

# SIMULACION DE CARGA EN MOTORES TRIFASICOS DE INDUCCION PARA PRUEBAS DE TEMPERATURA

CAMPOVERDE, ANTONIO ING.  
INELIN CIA.LTDA.

TACO, LUIS ING.  
PROF.E.P.N.

## RESUMEN

Se expone un método nuevo que permite realizar pruebas de temperatura en máquinas trifásicas de inducción, sin necesidad de aplicar carga mecánica al motor. La simulación de carga mecánica, se consigue al alimentar simultáneamente, al estator de la máquina con dos sistemas de tensión y frecuencia diferentes y conectados en serie con la máquina en prueba.

Se presentan resultados obtenidos en pruebas experimentales, y una ligera comparación con pruebas realizadas en el exterior

## INTRODUCCION

Es conocido, que la duración de toda máquina eléctrica está íntimamente relacionada con la temperatura de operación, ya que la degradación del aislamiento es función de ambos factores: temperatura y tiempo. La degradación, así como la vida del dieléctrico siguen una ley exponencial:

$$VIDA = A.e^{B/T} \quad (1)$$

En donde A y B son constantes; T la temperatura absoluta. Los costos de pruebas de temperatura en máquinas eléctricas, funcionando a plena carga, son excesivos, especialmente cuando se trata de máquinas de elevada potencia, consecuentemente el método de las "dos frecuencias" resulta una alternativa interesante.

A continuación se indican las principales ventajas del método:

- a. Es aplicable a toda clase de máquina trifásica de inducción, independiente de su capacidad nominal, número de polos o disposición del eje de accionamiento.
- b. No se requiere aplicar ninguna carga mecánica al motor en prueba.
- c. La potencia requerida durante la prueba es únicamente la correspondiente a las pérdidas a plena carga de la máquina.
- d. Las fuentes de generación de voltaje y frecuencia son de menor capacidad que la de la máquina en prueba, aproximadamente entre el 10 y 20% de la potencia nominal de la máquina de inducción.
- e. Es el único método aplicable a motores trifásicos de inducción de eje vertical

### 1. METODO DE LAS DOS FRECUENCIAS

#### 1. DESCRIPCION GENERAL

La máquina trifásica de inducción - sin -

carga acoplada en su eje - se alimenta simultáneamente con dos fuentes trifásicas de tensión y frecuencia conectadas en serie con el motor en prueba: la fuente principal, que puede ser un grupo generador de frecuencias o la red de la Empresa Eléctrica Quito, suministra tensión trifásica de amplitud y frecuencia iguales a las nominales del motor en prueba; la fuente auxiliar - grupo de frecuencia variable - entrega tensión trifásica de amplitud y frecuencia diferentes de valor menor que las de la fuente principal.

La simultánea aplicación de las "dos frecuencias" al estator de la máquina de inducción, origina en el entrehierro un campo magnético oscilante, lo cual hace que la máquina opere alternadamente como motor y como generador, tomando energía y retornándola a la red en forma alternada.

Al realizar la prueba, el motor de inducción es arrancado empleando inicialmente la fuente principal, luego se conecta la alimentación del sistema auxiliar, requiriéndose realizar varios ajustes en los sistemas principal y auxiliar hasta conseguir el voltaje y corriente nominales en el motor de inducción, simulándose consecuentemente las condiciones de operación a plena carga.

### 1.1. CARACTERISTICAS DE LOS PRINCIPALES ELEMENTOS REQUERIDOS PARA LA PRUEBA

En las figuras 1 y 2 se observan los esquemas de bloque que indican las dos posibles conexiones para realizar la prueba de las "dos frecuencias".

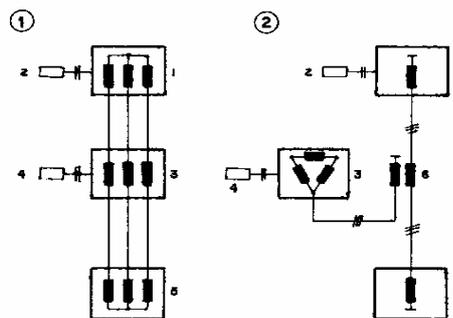


Fig ① - Conexión directa Fig ② - Con transformador de acoplamiento.

1. Generador principal de frecuencia y tensión (  $f_A$  y  $V_A$  )
2. Accionamiento para 1.
3. Generador auxiliar de frecuencia y tensión

sión ( $f_B$  y  $V_B$ )

4. Accionamiento para 3.
5. Máquina de inducción en prueba
6. Transformador de acoplamiento.
- 1.1.1.- GENERADOR PRINCIPAL.- Puede ser - la red de la E.F.O. entrega voltaje ( $V_A$ ) y frecuencia ( $f_A$ ) nominales.

$V_A = V_N$  del motor en prueba  
 $f_A = f_N$  del motor en prueba

- 1.1.2.- GENERADOR AUXILIAR.- Grupo trifásico de frecuencia variable, en trega voltaje  $V_B$  y frecuencia ( $f_B$ ).

$V_B = 10$  a  $20\%$   $V_A$   
 $f_B = (f_A - 10)$  Hz

- 1.1.3.- TRANSFORMADOR DE ACOPLAMIENTO .- Elemento que sirve de acoplamiento y a la vez de aislamiento entre los dos sistemas de alimentación.

- 1.1.4.- MOTOR DE PRUEBA.- Máquina 3  $\phi$  de inducción de cualquier capacidad y clase.

- 1.1.5.- TERMOMETROS Y TERMOCUPLAS.- Reco miéndase utilizar detectores de temperatura de gran precisión y sensibilidad, generalmente los termómetros digitales y las termocuplas con aleación de Fe - Constantán permiten obtener excelentes resultados. Los registradores automáticos hacen factible obtener gráficos de las variaciones de temperatura.

## 2. ESTUDIO MATEMATICO

### 2.1. ECUACIONES BASICAS

Para explicar el comportamiento matemático de la máquina 3  $\phi$  de inducción, alimentada simultáneamente con "dos frecuencias", empleamos la teoría de estado estable, y para facilitar el estudio, se asume:

- 2.1.1. Los sistemas de alimentación trifásicos principal y auxiliar son simétricos y balanceados que entregan voltaje de forma sinusoidal.
- 2.1.2. El grado de saturación de la máquina se considera constante.
- 2.1.3. Los torques parásitos debido al campo magnético del entrehierro no se consideran, por ser despreciables.
- 2.1.4. El devanado del estator de la máquina de inducción es un devanado trifásico simétrico libre de efecto skin
- 2.1.5. Las pérdidas parásitas en carga son consideradas constantes.
- 2.1.6. Para variaciones pequeñas de la velocidad, el torque de fricción se considera independiente de ellas (1)

### 2.2. ECUACIONES DE VOLTAJES Y CORRIENTES

Utilizamos la figura 3 para explicar la obtención de las ecuaciones de voltaje y

corriente de la máquina durante la operación con "dos frecuencias".

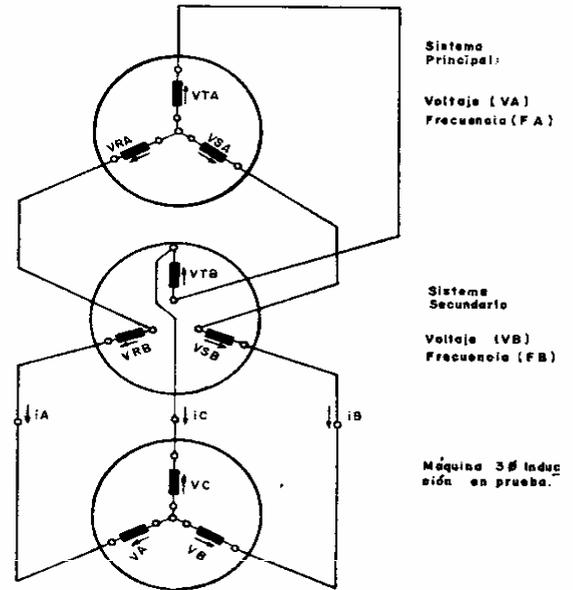


Fig.3.- Conexiones de Generadores: principal y auxiliar y máquina de inducción en prueba.

En la máquina 3  $\phi$  de inducción, se producen las tres corrientes de fase  $i_A$ ,  $i_B$ , e  $i_C$ , debido a las tensiones de fase  $V_A$ ,  $V_B$  y  $V_C$  respectivamente.

La tensión  $\vec{V}_s$  y corriente  $\vec{i}_s$ , con ayuda de la Teoría de Vectores espaciales (referencia: 2) se definen así:

$$\vec{i}_s = \frac{1}{3} (i_A + a i_B + a^2 i_C) \quad (2)$$

$$\vec{V}_s = \frac{1}{3} (V_A + a V_B + a^2 V_C) \quad (3)$$

$$a = e^{j\frac{2\pi}{3}}$$

#### 2.2.1. VOLTAJES

Consideramos los dos sistemas de alimentación y tenemos:

$$\vec{V}_{st} = \vec{V}_{sA} + \vec{V}_{sB} \quad (4)$$

SISTEMA PRINCIPAL (A):

$$\begin{aligned} V_{RA} &= V_A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_A t + \varphi_A) \\ V_{SA} &= V_A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_A t + \varphi_A - \frac{2\pi}{3}) \\ V_{TA} &= V_A \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_A t + \varphi_A + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (5)$$

SISTEMA AUXILIAR (B):

$$\begin{aligned} V_{RB} &= V_B \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_B t + \varphi_B) \\ V_{SB} &= V_B \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_B t + \varphi_B - \frac{2\pi}{3}) \\ V_{TB} &= V_B \cdot \sqrt{2} \cdot \cos(\omega_B t + \varphi_B + \frac{2\pi}{3}) \end{aligned} \quad (6)$$

Reemplazando las ecuaciones (5) y (6) en (4), se tiene:

$$\vec{V}_{st} = \frac{1}{3} \left[ (V_{RA} + a V_{SA} + a^2 V_{TA}) + (V_{RB} + a V_{SB} + a^2 V_{TB}) \right] \quad (7)$$

desarrollando:

$$\vec{V}_{st} = \frac{V_A}{\sqrt{2}} \times e^{j\omega_A t} + \frac{V_B}{\sqrt{2}} \times e^{j\omega_B t} \quad (8)$$

En donde:

$$V_A = V_A \cdot e^{j\theta_A} \quad \text{y} \quad V_B = V_B \cdot e^{j\theta_B}$$

### 2.2.2. CORRIENTES

Para el caso del motor de anillos rozantes la corriente en el rotor  $i_r$ , tomando en función de las corrientes de fase  $i_A$ ,  $i_B$  e  $i_C$  se escribe:

$$\vec{i}_r = \frac{1}{3} (i_A + a^2 i_B + a i_C) \quad (9)$$

Para el motor de jaula de ardilla, en cambio el valor de corriente del rotor es:

$$\vec{i}_r = \frac{1}{Z_2} \sum_{K=1}^{Z_2} i_n \cdot e^{j p \frac{2\pi}{Z_2} (n-1)} \quad (10)$$

En donde:

$i_n$  = corriente en la barra  $n$  de la jaula.  
 $Z_2$  = número de barras del rotor  
 $n$  = barra  $n$

### 2.3. CAMPOS MAGNETICOS ROTATIVOS

La aplicación simultánea de dos tensiones de frecuencia diferente al estator del motor de inducción, produce en el entrehierro un campo magnético resultante. Como las dos fuentes de frecuencia están conectadas en serie, la onda de flujo resultante tendrá dos componentes de diferente magnitud y frecuencia.

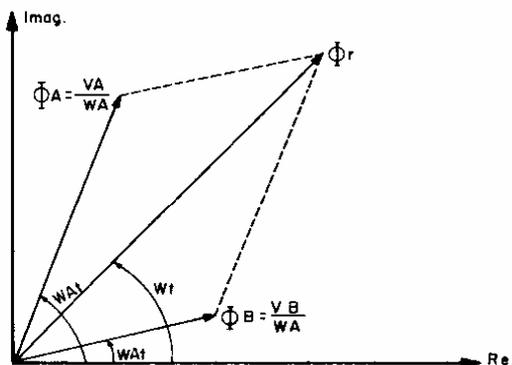


Fig. 4.- Diagrama vectorial de las ondas de flujo debido al sistema principal y auxiliar.

De la figura 4 se obtiene:

$$\begin{aligned} \phi_T \cdot e^{j\omega t} &= \phi_A \cdot e^{j\omega_A t} + \phi_B \cdot e^{j\omega_B t} \\ \phi_T^2 &= \left[ \frac{V_A}{\omega_A} \cdot \cos(\omega_A t) + \frac{V_B}{\omega_B} \cdot \cos(\omega_B t) \right]^2 + \\ &\quad \left[ \frac{V_A}{\omega_A} \cdot \sin(\omega_A t) + \frac{V_B}{\omega_B} \cdot \sin(\omega_B t) \right]^2 \end{aligned}$$

$$\phi_T = \phi_A \sqrt{1 + K^2 + 2K \cos(\omega_A - \omega_B)t} \quad (11)$$

En donde:

$$K = \frac{\phi_B}{\phi_A} = \frac{V_B \cdot \omega_A}{V_A \cdot \omega_B}$$

El ángulo de rotación de la onda de flujo resultante es:

$$\omega t = \arctan \frac{\text{sen} \cdot \omega_A t + K \text{ Sen} \cdot \omega_B t}{\text{Cos} \cdot \omega_A t + K \text{ Cos} \cdot \omega_B t} \quad (12)$$

En base de la ecuación (12), es posible obtener por diferenciación el valor de la velocidad angular resultante  $\omega'$ .

$$\omega' = \frac{d}{dt} (\omega t) = \frac{d}{dt} \arctan \frac{\text{Sen} \omega_A t + K \text{ Sen} \omega_B t}{\text{Cos} \omega_A t + K \text{ Cos} \omega_B t} \quad (13)$$

$$\omega' = \frac{\omega_A + K^2 \omega_B + K(\omega_A + \omega_B) \text{Cos}(\omega_A - \omega_B)t}{1 + K^2 + 2K \text{Cos}(\omega_A - \omega_B)t} \quad (14)$$

### 2.4. DEFINICION DE "DESVIACIONES" DEL ESTADO ESTABLE

El sistema general de ecuaciones que describe el funcionamiento de la máquina 3  $\phi$  de inducción en estado estable, puede escribirse de la siguiente manera: (3)

$$\begin{aligned} R_1 \vec{i}_s + L_1 \frac{d\vec{i}_s}{dt} + M_{12} \frac{d\vec{i}_r'}{dt} &= \vec{V}_s \\ R_2 \vec{i}_r' + L_2 \left( \frac{d\vec{i}_r'}{dt} - j(1-s) \omega_A \vec{i}_r' \right) + \\ M_{21} \left( \frac{d\vec{i}_s}{dt} - j(1-s) \omega_A \vec{i}_s \right) &= 0 \end{aligned} \quad (15)$$

$$T_q(t) = 3p M_{12} j (\vec{i}_r' \cdot \vec{i}_s^* - \vec{i}_r'^* \cdot \vec{i}_s)$$

$$T_q(t) - T_w(t) - T_R + J_p \frac{\omega_A}{p} \times \frac{ds}{dt} = 0$$

En donde:

- $R_1$  y  $R_2$  = resistencias de estator y rotor respectivamente
- $L_1$  y  $L_2$  = inductancias propias del estator y rotor respectivamente
- $\vec{i}_s$  = corriente de estator
- $\vec{i}_r'$  = corriente del rotor referido al estator
- $M_{12}$  y  $M_{21}$  = inductancias mutuas
- $P$  = número de pares de polos
- $\omega_m$  = velocidad mecánica de rotación
- $J_p$  = momento de inercia
- $T_q(t)$  = Torque generado en el entrehierro
- $T_w(t)$  = Torque transmitido al eje del motor
- $T_R$  = Torque debido a la fricción del aire.

El sistema de ecuaciones diferenciales de finida por (15), no es lineal y consecuentemente su solución solo se logra con ayuda del computador. Para realizar un análisis de la operación con dos frecuencias, es necesario suponer que existen ciertas "aproximaciones" en los valores de corriente de estator y rotor y en el deslizamiento. Estas "aproximaciones" se suman a los correspondientes valores en estado-

estable, permitiendo obtener un sistema lineal de ecuaciones diferenciales.

Los valores de "aproximaciones" consideradas son:  $\vec{i}_{s\Delta}$ ,  $\vec{i}_{r\Delta}$  y  $S_{\Delta}$

Las corrientes de estator y del rotor referida al estator, tomando en cuenta los dos sistemas de alimentación: principal (A) y auxiliar (B) son:

$$\begin{aligned} \vec{i}_s &= \frac{I_{1A}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{I_{1B}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \vec{i}_{s\Delta} \\ \vec{i}_r &= \frac{I_{2A}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{I_{2B}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \vec{i}_{r\Delta} \end{aligned} \quad (16)$$

en donde:  $I_{1A} = I_{1A} \cdot e^{j\theta_{1A}}$ ;  $I_{1B} = I_{1B} \cdot e^{j\theta_{1B}}$   
 $I_{2A} = I_{2A} \cdot e^{j\theta_{2A}}$ ;  $I_{2B} = I_{2B} \cdot e^{j\theta_{2B}}$

Para el valor del deslizamiento en estado estable, se define un valor de "aproximación" del deslizamiento:

$$S = S_0 + S_{\Delta} \quad (17)$$

$S_0$  = Deslizamiento en estado estable

Reemplazando las ecuaciones de (16) y (17) en el sistema de ecuaciones indicado por (15), se obtienen dos sistemas de ecuaciones definidos:

a. Con las cantidades para el estado estable:  $I_{1A}$ ,  $I_{2A}$ ,  $I_{1B}$ ,  $I_{2B}$  y el deslizamiento  $S_0$ , se tiene el siguiente sistema lineal de ecuaciones:

$$\begin{aligned} R_1 I_{1A} + j\omega A \cdot L_1 \cdot I_{1A} + j\omega A \cdot M_{12} \cdot I_{2A} &= \vec{V}_{1A} \\ R_2 I_{2A} + j\omega A \cdot L_2 S_0 I_{2A} + j\omega A \cdot M_{21} S_0 \cdot I_{1A} &= 0 \\ R_1 I_{1B} + j\omega B \cdot L_1 I_{1B} + j\omega B \cdot M_{12} \cdot I_{2B} &= \vec{V}_{1B} \\ R_2 I_{2B} + jL_2 (\omega A - \omega A (1 - S_0)) \cdot I_{2B} + \\ + jM_{21} (\omega B - \omega A (1 - S_0)) \cdot I_{1B} &= 0 \\ T_D + T_{\Delta a} + T_{\Delta a a} - T_W - T_R &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

b. Un sistema de ecuaciones diferenciales simultáneas no lineal para las "aproximaciones":  $\vec{i}_{s\Delta}$ ,  $\vec{i}_{r\Delta}$  y  $S_{\Delta}$  que es:

$$\begin{aligned} R_1 \vec{i}_{s\Delta} + L_1 \frac{d\vec{i}_{s\Delta}}{dt} + M_{21} \frac{d\vec{i}_{r\Delta}}{dt} &= 0 \\ R_2 \vec{i}_{r\Delta} + L_2 \frac{d\vec{i}_{r\Delta}}{dt} - j\omega A L_1 (1 - S_0) \vec{i}_{r\Delta} + \\ + M_{21} \frac{d\vec{i}_{s\Delta}}{dt} - j\omega A M_{21} (1 - S_0) \vec{i}_{s\Delta} + \\ + j\omega A L_2 S_{\Delta} \left( \frac{I_{2A}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{I_{2B}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \vec{i}_{r\Delta} \right) \\ + j\omega A M_{21} S_{\Delta} \left( \frac{I_{1A}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \frac{I_{1B}}{\sqrt{2}} \cdot e^{j\omega t} + \vec{i}_{s\Delta} \right) &= 0 \\ T_{\Delta}(t) + t_{\Delta\Delta}(t) + T_p(t) + J_m \frac{\omega A}{p} \times \frac{ds_{\Delta}}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Para cada uno de los dos sistemas, se pueden definir todos los valores que intervienen en las diferentes ecuaciones:

#### 2.4.1 SISTEMA LINEAL DE ECUACIONES

Ecuaciones para los vectores de corriente. - Para facilitar la demostración de las ecuaciones de los vectores de corriente I A, I A, I B, y I B que intervienen en las ecuaciones del sistema lineal indicado por (18), se define:

a.  $\beta_1$  y  $\beta_2$  = parámetros que representan a resistencias relativas, para describir el funciona-

miento de máquinas trifásicas de inducción en estado estable.

$$\beta_1 = \frac{R_1}{\omega A \cdot L_1} \quad (20)$$

$$\beta_2 = \frac{R_2}{\omega A \cdot L_2} \quad (21)$$

b.  $\xi$  = Relación de frecuencias de rotación

$$\xi = \frac{\omega A}{\omega B} \quad (22)$$

$\sigma$  = Coeficiente de dispersión de Blond.

Al tener el deslizamiento  $S_0$  para la condición de estado estable referido al sistema de alimentación principal (A), se tiene:

$$c. S_0 A = S_0 \quad (23)$$

Para el sistema secundario se tiene:

$$d. S_0 B = \frac{\omega B}{\omega A} - 1 + S_0 \quad (24)$$

De esta manera el vector de corriente del estator, debido al efecto de los dos sistemas de alimentación se expresa así:

Corriente  $I_{1A}$  debido al sistema de alimentación principal:

$$I_{1A} = \frac{V_A}{\omega A \cdot L_1} \times \frac{\beta_2 + jS_0 A}{\beta_1 \beta_2 - \sigma S_0 A + j\beta_1 S_0 A + j\beta_2} \quad (25)$$

$$I_{1B} = \frac{V_B}{\omega B \cdot L_1} \times \frac{\beta_2 + jS_0 B}{\beta_1 \beta_2 \frac{\omega A}{\omega B} - \sigma S_0 B + j\beta_1 \frac{\omega A}{\omega B} S_0 B + j\beta_2} \quad (26)$$

Para obtener el vector de corriente del rotor, definimos las siguientes magnitudes auxiliares:

$$e. \Delta_{2A} = -j \frac{M_{21}}{L_2} \times \frac{S_0 A}{\beta_2 + jS_0 A} \quad (27)$$

$$f. \Delta_{2B} = -j \frac{M_{21}}{L_2} \times \frac{S_0 B}{\beta_2 + jS_0 B} \quad (28)$$

Obteniéndose para el vector de corriente del rotor:

$$I_{2A} = \Delta_{2A} \cdot I_{1A}, \text{ y} \quad (29)$$

$$I_{2B} = \Delta_{2B} \cdot I_{1B} \quad (30)$$

En lo relacionado a los torques:  $T_D + T_{\Delta a} + T_{\Delta a a} - T_W - T_R = 0$  se define:

g.  $T_D$  = Torque no dependiente del tiempo:

$$T_D = T_{DA} + T_{DB} = \frac{3}{2} P M_{21} \times$$

$$\left[ (I_{2A} \cdot I_{1A} + I_{2B} \cdot I_{1B}) - (I_{2A} \cdot I_{1A} + I_{2B} \cdot I_{1B}) \right] \quad (31)$$

h.  $T_{\Delta a}$  = "aproximación" de torque de primera clase (término independiente del tiempo)

$$T_{\Delta a} = j \frac{3}{2} PM_{12} (K T_{\Delta a} - K^* T_{\Delta a}) \quad (32)$$

En donde:

$$K = \underline{I}'_{1A} \cdot \underline{I}''_{2\Delta 1} + \underline{I}^*_{1B} \cdot \underline{I}''_{2\Delta 1} + \underline{I}'_{2A} \cdot \underline{I}''_{1\Delta 1} + \underline{I}^*_{2B} \cdot \underline{I}''_{1\Delta 1}$$

i).  $T_{\Delta \Delta a}$  = "aproximación" de torque de segunda clase (término independiente del tiempo)

$$T_{\Delta \Delta a} = j \frac{3}{2} PM_{12} \left[ \sum_{v=1}^{\infty} (\underline{I}'_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'_{1\Delta v} - \underline{I}'_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'_{1\Delta v} + \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}''_{1\Delta v} - \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}''_{1\Delta v} + \underline{I}'''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'''_{1\Delta v} - \underline{I}'''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'''_{1\Delta v}) + \sum_{v=1}^{\infty} (\underline{I}'_{2\Delta v} \cdot \underline{I}''_{1\Delta} (v+1) - \underline{I}'_{2\Delta v} \cdot \underline{I}''_{1\Delta} (v+1) + \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'''_{1\Delta} (v+1) - \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'''_{1\Delta} (v+1)) + \sum_{v=1}^{\infty} (\underline{I}''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}''_{1\Delta} (v-1) - \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}''_{1\Delta} (v-1) + \underline{I}'''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'''_{1\Delta} (v-1) - \underline{I}'''_{2\Delta v} \cdot \underline{I}'''_{1\Delta} (v-1)) \right] \quad (33)$$

$T_w$  = Torque transmitido aleje de la máquina, es cero pues la máquina no tiene carga acoplada en su eje.

$T_R$  = Torque debido a la fricción del aire

#### 2.4.2. SISTEMA NO LINEAL

Para este sistema de ecuaciones se define lo siguiente:

$$a) \vec{i}_{s\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \underline{I}'_{1\Delta v} \cdot e^{j(WA+VW_{\Delta})t} + \underline{I}''_{1\Delta v} \cdot e^{j(WA-VW_{\Delta})t} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \underline{I}'''_{1\Delta v} \cdot e^{j(WB+VW_{\Delta})t} + \underline{I}''''_{1\Delta v} \cdot e^{j(WB-VW_{\Delta})t} \right] \quad (34)$$

En donde:

$$\underline{I}'_{1\Delta v} = \underline{I}'_{1\Delta v} \cdot e^{j\varphi'_{1\Delta v}}; \underline{I}''_{1\Delta v} = \underline{I}''_{1\Delta v} \cdot e^{j\varphi''_{1\Delta v}}; \underline{I}'''_{1\Delta v} = \underline{I}'''_{1\Delta v} \cdot e^{j\varphi'''_{1\Delta v}}; \underline{I}''''_{1\Delta v} = \underline{I}''''_{1\Delta v} \cdot e^{j\varphi''''_{1\Delta v}} \quad (35)$$

$$b) \vec{i}_{r\Delta} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \underline{I}'_{2\Delta v} \cdot e^{j(WA+VW_{\Delta})t} + \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot e^{j(WA-VW_{\Delta})t} \right] + \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{v=1}^{\infty} \left[ \underline{I}'''_{2\Delta v} \cdot e^{j(WB+VW_{\Delta})t} + \underline{I}''''_{2\Delta v} \cdot e^{j(WB-VW_{\Delta})t} \right]$$

En donde:

$$\underline{I}'_{2\Delta v} = \underline{I}'_{2\Delta v} \cdot e^{j\varphi'_{2\Delta v}}; \underline{I}''_{2\Delta v} = \underline{I}''_{2\Delta v} \cdot e^{j\varphi''_{2\Delta v}}$$

$$\underline{I}'''_{2\Delta v} = \underline{I}'''_{2\Delta v} \cdot e^{j\varphi'''_{2\Delta v}}; \underline{I}''''_{2\Delta v} = \underline{I}''''_{2\Delta v} \cdot e^{j\varphi''''_{2\Delta v}}$$

$$c) S_{\Delta} = \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \underline{S}_{\Delta v} \cdot e^{jVW_{\Delta}t} - \underline{S}_{\Delta v} \cdot e^{-jVW_{\Delta}t} \right] \quad (36)$$

En donde:

$\underline{S}_{\Delta v} = S_{\Delta v} \cdot e^{j\varphi_{S\Delta v}}$ , amplitud compleja de la "aproximación" del deslizamiento.

Para el sistema de ecuaciones no lineal, indicado por (19) se considera además lo siguiente:

La "aproximación" de velocidad es muy pequeña comparada con la velocidad promedio de la máquina durante la prueba, y asumiendo que la componente variable con respecto al tiempo de la "aproximación" de torque de segunda clase  $T_{\Delta \Delta}(t)$  es de valor pequeño en comparación con la "aproximación" de torque de primera clase  $T_{\Delta}(t)$ , se cumple lo siguiente:

$$d) 1 - S_0 \gg S_0 \quad (37)$$

$$e) T_{\Delta}(t) \gg T_{\Delta \Delta}(t) \quad (38)$$

Consecuentemente existirá una variación en el valor de  $T_p(t)$ , en el que se suma el valor de  $T_{\Delta a}$  y se desecha el valor de  $T_{\Delta \Delta}(t)$ , en la ecuación correspondiente al sistema (19).

Además, se define el flujo magnético en el rotor de la máquina por efecto de los dos sistemas de alimentación:

$$f) \Phi_{2A} = L_2 \underline{I}_{2A} + M_{21} \underline{I}_{1A} \quad (39)$$

$$g) \Phi_{2B} = L_2 \underline{I}_{2B} + M_{21} \underline{I}_{1A} \quad (40)$$

Para el torque de oscilación o momento pendular  $T_p(t)$ , se define:

$$h) \hat{T}_p = \frac{3}{2} PM_{12} (\underline{I}^*_{2B} \cdot \underline{I}_{1A} - \underline{I}_{2A} \cdot \underline{I}^*_{1B}) \quad (41)$$

Como valor de "aproximación" de frecuencia, se define a la diferencia entre la frecuencia angular principal ( $2\pi f_A$ ) y la frecuencia angular secundaria ( $2\pi f_B$ )

$$i) W_{\Delta} = W_A - W_B \quad (42)$$

Finalmente, empleando los criterios anteriormente citados, tendremos el sistema de ecuaciones diferenciales no lineal, de la siguiente manera:

$$R_1. \vec{i}_{s\Delta} + L_1 \frac{d\vec{i}_{s\Delta}}{dt} + M_{12} \frac{d\vec{i}_{r\Delta}}{dt} = 0$$

$$R_2. \vec{i}_{r\Delta} + L_2 \frac{d\vec{i}_{r\Delta}}{dt} + M_{21} \frac{d\vec{i}_{s\Delta}}{dt} - jW_{\Delta} L_2 (1-S_0) \cdot \vec{i}_{r\Delta} = 0$$

$$- j\omega M_{21}(1-S_0) \vec{i}_{s\Delta} + j\omega A \cdot S_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \Phi_{2A} \cdot e^{j\omega t} + j\omega A \cdot S_{\Delta} \frac{1}{\sqrt{2}} \Phi_{2B} \cdot e^{j\omega t} = 0$$

$$T_{\Delta}(t) + T_{\Delta a} = j \left( \hat{T}_{\Delta} \cdot e^{-j\omega t} - \hat{T}_{\Delta} \cdot e^{j\omega t} \right) + \left( \underline{I}^*_{1A} \cdot \vec{i}_{r\Delta} - \underline{I}_{2A} \cdot \vec{i}_{s\Delta} \right) e^{-j\omega t} + \left( \underline{I}_{2A} \cdot \vec{i}_{s\Delta}^* - \underline{I}^*_{1A} \cdot \vec{i}_{r\Delta}^* \right) e^{j\omega t} + \left( \underline{I}^*_{1B} \cdot \vec{i}_{r\Delta} - \underline{I}_{2B} \cdot \vec{i}_{s\Delta} \right) e^{-j\omega t} + \left( \underline{I}_{2B} \cdot \vec{i}_{s\Delta}^* - \underline{I}^*_{1B} \cdot \vec{i}_{r\Delta}^* \right) e^{j\omega t} + T_{\Delta}(t) + T_p(t) + J_m \frac{\omega A}{p} \times \frac{ds_{\Delta}}{dt} = 0 \quad (43)$$

A partir de la expresión siguiente (44) se pueden obtener los torques de amortiguación ( $T_{sv}$ ,  $T_{sv}$  y  $T_{sv}$ ) y elasticidad ( $T_{cv}$ ,  $T_{cv}$  y  $T_{cv}$ )

$$T_{\Delta}(t) = j \left( \underline{T}_{\Delta 1} \cdot e^{j\omega t} - \underline{T}^*_{\Delta 1} \cdot e^{-j\omega t} \right) + j \sum_{v=2}^{\infty} \left[ \underline{T}_{\Delta v} \cdot e^{jv\omega t} - \underline{T}^*_{\Delta v} \cdot e^{-jv\omega t} \right] \quad (44)$$

En donde:

$$\underline{T}_{\Delta 1} = \frac{3}{2} PM_{12} \left[ \underline{I}^*_{1A} \cdot \underline{I}'_{1A} + \underline{I}^*_{1B} \cdot \underline{I}'_{2A} - \underline{I}_{1A} \cdot \underline{I}''_{2A} - \underline{I}_{1B} \cdot \underline{I}''_{2A} - \underline{I}^*_{2A} \cdot \underline{I}'_{1A} - \underline{I}^*_{2B} \cdot \underline{I}'_{1A} + \underline{I}_{2A} \cdot \underline{I}''_{1A} + \underline{I}_{2B} \cdot \underline{I}''_{1A} + \underline{I}^*_{1A} \cdot \underline{I}'_{2A} - \underline{I}_{1B} \cdot \underline{I}''_{2A} - \underline{I}^*_{2A} \cdot \underline{I}'_{2A} + \underline{I}_{2B} \cdot \underline{I}''_{2A} \right] \quad (45)$$

$$y \underline{T}_{\Delta v} = \frac{3}{2} PM_{12} \left[ \underline{I}^*_{1B} \cdot \underline{I}'_{2\Delta}(v-1) - \underline{I}_{1A} \cdot \underline{I}''_{2\Delta}(v-1) - \underline{I}^*_{2B} \cdot \underline{I}'_{1\Delta}(v-1) + \underline{I}_{2A} \cdot \underline{I}''_{1\Delta}(v-1) + \underline{I}^*_{1A} \cdot \underline{I}'_{2\Delta v} + \underline{I}^*_{1B} \cdot \underline{I}'_{2\Delta v} - \underline{I}_{1A} \cdot \underline{I}''_{2A} - \underline{I}_{1B} \cdot \underline{I}''_{2\Delta v} - \underline{I}^*_{2A} \cdot \underline{I}'_{1\Delta v} - \underline{I}^*_{2B} \cdot \underline{I}'_{1\Delta v} + \underline{I}_{2A} \cdot \underline{I}''_{1\Delta v} + \underline{I}_{2B} \cdot \underline{I}''_{1\Delta v} + \underline{I}^*_{1A} \cdot \underline{I}'_{2\Delta}(v+1) - \underline{I}_{1B} \cdot \underline{I}''_{2\Delta}(v+1) - \underline{I}^*_{2A} \cdot \underline{I}'_{1\Delta}(v+1) + \underline{I}_{2B} \cdot \underline{I}''_{1\Delta}(v+1) \right] \quad (46)$$

A consecuencia del acoplamiento o efecto combinado de las oscilaciones de cada una de las frecuencias angulares  $\omega A$  y  $\omega B$

del sistema principal y auxiliar respectivamente, se origina teóricamente un sistema infinito de ecuaciones para los torques de amortiguación y elasticidad. Este sistema conformado por ecuaciones dependiente entre sí, debe ser resuelto en conjunto y se lo puede representar en forma de una matriz tridiagonal o de Jordán, es decir es una matriz que tiene tres diagonales: superior, central e inferior. Los términos que no pertenezcan a cualquiera de estas tres diagonales será cero. Los coeficientes de esta matriz tridiagonal se expresan de la siguiente forma:

$$\underline{A}(\underline{V}, \underline{V}) = T_{sv} - jT_{cv} + J_m \frac{\omega A}{p} \cdot \underline{V} \cdot \omega_{\Delta} \quad \text{para } 1 \leq \underline{V} \leq n \quad (47)$$

$$\underline{A}'(\underline{V}, \underline{V}-1) = (T'_{sv} - jT_{cv}) \quad \text{para } 2 \leq \underline{V} \leq n \quad (48)$$

$$\underline{A}(\underline{V}, \underline{V}+1) = (T_{sv} - jT_{cv}) \quad \text{para } 1 \leq \underline{V} \leq n-1 \quad (49)$$

### 3. PRUEBAS EXPERIMENTALES

Empleando un motor trifásico de inducción, con los tres tipos de rotores: rotor devanado, jaula de ardilla y doble jaula de ardilla. Los resultados obtenidos en el laboratorio confirman los planteamientos teóricos expuestos inicialmente, además los resultados obtenidos en pruebas realizadas en EE.UU. y Alemania ratifican totalmente, que el método de las "dos frecuencias" es un método alternativo en lugar del método de carga convencional para la realización de pruebas de temperatura.

TABLA I

DATOS TOMADOS DURANTE LA PRUEBA DE CARGA CONVENCIONAL

Magnitud	R.Devanado	Jaula de Ard.	Doble Jaula
Voltaje de lín. (V)	220	220	220
Corriente de línea (A)	7	7	7
Potencia Activa (W) durant. prueba	2100	2200	1960
R.P.M.	1600	1605	1600
S	0,111	0,108	0,111
Tiempo de operación (min.)	190	190	190
Temp. final devan. estat. (°C)	64	42.5	48.4

TABLA II

DATOS TOMADOS DURANTE LA PRUEBA DE LAS DOS FRECUENCIAS

Magnitud	R.Devanado	J.de Ardilla	Doble J.
Voltaje de lín. (V)	220	220	220
Corr. de línea (A)	7	7	7
Potenc. Activa (W) (durante prueba)	440	300	520
R.P.M.	1600	1630	1610
S	0,111	0,094	0,105
Tiempo de operación (min.)	185	175	175
Temp. final dev. estatórico (°C)	64.1	44.2	48

De acuerdo a los resultados indicados en las tablas I y II y al gráfico No. 5 se puede deducir:

1. Los valores de temperatura obtenidos - por ambos métodos son bastante aproximados.
2. La potencia requerida durante la prueba de las dos frecuencias es mucho menor que la empleada en el método de carga convencional.
3. El tiempo de obtención de las temperaturas de estabilización térmica de la máquina, es menor con el método de las "dos frecuencias".

3.2. OSCILOGRAMAS DE VOLTAJE Y CORRIENTE DEL ESTATOR

La forma de las ondas de voltaje y corriente del estator, empleando el método de las dos frecuencias no son sinusoidales debido a la superposición de dos ondas de tensión y corriente de diferente frecuencia, que origina variaciones (pulsaciones) en las ondas resultantes.

Los oscilogramas tienen la misma forma, independiente de la potencia del motor. Los oscilogramas obtenidos en las pruebas experimentales son similares al oscilograma obtenidos en pruebas realizadas en Alemania.

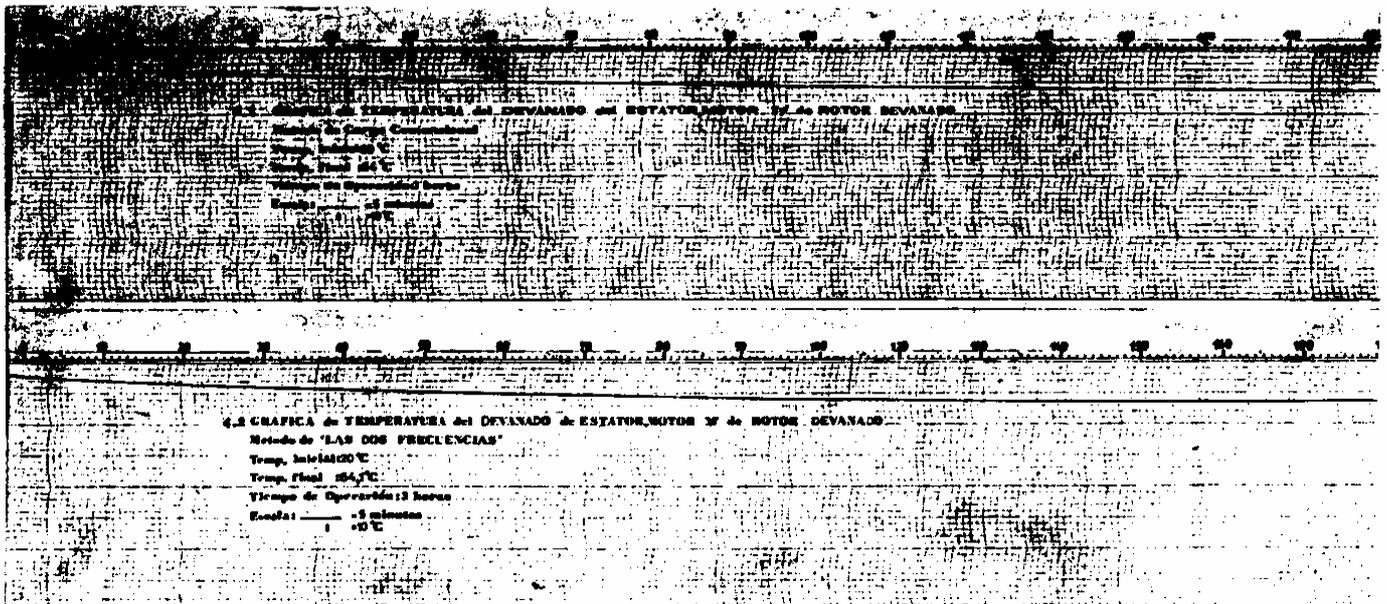
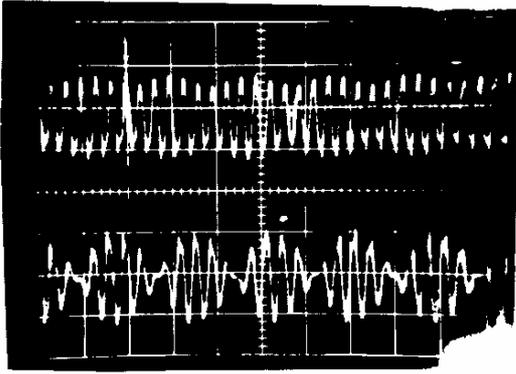


Fig. 5. Gráfico Comparativo de Temperatura del Devanado del Estator, obtenidos por los dos Métodos.

OSCILOGRAMA No. 1



Escalas:  
 Corriente: 10 V /div  
 Voltaje: 2 V /div  
 Tiempo: 50 mseg/div

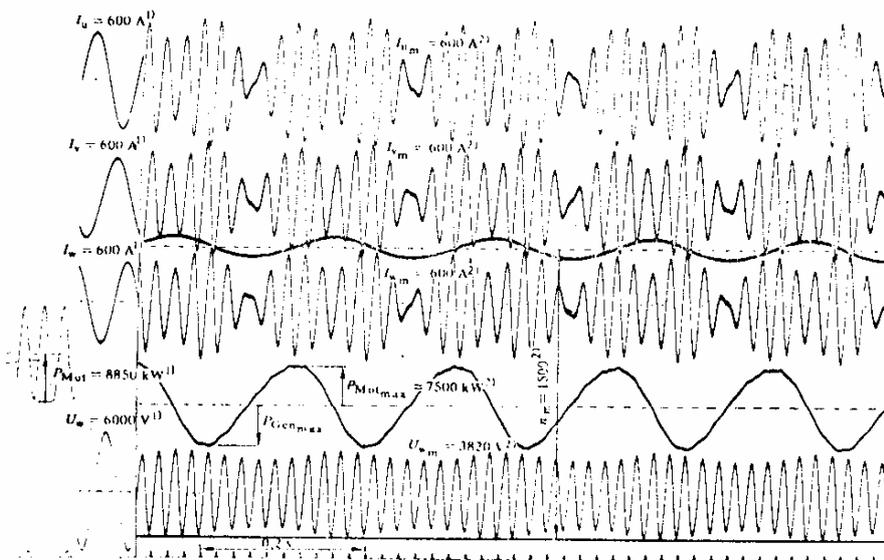
Tanto el oscilograma No. 1 como el oscilograma No. 2 corresponden a una máquina de inducción de jaula de ardilla. En ambos casos las corrientes y voltajes son iguales a los valores nominales. El oscilograma No. 2 nos indica que las corrientes y voltajes son simétricos.

La frecuencia "auxiliar" de alimentación obliga a una variación periódica de la velocidad, lo que origina un funcionamiento alternado de la máquina como motor y generador, por lo que capta y entrega energía durante la aceleración y desaceleración, respectivamente.

Ondas de voltaje (arriba) y corriente (abajo), obtenidas durante la operación del motor 3  $\phi$  de inducción, 3 HP, 220 V, con dos frecuencias.

fA = 60 Hz (frecuencia principal)  
 fB = 50 Hz (frecuencia auxiliar)

OSCILOGRAMA No. 2



Oscilograma No. 2: forma de las ondas de los parámetros característicos de un motor de inducción durante las pruebas de temperatura, usando el método de las "dos frecuencias":

$I_u$ ,  $I_v$ ,  $I_w$ : Corrientes de fase de la máquina en prueba  
 $U_w$ : Voltaje de fase de la máquina en prueba  
 $V_m$ : Velocidad principal de la máquina en prueba

Oscilogramas de voltaje y corriente obtenidas al probar un motor de 6.000 KW,  $V_{Nominal} = 6.650$  V,  $I_{Nominal} = 600$  A, probado en Alemania. La potencia requerida para la prueba fue:  $148$  KW  $\approx 2.5\%$  PN.

- 1) Valores calibrados a 50 Hz ( $I_u$ ,  $I_v$ ,  $I_w$ ,  $U_w$ ,  $P_{mot}$  son valores r.m.s.)
- 2) Valor promedio de las deflecciones medidas

#### 4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

##### CONCLUSIONES:

1. Los resultados experimentales obtenidos al aplicar el método de las dos frecuencias, demuestran que es válido para la determinación de temperaturas de devanados de máquinas trifásicas de inducción.
2. Es un método técnica y económicamente ventajoso, además factible de realizar en cualquier laboratorio de Máquinas Eléctricas.
3. Puede tener aplicaciones prácticas importantes en la Industria.
4. Permite obtener la Curva t. Vs. I que es la que indica la característica térmica para determinados valores de carga aplicados a la máquina de inducción

##### RECOMENDACIONES:

1. Es conveniente una difusión del método de prueba, con el propósito de aprovechar sus ventajas.
2. La distribución de pérdidas en el rotor de la máquina de inducción en prueba, aún no se ha determinado claramente, recomendándose un estudio de simulación digital que permite conocer la distribución de potencia de pérdidas (referencias No 3 y 4).
3. La simulación digital, se puede usar además para determinar los valores de frecuencia y voltaje más óptimo para el sistema auxiliar, lográndose obtener con gran precisión las condiciones de simulación de carga.

##### REFERENCIAS:

- (1) Meyer and Lorenzen, "Two Frequency Heat Run - A Method of Examination for three phase induction Motors" IEEE, TRANS-PAS, Vol. PAS-98, P.2338-2347, Nov./Dec. 1979.
- (2) Wild W., "Behaviour of Simmetrical Poly phase induction Machines. Fed by Two Three-Phase Systems with different Frequencies", Diss. TU Munich (Alemania) 1975.
- (3) Jordan, Cook and Smith, "Synthetic Load Testing of Induction Machines" IEEE, Vol. PAS-96, No. 4, P.1101-1104, July/August 1977.
- (4) Jordan, H.E. "Digital Computer Analysis of Induction Machines in Dynamic Systems", IEEE TRANS, PAS-86, 1967
- (5) Kron, August Wilhelm, "Mediciones Experimentales en grandes máquinas asincrónicas", ETZ-A, Bd 90, 1969, (Alemania)
- (6) Radie and Strupp, "Measurement of Temperature using the continuously varied frequency method", Brown Bovery P.517-520, Agosto de 1976.

- (7) Campoverde Antonio, "Simulación de carga en máquinas trifásicas de inducción para pruebas de temperaturas", Tesis de grado previa a la obtención del título de Ingeniero Eléctrico, EPN, Quito, 1980.

\* \* \*

##### ANEXO A:

##### SIMBOLOS NO DEFINIDOS:

a [ - ]	Magnitud compleja: $j.2\pi/3$
$\underline{I}1A [ A ]$	Vector de corriente efectiva del estator debido al sistema A
$\underline{I}1B [ A ]$	Vector de corriente efectiva del estator debido al sistema B
$\underline{I}2A [ A ]$	Vector de corriente efectiva del rotor debido al sistema A
$\underline{I}2B [ A ]$	Vector corriente efectiva del rotor debido al sistema B
$\left. \begin{array}{l} \underline{I}'1AV [ A ] \\ \underline{I}''1AV [ A ] \\ \underline{I}'''1AV [ A ] \end{array} \right\}$	Vectores de corriente oscilante del estator debido a los sistemas principal y auxiliar.
$\left. \begin{array}{l} \underline{I}'2AV [ A ] \\ \underline{I}''2AV [ A ] \\ \underline{I}'''2AV [ A ] \end{array} \right\}$	Vectores de corriente oscilante del rotor debido a los sistemas principal y auxiliar.
TDA y TDB [F.m.]	Componentes del momento TD debido al sistema principal y al sistema auxiliar
$\hat{T}_P [ F.m. ]$	Magnitud completa del momento oscilatorio
TCV, T'CV, T''CV [F.m.]	Torques de elasticidad
TSV, T'SV, T''SV [F.m.]	Torques de amortiguación
P [ - ]	Pares de polos
v [ - ]	Números enteros positivos
$\pi [ - ]$	Valor límite para variable
WA [1/S]	Velocidad angular del sistema principal
WB [1/S]	Velocidad angular del sistema auxiliar