_{\beta} U^T U = \min_{\beta} \|Y - X\beta\|^2 = \min_{\beta} (Y^T Y - 2\beta^T X^T Y + \beta^T X^T X\beta)$$

Obteniendo de esta forma, la ecuación característica de los estimadores de los coeficientes dados por:

$$\hat{\beta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

Representando al vector de coeficientes de los  $p$  regresores.

### 2.3.3 Propiedades del Estimador de Mínimos Cuadrados.

**Proposición 1:** Utilizando el supuesto de  $E(u_i) = 0$ , el estimador de Mínimos Cuadrados es Insesgado.

**Proposición 2:** La matriz de varianzas – covarianzas del estimador de Mínimos Cuadrados tiene como expresión:  $Var(\hat{\beta}) = \sigma^2 (X^T X)^{-1}$

**Proposición 3:** El estimador de Mínimos Cuadrados es el estimador lineal insesgado óptimo, condicionado que  $E(U) = 0$  y  $Var(U) = \sigma^2 I$ , es decir tiene una matriz de varianzas – covarianzas menor que el conjunto de todos los posibles estimadores lineales e insesgados.

### 2.3.4 Validación del Modelo de Regresión

Después de la obtención de los parámetros estimados, es conveniente realizar pruebas de la significancia estadística de la ecuación y de los parámetros encontrados. Estas pruebas consisten en la comprobación de la calidad del ajuste de la información en el modelo encontrado.

#### 2.3.4.1. Coeficiente de Determinación

Una vez ajustado el modelo de regresión, es importante disponer de una medida de bondad de ajuste que permita determinar si el ajuste lineal es suficiente o se deben especificar otros modelos. El coeficiente de determinación  $R^2$  está matemáticamente definido por:

$$R^2 = \frac{SEC}{STC} = \frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - \bar{y})^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$$

Donde: SEC es la suma esperada de cuadrados.

STC es la suma total de cuadrados.

$\hat{y}_i$  es la estimación de las observaciones de la variable dependiente

$\bar{y}$  es la media de las observaciones originales de la variable dependiente

El coeficiente de determinación mide el porcentaje de variabilidad de la variable dependiente y explicada por la regresión con respecto a la variabilidad total. Por la forma que está definido el coeficiente de determinación, los valores posibles que este puede tomar están en el intervalo [0,1]. Debido a que se cumple la igualdad  $STC = SEC + SRC$ , y el modelo persigue el criterio de minimización de SRC, lo

ideal sería que la SRC=0; por tal razón, lo óptimo es que el  $R^2$  sea próximo a 1. Diferentes criterios sugieren que el  $R^2$  sea superior a 0,7, para aceptar el modelo de regresión.

#### **2.3.4.2 Significancia de los Parámetros Estimados del Modelo**

Consiste en la realización de pruebas de hipótesis estadísticas, en las cuales se utiliza un contraste en particular

##### **2.3.4.2.1 Contrastes de Significación de Conjuntos de Parámetros**

Prueba de hipótesis utilizada para verificar la significancia estadística de los coeficientes de las variables independientes. Se trata de contrastar la prueba de hipótesis conjunta del modelo, es decir de los parámetros que acompañan a los regresores:

$$H_0 : \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_p = 0$$

siendo el contraste

$$\frac{\frac{SEC}{(p-1)}}{\frac{SRC}{n-p}} \sim F_{p-1, n-p}$$

Si el estadístico proporciona valores mayores que el cuantil de orden  $1-\alpha$  de la distribución F con  $p-1$  y  $n-p$  grados de libertad, se rechaza la hipótesis nula con un nivel de significación  $\alpha$ , es decir, los regresores en conjunto son significativos.

##### **2.3.4.2.2 Contrastes de Significación Individual**

Al igual que el estadístico  $F$ , existen contrastes de hipótesis “individuales” de significancia de los coeficientes de los regresores. Individuales porque existe una prueba de hipótesis para cada uno de los coeficientes. En estos contrastes de significación de parámetros se cuestiona la presencia de la variable independiente en el modelo de regresión.

Este estimador se obtiene de:



$$\frac{\hat{\beta}_j}{ee(\hat{\beta}_j)} \sim t_{n-p}$$

$$\text{donde } ee(\hat{\beta}_j) = \sqrt{s^2 v_{jj}} \quad \text{con } (X^T X)^{-1} = \begin{pmatrix} & & \vdots & \\ & & v_{ij} & \cdots \\ \cdots & & \vdots & \\ & & & \vdots & \end{pmatrix}$$

siendo las pruebas de hipótesis a contrastar las siguientes:

$$\begin{aligned} H_0 : \beta_j &= 0 \\ H_1 : \beta_j &\neq 0 \end{aligned} \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, p$$

Se rechaza  $H_0$  al nivel  $\alpha$  si y solo si  $|t_j| > t_{n-p}(\alpha/2)$ , siendo  $t_{n-p}(\alpha/2)$  el cuantil de orden  $1-\alpha/2$  de la distribución t-student con  $n-p$  grados de libertad. Una alternativa de este contraste es la construcción de intervalos de confianza para los  $\beta_j$ , de la siguiente manera:

$$\hat{\beta}_j \pm ee(\hat{\beta}_j) \cdot t_{n-p}(\alpha/2)$$

se rechaza  $H_0$  al nivel  $\alpha$  si y solo si  $0 \notin \hat{\beta}_j \pm ee(\hat{\beta}_j) \cdot t_{n-p}(\alpha/2)$

## 2.4 ANÁLISIS DE COMPONENTES PRINCIPALES

### 2.4.1 Introducción

El Análisis de Componentes Principales pertenece al conjunto de técnicas multivariantes utilizado para la reducción de la dimensionalidad de un conjunto de datos, con el objetivo de sintetizar información de un grupo de  $p$  variables a un conjunto  $m$  de menor número de variables para mejorar la interpretación de los datos, creando un conjunto de nuevas variables “no correlacionadas” que son combinación lineal de las originales, denominadas componentes principales y se van construyendo según el orden de importancia en cuanto a la variabilidad total que recoge de la muestra, ya que el concepto de variabilidad o varianza se

relaciona con el de información; es decir, cuanto mayor sea la variabilidad de los datos se considera que existe mayor información.

Las componentes principales poseen las siguientes propiedades:

1. Son ortogonales.
2. Cada componente es no correlacionado con los anteriores.
3. Los componentes son construidos de tal manera que las varianzas vayan decreciendo progresivamente, de tal manera que el primer componente contenga la mayor varianza.

#### 2.4.2 Bases Geométricas y Algebraicas de los Principales Componentes

Se considera un conjunto de variables  $(x_1, x_2, \dots, x_p)$  de las cuales se construye un nuevo conjunto de variables no correlacionadas  $(y_1, y_2, \dots, y_p)$ . Cada  $y_j$  es combinación lineal de las variables originales, es decir

$$\begin{aligned} y_j &= a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \dots + a_{jp}x_p \\ &= a_j^T x \end{aligned}$$

siendo  $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{bmatrix}$

El objetivo consiste en la maximización de la varianza del componente, lo que se lograría simplemente con el aumento de los coeficientes de las variables originales, por tal razón se impone que el vector  $a_j^T$  sea unitario, es decir:

$$a_j^T \cdot a_j = \sum_{k=1}^p a_{kj}^2 = 1$$

El primer componente se calcula de modo que maximice la varianza de  $y_1$  sujeto a la restricción que  $a_1^T \cdot a_1 = 1$

$$Var(y_1) = Var(a_1^T x)$$

$$\begin{aligned}
&= a_1^T \text{Var}(x) a_1 \\
&= a_1^T \Sigma a_1
\end{aligned}$$

El método usual para maximizar funciones sujetas a restricciones es Multiplicadores de Lagrange, construyéndose así la función a maximizar:

$$L(a_1) = a_1^T \Sigma a_1 - \lambda(a_1^T \cdot a_1 - 1)$$

Derivando e igualando a cero se obtiene la expresión:

$$(\Sigma - \lambda I) \cdot a_1 = 0$$

Para que tenga solución esta ecuación la matriz  $\Sigma - \lambda I$  debe ser singular; por tal razón su determinante debe ser igual a cero. Así  $|\Sigma - \lambda I| = 0$ , de lo que se concluye que  $\lambda$  es algún valor propio de  $\Sigma$  de los  $p$  posibles. Prosiguiendo con el desarrollo de la expresión anterior

$$\begin{aligned}
\Sigma a_1 - \lambda a_1 &= 0 \\
\Sigma a_1 &= \lambda a_1
\end{aligned}$$

Siendo utilizada en la expresión de la varianza de  $y_1$ , se tiene que

$$\begin{aligned}
\text{Var}(y_1) &= a_1^T \Sigma a_1 \\
&= a_1^T \lambda a_1 \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

Con lo que se obtiene que para maximizar la varianza del primer componente  $y_1$  basta tomar el mayor valor propio de  $\Sigma$  y su correspondiente vector propio, digamos  $\lambda_1$  con  $a_1 = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1p})^T$  con lo que se obtiene que el primer componente es:

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1p}x_p$$

El segundo componente se calcula de la misma manera añadiendo la restricción de no correlación de los componentes; es decir,  $\text{Cov}(y_2, y_1) = 0$ . Así;

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(y_2, y_1) &= \text{Cov}(a_2^T x, a_1^T x) = 0 \\
&= E(a_2^T x - E(a_2^T x))(a_1^T x - E(a_1^T x)) \\
&= E(a_2^T (x - E(x))(x - E(x))^T a_1) \\
&= a_2^T \Sigma a_1 \\
&= a_2^T \lambda a_1 = 0
\end{aligned}$$

Con lo que queda demostrado la propiedad de ortogonalidad de los componentes, y con lo cual la función a maximizar es:

$$L(a_1) = a_2^T \Sigma a_2 - \lambda(a_2^T \cdot a_2 - 1) - \gamma(a_2^T a_1)$$

Operando se obtiene de forma idéntica que  $(\Sigma - \lambda I) \cdot a_2 = 0$  y que para maximizar la varianza de  $y_2$  se elige el segundo mayor valor propio de la matriz  $\Sigma$ , digamos  $\lambda_2$ , siendo el segundo componente  $y_2 = a_2^T x$ , con  $a_2$  el vector propio correspondiente a  $\lambda_2$ . El mismo criterio se extiende hasta el  $p$ -ésimo componente que le correspondería el  $p$ -ésimo valor propio más pequeño digamos  $\lambda_p$ .

De esta forma los componentes se pueden expresar en forma matricial como el producto de una matriz formada por los vectores propios, así:

$$\begin{aligned}
y &= Ax \\
\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

El producto  $y_i = a_i^T x$ , es interpretado como la rotación de los ejes representados por cualquiera de las  $x_i$ , ya que la matriz A es una matriz ortogonal, obteniéndose que la distancia original entre las variables originales no se altere, es decir;

$$\begin{aligned}
y_i^T y_j &= (a_i^T x_i)^T (a_j^T x_j) \\
&= x_i^T a_i a_j^T x_j \\
&= x_i^T x_j
\end{aligned}$$

Y debido a que se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Var}(y_1) &= \lambda_1 \\ \text{Var}(y_2) &= \lambda_2 \\ &\vdots \\ \text{Var}(y_p) &= \lambda_p \end{aligned}$$

la matriz de varianzas – covarianzas de  $y$  será:

$$\text{Var}(y) = \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_p \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Lambda &= \text{Var}(y) = \text{Var}(Ax) \\ &= A\text{Var}(x)A^T \\ &= A\Sigma A^T \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Sigma = A^T \Lambda A$$

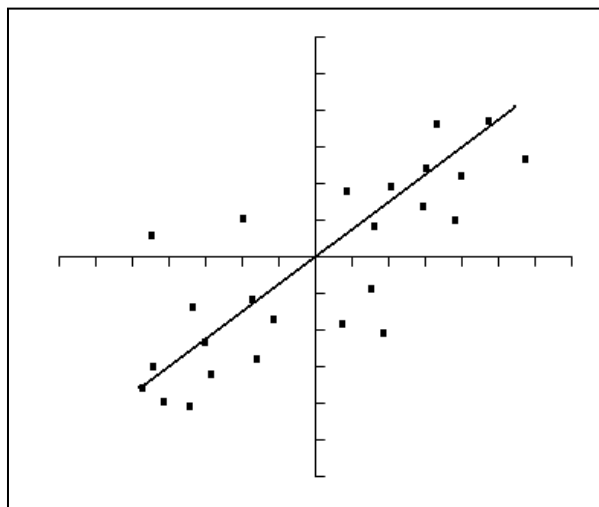
Con el resultado de que los valores propios son las varianzas de los componentes principales; se puede hablar del porcentaje de varianza total que recoge un componente principal o la proporción de varianza explicada por los primeros  $k$  componentes expresados por las siguientes ecuaciones respectivamente:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \cdot 100\%$$

$$\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_k}{\sum_{i=1}^p \lambda_i} \cdot 100\%$$

El problema puede ser tratado desde el punto de vista geométrico obteniéndose el mismo resultado. Las observaciones de las  $p$  variables pueden ser graficadas formando una nube elipsoidal de puntos en un espacio  $p$ -dimensional. Como las variables originales están correlacionadas, la nube elipsoidal de puntos no está orientada paralelamente a cualquiera de los ejes representados por las variables originales. Supongamos que se tiene  $p=2$ ; la nube de puntos se representa a lo largo de una elipse, donde la recta que

**Figura 2.5:** Interpretación geométrica de los componentes principales



minimiza las distancias ortogonales a ella es la dirección del eje mayor de la elipse. Este eje tiene la propiedad de ser la recta que minimiza las distancias ortogonales, explicando así el problema ya resuelto. Ahora en  $p$  dimensiones, intuitivamente se tienen algunas proyecciones en dos dimensiones; en las cuales se tiene que la mejor aproximación es la recta que indica la dirección del eje mayor de la elipse en cada plano. Al considerar los ejes del elipsoide en cada plano, se ha realizado una rotación con nuevas variables no correlacionadas u ortogonales, regresando al problema ya explicado anteriormente.

### **2.4.3 Criterios para Seleccionar el Número de Componentes**

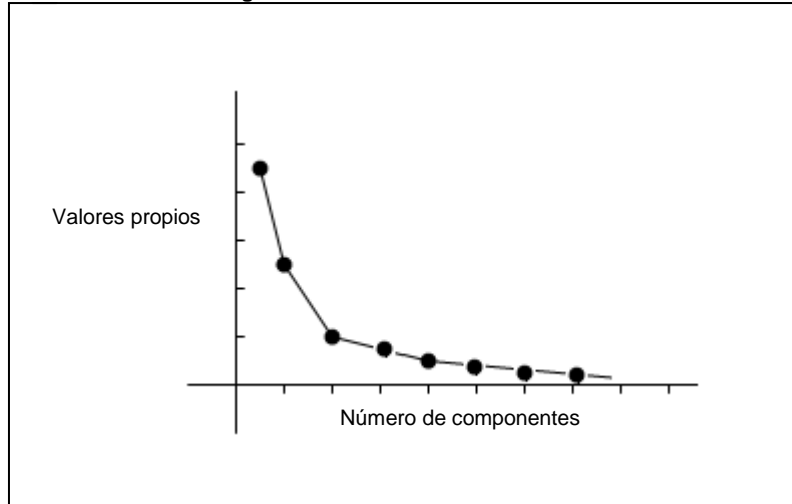
El objetivo esencial del Análisis de Componentes Principales es la reducción de la dimensionalidad de los datos. Existen diferentes criterios para decidir el número de componentes a seleccionar. Lo ideal sería seleccionar a lo mucho los tres primeros componentes, ya que debido a la percepción del ojo humano se puede analizar hasta máximo en tres dimensiones las posibles relaciones entre las variables.

#### **2.4.3.1 Gráfico de Sedimentación**

Consiste en representar gráficamente en el eje de las ordenadas los valores propios y en el eje de las abscisas el número de componentes según su importancia. En el gráfico se busca un punto de quiebre en el cual la variación de

la pendiente sea la máxima; el criterio es retener todas aquellas componentes previas a este quiebre.

Figura 2.6: Gráfico de sedimentación.



Como se aprecia en esta figura, se observa que hasta el tercer componente se forma una curva suave; a partir de éste la curva tiende a cerrarse variando en forma considerable la pendiente, por lo que el criterio nos aconsejaría retener los dos primeros componentes.

#### 2.4.3.2 Retención de Componentes de Acuerdo a la Varianza Total Explicada.

Este criterio, por su facilidad, es el más utilizado; el cual sugiere la selección del número de componentes de acuerdo al porcentaje explicado del total de la varianza; como un porcentaje apropiado de la varianza, se asume un 80%.

#### 2.4.3.3 Promedio de los Valores Propios

Se calcula el promedio de los valores propios; con lo cual el criterio sugiere admitir a todos aquellos que sean superiores al promedio, es decir todos aquellos que cumplan:

$$\lambda_h > \frac{1}{p} \sum_{i=1}^p \lambda_i$$

#### 2.4.3.4 Prueba de Significancia de los Componentes.

Este contraste se utiliza para comprobar si los componentes no retenidos son significativos o no. La prueba asume una distribución normal multivariante por

parte de los datos, supuesto que no es requerido para la estimación de los componentes principales. El criterio general de seleccionamiento es recoger los primeros  $k$  componentes que abarquen la mayor varianza posible; por tal razón se entra en duda si los restantes  $p-k$  componentes tienen varianzas mínimas casi nulas. Se crea el siguiente contraste:

$$H_0 : \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2} = \dots = \lambda_p = 0$$

El estadístico para la prueba es:

$$u = \left( n - \frac{2p+11}{6} \right) \left( k \ln \bar{\lambda} - \sum_{i=p-k+1}^p \ln \lambda_i \right)$$

$$\text{con } \bar{\lambda} = \sum_{i=p-k+1}^p \frac{\lambda_i}{k}.$$

El estadístico  $u$  sigue aproximadamente una distribución chi-cuadrado con  $v = \frac{(k-1)(k+2)}{2}$  grados de libertad. Se rechaza la hipótesis nula al nivel  $\alpha$  si y solo si  $u > \chi_{\alpha,v}^2$ , donde  $\chi_{\alpha,v}^2$  es el cuantil de orden  $\alpha$  de la distribución chi-cuadrado con  $v$  grados de libertad. Al rechazar la hipótesis nula, se entiende que al menos un valor propio de los no recogidos es significativo, con lo que habrá que incorporar un nuevo componente. Se continúa con este proceso hasta que la prueba sea aceptada.

#### 2.4.4 Información Contendida en el Análisis de Componentes Principales

El aspecto clave en el Análisis de Componentes Principales, es la interpretación de los componentes, que se resume en observar la relación de éstos con las variables originales; es decir, las correlaciones entre las variables iniciales y los componentes:

$$\text{Cor}(y_j, x_i) = \frac{\text{Cov}(y_j, x_i)}{\sqrt{\text{Var}(x_i)} \cdot \sqrt{\text{Var}(y_j)}}$$



$$\begin{aligned}
& Cov(y_j, \sum_{k=1}^p a_{ik} y_k) \\
&= \frac{Cov(y_j, \sum_{k=1}^p a_{ik} y_k)}{\sqrt{Var(x_i)} \cdot \sqrt{\lambda_j}} \\
&= \frac{a_{ij} Var(y_j)}{\sqrt{Var(x_i)} \cdot \sqrt{\lambda_j}} \\
&= \frac{a_{ij} \lambda_j}{1 \cdot \sqrt{\lambda_j}} \\
&= a_{ij} \sqrt{\lambda_j}
\end{aligned}$$

De modo que la matriz de correlaciones entre los componentes y las variables originales es:

$$Cor(y, x) = \Lambda^{1/2} A^T$$

Con lo que se observa, que la matriz de los vectores propios  $A$ , es de suma importancia en la interpretación de los componentes. Para la interpretación de los componentes principales se consideran por fines prácticos el siguiente proceso; sin embargo, el proceso por mencionar no deja de ser una sugerencia basada en la experiencia del investigador.

- Identificar las variables cuyas correlaciones con el componente en valor absoluto son más elevadas
- Definir a los componentes. Esta definición se realiza de acuerdo a la estructura de las correlaciones con las variables. La relación entre el componente y la variable será directa (inversa) si la correlación es positiva (negativa). El significado de un componente estará condicionado si existe una correlación alta o baja con las variables originales.

La representación gráfica de los componentes ayuda a la interpretación de los resultados. Si se toma en cuenta el plano de los dos primeros componentes, las coordenadas de una variable estarán representadas por la correlación existente entre la variable original y dichos componentes, con lo que nos indica la contribución de esa variable en la formación del componente. Todas las variables estarán representadas dentro de una superficie circular de radio 1.

Ahora la proximidad de las variables dependerá de las correlaciones existentes entre ellas. Cuando la correlación es igual a uno, las representaciones de las variables son iguales. Si todas las  $p$  variables no están correlacionadas, se obtendrán de igual manera  $p$  componentes importantes, es decir las mismas variables pero ordenadas de mayor a menor varianza. En el caso contrario, si las variables estuvieran altamente correlacionadas, se obtendría un solo componente explicando el 100% de la varianza total.

## **2.5 ANÁLISIS DE CONGLOMERADOS**

### **2.5.1 Introducción**

El Análisis de Conglomerados es una técnica exploratoria difundida para hallar agrupaciones dentro de un conjunto de datos. Estos datos pueden ser variables o casos, dependiendo si se desea examinar casos o relaciones entre variables. Esta técnica da lugar a un conjunto de particiones de variables que pueden representarse mediante un árbol de clasificación o dendograma. Para la construcción del árbol de clasificación esta técnica precisa de la elección de una medida de proximidad entre las variables tratadas y de una estrategia de agregación, que incluye el criterio a retener para la constitución de los grupos de las variables. Este análisis comienza separando a cada variable en un cluster por sí mismo; es decir se parte de tantos grupos como variables tiene el conjunto de variables, y por un procedimiento de agregación se van constituyendo nuevos grupos hasta formar un solo conglomerado o caso contrario de un solo grupo para ir formando, en cada iteración, sub conglomerados acabando con la formación de  $p$  grupos.

En el análisis se empieza construyendo la matriz de distancias entre las  $p$  variables originales utilizando una de las técnicas descritas a continuación..

### **2.5.2 Medidas de Proximidad**

Una vez establecidas las variables a clasificar, el siguiente paso consiste en establecer una medida para cuantificar la distancia entre las variables. El análisis

de Conglomerados posee una serie de medidas de proximidad que se diferencian unas de otras por el tipo de datos que han sido creadas.

### **2.5.2.1 Medidas de Semejanza**

Las medidas de semejanza evalúan el grado de parecido, semejanza o proximidad existente entre dos variables. Los valores mas altos indican mayor grado de proximidad existente entre variables; en caso contrario, cuanto menor sea su valor, menor es el grado de similaridad entre ellas, y con mayor probabilidad el análisis tenderá a no ponerlos juntos en el mismo conglomerado. Entre estas medidas se tienen al Coeficiente de Congruencia y al Coeficiente de Correlación

### **2.5.2.2 Medidas de Desemejanza**

Las medidas de desemejanza indican el grado de diferencia o disimilaridad existente entre dos variables. Los valores mas altos (bajos) indican mayor (menor) índice de diferencia o lejanía entre las variables comparables, tal es el caso que cuando las variables se encuentran juntas, la medida es nula. Entre estas se tienen las siguientes: distancia Euclídea, distancia Euclídea al Cuadrado, distancia de Chebychev, distancia de Manhattan y la distancia de Minkowski, siendo las más conocidas y utilizadas las distancias: Euclídea y Euclídea al Cuadrado.

#### **2.5.2.2.1 Distancia Euclídea**

Es la distancia más común utilizada para cuantificar la semejanza de dos variables definida por:

$$d_1(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$$

#### **2.5.2.2.2 Distancia Euclídea al Cuadrado**

Suma de los cuadrados de las diferencias entre los valores de las variables a compararse.

$$d_2(x, y) = \sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2$$

### 2.5.3 Técnicas de Clasificación Jerárquicas

Como se dijo anteriormente el análisis comienza con la construcción de la matriz de distancias entre variables. En esta matriz se identifican las dos variables más próximas y se prosigue a agruparlas en un solo conglomerado sin que estas se puedan separar para el resto del análisis, de ahí su nombre de Jerárquico.

Estas técnicas pueden ser de dos tipos: Aglomerativas y Divisivas.

La técnica Aglomerativa parte de cuantos grupos como variables existan en el análisis. Las dos variables inicialmente agrupadas constituyen un solo elemento que como tal posee su propia distancia al resto de variables. La matriz inicial  $p \times p$  de distancias de las  $p$  variables originales se transforma en una matriz  $(p-1) \times (p-1)$  ya que dos de sus variables han sido agrupadas en una sola. De nuevo se vuelven a recalcular las distancias y se prosigue con el mismo procedimiento, teniéndose que los elementos a agruparse pueden ser dos variables o una variable con el primer grupo formado, todo esto dependiendo de la medida de proximidad entre éstos.

El procedimiento continúa hasta formar un solo conglomerado. La técnica Divisiva inicia con un conglomerado que reúne a todas las variables. En cada iteración el conglomerado se va dividiendo en grupos hasta conformar  $p$  conglomerados.

Para determinar que variables, o grupo – variables, o grupos – grupos se agrupan o dividen, es necesario incluir un criterio para recalcular las distancias hacia los demás elementos de la matriz de distancias. Estos métodos de conglomeración dependerán de la estructura de los datos y determinarán la calidad del resultado alcanzado.

#### 2.5.3.1 Método de Vinculación Simple

Método también denominado del vecino más próximo. La distancia de un nuevo conglomerado formado por la agrupación de dos elementos que se encuentran

más próximos en la tabla de distancias se calcula como la menor de las distancias entre los elementos del conglomerado formado y el resto de elementos de la tabla de distancias. Entiéndase como elementos a variables y grupos de variables ya formados. Así, la distancia de un conglomerado  $A$  a un elemento  $u$  será:

$$d_3(A, u) = \min\{d_j(i, u) / i \in A,\}$$

Con  $j = 1$  ó  $2$ .

### **2.5.3.2 Método de Vinculación Completo**

Este método se contrapone al anterior, es decir, la distancia del conglomerado formado al resto de elementos se elige como la distancia de sus elementos mas alejados, razón por la cual se lo conoce también como del vecino más lejano. De esta forma, se tiene que:

$$d_4(A, u) = \max\{d_j(i, u) / i \in A,\}$$

Con  $j = 1$  ó  $2$ .

## **2.6 ANÁLISIS DISCRIMINANTE**

### **2.6.1 Introducción**

El análisis Discriminante es una técnica multivariante de clasificación de individuos que ayuda a identificar las características que diferencian a dos o más grupos, creando una función que nos permite distinguir los individuos de uno u otro grupo. El análisis Discriminante es considerado como un análisis de Regresión, en el cual la variable dependiente es categórica (no métrica), y las variables independientes son cuantitativas (métricas) y determinan a qué grupo pertenecen los individuos. Esta variable dependiente que define la pertenencia a los grupos, está estructurada de cuantos valores discretos como grupos se desea clasificar. El análisis discriminante cumple uno de los siguientes objetivos:

1. Encontrar una combinación lineal de las variables dependientes que mejor diferencie a los grupos, conocida como función discriminante o regla de decisión

2. Identificar las variables principales que permiten diferenciar a los grupos, determinando cuántas de éstas son suficientes para alcanzar la mejor clasificación posible.
3. Clasificar nuevos individuos en alguno de los grupos encontrados con la ayuda de la función discriminante.

El análisis Discriminante posee varias similitudes: con el Análisis de Regresión, con la diferencia que en la Regresión la variable dependiente es cuantitativa; con el Análisis Anova, con la diferencia que las variables independientes son categóricas y la dependiente es cuantitativa, es decir, al contrario del análisis Discriminante; y con la regresión Logística, con la diferencia de estimación de las funciones discriminantes.

### 2.6.2 Cálculo de las Funciones Discriminantes

Para llegar a identificar en qué se diferencian  $q$  grupos de individuos se necesita encontrar  $m$  funciones discriminantes de tal manera que maximicen la separación entre grupos. Estas funciones discriminantes son combinaciones lineales de las  $p$  variables cuantitativas, es decir:

$$\begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1p}x_p \\ \vdots \qquad \qquad \qquad \vdots \\ y_m = a_{m1}x_1 + \dots + a_{mp}x_p \end{array} \quad \text{es decir} \quad y = a^T x$$

El criterio utilizado es que estas funciones discriminantes maximicen la varianza entre grupos y minimicen la varianza dentro de los grupos. Para esto se distinguen  $q$  grupos:  $I_1, I_2, \dots, I_q$

Se parte del hecho que la covarianza de dos variables es de la forma:

$$Cov(x_j, x_{j'}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{ij} - \bar{x}_j) \cdot (x_{ij'} - \bar{x}_{j'})$$

Se recuerda que cada una de las variables independientes tienen  $n$  observaciones distribuidas en  $q$  categorías, por lo que la expresión anterior se la puede expresar como:

$$\begin{aligned}
Cov(x_j, x_{j'}) &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_k} (x_{ij} - \bar{x}_j) \cdot (x_{ij'} - \bar{x}_{j'}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_k} [(x_{ij} - \bar{x}_{kj}) + (\bar{x}_{kj} - \bar{x}_j)] \cdot [(x_{ij'} - \bar{x}_{kj'}) + (\bar{x}_{kj'} - \bar{x}_{j'})] \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_k} (x_{ij} - \bar{x}_{kj})(x_{ij'} - \bar{x}_{kj'}) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_k} (\bar{x}_{kj} - \bar{x}_j)(\bar{x}_{kj'} - \bar{x}_{j'}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_k} (x_{ij} - \bar{x}_{kj})(x_{ij'} - \bar{x}_{kj'}) + \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q n_k (\bar{x}_{kj} - \bar{x}_j)(\bar{x}_{kj'} - \bar{x}_{j'}) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^q \sum_{i \in I_k} (x_{ij} - \bar{x}_{kj})(x_{ij'} - \bar{x}_{kj'}) + \sum_{k=1}^q \frac{n_k}{n} (\bar{x}_{kj} - \bar{x}_j)(\bar{x}_{kj'} - \bar{x}_{j'})
\end{aligned}$$

que es la expresión de la varianza total expresada como la suma de la varianza dentro de grupos mas la varianza entre grupos, donde  $I_k$  es el  $k$ -ésimo grupo. Se define como  $t(x_j, x_{j'})$  a la varianza total entre las variables  $x_j$  y  $x_{j'}$ ; como  $d(x_j, x_{j'})$  a la varianza dentro de grupos; y, como  $e(x_j, x_{j'})$  a la varianza entre grupos, entonces la varianza total se puede expresar como:

$$t(x_j, x_{j'}) = d(x_j, x_{j'}) + e(x_j, x_{j'})$$

lo que en forma matricial se expresa como  $T = D + E$ ; con  $T$ ,  $D$  y  $E$  matrices de varianza total, varianza dentro de grupos y varianza entre grupos respectivamente. Con lo cual la varianza de las funciones discriminantes es igual a:

$$Var(y) = Var(a^T x) = a^T Var(x) a = a^T (D + E) a = a^T D a + a^T E a$$

Se busca maximizar la varianza entre grupos, lo que estadísticamente equivale a maximizar la varianza entre grupos frente a la varianza total. Por tanto, los coeficientes de  $a$  se elegirán de tal forma que se consiga maximizar el cociente

$$\frac{a^T E a}{a^T T a}$$

Si la varianza entre grupos es grande frente a la varianza total, equivale a decir que la varianza dentro de grupos es pequeña, es decir los valores de  $y$  para un

mismo grupo son similares; entonces se dice que la función discriminante separa bien los grupos. La función a maximizar detallada anteriormente posee la cualidad de ser homogénea; por tal razón, el problema a resolver es:

$$\begin{aligned} \max(a^T E a) \\ \text{s.r. } a^T T a = 1 \end{aligned}$$

Resolviendo por Multiplicadores de Lagrange, se obtiene que:

$$\begin{aligned} 2Ea - \lambda T a &= 0 \\ (T^{-1}E)a &= \lambda a \end{aligned}$$

Problema similar al de Componentes Principales, cuya solución es encontrar los valores propios de la matriz  $T^{-1}E$  con sus respectivos vectores propios, en donde a la primera función discriminante, la cual recoge el máximo poder discriminante, le corresponderá el vector propio asociado al máximo valor propio. Como son vectores linealmente independientes, dan origen a funciones no correlacionadas entre si. En ocasiones, el poder discriminante de la primera función es tan grande que las demás no contribuyen con información para discriminar a los grupos. Para determinar el número de funciones discriminantes que aportan con información a la formación de grupos existen varios criterios, que se presentan a continuación.

### 2.6.2.1 Porcentaje Relativo

Cuantifica el poder discriminatorio de cada una de las funciones con respecto al total acumulado por todas las funciones mediante un porcentaje. El poder discriminatorio de las funciones está representado por los valores propios respectivos. El porcentaje explicado por la  $i$ -ésima función  $y_i$  del total explicado por todas las funciones  $y_1, y_2, \dots, y_m$  está dado por:

$$\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^m \lambda_i} \cdot 100\%$$



### **2.6.2.2 Coeficiente de Correlación Canónica**

Este coeficiente calcula la variación de cada función discriminante en los distintos grupos. Un coeficiente con valor alto indica fuerte relación entre los grupos y la función discriminante; por ende, ésta discrimina satisfactoriamente a los grupos. En el caso opuesto, si existen correlaciones bajas los grupos no serán muy diferentes entre sí, por tanto las funciones discriminantes serán infructuosas; dicho de otro modo, la superposición de los grupos será excesiva y en estas condiciones no será posible encontrar una función discriminante útil para la clasificación.

### **2.6.2.3 Estadístico Lambda de Wilks**

El estadístico  $\Lambda$  de Wilks mide el poder discriminatorio de las funciones que son construidas. Este estadístico se define como el cociente entre la varianza dentro de grupos y la varianza total; es decir, el porcentaje de variabilidad explicada por la varianza dentro de grupos. El valor del estadístico puede variar entre 0 y 1, donde valores cercanos a 0 significan que la varianza dentro de grupos es mínima, por consiguiente la varianza entre grupos es mayor, indicando mucha discriminación. Caso contrario, con valores próximos a uno representan escasa discriminación.

## **2.6.3 Interpretación de los resultados.**

Con la obtención de las funciones discriminantes, el objetivo es determinar qué variables son las que más contribuyen a la formación de grupos. Como se ha dicho anteriormente, el análisis Discriminante construye funciones lineales de variables originales que discriminen entre los distintos grupos. Sin embargo, no todas las variables discriminan de la misma forma los grupos de los individuos. De esta manera, es necesario introducir criterios para ir seleccionando las variables según su capacidad discriminatoria, es decir, desestimando aquellas cuya contribución a la formación de grupos sea escasa.

### **2.6.3.1 Estadístico de Wilks.**

Se recuerda que el estadístico de Wilks se define como el porcentaje de la variabilidad total explicada por la diferencia dentro de grupos. Como se dijo

anteriormente, el análisis Discriminante sigue el objetivo de minimizar la varianza dentro de grupos y maximizar la variabilidad entre grupos. Por tal razón, este criterio sugiere minimizar el estadístico de Wilks. Cada variable a ser introducida en el modelo, es evaluada a través de un estadístico  $F$  que mide el cambio del valor del estadístico de Wilks al incorporar dicha variable. La variable introducida será aquella que cuyo estadístico  $F$  sea el mayor.

$$F = \left( \frac{n - q - p}{q - 1} \right) \cdot \left( \frac{1 - \frac{\lambda_{p+1}}{\lambda_p}}{\lambda_{p+1}} \right)$$

$\lambda_p$  es el estadístico de Wilks correspondiente al modelo antes de incluir la variable, y  $\lambda_{p+1}$  el correspondiente al modelo incluido la variable.

### 2.6.3.2 Distancia de Mahalanobis

Este criterio incorpora en cada paso la variable que maximiza la distancia de Mahalanobis. Se define esta distancia entre dos grupos  $A$  y  $B$  como:

$$H_{AB}^2 = (n - q) \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^p w_{ij} (\bar{x}_{iA} - \bar{x}_{iB}) \cdot (\bar{x}_{jA} - \bar{x}_{jB})$$

donde  $\bar{x}_{iK}$  es la media en el grupo  $K$  de la  $i$ -ésima variable y  $w_{ij}$  se obtiene de

$$W = E^{-1} = \begin{pmatrix} & \vdots & \\ \cdots & w_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{pmatrix}$$

## **CAPÍTULO 3. ANÁLISIS ESTADÍSTICO DEL PROCESO DE PRODUCCIÓN**

En este capítulo se analiza estadísticamente el proceso de producción de Porcelana Sanitaria, en sus sub-procesos consecutivos de elaboración de Barbotina y Colado, además de los defectos de producción. Se utiliza el paquete Minitab para analizar los defectos de producción y SPSS para los procesos de elaboración de Barbotina y Colado.

### **3.1 DETERMINACIÓN DE DEFECTOS CRÍTICOS EN LA PRODUCCIÓN Y ECONÓMICAMENTE REPRESENTATIVOS.**

#### **3.1.1 Introducción**

Como se explicó en el Primer Capítulo, el proceso de fabricación de porcelana sanitaria se conforma por diferentes secciones o etapas. Cada sección se encarga de controlar, elaborar y proporcionar a la sección siguiente, de la mejor manera posible, productos e insumos acordes para una buena producción. La empresa también obtiene al final del proceso productos defectuosos, los que originan pérdidas para la misma ya sea por un reproceso para eliminar los defectos, una venta a menor precio del producto o, en el caso extremo, el desecho total del producto. Estos defectos se identifican al final del proceso y se clasifican de acuerdo a la sección que está involucrada en tal defecto. De esta manera se tiene para la sección de Colado, defectos etiquetados con la letra C, para Terminación T, para Esmaltación E, para Preparación de Esmaltes M, para Yesería Y, y para Hornos H.

Si bien esta codificación es usada en la actualidad por la empresa, en el presente Proyecto de Titulación no se menciona debido a la confidencialidad de los datos aclarado anteriormente en la Presentación del Proyecto, por lo que se presenta una codificación de defectos que van desde DP1 hasta DP55 entendiéndose DP como "Defecto de Producción"

### 3.1.2 Objetivos

Los objetivos de este análisis son:

- ✚ Determinar qué defectos son económicamente más representativos en las pérdidas ocasionadas en la producción a través de diagramas de Pareto.
- ✚ Proporcionar resultados teóricos en la determinación de defectos fuera de control en la producción con la ayuda de Gráficos de Control.

### 3.1.3 Descripción de los Datos

Se utilizan datos correspondientes a los meses de Febrero – Mayo de 2007 para realizar los Gráficos de Control y diagramas de Pareto, con la finalidad de cumplir con los objetivos planteados.

Tabla 3.1: Datos analizados estudio Defectos.

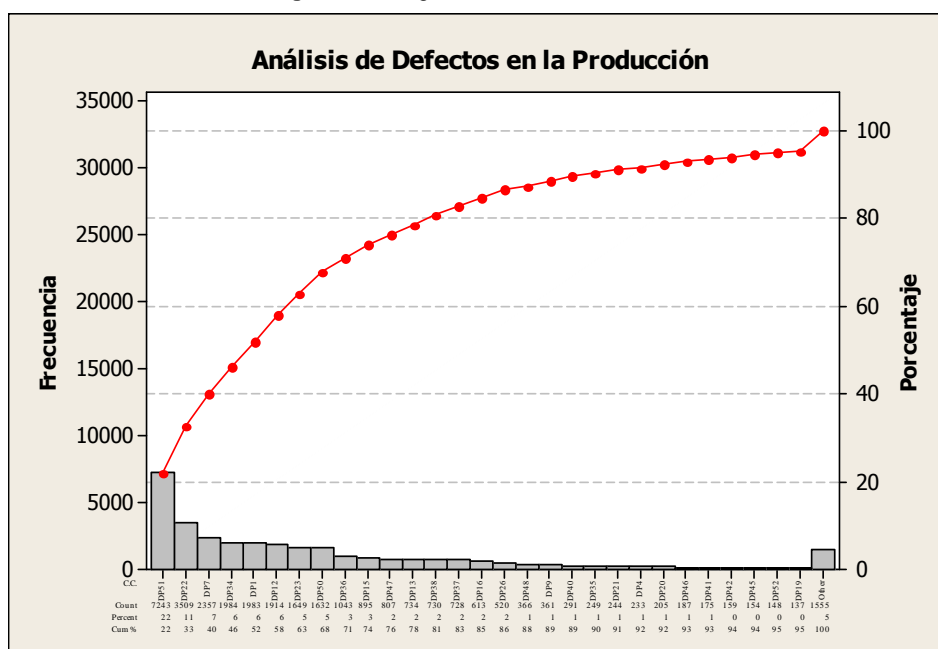
	Fecha	Número de Datos
<b>Defectos Críticos y Económicamente más representativos</b>	Febrero - Junio 2007	124

Tanto los gráficos como los diagramas se realizan primeramente con datos de febrero y marzo, pero debido a la disminución de la calidad en meses siguientes como mayo se prosiguió a elaborar estos con datos desde febrero hasta junio.

### 3.1.4 Análisis Estadístico

Como primer paso se realizó el análisis de todos los defectos a la salida del horno, determinando qué defectos aparecen con mayor frecuencia en la producción. Se determinó que estos son: DP51, DP22, DP7, DP34, DP1 y DP12 los cuales representan el 60% de defectos encontrados en la producción. Con este análisis se obtuvo una visión mínima de cuáles son los defectos principales a los que se debería estudiar, debido a que se desconoce una ponderación de defectos principales contra defectos más frecuentes, ya que por lo general el defecto mayormente encontrado no es el que produce mayores pérdidas económicas, como es el caso del DP51 categorizado como defecto de tercera calidad, que es eliminado con un pequeño retoque.

Figura 3.1: Diagrama de Pareto - Producción



Se considera entonces a calidades que provocan mayores pérdidas en la producción, que son las calidades Quinta, Cuarta y Segunda, en ese orden. Quinta porque ocasionan mayores pérdidas a la producción, ya que todos los productos son desechados en esta calidad, cuarta porque el producto necesita de un retoque para poder comercializarlo ocasionando un alza en el costo de producción pero no en el de venta, y segunda porque estos productos no pueden ser ya retocados y son vendidos a un menor precio.

Figura 3.2: Diagrama de Pareto Calidad Quinta

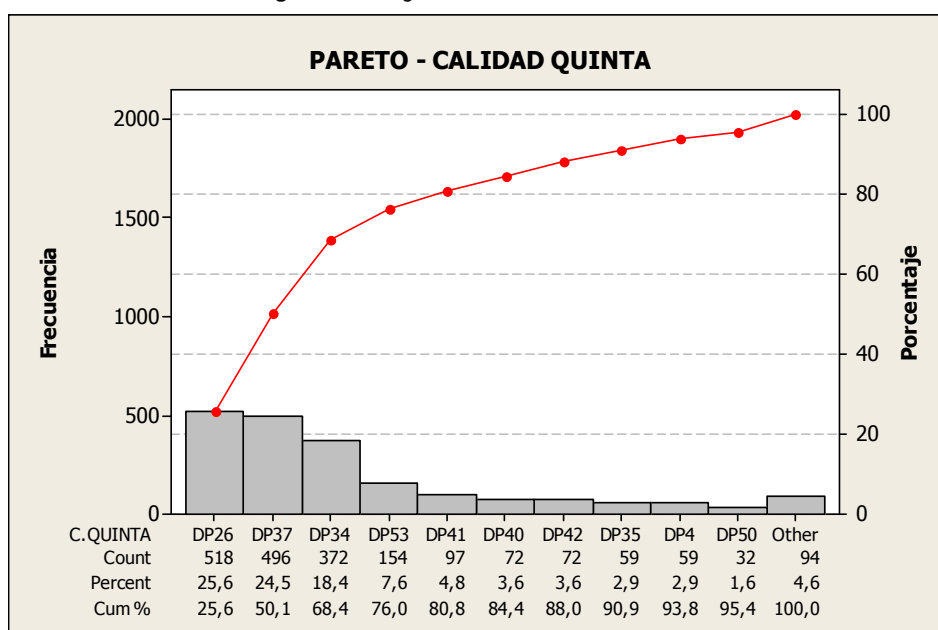


Figura 3.3: Diagrama de Pareto Calidad Cuarta

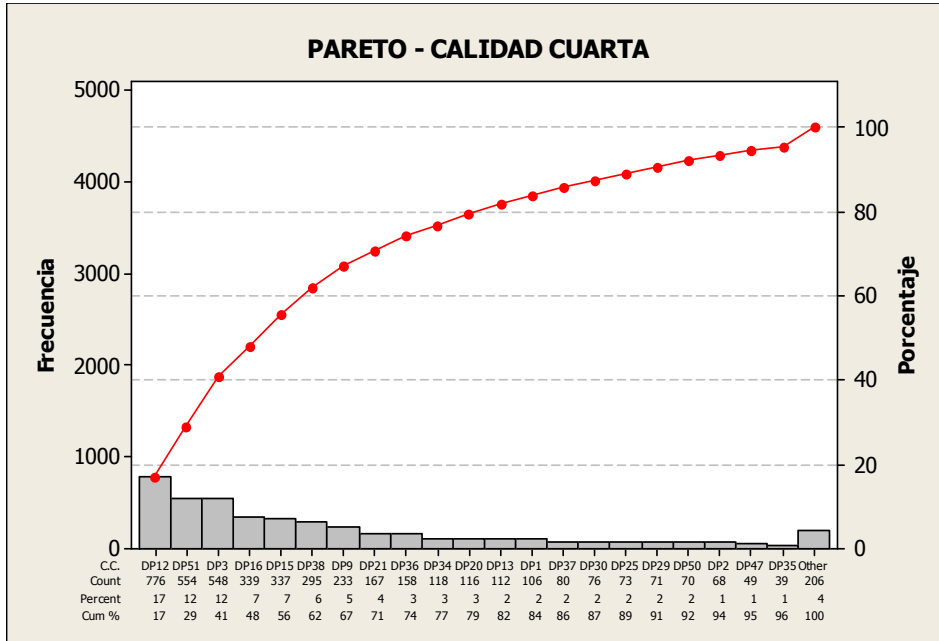
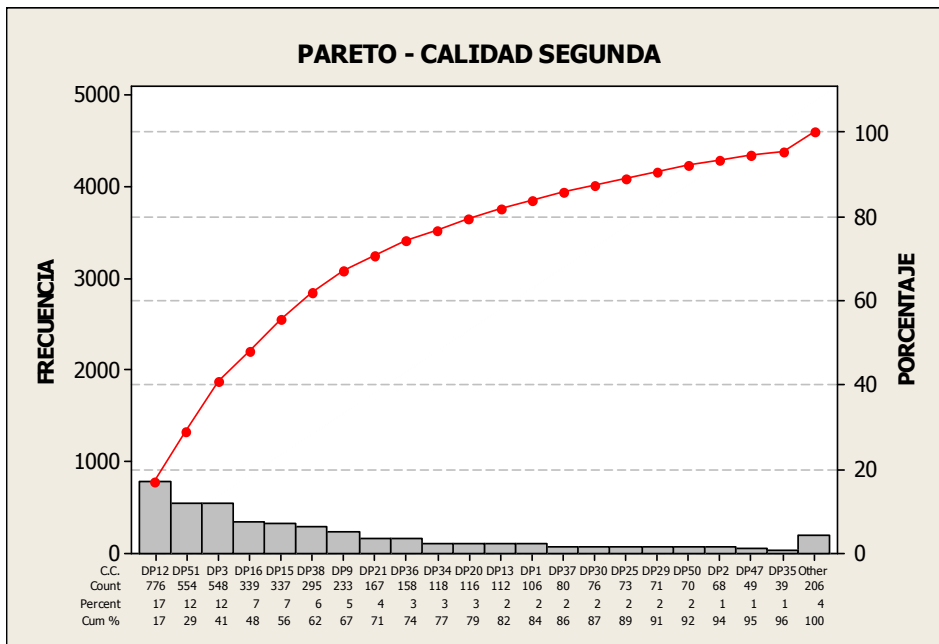
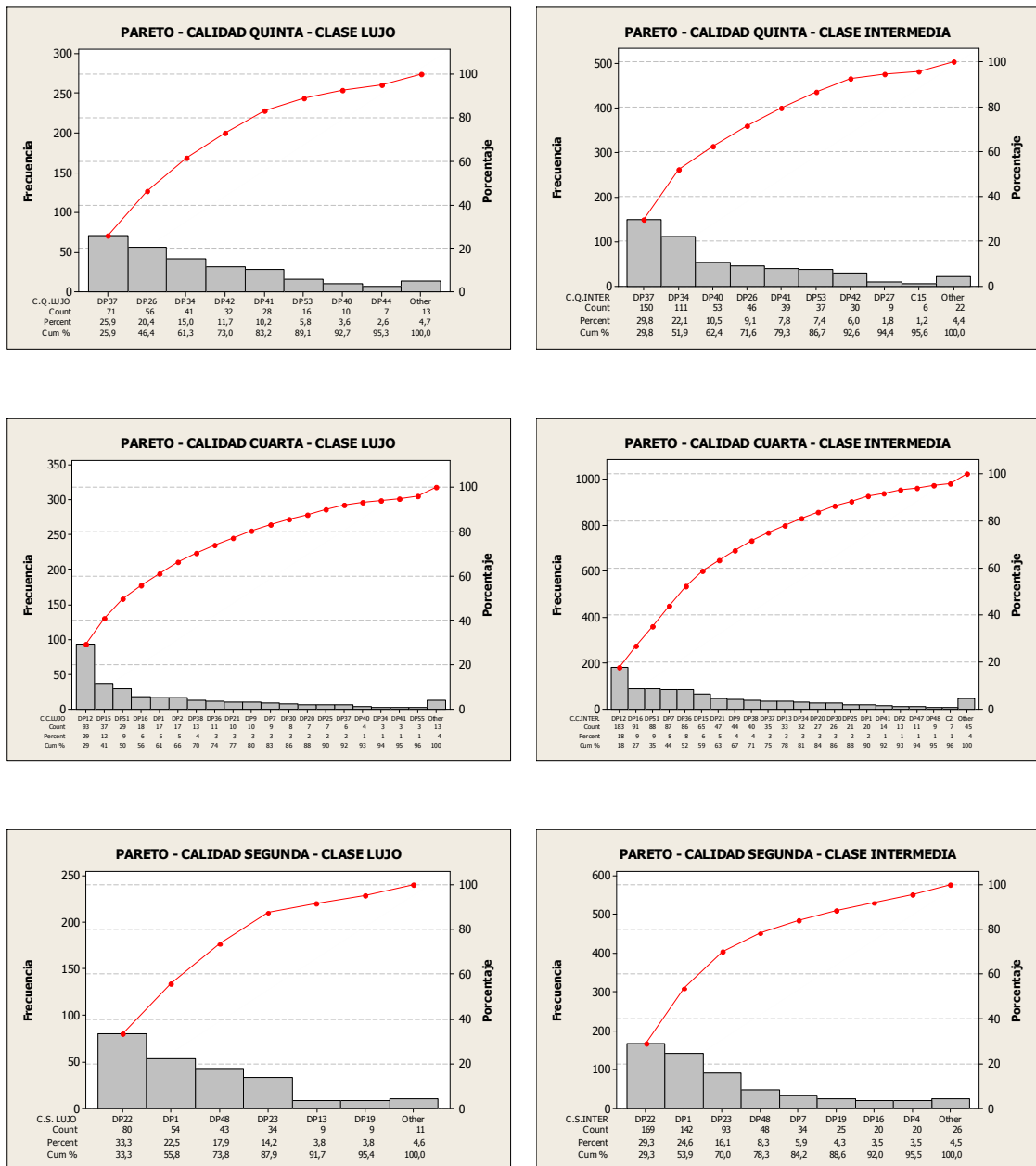


Figura 3.3: Diagrama de Pareto Calidad Segunda



Debido a que la empresa, económicamente, le interesa mejorar los productos de las Clases Intermedia y de Lujo, se tomó en cuenta también este detalle para proseguir a hacer un análisis por separado para las calidades Quinta, Cuarta y Segunda, además de considerar las Clases Intermedia y de Lujo, obteniéndose los siguientes resultados:

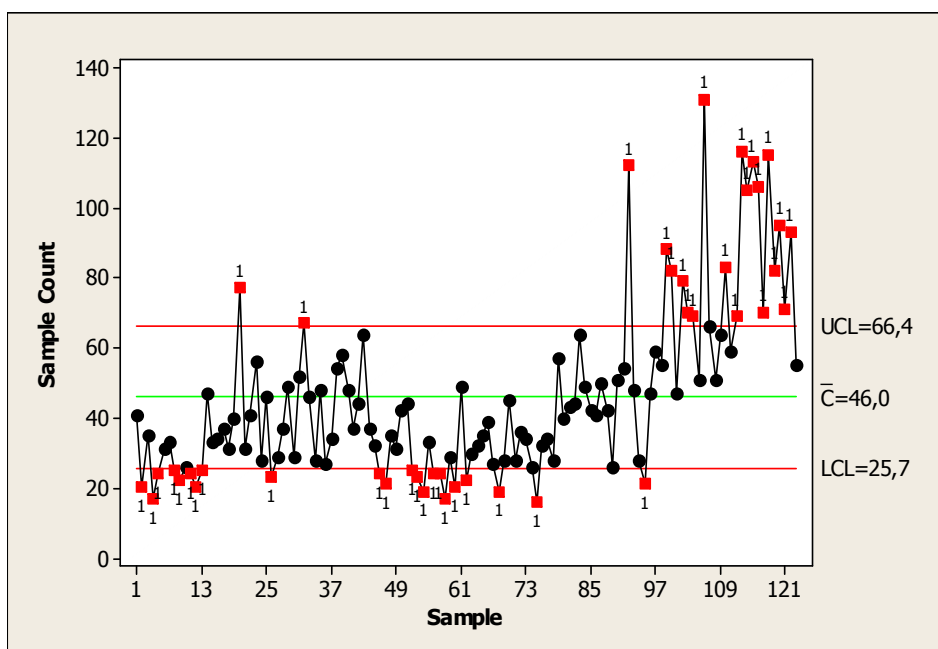
**Figura 3.4:** Diagramas de Pareto – Clases Lujo – Intermedia, Calidades Quinta, Cuarta y Segunda



Con esto se determina que los defectos críticos para que los productos salgan a calidad Quinta son DP26, DP37 y DP34. Al analizar por clases de producción, en cambio se obtienen los defectos: para Lujo DP37, DP26, y DP34; para intermedia DP37, DP34 y DP40. Como se observa para la calidad Quinta, los defectos a los que hay que atacar son principalmente el DP26, DP37, y DP34. Para la calidad cuarta se obtiene que los defectos a tratar son DP12, DP51, DP7, DP16, DP15 y DP38. Ahora con respecto a clases de producción se tienen para lujo DP12, DP15, DP51, DP16 y DP1. Para intermedia los defectos son DP12, DP16, DP51, DP7, DP36 y DP15. Se observa que los defectos a tratar son principalmente el DP12, DP51, DP7, DP16 y DP15. Por último para la calidad segunda se tiene que los defectos principales a tratarse son: el DP1 y el DP22 De acuerdo a clases de producción se tienen para lujo DP22 y DP1, y para intermedia aparecen los mismos defectos, con lo que se determina que hay que analizar los defectos DP22 y el DP1.

Por tales motivos los defectos que ocasionan mayormente pérdidas económicas son el DP26, DP22, DP37, DP34, y el DP1. Entre todos estos defectos, hay que descartar al DP1 debido a que su causa principal de presencia en la producción es falla humana.

Figura 3.5: Gráfico de Control Defecto DP34





A continuación se prosigue a realizar los gráficos de control para estos defectos. En muchos casos los problemas del control de calidad se resuelven recurriendo a gráficas de control o también llamadas cartas de control del proceso. Sin embargo, para la elaboración de éstas se necesita de técnicas analíticas, cálculos e inferencias adicionales mediante las cuales se describe el comportamiento de un determinado grupo de datos.

Figura 3.6: Gráfico de Control Defecto DP37

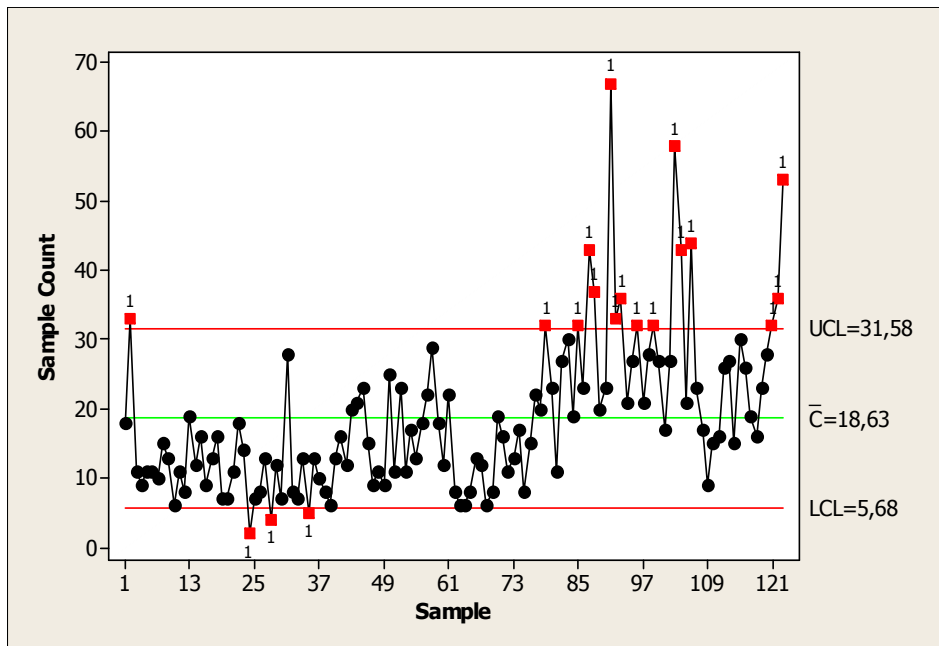


Figura 3.7: Gráfico de Control Defecto DP22

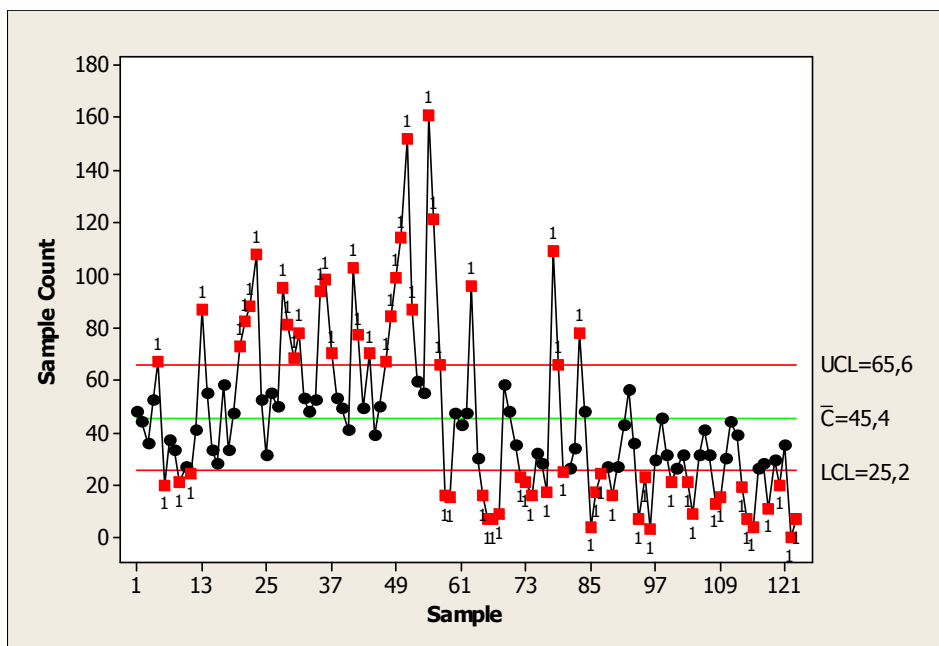
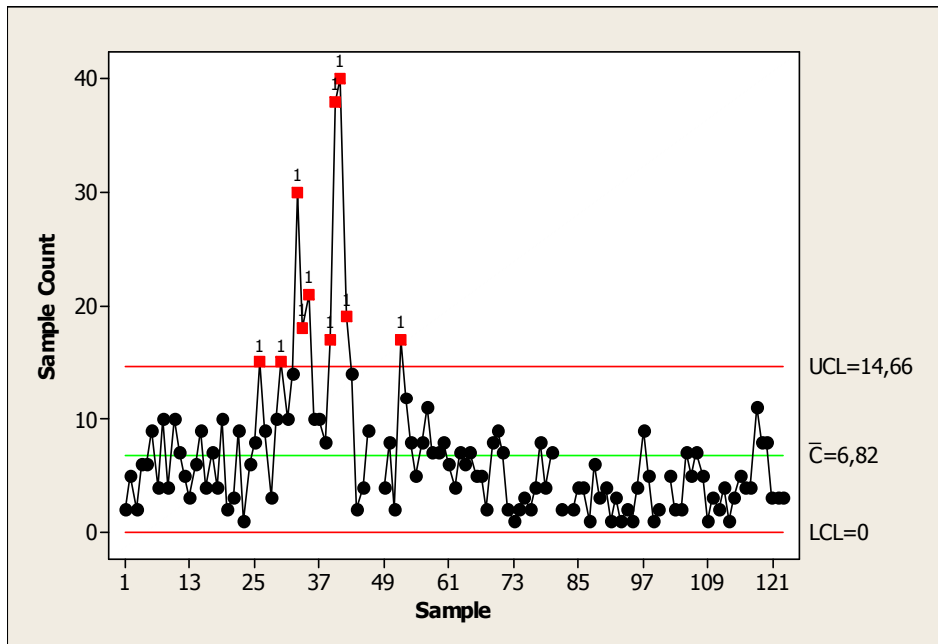


Figura 3.8: Gráfico de Control Defecto DP26



Se analizan los gráficos y se observa un mismo comportamiento:

- ✚ Presencia de puntos fuera de los límites de control.
- ✚ Presencia de más de siete puntos consecutivos por arriba o debajo de la línea central de de control.
- ✚ Tendencias ascendentes o descendentes de los puntos, es decir, presencia de puntos fuera de los límites de control.
- ✚ Presencia de tres o más puntos consecutivos fuera del intervalo  $[\bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}}; \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}}]$ .
- ✚ Movimiento de los puntos de arriba hacia abajo y viceversa en intervalos similares.

Se considera que la presencia de estos aspectos en los gráficos de control es probablemente debido a la influencia de causas asignables de variación en el comportamiento de los defectos que se detallan a continuación <sup>1</sup>.

#### a) Puntos Fuera de Control

- ✚ Accidentes o eventualidades

<sup>1</sup> Páginas Pag 33-34 Ricardo Palacios, Tesis: Control Estadístico de Procesos Productivos en "The Thesalia Springs Company S.A."

- ✚ Anormalidad en la operación general.

b) Ciclos Repetitivos

- ✚ Cambios que provoca el medio ambiente.
- ✚ Fatiga del trabajador.
- ✚ Diferencias en el instrumento o en la prueba que se emplea.
- ✚ Rotación continua de máquinas u operadores.
- ✚ Ensamble de piezas de otros procesos.

c) Tendencias

- ✚ Deterioro gradual de equipos o producto.
- ✚ Fatiga del trabajador.

d) Brincos en el proceso

- ✚ Cambios en la proporción de material que proviene de una fuente diferente.
- ✚ Nuevo trabajador o máquina.
- ✚ Modificación en los métodos de producción o proceso
- ✚ Cambio en los métodos de inspección.

e) Gran proporción de puntos cercanos a los líneas de control o a la línea central

- ✚ Sobre control.
- ✚ Diferencias substanciales en la calidad del material
- ✚ Diferencias en los métodos de prueba y/o equipos.
- ✚ Control de dos o más procesos en la misma carta.

## **3.2 ESTUDIO DE LAS POSIBLES RELACIONES ENTRE DEFECTOS DE PRODUCCIÓN.**

### **3.2.2 Objetivos**

Los objetivos de este análisis se presentan a continuación:

- ✚ Aplicar técnicas estadísticas para el reconocimiento de posibles relaciones entre defectos de producción.
- ✚ Determinar si la presencia de defectos en cualquiera de las secciones influye en la presencia de otros defectos en otras secciones.

### 3.2.3 Planteamiento del Problema

Se desea analizar la influencia de defectos entre los sub-procesos de producción, es decir posibles relaciones de dependencia entre defectos. En este análisis se considera como variables dependientes a los defectos económicamente más importantes; es decir, los defectos DP22 y DP26.

### 3.2.4 Descripción de los Datos

Se analizan datos correspondientes a los meses de febrero, marzo, abril, mayo y junio de 2007 de los defectos de producción de todas las secciones de Colado, Esmaltación, Terminación, Elaboración de Esmaltes, Yasería y de la sección Hornos los defectos DP22 y DP26.

Se analizan conjuntamente los cinco meses y por separado los meses de:

- Febrero – Marzo
- Abril
- Mayo – Junio

con el objetivo de comparar relaciones de defectos en los diferentes meses.

Se analizan de esta forma los datos por requerimiento de los funcionarios de la empresa, con el objetivo de analizar las tendencias de la calidad existente en estos meses, contrastando criterios de cambio de materia prima.

Tabla 3.2: Datos analizados relaciones entre Defectos de Producción.

	Fecha	Número de Datos
<b>Relaciones entre Defectos de Producción</b>	Febrero - Junio 2007	124
	Febrero - Marzo	59
	Abril	30
	Mayo - Junio	34

### 3.2.5 Metodología

Con el objetivo de determinar posibles relaciones entre los defectos de producción, se analizarán los datos mediante la aplicación de técnicas estadísticas ya descritas como los Análisis: Componentes Principales,

Conglomerados, y Regresión Múltiple. La aplicación termina siempre con el Análisis de Regresión, debido a que los análisis de Componentes Principales y Conglomerados ayudan a visualizar grupos de variables relacionadas entre ellas, mientras que la Regresión Múltiple proporciona una relación funcional aproximada entre las variables involucradas.

### **3.2.6 Análisis Estadístico**

#### **Análisis datos febrero - marzo**

A continuación se da a conocer los resultados obtenidos por los análisis ya descritos. Cabe mencionar que al inicio del análisis se encuentra la dificultad, ¿qué defectos y cuáles no se deben analizar? Esta pregunta nace ya que al realizar el Análisis de Componentes Principales con la totalidad de defectos, es decir considerando defectos de Colado, Preparación de Esmaltes, Esmaltación y Terminación, Yesería y Horno en su totalidad; el resultado obtenido es nada bueno, debido a que el número de componentes encontrados es sumamente alto, ocho, además que el porcentaje de la varianza acumulada por los dos primeros componentes es demasiado pequeña ni el 50%, con lo que no se pueden observar claramente relaciones entre variables. Se prosiguió a realizar el mismo análisis considerando únicamente a los defectos DP22 y DP26 de la sección Hornos (los más importantes económicamente) y todos los defectos del resto de secciones.

El análisis de Componentes Principales es satisfactorio, debido a se encuentra que la totalidad de varianza se explica con los dos primeros componentes, es decir, de una dimensionalidad de treinta y tres variables se logra reducir a solo dos (Tabla No. 3.1), criterio que se corrobora con el gráfico de sedimentación (ver figura No. 3.9).

El número de componentes seleccionados son los dos primeros, por el hecho que ambos explican el 100% de variabilidad. Se grafican las puntuaciones factoriales de los dos primeros componentes para encontrar mejores interpretaciones de los resultados obtenidos.

**Tabla 3.3:** Varianza total explicada por los Componentes

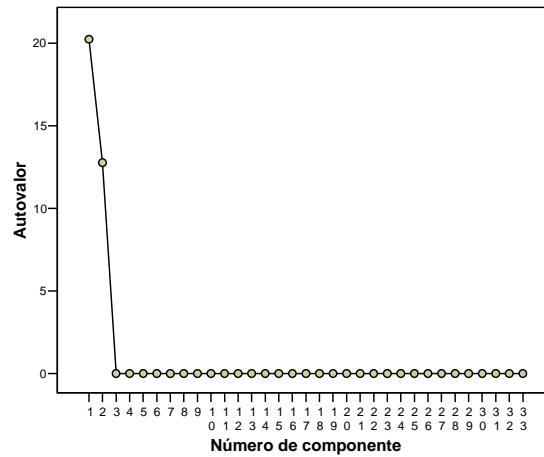
Componente	Autovalores iniciales			Sumas de las saturaciones al cuadrado de la extracción		
	Total	% de la varianza	% acumulado	Total	% de la varianza	% acumulado
1	20.235	61.318	61.318	20.235	61.318	61.318
2	12.765	38.682	100.000	12.765	38.682	100.000
3	1.019E-15	3.088E-15	100.000			
4	5.479E-16	1.660E-15	100.000			
5	4.506E-16	1.365E-15	100.000			
6	3.919E-16	1.188E-15	100.000			
7	3.280E-16	9.940E-16	100.000			
8	2.915E-16	8.834E-16	100.000			
9	2.579E-16	7.815E-16	100.000			
10	2.367E-16	7.173E-16	100.000			
11	2.038E-16	6.177E-16	100.000			
12	1.829E-16	5.541E-16	100.000			
13	1.510E-16	4.574E-16	100.000			
14	1.290E-16	3.910E-16	100.000			
15	1.110E-16	3.364E-16	100.000			
16	9.157E-17	2.775E-16	100.000			
17	5.064E-17	1.534E-16	100.000			
18	3.574E-17	1.083E-16	100.000			
19	5.406E-18	1.638E-17	100.000			
20	-3.224E-17	-9.768E-17	100.000			
21	-6.327E-17	-1.917E-16	100.000			
22	-9.236E-17	-2.799E-16	100.000			
23	-9.555E-17	-2.895E-16	100.000			
24	-1.155E-16	-3.500E-16	100.000			
25	-1.443E-16	-4.372E-16	100.000			
26	-1.936E-16	-5.867E-16	100.000			
27	-1.958E-16	-5.932E-16	100.000			
28	-2.775E-16	-8.410E-16	100.000			
29	-3.350E-16	-1.015E-15	100.000			
30	-4.882E-16	-1.479E-15	100.000			
31	-1.601E-15	-4.852E-15	100.000			
32	-3.556E-15	-1.077E-14	100.000			
33	-5.515E-15	-1.671E-14	100.000			

Método de extracción: Análisis de Componentes principales.

En la representación gráfica de la nube de puntos – variables (ver figura 3.10) no se observan grupos bien definidos por los defectos críticos DP22 y DP26, que son los más representativos económicamente; ya que estos se encuentran a lo largo del círculo de correlaciones. A pesar de esto, se observan comportamientos similares entre los defectos DP11, DP6, DP39, DP40 y DP41; DP1, DP34, DP35 y

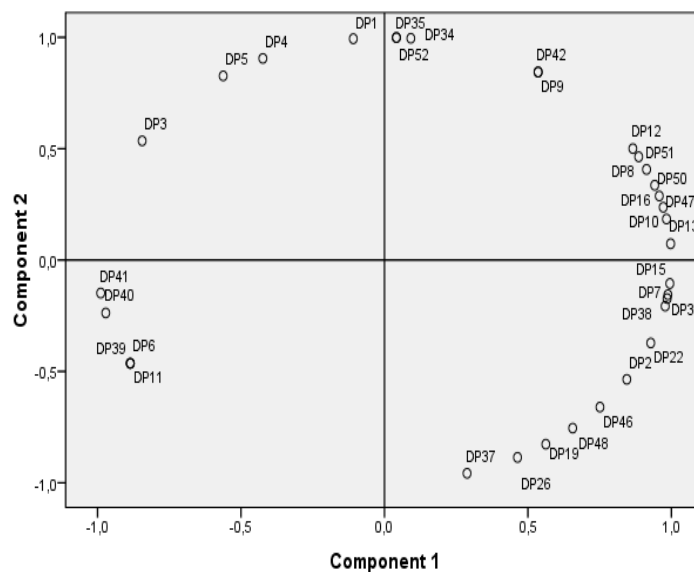
DP52; DP42 y DP9. Se aplica el Análisis de Conglomerados Jerárquicos con el objetivo de mejorar la visualización de los grupos formados.

**Figura 3.9:** Gráfico de sedimentación



En la figura 3.11 se presenta el dendograma, formado por las proyecciones de los defectos en los dos primeros componentes. Este dendograma se puede interpretar trazando líneas verticales de izquierda a derecha, con lo cual se va determinando los grupos formados de acuerdo al criterio de técnicas aglomerativas y método de vinculación simple. Los grupos formados al inicio indican que variables son las que mayormente se encuentran correlacionadas.

**Figura 3.10:** Gráfico de Componentes



Se pueden ver claramente los diferentes grupos formados por los defectos: los grupos de amarillo vienen a representar los que más altamente están correlacionados, es decir, los que posiblemente pueden definir una relación entre defectos; los grupos de verde formados en la segunda iteración y así sucesivamente hasta la formación de un grupo homogéneo.

El dendograma facilita la visualización de los grupos formados por los defectos DP22 y DP26. Como se dijo anteriormente, el análisis de Conglomerados no permite determinar qué defectos están explicados por otros, y muchos menos con qué pesos; es decir, relaciones funcionales, por lo que se prosigue a realizar análisis de regresiones para los principales defectos, el DP22 y DP26; considerando a estos últimos como variables dependientes.

Se realiza el análisis de regresión considerando como variable dependiente a defectos DP22 y DP26, a partir los grupos formados hasta la segunda iteración.

En el caso del defecto DP26, considerando el grupo formado con los defectos DP37, DP19, DP48 y DP46, la regresión no presenta validez alguna, debido a que el Coeficiente de Determinación y los estimadores de los coeficientes de los regresores no son significativos; el valor del coeficiente de determinación es muy pequeño, ni el 6%; y ninguna de las variables son significativas con un nivel de significación del 5%.

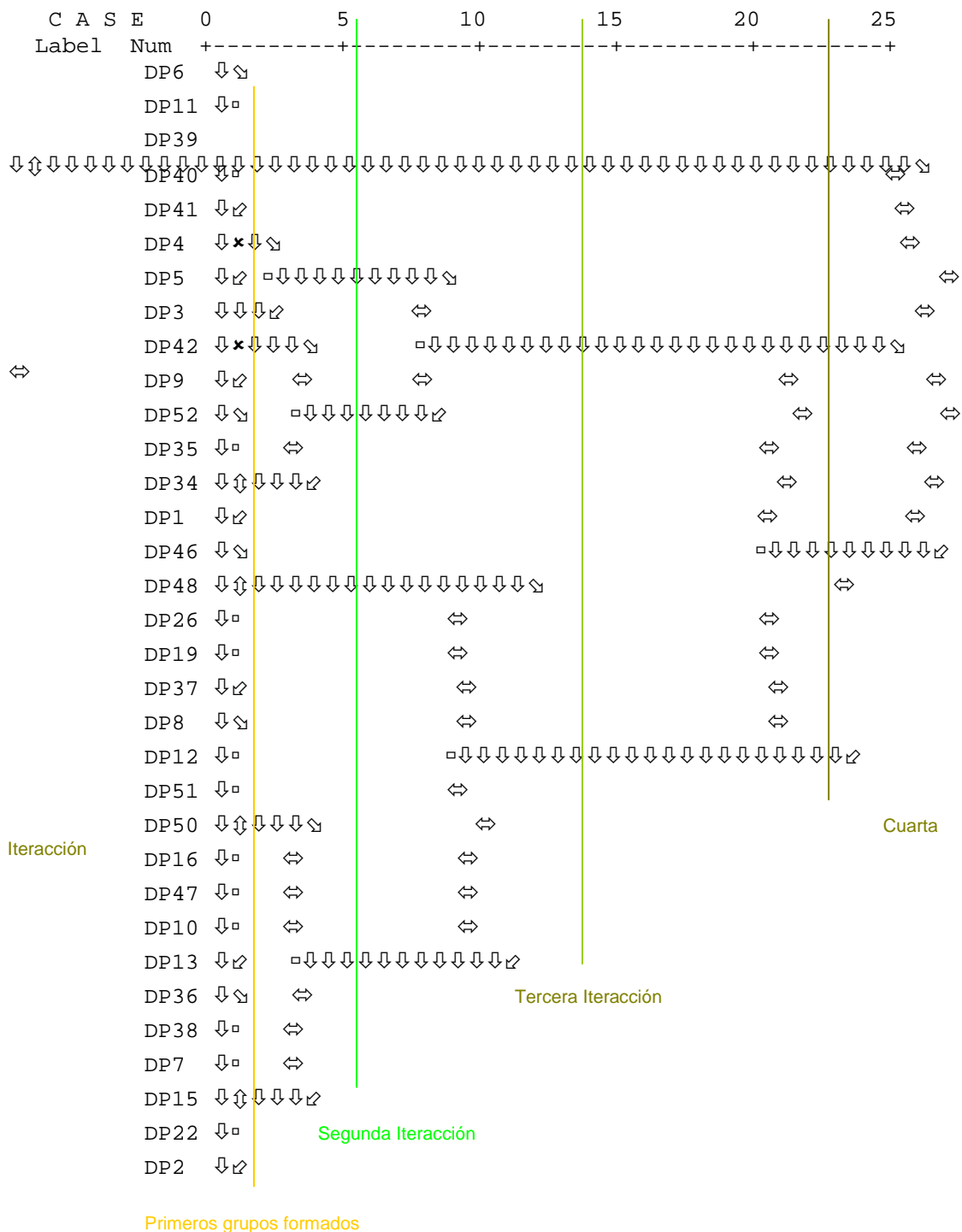


Figura 3.11: Dendograma: datos febrero - marzo

\* \* \* H I E R A R C H I C A L C L U S T E R A N A L Y S I S \* \* \*

Dendrogram using Average Linkage (Between Groups)

Rescaled Distance Cluster Combine



**Tabla 3.4:** Resumen del modelo de regresión para el defecto DP26

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.239(a)	.057	-.035	8.69186

a Variables predictoras: (Constante), DP37, DP48, DP46, DP19

**Coefficientes(a)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	11.023	3.949		2.791	.008
	DP37	-.058	.221	-.040	-.263	.794
	DP48	-.026	.212	-.019	-.124	.902
	DP46	.323	.664	.074	.486	.630
	DP19	-.395	.279	-.220	-1.417	.164

a Variable dependiente: DP26

Para el defecto DP22, se considera primeramente el grupo formado por los defectos DP36, DP38, DP7, DP15 y DP2. Contrario a la regresión anterior, se obtienen coeficientes significativos de dos de las variables predictoras, pero con el mismo problema de poseer un coeficiente de determinación pequeño.

**Tabla 3.5:** Resumen del modelo de regresión para el DP22

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.592(a)	.351	.288	26.55115

a Variables predictoras: (Constante), DP36, DP38, DP7, DP15, DP2

**Coefficientes(a)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	.675	12.904		.052	.958
	DP36	1.029	.365	.330	2.821	.007
	DP38	1.062	.785	.173	1.353	.182
	DP7	.512	.215	.277	2.379	.021
	DP15	.527	.324	.190	1.626	.110
	DP2	-.072	1.430	-.006	-.051	.960

a Variable dependiente: DP22

Se prosigue a eliminar los defectos menos significativos, en este orden; DP2, DP38 y la Constante. Se obtiene que los coeficientes de los defectos DP36, DP7 y DP15 son significativos con un nivel de significación del 5%.

**Tabla 3.6:** Resumen del modelo de regresión para el DP22 eliminado variables no significativas

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.546	.298	.273	26.64032

a Variables predictoras: DP36, DP7, DP15

**Coefficientes(a,b)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	DP36	1.253	.309	.378	4.054	.000
	DP7	.643	.152	.415	4.241	.000
	DP15	.732	.296	.203	2.477	.016

a Variable dependiente: DP22

b Regresión lineal a través del origen

Por poseer un coeficiente de determinación muy bajo, esta regresión no puede ser tomada en cuenta. Por tal razón, se procede a realizar el análisis con el segundo grupo formado por el análisis de conglomerados.

**Tabla 3.7:** Resumen del modelo de regresión para el DP22 con variables del segundo grupo formado por el análisis de Conglomerados

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.707	.500	.454	23.06773

a Variables predictoras: DP50, DP16, DP13, DP38, DP7

**Coefficientes(a,b)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	DP50	-.858	.221	-.367	-3.887	.000
	DP16	.920	.337	.198	2.728	.009
	DP13	.468	.160	.168	2.922	.005
	DP38	2.425	.576	.507	4.213	.000
	DP7	.763	.162	.515	4.714	.000

a Variable dependiente: DP22

b Regresión lineal a través del origen

En su inicio, considerando la totalidad de defectos del grupo formado, se encuentra un coeficiente de determinación del 48% y algunos defectos significativos; mientras se van eliminando las variables menos significativas, se obtiene el siguiente modelo anterior (Tabla 3.7)

Esta regresión en comparación con la anterior mejora sustancialmente el coeficiente de determinación, posee un  $R^2 = 0,50$ ; es decir, la regresión explica el 50% de variabilidad del DP22; y posee todos los coeficientes significativos con un nivel de confianza del 1%. La relación funcional es la siguiente:

$$DP22 = -0,858DP50 + 0,92DP16 + 0,468DP13 + 2,425DP38 + 0,763DP7 + ERROR$$

*Interpretación del modelo:*

- El defecto DP22 está directamente relacionado con los defectos DP16, DP13, DP38 y DP7. Esta relación indica que si aumentan estos defectos, el defecto DP22 también aumenta. Este modelo está explicando el problema del DP22 con defectos de esmalte en su mayoría. Los defectos DP16, DP13 y DP7 se relacionan con problemas de esmaltes; tanto en su elaboración como en su aplicación. Mientras que el DP38, defecto de Colado, influye en mayor grado en el DP22.
- Con el defecto DP50 se tiene una relación inversa. El modelo indica que hay que aumentar el DP50 para disminuir el DP22, que en la realidad es incoherente pensar aumentar un defecto sobre todo de quinta calidad para reducir otro. Se revisa la correlación existente entre estos dos defectos y se observa que poseen una correlación negativa significativa al 1%.

**Análisis datos abril**

Se aplica el análisis de componentes principales para la totalidad de los defectos, reduciéndose a una dimensionalidad de trece factores que explican el 100% de la varianza total; sin embargo, los tres primeros factores explican únicamente el 37,719% de ésta. Se aplica el mismo análisis, considerando por separado a los defectos DP22 y DP26, con el resto de defectos de las demás secciones, reduciéndose a una dimensionalidad de diez factores; los tres primeros factores

explican sólo el 39,45%. Como no se obtiene resultado satisfactorio, se prosigue a realizar el análisis de Conglomerados con la totalidad de defectos. El dendograma (figura 3.12) presenta los grupos formados.

Se realiza análisis de regresión para los grupos de defectos formados por el DP22 y DP26. En el caso del DP26, se obtiene una regresión con un coeficiente de determinación de 0,806 muy bueno, cuyo valor pueda deberse al alto número de variables; pero con la mayoría de variables no significativas; se procede a eliminar a éstas hasta llegar a obtener un modelo:

**Tabla 3.8:** Resumen del modelo de regresión para el DP22 datos Abril

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.781(a)	.610	.485	1.86654

a Variables predictoras: (Constante), DP3, DP52, DP46, DP15, DP1, DP47, DP42

**Coefficientes(a)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	3.517	1.349		2.608	.016
	DP3	.786	.237	.498	3.319	.003
	DP52	.802	.250	.547	3.212	.004
	DP46	.529	.146	.570	3.623	.002
	DP15	.225	.100	.365	2.254	.034
	DP1	-.193	.076	-.419	-2.553	.018
	DP47	-.205	.066	-.448	-3.091	.005
	DP42	-.190	.052	-.567	-3.645	.001

a Variable dependiente: DP16

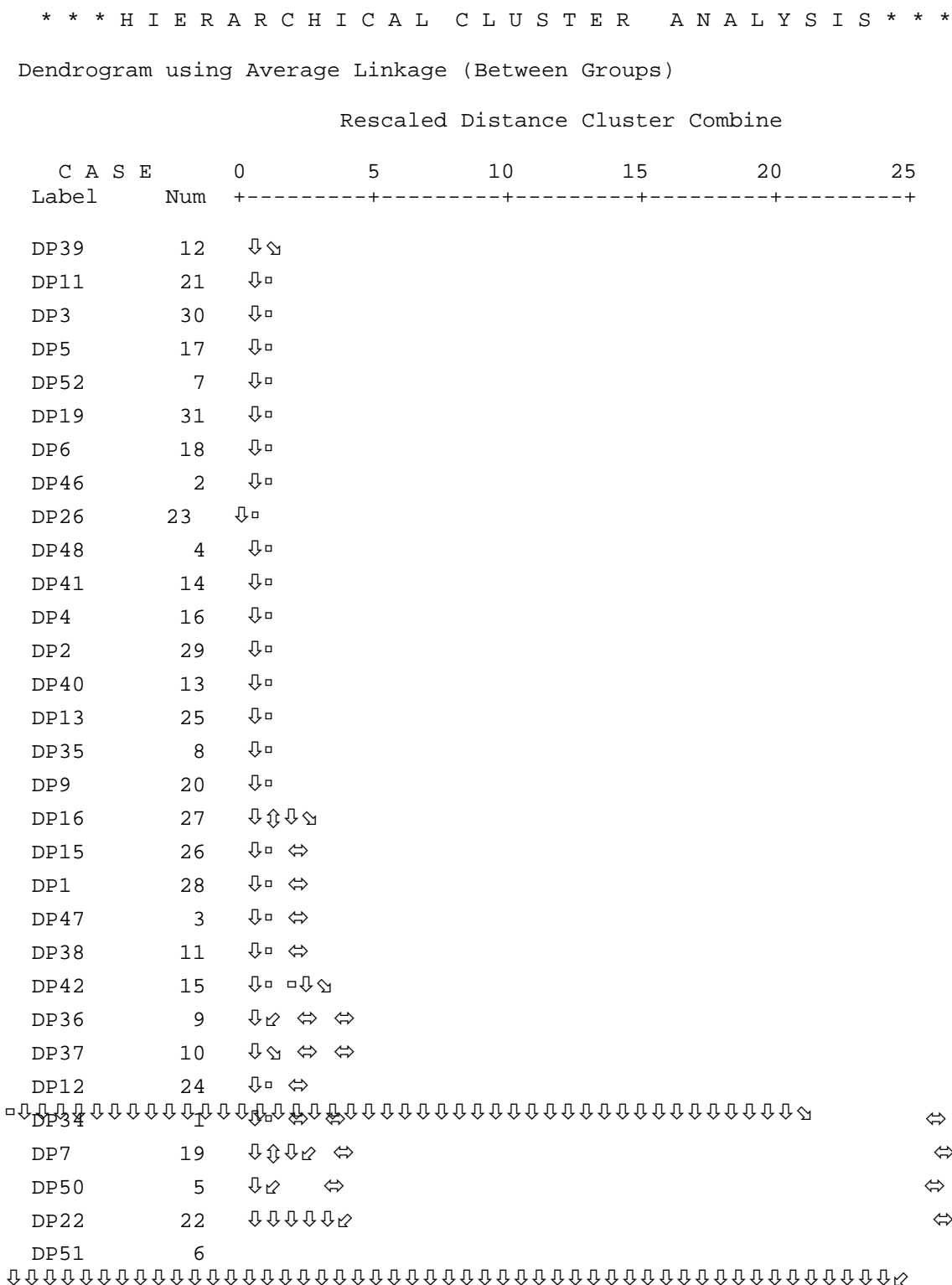
La regresión explica el 61% de variabilidad del DP26, y posee todas sus variables significativas a un nivel de significación del 5%. El modelo es el siguiente:

$$H7 = 3,517 + 0,7867DP3 + 0,802DP52 + 0,529DP46 + 0,225DP15 - 0,193DP1 - 0,205DP47 - 0,19DP42 + ERROR$$

*Interpretación del modelo:*

- En forma directa, el defecto DP26 está relacionado con los defectos DP3, DP52, DP46 y DP15, lo que indica que si aumentan estos defectos, el defecto DP26 también aumenta.

**Figura 3.12:** Dendograma: datos abril



- Caso contrario con los defectos DP1, DP47 y DP42 se relaciona en forma inversa. El modelo indica que hay que aumentar estos defectos para disminuir el DP26, sin interpretación válida en la realidad.

### **Análisis datos mayo – junio**

Se realiza el análisis de componentes principales; se obtiene el mismo problema que en el mes anterior, demasiados factores que explican la varianza total. En un principio se dispone de 13 factores considerando la totalidad de los defectos. El análisis de componentes principales de los defectos DP22 y DP26 por separado con el resto de defectos de las demás secciones, indica la elección de 11 factores. Por la misma razón se prosigue a realizar el Análisis de Conglomerados y a continuación el análisis de Regresión.

En el caso del DP26, se inicia con una regresión con coeficiente de determinación de 0,786; pero con la mayoría de variables predictoras no significativas; eliminando aquellas variables no significativas se termina con una regresión con un  $R^2=0,416$ .

**Tabla 3.9:** Resumen del modelo de regresión para el DP26 datos mayo - junio

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.644	.416	.356	2.04868

a Variables predictoras: DP46, DP19, DP4, DP15

#### **Coefficientes**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	DP46	.394	.074	.645	5.349	.000
	DP19	-.472	.164	-.267	-2.888	.007
	DP4	-.178	.088	-.227	-2.020	.053
	DP15	.173	.037	.611	4.636	.000

a Variable dependiente: DP26

Para el DP22, el resultado es mucho peor; del grupo encontrado por el dendograma se encuentra una regresión con coeficiente de determinación de 0,085 y con todas las variables no significativas.

**Tabla 3.10:** Resumen del modelo de regresión para el DP22 datos mayo-junio

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.292(a)	.085	-.041	14.03687

a Variables predictoras: (Constante), C17, C4, M1, C3

#### Coeficientes(a)

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	28.716	10.617		2.705	.011
	DP36	.256	.215	.230	1.187	.245
	DP12	-.255	.260	-.190	-.979	.336
	DP37	.105	.200	.097	.528	.601
	DP50	-.156	.167	-.173	-.932	.359

a Variable dependiente: DP22

### Análisis datos febrero – junio

Se realiza el análisis de regresión para los grupos formados por el análisis de conglomerados ya que el análisis de componentes principales arroja la elección de nueve o más componentes. Para ambos defectos, DP22 y DP26, las regresiones finales encontradas no son significativas, por poseer un coeficiente de determinación bajo.

En el caso del DP26, la regresión final explica únicamente el 14,7% de la variabilidad del DP26 con únicamente variables significativas DP13 y DP37.

**Tabla 3.11:** Resumen del modelo de regresión para el DP26 datos febrero - junio

#### Resumen del modelo

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.383(a)	.147	.133	5.92331

a Variables predictoras: (Constante), DP13, DP37



**Coefficientes(a)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	t	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	7.883	1.133		6.955	.000
	DP13	.118	.036	.280	3.258	.001
	DP37	-.121	.049	-.213	-2.475	.015

a Variable dependiente: DP26

La regresión encontrada para el defecto DP22, explica el 5,5% y posee como variable explicativa al defecto DP34

**Tabla 3.12:** Resumen del modelo de regresión para el DP22 datos febrero - junio

Modelo	R	R cuadrado	R cuadrado corregida	Error típ. de la estimación
1	.235(a)	.055	.047	30.24281

a Variables predictoras: (Constante), DP34

**Coefficientes(a)**

Modelo		Coeficientes no estandarizados		Coeficientes estandarizados	T	Sig.
		B	Error típ.	Beta		
1	(Constante)	59.097	5.832		10.133	.000
	DP34	-.297	.112	-.235	-2.654	.009

a Variable dependiente: DP22

### 3.3 DETERMINACIÓN DE CONDICIONES QUÍMICAS Y FÍSICAS DE BARBOTINA INFLUYENTES EN CONDICIONES TÉCNICAS DE COLADO.

#### 3.3.1 Objetivos

A continuación se presentan los objetivos de esta sección.

### **3.3.1.1 Objetivo General**

- ✚ Determinar posibles relaciones entre variables de control de condiciones de barbotina con variables de la sala de colado

### **3.3.1.2 Objetivos Específicos**

- ✚ Determinar estadísticamente relaciones entre los tiempos de toma de espesores y variables del control de condiciones de Barbotina tomadas en laboratorio
- ✚ Determinar estadísticamente relaciones entre los espesores y variables de control de condiciones de Barbotina.
- ✚ Determinar posibles relaciones entre los tiempos de moldeo con y sin aire con variables de control de condiciones de Barbotina.
- ✚ Determinar relaciones entre la plasticidad de la línea piloto con variables de control de condiciones de Barbotina.
- ✚ Determinar posibles relaciones entre los espesores a los 40 y 50 min. de la línea piloto con variables de control de condiciones de Barbotina
- ✚ Determinar valores de las variables del control de condiciones de Barbotina que producen que la pasta ligue o no.

### **3.3.2 Planteamiento del Problema**

Como se mencionó en el Capítulo 1, la sección Colado basa su funcionamiento en el cumplimiento estricto de tiempos. Dichos tiempos, por diversos factores, tienden a subir a lo largo de la finalización de la semana. Cabe mencionar que uno de los principales objetivos de la empresa, es determinar la naturaleza de la influencia de la barbotina en los tiempos, por lo que se persigue analizar la influencia de condiciones físicas y químicas de la sección Elaboración de Barbotina, influyentes en las condiciones técnicas de Colado. Al igual que en la sección anterior se codifican las variables para mantener la confidencialidad de los resultados obtenidos.

### **3.3.3 Descripción de los Datos**

Se analizan los datos históricos de control de Barbotina desde el 4 de enero de 2006 hasta el 15 de junio de 2007 para las variables SEB21 y SEB22. Se analizan los datos del 19 de abril hasta el 5 de junio de 2007 para la variable

SEB21. Se analizan los datos del 7 de mayo hasta el 18 de junio de 2007 para las variables SEB25, SEB26 y SEB12. Se analizan los datos del 7 de agosto hasta el 24 de agosto para las variables SEB27, SEB28, SEB12, SEB29 y SEB25. Se analizan los datos del 23 de julio hasta el 24 de agosto para las variables SEB12, SEB29 y SEB25. Para el problema de la variable SEB30 se analizan los datos del 23 de julio hasta el 24 de agosto y del 7 de agosto al 24 de agosto.

### DATOS ANALIZADOS

- ✚ 4 de enero 2006 – 15 de junio 2007: SEB21 y SEB22
- ✚ 19 de abril – 5 de junio: SEB27
- ✚ 7 de Mayo – 18 de junio: SEB12, SEB25 y SEB26.
- ✚ 7 de agosto – 24 de agosto: SEB27 y SEB28.
- ✚ 7 de agosto – 24 de agosto: SEB12, SEB29, SEB25 y SEB30.
- ✚ 23 de julio – 24 de agosto: SEB12, SEB29, SEB25 y SEB30.

Figura 3.13: Datos Influencia de Condiciones de Barbotina en Colado

	Fecha		Número de Datos
SEB21, SEB22	Enero 2006 - Junio 2007	Datos Históricos Control Barbotina	604
SEB27	Abril 2007 - Junio 2007	Línea de Producción #7	92
SEB12, SEB25, SEB26	Mayo 2007 - Junio 2007	Línea Piloto	42
SEB28, SEB27, SEB12, SEB29 y SEB25	Agosto 2007	Línea de Producción #3	112
SEB28, SEB27, SEB12, SEB29 Y SEB25	Julio 2007 - Agosto 2007	Línea Piloto	125

### 3.3.4 Desarrollo

Se utiliza la misma metodología utilizada para encontrar relaciones entre defectos de producción, es decir, Análisis de Componentes, Análisis de Conglomerados y Análisis de Regresión; además del Análisis Discriminante para el problema de la variable SEB 30.

**OBSERVACIÓN:** La segmentación de los datos se lo realiza como detalla a continuación debido a la presencia de variables influyentes en el estudio, ya que los análisis desarrollados con la totalidad de los datos no arrojan criterios válidos.

#### 3.3.4.1 Variables SEB27 y SEB28.

Se realiza el análisis considerando los datos históricos de control de Barbotina para las variables SEB21 y SEB22 (Enero 2006-Junio 2007). El resultado no fue

satisfactorio para SEB 27 ya que se debían considerar otros hechos que se descartaban, como es la variable SEB31. Por tal razón, se recogen los datos de la SEB31 de una línea en especial; en este caso se escoge la línea de producción # 7 de los Inodoros Firenze (IFZ) por ser representativa, vida útil que va desde el 19 de abril hasta el 5 de junio de 2007. Los registros se analizan para SEB27 y SEB28. En el caso de SEB28, se realiza el análisis considerando la variable SEB31. El modelo es muy adecuado para explicar la variable SEB28 en Colado y aceptado por diferentes puntos a favor: El primero de ellos, el coeficiente de determinación indica que el modelo explica el 93,7% de la variabilidad de los espesores; segundo; estadísticamente las variables son significativas.

La ecuación encontrada por el modelo es:

$$\text{SEB28} = -0.000587045 + 0.0571959*\text{SEB2} + 3.53839*\text{SEB1} + \text{ERROR}$$

*Interpretación del modelo:*

- si se aumenta en una unidad la variable SEB2, aumenta la variable SEB28 en 0.05 unidades.
- si se aumenta la variable SEB1 en una unidad, la variable SEB28 aumenta en 3,54 unidades.

Para la variable SEB 27, por el hecho de que la variable SEB31 en el molde aumenta conforme aumentan las coladas y días de semana, se realiza el análisis por semana, en los cuales los resultados obtenidos fueron muy buenos.

*Semana del 23 al 27 de abril*

Se obtuvo el siguiente resultado:

$$\text{SEB27} = 139.289 + 0.935408*\text{SEB20} + 2.26091*\text{SEB13} - 1.9305*\text{SEB16} + 1.65478*\text{SEB19} + 1.04463*\text{SEB3} - 4.60203*\text{SEB2} + \text{ERROR}$$

*Interpretación:*

Para disminuir la variable SEB27:

- Se necesita disminuir la variable SEB20
- Disminuir la variable SEB13
- Aumentar la variable SEB16
- Disminuir la variable SEB19
- Disminuir la variable SEB3
- Aumentar la variable SEB2

Semana del 30 de abril al 4 de mayo

Resultado obtenido:

$$\mathbf{SEB27 = 20.3627 + 10.6827*SEB9 - 11.3124*SEB10 + ERROR}$$

*Interpretación:*

Para disminuir los tiempos de toma de espesor se necesita:

- Disminuir la variable SEB10
- Aumentar la variable SEB9

Semana del 7 al 11 de mayo

Resultado obtenido:

$$\mathbf{SEB27 = 0.157895 + 1.18596*SEB31 + ERROR}$$

*Interpretación:*

Para disminuir la variable SEB27 se necesita disminuir la variable SEB31

Semana del 14 al 18 de mayo

Resultado obtenido:

$$\mathbf{SEB27 = -179.812 + 1.4176*SEB3 + 0.953766*SEB14 + 0.64417*SEB31 + ERROR}$$

*Interpretación:*

Para disminuir la variable SEB27 se tienen que:

- disminuir la variable SEB3
- disminuir la variable SEB14
- disminuir la variable SEB31

Semana del 21 al 25 de mayo

Resultado obtenido:

$$\text{SEB27} = 51.9094 - 0.92119*\text{SEB16} + 0.811042*\text{SEB31} + \text{ERROR}$$

*Interpretación:*

Para disminuir la variable SEB27 se necesita:

- Aumentar la variable SEB16
- Disminuir la variable SEB31 en los moldes.

Semana del 28 de mayo al 01 de junio

**3.3.4.2 Variables SEB12, SEB25 y SEB26.**

Se realiza el análisis considerando variables de control de barbotina con variables de la línea piloto ubicada en la sección colado. Los datos disponibles para este análisis son del 7 de mayo hasta el 19 de junio de 2007, ya que se consideró la vida útil de los moldes que conforman la línea piloto.

Se realiza análisis con todos los datos a lo largo de la vida de los moldes tanto para la variable SEB12 como para las variables SEB25 y SEB26, no habiéndose encontrado ninguna estimación buena. Por consiguiente se realiza el análisis de igual manera que se realiza en la sección anterior, es decir, por semanas. En el caso de las variables SEB25 y SEB26 no se encuentra ninguna relación mientras que para la SEB12 se detalla a continuación.

Semana del 7 al 11 de mayo (No. Llenadas 1-20)

Se encontró el siguiente resultado:

$$\text{SEB12} = 203.451 - 3.7177*\text{SEB2} + 0.620879*\text{SEB13} - 9.87423*\text{SEB10} + 2.62479*\text{SEB32} - 2.38498*\text{SEB9} + \text{ERROR}$$

*Interpretaciones:*

- si se aumenta la variable SEB2, disminuye SEB12 en colado
- si aumenta SEB13, aumenta SEB12 en colado
- si aumenta SEB10, disminuye la variable SEB12
- si aumenta SEB32, aumenta la variable SEB12
- si aumenta SEB9, disminuye la variable SEB12

Semana del 14 al 18 de mayo (No. Llenadas 21-40)

Se encuentra el siguiente resultado: (el resultado obtenido no es tan satisfactorio ya que el coeficiente de determinación es menor al 50%)

$$\text{SEB12} = 31.5989 + 0.344074*\text{SEB4} - 2.96139*\text{SEB10} + \text{ERROR}$$

*Interpretaciones:*

- si se aumenta la variable SEB4, la variable SEB12 aumenta
- si se aumenta la variable SEB10 en laboratorio disminuye la SEB12

### 3.3.5 Conclusiones

Uno de los principales problemas encontrados al realizar este análisis es la toma incompleta de datos, faltantes que influyen en los resultados. Generalmente hay datos incompletos tanto de la SEB19 y SEB20 en colado y de la SEB17 tomada en laboratorio.

En el estudio se utilizaron datos de ensayos del 19 de abril hasta el 5 de junio, pertenecientes a la línea de producción #7 de IFZ, y del 7 de mayo hasta el 19 de junio pertenecientes a la línea piloto de Colado. El estudio arrojó criterios que

según los expertos en la empresa son erróneos, por lo que se decidió supervisar una nueva línea de producción de tal manera que se garantice: la confiabilidad de los datos, la eliminación de datos faltantes y sobre todo la unificación del tiempo de la toma de datos en ambos sectores de producción.

### **3.3.6 Desarrollo**

Por lo explicado anteriormente se escogió la línea #3 de IFZ, línea que coincidió el cambio de moldes con el inicio del análisis. Se recogieron datos de ensayos de las cuatro coladas desde el 7 al 24 de agosto, en tres semanas. De igual manera para la línea piloto, pero debido a que se utilizan dos formularios, el uno para primeras coladas en el cual se realizan todos los ensayos, y el otro para segundas coladas en adelante, en el que se realizan ensayos de variables claves; se recogieron datos también únicamente para las primeras coladas por motivos de acaparar todas las variables que puedan influir en la SEB12 y SEB28 en la línea piloto.

#### **3.3.6.1 Línea de Producción # 3**

##### **3.3.6.1.1 Variable SEB27**

7 al 24 de agosto:

$$\text{SEB27} = 31,9163 - 0,033\text{SEB6} + 0,1652\text{SEB8} - 12,3764\text{SEB10} \\ + 2,3756\text{SEB13} + 1,1226\text{SEB16} + \text{ERROR}$$

Interpretación para obtener menores valores de SEB27:

- Aumentar la variable SEB6
- Disminuir la variable SEB8
- Aumentar la variable SEB10
- Disminuir la variable SEB13
- Disminuir la variable SEB16



La ecuación encontrada posee sus coeficientes significativos en su totalidad, pero el inconveniente es su coeficiente de determinación que es muy bajo, ya que explica alrededor del 48,86% de variabilidad de los tiempos de toma de espesores.

Semana del 7 al 10 de agosto

$$\text{SEB27} = 37,289 - 0,6074\text{SEB4} + 0,50229\text{SEB8} + \text{ERROR}$$

Interpretación para disminuir los valores de SEB27:

- Aumentar la variable SEB4.
- Disminuir la variable SEB8

La relación encontrada explica en un 78,43% la variabilidad de la variable SEB27 además de poseer todos sus coeficientes significativos.

Semana del 13 al 17 de agosto:

$$\text{SEB27} = 197,6192 - 18.9609\text{SEB9} + 0.6485 \text{SEB31} + \text{ERROR}$$

Interpretación para disminuir los valores de SEB27:

- Aumentar la variable SEB9
- Reducir los valores de la variable SEB31

La ecuación expuesta anteriormente posee todos sus coeficientes significativos, y el coeficiente de determinación es mejor que el anterior, en este caso es del 60.32%.

Semana del 20 al 24 de agosto

$$\text{SEB27} = -72,6561 - 0,1421\text{SEB3} + 3,4421\text{SEB9} + 10,0112\text{SEB17} \\ + \text{ERROR}$$

Interpretación para lograr menores valores en la variable SEB27:

- Aumentar la variable SEB3

- Disminuir los valores de la variable SEB9
- Disminuir los valores de la variable SEB17

La relación encontrada anteriormente mejora mucho aún a las encontradas anteriormente, ya que su coeficiente de determinación es del 82,3% y todos sus coeficientes son significativos.

### 3.3.6.1.2 Variable SEB32

Semana del 7 al 10 de agosto:

$$\text{SEB32} = -32,381 + 0,6437\text{SEB11} + 2,3937\text{SEB31} + \text{ERROR}$$

Semana del 13 al 17 de agosto

$$\text{SEB32} = 27,11407 - 0,63396\text{SEB4} - 0,1235\text{SEB8} + 8,78\text{SEB9} \\ - 2,079\text{SEB19} + 1,10247\text{SEB31} + \text{ERROR}$$

Se presentan únicamente estas ecuaciones que son en las que mejores resultados se obtienen, pertenecientes a la primera y segunda semana ya que en ambos casos superan el 88 por ciento de explicabilidad de la varianza, y todos sus coeficientes son significativos

### 3.3.6.1.3 Variable SEB33

Semana del 7 al 10 de agosto:

$$\text{SEB33} = 38,68 + 2,7272\text{SEB31} + \text{ERROR}$$

Semana del 20 al 24 de agosto:

$$\text{SEB33} = 168,59 - 0,07\text{SEB5} - 0,028\text{SEB6} + \text{ERROR}$$

Igual que en la variable SEB32, una de las variables explicativas es la variable SEB31 que se asemeja a lo que sucede realmente, ya que si aumenta SEB31 aumenta la variable SEB33. Se sugiere que para reducir los valores de SEB33 aumente la variable SEB5.

### **3.3.6.2 Línea Piloto**

#### **3.3.6.2.1 Primeras Coladas, Ensayos Completos**

##### **3.3.6.2.1.1 Variable SEB12**

Desde el 23 de julio al 24 de agosto

$$\text{SEB12} = -24,02 + 4,462\text{SEB9} - 0,2417\text{SEB20} + \text{ERROR}$$

La ecuación encontrada posee muchas ventajas ya que todos los coeficientes son significativos; además que el coeficiente de determinación es elevado, ya que explica el 62,42% de la variabilidad de la variable SEB12

##### **3.3.6.2.1.2 Variables SEB25 y SEB29**

Las relaciones encontradas no son aceptables, ya que tanto para las variables SEB25 y SEB29 se tienen coeficientes de determinación muy bajos, éstos alrededor del 30% de explicación de varianza.

##### **3.3.6.2.1.3 Variable SEB30**

Debido a que la característica de la variable SEB30 es ser cualitativa, se utiliza otra técnica estadística que es el análisis Discriminante, permitiendo que la variable dependiente en este caso SEB30 sea categórica y se pueda relacionar con variables independientes cuantitativas; en este caso las de control de condiciones de barbotina. Esta técnica separa en diferentes grupos a los datos de las variables independientes, agrupándolas en el mismo número de modalidades

de la variable categórica, entendiéndose por modalidad a cada valor que pueda tomar la variable cualitativa, en este caso: 1: Si, 0: No

A continuación se presentan los valores de aquellas variables que si tienen influencia en el ligado de la pasta; las variables que no son presentadas no tienen influencia sobre el ligado, ya que en ambos grupos formados no existe diferencia significativa entre ambos valores.

**Tabla 3.14:** Variables determinantes influyentes en SEB30

	<b>NO</b>	<b>SI</b>
SEB5	738.571	764.643
SEB6	1626.429	1611.786
SEB7	1911.429	1865.000
SEB8	159.550	143.922
SEB11	71.310	70.433
SEP9	7.100	6.914
SEB10	8.457	8.371
SEB13	35.006	36.310
SEB14	144.584	141.349
SEB16	76.463	77.479
SEB20	45.156	46.514

### 3.3.6.2.2 Totalidad Coladas

#### 3.3.6.2.2.1 Variable SEB12

Realizando el estudio con los datos no se dispone de una relación aceptable ya que se encuentran relaciones con coeficientes de determinación muy bajos, tanto considerando los datos por semanas como en global.

#### 3.3.6.2.2.2. Variables SEB25 y SEB29

SEB25: Semana del 7 al 10 de agosto

$$SEB25 = 18,42 - 0,264SEB2 - 0,064SEB31 + ERROR$$

$$R^2=80,39\%$$

SEB29: Semana del 7 al 10 de agosto

$$SEB29 = 19,376 - 0,278SEB2 - 0,062SEB31 + ERROR$$

$$R^2=80,03\%$$

SEB29: Semana del 13 al 17 de agosto

$$\text{SEB29} = 0,095 - 0,03\text{SEB11} + 0,07\text{SEB13} - 0,75\text{SEB18}$$

$$- 0,015\text{SEB20} - 0,023\text{SEB31} + \text{ERROR}$$

$$R^2=87,62\%$$

Con datos globales no se encuentra relación alguna, considerando los datos por semana se determina que son dos variables principalmente influyentes en los espesores, estas son las variables SEB2 y SEB31, en ambos casos si se aumentasen estas variables se ganaría que los valores de SEB29 disminuyan.

### 3.3.6.2.2.3 Variable SEB30

A continuación se presentan las variables principales que sus variaciones han producido que la variable presente un valor O: No

Figura 3:15: Variables influyentes en la variable SEB30

	<b>NO</b>	<b>SI</b>
SEB1	1.845	1.843
SEB3	44.627	45.901
SEB5	761.000	782.500
SEB7	1992.400	1966.250
SEB8	162.260	151.607
SEB14	143.942	145.217
SEB20	44.390	47.736
SEB31	93.360	75.167

### 3.3.7 Conclusiones

A continuación se presentan las conclusiones para las variables tratadas anteriormente.

Tabla 3.16: Conclusiones variables

### TIEMPOS DE PRODUCCIÓN

		SEB4	SEB5	SEB6	SEB8	SEB11	SEB9	SEB10	SEB13	SEB16	SEB17	SEB19	SEB20	SEB31
LÍNEA DE PRODUCCIÓN  #3	SEB27	↗	↗	↗	↘		↗		↘	↘	↘			↘
	SEB32	↗				↘		↘				↗		↘
	SEB33		↗	↗										↘
L. PILOTO(1ras Coladas)	SEB12							↘					↗	



: Aumentar



: Disminuir

**Tabla 3.17:** Conclusiones continuación

	SEB1	SEB5	SEB6	SEB7	SEB8	SEB11	SEB9	SEB20
L. PILOTO(1ras Coladas)		↗	↘	↘	↘	↘	↘	
L. PILOTO (Coladas completas)	↘	↗		↘	↘			↗

↗  
: Aumentar

↘  
: Disminuir

## **CAPÍTULO 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES**

En la elaboración del presente proyecto de titulación, se encontraron las siguientes conclusiones y recomendaciones que se detallan a continuación.

### **4.1 CONCLUSIONES**

1. Se encuentra una total aleatoriedad de los defectos; se determina por la información analizada que no es posible encontrar relación alguna que logre explicar los defectos DP22 y DP26 con defectos de las anteriores secciones. Se dice aleatoriedad debido a que las estructuras encontradas son totalmente diferentes de acuerdo a los meses. En la matriz de correlaciones se observa que los defectos DP22 y DP26 poseen bajas correlaciones con respecto a los otros defectos del análisis.
2. Para disminuir los valores de la variable SEB27, SEB32, SEB33 y SEB12 en Colado, se necesita aumentar los valores de las variables SEB4, SEB5 y SEB6.
3. La variable más importante influyente en el aumento de los valores de SEB27, SEB21 y SEB22 en Colado es la variable SEB31. Mientras aumenta los valores de SEB31, la humedad se va acumulando y por consiguiendo aumentando los valores de las variables mencionadas..
4. Para la variable SEB30 característica de la paste, se concluye que las variables SEB6 y SEB7 disminuyan, al igual que las variables SEB8 y SEB11.
5. Muchos de los ensayos son sumamente subjetivos; es decir, no son tomados con exactitud, ya que dependen de la perspectiva de cada operario. Por tal razón, puede encontrarse que la variación de cierta variable no se deba a condiciones de la pasta sino a cómo fue medida.



6. Se necesita analizar con más precisión por parte de las personas expertas en el tema del problema de la variable SEB30, ya que se observa que este inconveniente aparece cuando en la línea piloto se cambian a moldes de VVL; antes utilizaban moldes de lavatorios LAU, y nunca o muy poco aparecían problemas de SEB30; esto se puede observar en el formulario de registro de la línea piloto.

## **4.2 RECOMENDACIONES**

1. Con los resultados obtenidos de la influencia de condiciones físicas y técnicas de barbotina en la sección Colado, se recomienda realizar un estudio más profundo para verificar los resultados encontrados; es decir, aplicar técnicas estadísticas como Diseño de Experimentos o Métodos de Taguchi para continuar con los estudios realizados.
2. Se recomienda que el proceso de llenado de la línea piloto sea uniforme, ya que en muchas ocasiones se pudo observar que los moldes permanecían abiertos hasta el mismo instante en que eran llenados, influenciando de esta manera la variabilidad debido a la humedad existente en el molde.
3. De igual manera, en laboratorio de barbotina no existe una uniformidad de procedimiento para el desarrollo de los ensayos; son muy pocos los operarios que agitan la barbotina antes de llenar los moldes, viscosímetros y picnómetro, dejando reposar la barbotina. Se recomienda para una buena recolección de datos, una capacitación a los operarios para una igualdad en el proceso.
4. Se encontró que en los formularios de registro de datos se los redondea los datos sin criterio alguno. Se recomienda que si existe redondeo se lo haga con un buen criterio.

5. Se recomienda una buena calibración de los equipos, ya que los registros de los dos Brookfields existentes variaban considerablemente, especialmente la variable SEB7, perjudicando también a los valores de la variable SEB8.
  
6. No existe una uniformidad en los equipos utilizados, ya que muchos de ellos existen dos o más calibraciones diferentes, de manera que ocasionan errores de cálculo de las variables pues se verificó que en algunas ocasiones los operarios se olvidaban con cuál de ellos se había realizado el ensayo.

# ANEXOS

## ANEXO A

### Área bajo la curva de una Distribución Normal

Z	0	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.4960	0.4920	0.4880	0.4840	0.4801	0.4761	0.4721	0.4681	0.4641
0.1	0.4602	0.4562	0.4522	0.4483	0.4443	0.4404	0.4364	0.4325	0.4286	0.4247
0.2	0.4207	0.4168	0.4129	0.4090	0.4052	0.4013	0.3974	0.3936	0.3897	0.3859
0.3	0.3821	0.3783	0.3745	0.3707	0.3669	0.3632	0.3594	0.3557	0.3520	0.3483
0.4	0.3446	0.3409	0.3372	0.3336	0.3300	0.3264	0.3228	0.3192	0.3156	0.3121
0.5	0.3085	0.3050	0.3015	0.2981	0.2946	0.2912	0.2877	0.2843	0.2810	0.2776
0.6	0.2743	0.2709	0.2676	0.2643	0.2611	0.2578	0.2546	0.2514	0.2483	0.2451
0.7	0.2420	0.2389	0.2358	0.2327	0.2296	0.2266	0.2236	0.2206	0.2177	0.2148
0.8	0.2119	0.2090	0.2061	0.2033	0.2005	0.1977	0.1949	0.1922	0.1894	0.1867
0.9	0.1841	0.1814	0.1788	0.1762	0.1736	0.1711	0.1685	0.1660	0.1635	0.1611
1.0	0.1587	0.1562	0.1539	0.1515	0.1492	0.1469	0.1446	0.1423	0.1401	0.1379
1.1	0.1357	0.1335	0.1314	0.1292	0.1271	0.1251	0.1230	0.1210	0.1190	0.1170
1.2	0.1151	0.1131	0.1112	0.1093	0.1075	0.1056	0.1038	0.1020	0.1003	0.0985
1.3	0.0968	0.0951	0.0934	0.0918	0.0901	0.0885	0.0869	0.0853	0.0838	0.0823
1.4	0.0808	0.0793	0.0778	0.0764	0.0749	0.0735	0.0721	0.0708	0.0694	0.0681
1.5	0.0668	0.0655	0.0643	0.0630	0.0618	0.0606	0.0594	0.0582	0.0571	0.0559
1.6	0.0548	0.0537	0.0526	0.0516	0.0505	0.0495	0.0485	0.0475	0.0465	0.0455
1.7	0.0446	0.0436	0.0427	0.0418	0.0409	0.0401	0.0392	0.0384	0.0375	0.0367
1.8	0.0359	0.0351	0.0344	0.0336	0.0329	0.0322	0.0314	0.0307	0.0301	0.0294
1.9	0.0287	0.0281	0.0274	0.0268	0.0262	0.0256	0.0250	0.0244	0.0239	0.0233
2.0	0.0228	0.0222	0.0217	0.0212	0.0207	0.0202	0.0197	0.0192	0.0188	0.0183
2.1	0.0179	0.0174	0.0170	0.0166	0.0162	0.0158	0.0154	0.0150	0.0146	0.0143
2.2	0.0139	0.0136	0.0132	0.0129	0.0125	0.0122	0.0119	0.0116	0.0113	0.0110
2.3	0.0107	0.0104	0.0102	0.0099	0.0096	0.0094	0.0091	0.0089	0.0087	0.0084
2.4	0.0082	0.0080	0.0078	0.0075	0.0073	0.0071	0.0069	0.0068	0.0066	0.0064
2.5	0.0062	0.0060	0.0059	0.0057	0.0055	0.0054	0.0052	0.0051	0.0049	0.0048
2.6	0.0047	0.0045	0.0044	0.0043	0.0041	0.0040	0.0039	0.0038	0.0037	0.0036
2.7	0.0035	0.0034	0.0033	0.0032	0.0031	0.0030	0.0029	0.0028	0.0027	0.0026
2.8	0.0026	0.0025	0.0024	0.0023	0.0023	0.0022	0.0021	0.0021	0.0020	0.0019
2.9	0.0019	0.0018	0.0018	0.0017	0.0016	0.0016	0.0015	0.0015	0.0014	0.0014
3.0	0.0013	0.0013	0.0013	0.0012	0.0012	0.0011	0.0011	0.0011	0.0010	0.0010
3.1	0.0010	0.0009	0.0009	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0008	0.0007	0.0007
3.2	0.0007	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
3.3	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003
3.4	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0003	0.0002
3.5	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002	0.0002
3.6	0.0002	0.0002	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.7	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.8	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001	0.0001
3.9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000

## ANEXO B

Distribución t-student con  $n$  grados de libertad

<b><math>n</math></b>	<b>0.75</b>	<b>0.80</b>	<b>0.85</b>	<b>0.90</b>	<b>0.95</b>	<b>0.975</b>	<b>0.99</b>	<b>0.995</b>
1	1.000	1.376	1.963	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657
2	0.816	1.061	1.386	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925
3	0.765	0.978	1.250	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841
4	0.741	0.941	1.190	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604
5	0.727	0.920	1.156	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032
6	0.718	0.906	1.134	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707
7	0.711	0.896	1.119	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499
8	0.706	0.889	1.108	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355
9	0.703	0.883	1.100	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250
10	0.700	0.879	1.093	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169
11	0.697	0.876	1.088	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106
12	0.695	0.873	1.083	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055
13	0.694	0.870	1.079	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012
14	0.692	0.868	1.076	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977
15	0.691	0.866	1.074	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947
16	0.690	0.865	1.071	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921
17	0.689	0.863	1.069	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898
18	0.688	0.862	1.067	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878
19	0.688	0.861	1.066	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861
20	0.687	0.860	1.064	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845
21	0.686	0.859	1.063	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831
22	0.686	0.858	1.061	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819
23	0.685	0.858	1.060	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807
24	0.685	0.857	1.059	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797
25	0.684	0.856	1.058	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787
26	0.684	0.856	1.058	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779
27	0.684	0.855	1.057	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771
28	0.683	0.855	1.056	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763
29	0.683	0.854	1.055	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756
30	0.683	0.854	1.055	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750
40	0.681	0.851	1.050	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704
60	0.679	0.848	1.046	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660
120	0.677	0.845	1.041	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617
∞	0.674	0.842	1.036	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576

## ANEXO C

### Distribución de Fisher con $v, \rho$ grados de libertad

alfa = 0.05														
$\rho \backslash v$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	60	100	10000	
1	161.44	199.50	215.70	224.58	230.16	233.98	236.76	238.88	240.54	241.88	252.19	253.04	254.30	
2	18.512	19.000	19.164	19.246	19.2964	19.3295	19.35	19.37	19.38	19.39	19.47	19.48	19.49	
3	10.128	9.5521	9.2766	9.1172	9.0135	8.9406	8.8867	8.8452	8.8123	8.7855	8.5720	8.5539	8.5267	
4	7.7086	6.9443	6.5914	6.3882	6.2561	6.1631	6.0942	6.0410	5.9988	5.9644	5.6877	5.6641	5.6284	
5	6.6079	5.7861	5.4095	5.1922	5.0503	4.9503	4.8759	4.8183	4.7725	4.7351	4.4314	4.4051	4.3654	
6	5.9874	5.1433	4.7571	4.5337	4.3874	4.2839	4.2067	4.1468	4.0990	4.0600	3.7398	3.7117	3.6693	
7	5.5914	4.7374	4.3468	4.1203	3.9715	3.8660	3.7870	3.7257	3.6767	3.6365	3.3043	3.2749	3.2302	
8	5.3177	4.4590	4.0662	3.8379	3.6875	3.5806	3.5005	3.4381	3.3881	3.3472	3.0053	2.9747	2.9281	
9	5.1174	4.2565	3.8625	3.6331	3.4817	3.3738	3.2927	3.2296	3.1789	3.1373	2.7872	2.7556	2.7072	
10	4.9646	4.1028	3.7083	3.4780	3.3258	3.2172	3.1355	3.0717	3.0204	2.9782	2.6211	2.5884	2.5384	
11	4.8443	3.9823	3.5874	3.3567	3.2039	3.0946	3.0123	2.9480	2.8962	2.8536	2.4901	2.4566	2.4050	
12	4.7472	3.8853	3.4903	3.2592	3.1059	2.9961	2.9134	2.8486	2.7964	2.7534	2.3842	2.3498	2.2967	
13	4.6672	3.8056	3.4105	3.1791	3.0254	2.9153	2.8321	2.7669	2.7144	2.6710	2.2966	2.2614	2.2070	
14	4.6001	3.7389	3.3439	3.1122	2.9582	2.8477	2.7642	2.6987	2.6458	2.6022	2.2229	2.1870	2.1313	
15	4.5431	3.6823	3.2874	3.0556	2.9013	2.7905	2.7066	2.6408	2.5876	2.5437	2.1601	2.1234	2.0664	
16	4.4940	3.6337	3.2389	3.0069	2.8524	2.7413	2.6572	2.5911	2.5377	2.4935	2.1058	2.0685	2.0102	
17	4.4513	3.5915	3.1968	2.9647	2.8100	2.6987	2.6143	2.5480	2.4943	2.4499	2.0584	2.0204	1.9610	
18	4.4139	3.5546	3.1599	2.9277	2.7729	2.6613	2.5767	2.5102	2.4563	2.4117	2.0166	1.9780	1.9175	
19	4.3807	3.5219	3.1274	2.8951	2.7401	2.6283	2.5435	2.4768	2.4227	2.3779	1.9795	1.9403	1.8787	
20	4.3512	3.4928	3.0984	2.8661	2.7109	2.5990	2.5140	2.4471	2.3928	2.3479	1.9464	1.9066	1.8438	
21	4.3248	3.4668	3.0725	2.8401	2.6848	2.5727	2.4876	2.4205	2.3660	2.3210	1.9165	1.8761	1.8124	
22	4.3009	3.4434	3.0491	2.8167	2.6613	2.5491	2.4638	2.3965	2.3419	2.2967	1.8894	1.8486	1.7838	
23	4.2793	3.4221	3.0280	2.7955	2.6400	2.5277	2.4422	2.3748	2.3201	2.2747	1.8648	1.8234	1.7577	
24	4.2597	3.4028	3.0088	2.7763	2.6207	2.5082	2.4226	2.3551	2.3002	2.2547	1.8424	1.8005	1.7338	
25	4.2417	3.3852	2.9912	2.7587	2.6030	2.4904	2.4047	2.3371	2.2821	2.2365	1.8217	1.7794	1.7117	
26	4.2252	3.3690	2.9752	2.7426	2.5868	2.4741	2.3883	2.3205	2.2655	2.2197	1.8027	1.7599	1.6913	
27	4.2100	3.3541	2.9604	2.7278	2.5719	2.4591	2.3732	2.3053	2.2501	2.2043	1.7851	1.7419	1.6724	
28	4.1960	3.3404	2.9467	2.7141	2.5581	2.4453	2.3593	2.2913	2.2360	2.1900	1.7689	1.7251	1.6548	
29	4.1830	3.3277	2.9340	2.7014	2.5454	2.4324	2.3463	2.2783	2.2229	2.1768	1.7537	1.7096	1.6384	
30	4.1709	3.3158	2.9223	2.6896	2.5336	2.4205	2.3343	2.2662	2.2107	2.1646	1.7396	1.6950	1.6230	
40	4.0847	3.2317	2.8387	2.6060	2.4495	2.3359	2.2490	2.1802	2.1240	2.0772	1.6373	1.5892	1.5098	
50	4.0343	3.1826	2.7900	2.5572	2.4004	2.2864	2.1992	2.1299	2.0734	2.0261	1.5757	1.5249	1.4392	
60	4.0012	3.1504	2.7581	2.5252	2.3683	2.2541	2.1665	2.0970	2.0401	1.9926	1.5343	1.4814	1.3903	
70	3.9778	3.1277	2.7355	2.5027	2.3456	2.2312	2.1435	2.0737	2.0166	1.9689	1.5046	1.4498	1.3540	
80	3.9604	3.1108	2.7188	2.4859	2.3287	2.2142	2.1263	2.0564	1.9991	1.9512	1.4821	1.4259	1.3259	
100	3.9361	3.0873	2.6955	2.4626	2.3053	2.1906	2.1025	2.0323	1.9748	1.9267	1.4504	1.3917	1.2845	
200	3.8884	3.0411	2.6498	2.4168	2.2592	2.1441	2.0556	1.9849	1.9269	1.8783	1.3856	1.3206	1.1903	
300	3.8726	3.0258	2.6347	2.4017	2.2441	2.1289	2.0402	1.9693	1.9112	1.8623	1.3634	1.2958	1.1521	
400	3.8648	3.0183	2.6272	2.3942	2.2366	2.1212	2.0325	1.9616	1.9033	1.8544	1.3522	1.2831	1.1303	
500	3.8601	3.0138	2.6227	2.3898	2.2320	2.1167	2.0279	1.9569	1.8986	1.8496	1.3455	1.2753	1.1159	
600	3.8570	3.0107	2.6198	2.3868	2.2290	2.1137	2.0248	1.9538	1.8955	1.8465	1.3409	1.2701	1.1055	
700	3.8548	3.0086	2.6176	2.3847	2.2269	2.1115	2.0226	1.9516	1.8932	1.8442	1.3377	1.2664	1.0976	
800	3.8531	3.0070	2.6160	2.3831	2.2253	2.1099	2.0210	1.9500	1.8916	1.8425	1.3353	1.2635	1.0912	
900	3.8518	3.0057	2.6148	2.3818	2.2240	2.1086	2.0197	1.9487	1.8903	1.8412	1.3334	1.2613	1.0861	
1000	3.8508	3.0047	2.6138	2.3808	2.2231	2.1076	2.0187	1.9476	1.8892	1.8402	1.3318	1.2596	1.0818	

alfa = 0.025														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	60	100	1000
1	647.79	799.50	864.16	899.58	921.85	937.11	948.22	956.66	963.28	968.63	993.10	1009.80	1013.17	1018.21
2	38.51	39.00	39.17	39.25	39.30	39.33	39.36	39.37	39.39	39.40	39.45	39.48	39.49	39.50
3	17.4434	16.0441	15.4392	15.1010	14.8848	14.7347	14.6244	14.5399	14.4731	14.4189	14.1674	13.9921	13.9563	13.9026
4	12.2179	10.6491	9.9792	9.6045	9.3645	9.1973	9.0741	8.9796	8.9047	8.8439	8.5599	8.3604	8.3195	8.2579
5	10.0070	8.4336	7.7636	7.3879	7.1464	6.9777	6.8531	6.7572	6.6811	6.6192	6.3286	6.1225	6.0800	6.0160
6	8.8131	7.2599	6.5988	6.2272	5.9876	5.8198	5.6955	5.5996	5.5234	5.4613	5.1684	4.9589	4.9154	4.8498
7	8.0727	6.5415	5.8898	5.5226	5.2852	5.1186	4.9949	4.8993	4.8232	4.7611	4.4667	4.2544	4.2101	4.1430
8	7.5709	6.0595	5.4160	5.0526	4.8173	4.6517	4.5286	4.4333	4.3572	4.2951	3.9995	3.7844	3.7393	3.6709
9	7.2093	5.7147	5.0781	4.7181	4.4844	4.3197	4.1970	4.1020	4.0260	3.9639	3.6669	3.4493	3.4034	3.3336
10	6.9367	5.4564	4.8256	4.4683	4.2361	4.0721	3.9498	3.8549	3.7790	3.7168	3.4185	3.1984	3.1517	3.0805
11	6.7241	5.2559	4.6300	4.2751	4.0440	3.8807	3.7586	3.6638	3.5879	3.5257	3.2261	3.0035	2.9561	2.8835
12	6.5538	5.0959	4.4742	4.1212	3.8911	3.7283	3.6065	3.5118	3.4358	3.3736	3.0728	2.8478	2.7996	2.7257
13	6.4143	4.9653	4.3472	3.9959	3.7667	3.6043	3.4827	3.3880	3.3120	3.2497	2.9477	2.7204	2.6715	2.5962
14	6.2979	4.8567	4.2417	3.8919	3.6634	3.5014	3.3799	3.2853	3.2093	3.1469	2.8437	2.6142	2.5646	2.4880
15	6.1995	4.7650	4.1528	3.8043	3.5764	3.4147	3.2934	3.1987	3.1227	3.0602	2.7559	2.5242	2.4739	2.3962
16	6.1151	4.6867	4.0768	3.7294	3.5021	3.3406	3.2194	3.1248	3.0488	2.9862	2.6808	2.4471	2.3961	2.3171
17	6.0420	4.6189	4.0112	3.6648	3.4379	3.2767	3.1556	3.0610	2.9849	2.9222	2.6158	2.3801	2.3285	2.2483
18	5.9781	4.5597	3.9539	3.6083	3.3820	3.2209	3.0999	3.0053	2.9291	2.8664	2.5590	2.3214	2.2692	2.1878
19	5.9216	4.5075	3.9034	3.5587	3.3327	3.1718	3.0509	2.9563	2.8801	2.8172	2.5089	2.2696	2.2167	2.1341
20	5.8715	4.4613	3.8587	3.5147	3.2891	3.1283	3.0074	2.9128	2.8365	2.7737	2.4645	2.2234	2.1699	2.0862
21	5.8266	4.4199	3.8188	3.4754	3.2501	3.0895	2.9686	2.8740	2.7977	2.7348	2.4247	2.1819	2.1280	2.0431
22	5.7863	4.3828	3.7829	3.4401	3.2151	3.0546	2.9338	2.8392	2.7628	2.6998	2.3890	2.1446	2.0901	2.0041
23	5.7498	4.3492	3.7505	3.4083	3.1835	3.0232	2.9023	2.8077	2.7313	2.6682	2.3567	2.1107	2.0557	1.9687
24	5.7166	4.3187	3.7211	3.3794	3.1548	2.9946	2.8738	2.7791	2.7027	2.6396	2.3273	2.0799	2.0243	1.9362
25	5.6864	4.2909	3.6943	3.3530	3.1287	2.9685	2.8478	2.7531	2.6766	2.6135	2.3005	2.0516	1.9955	1.9065
26	5.6586	4.2655	3.6697	3.3289	3.1048	2.9447	2.8240	2.7293	2.6528	2.5896	2.2759	2.0257	1.9691	1.8790
27	5.6331	4.2421	3.6472	3.3067	3.0828	2.9228	2.8021	2.7074	2.6309	2.5676	2.2533	2.0018	1.9447	1.8537
28	5.6096	4.2205	3.6264	3.2863	3.0626	2.9027	2.7820	2.6872	2.6106	2.5473	2.2324	1.9797	1.9221	1.8301
29	5.5878	4.2006	3.6072	3.2674	3.0438	2.8840	2.7633	2.6686	2.5919	2.5286	2.2131	1.9591	1.9011	1.8082
30	5.5675	4.1821	3.5894	3.2499	3.0265	2.8667	2.7460	2.6513	2.5746	2.5112	2.1952	1.9400	1.8816	1.7877
40	5.4239	4.0510	3.4633	3.1261	2.9037	2.7444	2.6238	2.5289	2.4519	2.3882	2.0677	1.8028	1.7405	1.6382
50	5.3403	3.9749	3.3902	3.0544	2.8327	2.6736	2.5530	2.4579	2.3808	2.3168	1.9933	1.7211	1.6558	1.5465
60	5.2856	3.9253	3.3425	3.0077	2.7863	2.6274	2.5068	2.4117	2.3344	2.2702	1.9445	1.6668	1.5990	1.4834
70	5.2470	3.8903	3.3090	2.9748	2.7537	2.5949	2.4743	2.3791	2.3017	2.2374	1.9100	1.6279	1.5581	1.4371
80	5.2184	3.8643	3.2841	2.9504	2.7295	2.5708	2.4502	2.3549	2.2775	2.2130	1.8843	1.5987	1.5271	1.4012
90	5.1962	3.8443	3.2649	2.9315	2.7109	2.5522	2.4316	2.3363	2.2588	2.1942	1.8644	1.5758	1.5028	1.3725
100	5.1786	3.8284	3.2496	2.9166	2.6961	2.5374	2.4168	2.3215	2.2439	2.1793	1.8486	1.5575	1.4833	1.3489
200	5.1004	3.7578	3.1820	2.8503	2.6304	2.4720	2.3513	2.2558	2.1780	2.1130	1.7780	1.4742	1.3927	1.2312
300	5.0747	3.7346	3.1599	2.8286	2.6089	2.4505	2.3299	2.2343	2.1563	2.0913	1.7547	1.4459	1.3613	1.1841
400	5.0619	3.7231	3.1489	2.8179	2.5983	2.4399	2.3192	2.2236	2.1456	2.0805	1.7431	1.4317	1.3453	1.1574
500	5.0543	3.7162	3.1423	2.8114	2.5919	2.4335	2.3129	2.2172	2.1392	2.0740	1.7362	1.4231	1.3356	1.1398
600	5.0492	3.7117	3.1379	2.8071	2.5876	2.4293	2.3086	2.2130	2.1349	2.0697	1.7316	1.4173	1.3290	1.1271
700	5.0456	3.7084	3.1348	2.8041	2.5846	2.4263	2.3056	2.2099	2.1319	2.0666	1.7282	1.4132	1.3243	1.1174
800	5.0429	3.7059	3.1324	2.8018	2.5823	2.4240	2.3033	2.2077	2.1296	2.0643	1.7258	1.4101	1.3208	1.1098
900	5.0407	3.7040	3.1306	2.8000	2.5806	2.4223	2.3016	2.2059	2.1278	2.0626	1.7238	1.4077	1.3180	1.1035
1000	5.0391	3.7025	3.1292	2.7986	2.5792	2.4208	2.3002	2.2045	2.1264	2.0611	1.7223	1.4058	1.3158	1.0983
1500	5.0340	3.6980	3.1248	2.7943	2.5749	2.4166	2.2959	2.2003	2.1221	2.0569	1.7177	1.4000	1.3091	1.0810
2000	5.0315	3.6957	3.1226	2.7922	2.5728	2.4145	2.2938	2.1981	2.1200	2.0547	1.7154	1.3971	1.3058	1.0711
10000	5.0254	3.6902	3.1174	2.7871	2.5678	2.4095	2.2888	2.1931	2.1149	2.0496	1.7099	1.3900	1.2977	1.0400

alfa = 0.01		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	60	100	1000
1	4052.18	4999.50	5403.35	5624.58	5763.65	5858.99	5928.36	5981.07	6022.47	6055.85	6208.73	6313.03	6334.11	6365.55	
2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.45	99.48	99.49	99.50	
3	34.1162	30.8165	29.4567	28.7099	28.2371	27.9107	27.6717	27.4892	27.3452	27.2287	26.6898	26.3164	26.2402	26.1263	
4	21.1977	18.0000	16.6944	15.9770	15.5219	15.2069	14.9758	14.7989	14.6591	14.5459	14.0196	13.6522	13.5770	13.4642	
5	16.2582	13.2739	12.0600	11.3919	10.9670	10.6723	10.4555	10.2893	10.1578	10.0510	9.5526	9.2020	9.1299	9.0215	
6	13.7450	10.9248	9.7795	9.1483	8.7459	8.4661	8.2600	8.1017	7.9761	7.8741	7.3958	7.0567	6.9867	6.8811	
7	12.2464	9.5466	8.4513	7.8466	7.4604	7.1914	6.9928	6.8400	6.7188	6.6201	6.1554	5.8236	5.7547	5.6506	
8	11.2586	8.6491	7.5910	7.0061	6.6318	6.3707	6.1776	6.0289	5.9106	5.8143	5.3591	5.0316	4.9633	4.8599	
9	10.5614	8.0215	6.9919	6.4221	6.0569	5.8018	5.6129	5.4671	5.3511	5.2565	4.8080	4.4831	4.4150	4.3116	
10	10.0443	7.5594	6.5523	5.9943	5.6363	5.3858	5.2001	5.0567	4.9424	4.8491	4.4054	4.0819	4.0137	3.9100	
11	9.6460	7.2057	6.2167	5.6683	5.3160	5.0692	4.8861	4.7445	4.6315	4.5393	4.0990	3.7761	3.7077	3.6035	
12	9.3302	6.9266	5.9525	5.4120	5.0643	4.8206	4.6395	4.4994	4.3875	4.2961	3.8584	3.5355	3.4668	3.3619	
13	9.0738	6.7010	5.7394	5.2053	4.8616	4.6204	4.4410	4.3021	4.1911	4.1003	3.6646	3.3413	3.2723	3.1665	
14	8.8616	6.5149	5.5639	5.0354	4.6950	4.4558	4.2779	4.1399	4.0297	3.9394	3.5052	3.1813	3.1118	3.0051	
15	8.6831	6.3589	5.4170	4.8932	4.5556	4.3183	4.1415	4.0045	3.8948	3.8049	3.3719	3.0471	2.9772	2.8695	
16	8.5310	6.2262	5.2922	4.7726	4.4374	4.2016	4.0259	3.8896	3.7804	3.6909	3.2587	2.9330	2.8627	2.7540	
17	8.3997	6.1121	5.1850	4.6690	4.3359	4.1015	3.9267	3.7910	3.6822	3.5931	3.1615	2.8348	2.7639	2.6542	
18	8.2854	6.0129	5.0919	4.5790	4.2479	4.0146	3.8406	3.7054	3.5971	3.5082	3.0771	2.7493	2.6779	2.5671	
19	8.1849	5.9259	5.0103	4.5003	4.1708	3.9386	3.7653	3.6305	3.5225	3.4338	3.0031	2.6742	2.6023	2.4904	
20	8.0960	5.8489	4.9382	4.4307	4.1027	3.8714	3.6987	3.5644	3.4567	3.3682	2.9377	2.6077	2.5353	2.4224	
21	8.0166	5.7804	4.8740	4.3688	4.0421	3.8117	3.6396	3.5056	3.3981	3.3098	2.8796	2.5484	2.4755	2.3615	
22	7.9454	5.7190	4.8166	4.3134	3.9880	3.7583	3.5867	3.4530	3.3458	3.2576	2.8274	2.4951	2.4217	2.3067	
23	7.8811	5.6637	4.7649	4.2636	3.9392	3.7102	3.5390	3.4057	3.2986	3.2106	2.7805	2.4471	2.3732	2.2571	
24	7.8229	5.6136	4.7181	4.2184	3.8951	3.6667	3.4959	3.3629	3.2560	3.1681	2.7380	2.4035	2.3291	2.2119	
25	7.7698	5.5680	4.6755	4.1774	3.8550	3.6272	3.4568	3.3239	3.2172	3.1294	2.6993	2.3637	2.2888	2.1706	
26	7.7213	5.5263	4.6366	4.1400	3.8183	3.5911	3.4210	3.2884	3.1818	3.0941	2.6640	2.3273	2.2519	2.1327	
27	7.6767	5.4881	4.6009	4.1056	3.7848	3.5580	3.3882	3.2558	3.1494	3.0618	2.6316	2.2938	2.2180	2.0978	
28	7.6356	5.4529	4.5681	4.0740	3.7539	3.5276	3.3581	3.2259	3.1195	3.0320	2.6017	2.2629	2.1867	2.0655	
29	7.5977	5.4204	4.5378	4.0449	3.7254	3.4995	3.3303	3.1982	3.0920	3.0045	2.5742	2.2344	2.1577	2.0355	
30	7.5625	5.3903	4.5097	4.0179	3.6990	3.4735	3.3045	3.1726	3.0665	2.9791	2.5487	2.2079	2.1307	2.0075	
40	7.3141	5.1785	4.3126	3.8283	3.5138	3.2910	3.1238	2.9930	2.8876	2.8005	2.3689	2.0194	1.9383	1.8061	
50	7.1706	5.0566	4.1993	3.7195	3.4077	3.1864	3.0202	2.8900	2.7850	2.6981	2.2652	1.9090	1.8248	1.6847	
60	7.0771	4.9774	4.1259	3.6490	3.3389	3.1187	2.9530	2.8233	2.7185	2.6318	2.1978	1.8363	1.7493	1.6023	
70	7.0114	4.9219	4.0744	3.5996	3.2907	3.0712	2.9060	2.7765	2.6719	2.5852	2.1504	1.7846	1.6954	1.5422	
80	6.9627	4.8807	4.0363	3.5631	3.2550	3.0361	2.8713	2.7420	2.6374	2.5508	2.1153	1.7459	1.6548	1.4960	
90	6.9251	4.8491	4.0070	3.5350	3.2276	3.0091	2.8445	2.7154	2.6109	2.5243	2.0882	1.7158	1.6231	1.4593	
100	6.8953	4.8239	3.9837	3.5127	3.2059	2.9877	2.8233	2.6943	2.5898	2.5033	2.0666	1.6918	1.5977	1.4292	
200	6.7633	4.7129	3.8810	3.4143	3.1100	2.8933	2.7298	2.6012	2.4971	2.4106	1.9713	1.5833	1.4811	1.2812	
300	6.7201	4.6766	3.8475	3.3823	3.0787	2.8625	2.6993	2.5709	2.4668	2.3804	1.9401	1.5468	1.4410	1.2228	
400	6.6987	4.6586	3.8309	3.3664	3.0632	2.8472	2.6842	2.5559	2.4518	2.3654	1.9245	1.5285	1.4207	1.1900	
500	6.6858	4.6478	3.8210	3.3569	3.0540	2.8381	2.6751	2.5469	2.4429	2.3565	1.9152	1.5174	1.4084	1.1684	
600	6.6773	4.6407	3.8144	3.3505	3.0478	2.8321	2.6691	2.5409	2.4369	2.3505	1.9091	1.5101	1.4001	1.1529	
700	6.6712	4.6356	3.8097	3.3460	3.0434	2.8277	2.6649	2.5367	2.4327	2.3463	1.9047	1.5048	1.3942	1.1411	
800	6.6667	4.6318	3.8062	3.3427	3.0401	2.8245	2.6617	2.5335	2.4295	2.3431	1.9013	1.5008	1.3897	1.1318	
900	6.6631	4.6288	3.8034	3.3400	3.0376	2.8220	2.6592	2.5310	2.4270	2.3406	1.8988	1.4978	1.3863	1.1242	
1000	6.6603	4.6264	3.8012	3.3380	3.0355	2.8200	2.6572	2.5290	2.4250	2.3386	1.8967	1.4953	1.3835	1.1178	
1500	6.6518	4.6193	3.7947	3.3317	3.0294	2.8140	2.6512	2.5231	2.4191	2.3327	1.8906	1.4879	1.3751	1.0969	
2000	6.6476	4.6158	3.7914	3.3285	3.0264	2.8110	2.6482	2.5201	2.4162	2.3298	1.8875	1.4842	1.3708	1.0850	
10000	6.6374	4.6073	3.7836	3.3210	3.0191	2.8038	2.6411	2.5130	2.4091	2.3227	1.8801	1.4752	1.3606	1.0476	

alfa =	0.005													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	60	100	10000
1	16210.7	19999.5	21614.7	22499.5	23055.8	23437.1	23714.5	23925.4	24091.0	24222	24837	25254	25339	25466
2	198.50	199.00	199.17	199.25	199.30	199.33	199.36	199.37	199.39	199.40	199.45	199.48	199.49	199.50
3	55.5520	49.7993	47.4672	46.1946	45.3916	44.8385	44.4341	44.1256	43.8824	43.6858	42.7775	42.1494	42.0216	41.8302
4	31.3328	26.2843	24.2591	23.1545	22.4564	21.9746	21.6217	21.3520	21.1391	20.9667	20.1673	19.6107	19.4970	19.3264
5	22.7848	18.3138	16.5298	15.5561	14.9396	14.5133	14.2004	13.9610	13.7716	13.6182	12.9035	12.4024	12.2996	12.1451
6	18.6350	14.5441	12.9166	12.0275	11.4637	11.0730	10.7859	10.5658	10.3915	10.2500	9.5888	9.1219	9.0257	8.8808
7	16.2356	12.4040	10.8824	10.0505	9.5221	9.1553	8.8854	8.6781	8.5138	8.3803	7.7540	7.3088	7.2165	7.0774
8	14.6882	11.0424	9.5965	8.8051	8.3018	7.9520	7.6941	7.4959	7.3386	7.2106	6.6082	6.1772	6.0875	5.9519
9	13.6136	10.1067	8.7171	7.9559	7.4712	7.1339	6.8849	6.6933	6.5411	6.4172	5.8318	5.4104	5.3223	5.1889
10	12.8265	9.4270	8.0807	7.3428	6.8724	6.5446	6.3025	6.1159	5.9676	5.8467	5.2740	4.8592	4.7721	4.6399
11	12.2263	8.9122	7.6004	6.8809	6.4217	6.1016	5.8648	5.6821	5.5368	5.4183	4.8552	4.4450	4.3585	4.2269
12	11.7542	8.5096	7.2258	6.5211	6.0711	5.7570	5.5245	5.3451	5.2021	5.0855	4.5299	4.1229	4.0368	3.9053
13	11.3735	8.1865	6.9258	6.2335	5.7910	5.4819	5.2529	5.0761	4.9351	4.8199	4.2703	3.8655	3.7795	3.6479
14	11.0603	7.9216	6.6804	5.9984	5.5623	5.2574	5.0313	4.8566	4.7173	4.6034	4.0585	3.6552	3.5692	3.4372
15	10.7980	7.7008	6.4760	5.8029	5.3721	5.0708	4.8473	4.6744	4.5364	4.4235	3.8826	3.4803	3.3941	3.2616
16	10.5755	7.5138	6.3034	5.6378	5.2117	4.9134	4.6920	4.5207	4.3838	4.2719	3.7342	3.3324	3.2460	3.1129
17	10.3842	7.3536	6.1556	5.4967	5.0746	4.7789	4.5594	4.3894	4.2535	4.1424	3.6073	3.2058	3.1192	2.9853
18	10.2181	7.2148	6.0278	5.3746	4.9560	4.6627	4.4448	4.2759	4.1410	4.0305	3.4977	3.0962	3.0093	2.8746
19	10.0725	7.0935	5.9161	5.2681	4.8526	4.5614	4.3448	4.1770	4.0428	3.9329	3.4020	3.0004	2.9131	2.7776
20	9.9439	6.9865	5.8177	5.1743	4.7616	4.4721	4.2569	4.0900	3.9564	3.8470	3.3178	2.9159	2.8282	2.6918
21	9.8295	6.8914	5.7304	5.0911	4.6809	4.3931	4.1789	4.0128	3.8799	3.7709	3.2431	2.8408	2.7527	2.6154
22	9.7271	6.8064	5.6524	5.0168	4.6088	4.3225	4.1094	3.9440	3.8116	3.7030	3.1764	2.7736	2.6852	2.5469
23	9.6348	6.7300	5.5823	4.9500	4.5441	4.2591	4.0469	3.8822	3.7502	3.6420	3.1165	2.7132	2.6243	2.4851
24	9.5513	6.6609	5.5190	4.8898	4.4857	4.2019	3.9905	3.8264	3.6949	3.5870	3.0624	2.6585	2.5692	2.4291
25	9.4753	6.5982	5.4615	4.8351	4.4327	4.1500	3.9394	3.7758	3.6447	3.5370	3.0133	2.6088	2.5191	2.3780
26	9.4059	6.5409	5.4091	4.7852	4.3844	4.1027	3.8928	3.7297	3.5989	3.4916	2.9685	2.5633	2.4733	2.3312
27	9.3423	6.4885	5.3611	4.7396	4.3402	4.0594	3.8501	3.6875	3.5571	3.4499	2.9275	2.5217	2.4312	2.2882
28	9.2838	6.4403	5.3170	4.6977	4.2996	4.0197	3.8110	3.6487	3.5186	3.4117	2.8899	2.4834	2.3925	2.2485
29	9.2297	6.3958	5.2764	4.6591	4.2622	3.9831	3.7749	3.6131	3.4832	3.3765	2.8551	2.4479	2.3566	2.2117
30	9.1797	6.3547	5.2388	4.6234	4.2276	3.9492	3.7416	3.5801	3.4505	3.3440	2.8230	2.4151	2.3234	2.1776
40	8.8279	6.0664	4.9758	4.3738	3.9860	3.7129	3.5088	3.3498	3.2220	3.1167	2.5984	2.1838	2.0884	1.9334
50	8.6258	5.9016	4.8259	4.2316	3.8486	3.5785	3.3765	3.2189	3.0920	2.9875	2.4702	2.0499	1.9512	1.7881
60	8.4946	5.7950	4.7290	4.1399	3.7599	3.4918	3.2911	3.1344	3.0083	2.9042	2.3872	1.9622	1.8609	1.6904
70	8.4027	5.7204	4.6613	4.0758	3.6980	3.4313	3.2315	3.0755	2.9498	2.8460	2.3291	1.9002	1.7966	1.6196
80	8.3346	5.6652	4.6113	4.0285	3.6524	3.3867	3.1876	3.0320	2.9066	2.8031	2.2862	1.8540	1.7484	1.5655
90	8.2822	5.6228	4.5728	3.9922	3.6173	3.3524	3.1538	2.9986	2.8735	2.7701	2.2532	1.8182	1.7109	1.5226
100	8.2406	5.5892	4.5424	3.9634	3.5895	3.3252	3.1271	2.9722	2.8472	2.7440	2.2270	1.7896	1.6809	1.4875
200	8.0572	5.4412	4.4084	3.8368	3.4674	3.2059	3.0097	2.8560	2.7319	2.6292	2.1116	1.6614	1.5442	1.3167
300	7.9973	5.3930	4.3649	3.7957	3.4277	3.1672	2.9716	2.8183	2.6945	2.5919	2.0739	1.6187	1.4976	1.2501
400	7.9676	5.3691	4.3433	3.7754	3.4081	3.1480	2.9527	2.7996	2.6759	2.5735	2.0553	1.5972	1.4741	1.2128
500	7.9498	5.3549	4.3304	3.7632	3.3963	3.1366	2.9414	2.7885	2.6649	2.5625	2.0441	1.5843	1.4598	1.1884
600	7.9381	5.3454	4.3219	3.7551	3.3886	3.1290	2.9339	2.7811	2.6575	2.5551	2.0367	1.5757	1.4502	1.1709
700	7.9296	5.3386	4.3158	3.7494	3.3830	3.1236	2.9286	2.7758	2.6523	2.5499	2.0314	1.5696	1.4434	1.1576
800	7.9233	5.3336	4.3112	3.7451	3.3788	3.1195	2.9246	2.7719	2.6483	2.5460	2.0274	1.5650	1.4382	1.1471
900	7.9184	5.3296	4.3076	3.7417	3.3756	3.1164	2.9215	2.7688	2.6453	2.5430	2.0244	1.5614	1.4342	1.1386
1000	7.9145	5.3265	4.3048	3.7390	3.3730	3.1138	2.9190	2.7663	2.6429	2.5405	2.0219	1.5585	1.4310	1.1314
1500	7.9028	5.3171	4.2963	3.7310	3.3653	3.1063	2.9116	2.7590	2.6356	2.5333	2.0145	1.5498	1.4213	1.1080
2000	7.8970	5.3124	4.2921	3.7270	3.3615	3.1025	2.9079	2.7553	2.6319	2.5297	2.0109	1.5455	1.4164	1.0946
10000	7.8829	5.3011	4.2819	3.7175	3.3522	3.0935	2.8990	2.7466	2.6232	2.5210	2.0020	1.5351	1.4046	1.0529



## ANEXO D

P = Probabilidad de encontrar un valor menor o igual que el chi cuadrado tabulado,  $\nu$  grados de libertad

$\nu / p$	0.001	0.0025	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
1	10.827	9.140	7.879	6.635	5.024	3.842	2.706	2.072	1.642	1.323	1.074	0.874	0.708	0.571	0.455
2	13.815	11.983	10.597	9.210	7.378	5.992	4.605	3.794	3.219	2.773	2.408	2.100	1.833	1.597	1.386
3	16.266	14.320	12.838	11.345	9.348	7.815	6.251	5.317	4.642	4.108	3.665	3.283	2.946	2.643	2.366
4	18.466	16.424	14.860	13.277	11.143	9.488	7.779	6.745	5.989	5.385	4.878	4.438	4.045	3.687	3.357
5	20.515	18.385	16.750	15.086	12.833	11.071	9.236	8.115	7.289	6.626	6.064	5.573	5.132	4.728	4.352
6	22.458	20.249	18.548	16.812	14.449	12.592	10.645	9.446	8.558	7.841	7.231	6.695	6.211	5.765	5.348
7	24.321	22.040	20.278	18.475	16.013	14.067	12.017	10.748	9.803	9.037	8.383	7.806	7.283	6.800	6.346
8	26.124	23.774	21.955	20.090	17.535	15.507	13.362	12.027	11.030	10.219	9.525	8.909	8.351	7.833	7.344
9	27.877	25.463	23.589	21.666	19.023	16.919	14.684	13.288	12.242	11.389	10.656	10.006	9.414	8.863	8.343
10	29.588	27.112	25.188	23.209	20.483	18.307	15.987	14.534	13.442	12.549	11.781	11.097	10.473	9.892	9.342
11	31.264	28.729	26.757	24.725	21.920	19.675	17.275	15.767	14.631	13.701	12.899	12.184	11.530	10.920	10.341
12	32.909	30.318	28.300	26.217	23.337	21.026	18.549	16.989	15.812	14.845	14.011	13.266	12.584	11.946	11.340
13	34.527	31.883	29.819	27.688	24.736	22.362	19.812	18.202	16.985	15.984	15.119	14.345	13.636	12.972	12.340
14	36.124	33.426	31.319	29.141	26.119	23.685	21.064	19.406	18.151	17.117	16.222	15.421	14.685	13.996	13.339
15	37.698	34.949	32.802	30.578	27.488	24.996	22.307	20.603	19.311	18.245	17.322	16.494	15.733	15.020	14.339
16	39.252	36.456	34.267	32.000	28.845	26.296	23.542	21.793	20.465	19.369	18.418	17.565	16.780	16.043	15.339
17	40.791	37.946	35.718	33.409	30.191	27.587	24.769	22.977	21.615	20.489	19.511	18.633	17.824	17.065	16.338
18	42.312	39.422	37.156	34.805	31.526	28.869	25.989	24.156	22.760	21.605	20.601	19.699	18.868	18.086	17.338
19	43.819	40.885	38.582	36.191	32.852	30.144	27.204	25.329	23.900	22.718	21.689	20.764	19.910	19.107	18.338
20	45.314	42.336	39.997	37.566	34.170	31.410	28.412	26.498	25.038	23.828	22.775	21.827	20.951	20.127	19.337
21	46.796	43.775	41.401	38.932	35.479	32.671	29.615	27.662	26.171	24.935	23.858	22.888	21.992	21.147	20.337
22	48.268	45.204	42.796	40.289	36.781	33.925	30.813	28.822	27.302	26.039	24.939	23.947	23.031	22.166	21.337

$v/p$	0.001	0.0025	0.005	0.01	0.025	0.05	0.1	0.15	0.2	0.25	0.3	0.35	0.4	0.45	0.5
26	54.051	50.829	48.290	45.642	41.923	38.885	35.563	33.430	31.795	30.435	29.246	28.173	27.179	26.240	25.337
27	55.475	52.215	49.645	46.963	43.195	40.113	36.741	34.574	32.912	31.528	30.319	29.227	28.214	27.257	26.336
28	56.892	53.594	50.994	48.278	44.461	41.337	37.916	35.715	34.027	32.621	31.391	30.279	29.249	28.274	27.336
29	58.301	54.966	52.336	49.588	45.722	42.557	39.088	36.854	35.139	33.711	32.461	31.331	30.283	29.291	28.336
30	59.702	56.333	53.672	50.892	46.979	43.773	40.256	37.990	36.250	34.800	33.530	32.382	31.316	30.307	29.336
31	61.098	57.692	55.003	52.191	48.232	44.985	41.422	39.124	37.359	35.887	34.598	33.431	32.349	31.324	30.336
32	62.487	59.046	56.328	53.486	49.480	46.194	42.585	40.256	38.466	36.973	35.665	34.480	33.381	32.339	31.336
33	63.869	60.395	57.648	54.775	50.725	47.400	43.745	41.386	39.572	38.058	36.731	35.529	34.413	33.355	32.336
34	65.247	61.738	58.964	56.061	51.966	48.602	44.903	42.514	40.676	39.141	37.795	36.576	35.444	34.371	33.336
35	66.619	63.076	60.275	57.342	53.203	49.802	46.059	43.640	41.778	40.223	38.859	37.623	36.475	35.386	34.336
36	67.985	64.410	61.581	58.619	54.437	50.999	47.212	44.764	42.879	41.304	39.922	38.669	37.505	36.401	35.336
37	69.348	65.738	62.883	59.893	55.668	52.192	48.363	45.886	43.978	42.383	40.984	39.715	38.535	37.416	36.336
38	70.704	67.063	64.181	61.162	56.896	53.384	49.513	47.007	45.076	43.462	42.045	40.760	39.564	38.430	37.335
39	72.055	68.383	65.475	62.428	58.120	54.572	50.660	48.126	46.173	44.540	43.105	41.804	40.594	39.445	38.335
40	73.403	69.699	66.766	63.691	59.342	55.759	51.805	49.244	47.269	45.616	44.165	42.848	41.622	40.459	39.335
45	80.078	76.223	73.166	69.957	65.410	61.656	57.505	54.811	52.729	50.985	49.452	48.058	46.761	45.527	44.335
50	86.660	82.664	79.490	76.154	71.420	67.505	63.167	60.346	58.164	56.334	54.723	53.258	51.892	50.592	49.335
55	93.167	89.034	85.749	82.292	77.380	73.312	68.796	65.855	63.577	61.665	59.980	58.447	57.016	55.654	54.335
60	99.608	95.344	91.952	88.379	83.298	79.082	74.397	71.341	68.972	66.982	65.227	63.628	62.135	60.713	59.335
70	112.317	107.808	104.215	100.425	95.023	90.531	85.527	82.255	79.715	77.577	75.689	73.968	72.358	70.824	69.335
80	124.839	120.102	116.321	112.329	106.629	101.880	96.578	93.106	90.405	88.130	86.120	84.284	82.566	80.927	79.334
90	137.208	132.255	128.299	124.116	118.136	113.145	107.565	103.904	101.054	98.650	96.524	94.581	92.761	91.023	89.334
100	149.449	144.293	140.170	135.807	129.561	124.342	118.498	114.659	111.667	109.141	106.906	104.862	102.946	101.115	99.334
200	267.539	260.735	255.264	249.445	241.058	233.994	226.021	220.744	216.609	213.102	209.985	207.124	204.434	201.853	199.334
250	324.831	317.361	311.346	304.939	295.689	287.882	279.050	273.194	268.599	264.697	261.225	258.036	255.033	252.150	249.334
300	381.424	373.351	366.844	359.906	349.875	341.395	331.789	325.409	320.397	316.138	312.346	308.859	305.574	302.418	299.334
500	603.446	593.358	585.206	576.493	563.851	553.127	540.930	532.803	526.401	520.951	516.087	511.608	507.382	503.315	499.334
600	712.773	701.832	692.981	683.516	669.769	658.094	644.800	635.933	628.816	622.988	617.671	612.772	608.147	603.694	599.334

Distribución Chi – cuadrado (Continuación)

$\nu / p$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.998	0.999
1	0.3573	0.0275	0.2059	0.1485	0.1015	0.0642	0.0358	0.0158	0.0039	0.0001	0.0002	0.0000	0.0000	0.0000
2	1.1957	1.0217	0.8616	0.7133	0.5754	0.4463	0.0325	0.2107	0.1026	0.0506	0.0201	0.0001	0.0005	0.0002
3	2.1095	1.8692	1.6416	1.4237	1.2125	1.0052	0.7978	0.5844	0.3518	0.2158	0.1148	0.0717	0.0449	0.0243
4	3.0469	2.7528	2.4701	2.1947	1.9226	1.6488	1.3665	1.0636	0.7107	0.4844	0.2971	0.0207	0.1449	0.0908
5	3.9959	3.6555	3.3251	2.9999	2.6746	2.3425	1.9938	1.6103	1.1455	0.8312	0.5543	0.4118	0.3075	0.2102
6	4.9519	4.5702	4.1973	3.8276	3.4546	3.0701	2.6613	2.2041	1.6354	1.2373	0.8721	0.6757	0.5266	0.0381
7	5.9125	5.4932	5.0816	4.6713	4.2549	3.8223	3.3583	2.8331	2.1673	1.6899	1.2390	0.9893	0.7945	0.5985
8	6.8766	6.4226	5.9753	5.5274	5.0706	4.5936	4.0782	3.4895	2.7326	2.1797	1.6465	1.3444	1.1042	0.8571
9	7.8434	7.3570	6.8763	6.3933	5.8988	5.3801	4.8165	4.1682	3.3251	2.7004	2.0879	1.7349	1.4501	1.1519
10	8.8124	8.2955	7.7832	7.2672	6.7372	6.1791	5.5701	4.8652	3.9403	3.2470	2.5582	2.1558	1.8274	1.4787
11	9.7831	9.2373	8.6952	8.1479	7.5841	6.9887	6.3364	5.5778	4.5748	3.8157	3.0535	2.6032	2.2321	1.8338
12	10.7553	10.1820	9.6115	9.0343	8.4384	7.8073	7.1138	6.3038	5.2260	4.4038	3.5706	3.0738	2.6612	2.2141
13	11.7288	11.1291	10.5315	9.9257	9.2991	8.6339	7.9008	7.0415	5.8919	5.0087	4.1069	3.5650	3.1118	2.6172
14	12.7034	12.0785	11.4548	10.8215	10.1653	9.4673	8.6963	7.7895	6.5706	5.6287	4.6604	4.0747	3.5820	3.0407
15	13.679	13.0298	12.3809	11.7212	11.0365	10.3070	9.4993	8.5468	7.2609	6.2621	5.2294	4.6009	4.0697	3.4825
16	14.6555	13.9827	13.3096	12.6243	11.9122	11.1521	10.3090	9.3122	7.9616	6.9077	5.8122	5.1422	4.5734	3.9417
17	15.6328	14.9373	14.2406	13.5307	12.7919	12.0023	11.1249	10.0852	8.6718	7.5642	6.4077	5.6973	5.0916	4.4162
18	16.6108	15.8932	15.1738	14.4399	13.6753	12.8570	11.9462	10.8649	9.3904	8.2307	7.0149	6.2648	5.6234	4.9048
19	17.5894	16.8504	16.1089	15.3517	14.5620	13.7158	12.7727	11.6509	10.1170	8.9065	7.6327	6.8439	6.1673	5.4067
20	18.5687	17.8088	17.0458	16.2659	15.4518	14.5784	13.6039	12.4426	10.8508	9.5908	8.2604	7.4338	6.7228	5.9210
21	19.5485	18.7683	17.9843	17.1823	16.3444	15.4446	14.4393	13.2396	11.5913	10.2829	8.8972	8.0336	7.2889	6.4467
22	20.5288	19.7288	18.9243	18.1007	17.2396	16.3140	15.2787	14.0415	12.3380	10.9823	9.5425	8.6427	7.8648	6.9829
23	21.5095	20.6902	19.8657	19.0211	18.1373	17.1865	16.1219	14.8480	13.0905	11.6885	10.1957	9.2604	8.4503	7.5291
24	22.4908	21.6525	20.8084	19.9432	19.0373	18.0618	16.9686	15.6587	13.8484	12.4011	10.8563	9.8862	9.0441	8.0847
25	23.4724	22.6156	21.7524	20.8670	19.9393	18.9397	17.8184	16.4734	14.6114	13.1197	11.5240	10.5196	9.6462	8.6494

$v/p$	0.55	0.60	0.65	0.70	0.75	0.80	0.85	0.90	0.95	0.975	0.99	0.995	0.998	0.999
26	24.4544	23.5794	22.6975	21.7924	20.8434	19.8202	18.6714	17.2919	15.3792	13.8439	12.1982	11.1602	10.2561	9.2222
27	25.4367	24.5440	23.6437	22.7192	21.7494	20.7030	19.5272	18.1139	16.1514	14.5734	12.8785	11.8077	10.8733	9.8029
28	26.4195	25.5092	24.5909	23.6475	22.6572	21.5880	20.3857	18.9392	16.9279	15.3079	13.5647	12.4613	11.4973	10.3907
29	27.4025	26.4751	25.5391	24.5770	23.5666	22.4751	21.2468	19.7677	17.7084	16.0471	14.2564	13.1211	12.1278	10.9861
30	28.3858	27.4416	26.4881	25.5078	24.4776	23.3641	22.1103	20.5992	18.4927	16.7908	14.9535	13.7867	12.7646	11.5876
31	29.3694	28.4087	27.4381	26.4397	25.3901	24.2551	22.9762	21.4336	19.2806	17.5387	15.6555	14.4577	13.4073	12.1961
32	30.3533	29.3763	28.3889	27.3728	26.3041	25.1478	23.8442	22.2706	20.0719	18.2908	16.3622	15.1340	14.0555	12.8104
33	31.3375	30.3444	29.3405	28.3069	27.2194	26.0422	24.7143	23.1102	20.8665	19.0467	17.0735	15.8152	14.7092	13.4312
34	32.3219	31.3130	30.2928	29.2421	28.1361	26.9383	25.5864	23.9522	21.6643	19.8062	17.7891	16.5013	15.3679	14.0568
35	33.3065	32.2821	31.2458	30.1782	29.0540	27.8359	26.4604	24.7966	22.4650	20.5694	18.5089	17.1917	16.0315	14.6881
36	34.2913	33.2517	32.1995	31.1152	29.9730	28.7350	27.3363	25.6433	23.2686	21.3359	19.2326	17.8868	16.7000	15.3243
37	35.2764	34.2216	33.1539	32.0532	30.8933	29.6355	28.2138	26.4921	24.0749	22.1056	19.9603	18.5859	17.3730	15.9652
38	36.2617	35.1920	34.1089	32.9919	31.8146	30.5373	29.0931	27.3430	24.8839	22.8785	20.6914	19.2888	18.0501	16.6109
39	37.2472	36.1628	35.0645	33.9315	32.7369	31.4405	29.9739	28.1958	25.6954	23.6543	21.4261	19.9958	18.7318	17.2612
40	38.2328	37.1340	36.0207	34.8719	33.6603	32.3449	30.8563	29.0505	26.5093	24.4331	22.1642	20.7066	19.4171	17.9166
45	43.1638	41.9950	40.8095	39.5847	38.2910	36.8844	35.2895	33.3504	30.6123	28.3662	25.9012	24.3110	22.8994	21.2509
50	48.0986	46.8638	45.6100	44.3133	42.9421	41.4492	39.7539	37.6886	34.7642	32.3574	29.7067	27.9908	26.4636	24.6736
55	53.0367	51.7391	50.4204	49.0554	47.6105	46.0356	44.2448	42.0596	38.9581	36.3981	33.5705	31.7349	30.0974	28.1731
60	57.9775	56.6200	55.2394	53.8091	52.2938	50.6406	48.7587	46.4589	43.1880	40.4817	37.4848	35.5344	33.7909	31.7381
70	67.8664	66.3961	64.8990	63.3460	61.6983	59.8978	57.8443	55.3289	51.7393	48.7575	45.4417	43.2753	41.3323	39.0358
80	77.7631	76.1879	74.5825	72.9153	71.1445	69.2070	66.9938	64.2778	60.3915	57.1532	53.5400	51.1719	49.0430	46.5197
90	87.6661	85.9925	84.2854	82.5111	80.6247	78.5584	76.1954	73.2911	69.1260	65.6466	61.7540	59.1963	56.8918	54.1559
100	97.5744	95.8078	94.0046	92.1290	90.1332	87.9453	85.4406	82.3581	77.9294	74.2219	70.0650	67.3275	64.8571	61.9182
120	117.4041	115.4646	113.4825	111.4186	109.2197	106.8056	104.0374	100.6236	95.7046	91.5726	86.9233	83.8517	81.0726	77.7555
160	157.1019	154.8555	152.5564	150.1583	147.5988	144.7834	141.5475	137.5457	131.7560	126.8700	121.3457	117.6791	114.3496	110.3592
200	196.8359	194.3193	191.7409	189.0486	186.1717	183.0028	179.3550	174.8353	168.2785	162.7280	156.4321	152.2408	148.4262	143.8420
300	296.27	293.1786	290.0062	286.6878	283.1353	279.2143	274.6901	269.0679	260.8781	253.9122	245.9727	240.6631	235.8126	229.9620
500	495.3734	491.3709	487.2569	482.9462	478.3231	473.2099	467.2962	459.9261	449.1467	439.9360	429.3874	422.3034	415.8081	407.9458
600	594.9938	590.6057	586.0930	581.3623	576.2859	570.6681	564.1661	556.0560	544.1801	534.0185	522.3654	514.5285	507.3385	498.6219

## **BIBLIOGRAFÍA**

ANAND M. JOGLEKAR, Statistical Methods for Six Sigma In R&D Manufacturing, Editorial Wiley Interscience, USA, Septiembre 2003.

BOLCH B.W., Multivariate Statistical Methods for business and economics, Prentice Hall. USA, 2001

BURR IRVING, Statistical Quality Control Methods, Marcel Dekker Inc., USA 1976

CARLES M. CUADRAS, Nuevos Métodos de Análisis Multivariante, CMC Editions, España, 2007

COMREY C.M., Métodos de Análisis Multivariante, Editorial Emnbar, España, 1981

MONTGOMERY D. C., Control Estadístico de Calidad , Iberoamérica, México, 1998

RENCHER ALVIN, Methods of Multivariante Analysis, Segunda Edición, Editorial Wiley Interscience, USA, 2002

VICENTE Y OLIVA M.; MANERA BASSA J.; BLANCO JIMENEZ F. J., Análisis Multivariante para las Ciencias sociales. Dykinson 2000.

VOLLE M., Analyses Statistiques Multidimensionnelles. Economica, 1985.