INTRODUCCION A LA OPTIMIZACION DE S.E.P.

RODAS, RAMIRO Ph.D.

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

RESUMEN:

Este artículo presenta criterios básicos para la modelación de sistemas. Se desarrolla un modelo en función de variables de estado para sistemas eléctricos de potencia. El Jacobiano que se obtiene es de tipo general y utilizable directamente en estudios de sensitividad y flujos de potencia probabilísticos. Se desarrolla también, la teoría básica necesaria para la determinación de flujos óptimos, que lleven al programa de generación que permita obtener mínimos costos de generación.

Se considera dos casos: sistemas sin centrales hidráulicas con pequeños reservorios y sistemas con este tipo de centrales. Se identifica el problema como de programación no lineal y de determinación de la ruta óptima. Se aplica los métodos de Kuhn-Tucker y el cálculo de variaciones, dejando abierta la posibilidad de aplicar el método de Pontryagin.

Con el objeto de facilitar la presentación se ha omitido en el análisis las componentes aleatorias y no se trata específicamente de la influencia de flujos reactivos.

Estos métodos pueden implementarse en un computador y conjuntamente con una red de microprocesadores instalados a nivel de centrales y subestaciones pueden, en tiempo real, conducir al sistema por la ruta óptima.

1. INTRODUCCION:

Los modelos que se desarrollan en este artículo se utilizarán únicamente como dispositivos de explicaciones y predicciones.

El uso de modelos de sistemas para realizar predicciones sobre las características del sistema real, conociendo las características del modelo se conoce como "actividad del uso del modelo". Denominando K al conjunto de características del sistema real y K' al conjunto de características del modelo, entonces el modelo matemático del sistema es: $F \subset K \times K'$

Los conjuntos K y K' se los puede obtener directamente del sistema original y del "candidato" a modelo, respectivamente. Para determinar los conjuntos antes mencionados, K y K', se requiere del denominado "mapa de extracción de características".

El modelo matemático del sistema F, puede ser fácilmente determinado a partir de las características de los diferentes componentes del sistema, las que constituirían los mapas de extracción. Desde luego, el conjunto de características del sistema real estará dado por la o las posibles soluciones al modelo, los tan llamados estudios de Flujo de Carga.

Conocidas las características del sistema real, es posible escoger un programa de operación que minimice los costos de producción.

2. MODELO DEL SISTEMA:

Conocidos los mapas de extracciones para los diferentes componentes del sistema, es posible determinar un modelo "preliminar"

Si se aplica la Ley de Kirchoff a cada nodo de un sistema de N nodos, se tiene:

$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 \qquad (1)$$

La corriente total en el nodo i, puede expresarse como:

$$I_i = \sum_{j=1}^{N} Y_{ij} V_j \qquad (2)$$

Donde Y_{ij} son los elementos de la tan conocida Y_{bus}, y V_j es el voltaje en el nodo j.

Los valores de las cargas, así como los valores de generación, son normalmente expresados en función de potencias, por lo que es más conveniente transformar la ecuación (2) a potencias, o sea:

$$V_i^* \sum_{i=1}^{N} I_i = \sum_{i=1}^{N} S_i^* = 0 \qquad (3)$$

Donde Si es la potencia compleja.

Considerando cualquier nodo, i, y descomponiendo la potencia y la admitancia en sus partes real e imaginaria, la ecuación (3) puede escribirse como:

$$0 = P_i = \text{Real}\ (|V_i| e^{a\delta_i} \sum_{j=1}^{N} (G_{ij} + aB_{ij}) |V_j| e^{a\delta_j})$$

$$0 = Q_i = \text{Imag}\ (|V_i| e^{a\ i} \sum_{j=1}^{N} (G_{ij} + aB_{ij}) |V_i| e^{a\delta_j}) \qquad (4)$$

Donde:

$$V_p = |V_p| e^{a\delta_p} \quad y \quad Y_{pq} = G_{pq} + a\, B_{pq} \qquad (5)$$

(El operador $a = \sqrt{-1}$ ha sido incluido para evitar confusiones con el nodo i)

P es la potencia activa en el nodo i, y
Q es la potencia reactiva en el nodo i

Las ecuaciones (4) pueden ser escritas, luego de algunas transformaciones matemáticas como:

$$0 = P_i - \sum_{j=1}^{N} |V_i| |V_j| [G_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)]$$

$$0 = Q_i - \sum_{j=1}^{N} |V_i| |V_j| [B_{ij} \cos(\delta_j - \delta_i) - G_{ij} \sin(\delta_j - \delta_i)] \qquad (6)$$

Para cada nodo del sistema, existen dos ecuaciones. El conjunto completo de las 2 x N ecuaciones constituye el modelo matemático, F, del sistema, y es el que será utilizado en este artículo.

Del modelo descrito por las ecuaciones (6), se puede realizar algunas observaciones, entre otras:

a. El sistema está descrito por un sistema de 2 x N ecuaciones algebráicas no lineales.
b. La variable frecuencia no aparece explícitamente en estas ecuaciones, debido al hecho de que se asume estado estacionario.
c. Las pérdidas de potencia por transmisión, se presentan solamente como funciones de los voltajes.

3. VARIABLES DE ESTADO:

Con el objeto de circunscribir el conjunto de características del modelo, K, (las mismas que están dadas por la solución del modelo expresado por (6)) y a la vez disponer de una metodología para la clasificación de las variables, las técnicas y notación de variables de estado, se utilizarán en este artículo.

Durante la operación normal de un sistema eléctrico de potencia, tres tipos de variables pueden ser identificados.

a. Por medios físicos, es posible cambiar el valor de potencia que cada unidad envia al sistema. Las variables del modelo que representan este hecho, se denominan variables independientes o variables de control, y son representadas por U. Un vector de estas variables podría ser:

$$U^T = [\delta_1 |V_1| \; P_2 \; |V_2| \; P_3 \; Q_3 \quad \ldots\ldots] \qquad (7)$$

(T, establece transpuesto)

Las variables δ, V, P y Q representan el ángulo de potencia, voltaje y potencias activa y reactiva respectivamente.

b. Desde luego que cambios que se realicen en las variables independientes, afectarán a otro tipo de variables, que obviamente se denominan variables dependientes o variables de estado. Se las representa por X. Un posible vector de estado podría ser:

$$X^T = [P_1 \; Q_1 \; \delta_2 \; Q_2 \; \delta_3 \; V_3 \quad \ldots\ldots] \qquad (8)$$

c. Otro tipo de variable, que puede ser identificado en un sistema de potencia, corresponde a las que representan las cargas del sistema. Estas variables que constituyen la razón de la existencia de todo el sistema eléctrico no están bajo control directo. Un vector formado por este tipo de variables, se denomina vector de perturbaciones y es representado como D. Este vector tiene la forma:

$$D^T = [P_{L1} \; Q_{L1} \; P_{L2} \; Q_{L2} \; P_{L3} \; Q_{L3} \quad \ldots\ldots] \qquad (9)$$

Utilizando las definiciones antes anotadas para las variables de control, estado y perturbaciones, conjuntamente con las ecuaciones (6) el modelo del sistema puede escribirse en forma compacta como:

$$F(x,U,D) = 0 \qquad (10)$$

Por razones de operación y diseño, se hace necesario conocer los flujos de potencia en las líneas de transmisión.

Si se aplica las leyes de Kirchoff al modelo de línea, que es conocido, se tiene:

$$S_{ij} = V_i \, (V_i^* - V_j^*) \, Y_{ij} + V_i \, V_i^* \, Y_{iq} \qquad (11)$$

para la línea que une el nodo i con el nodo j.

Para un sistema compuesto por M líneas se pueden terminar 2 x M ecuaciones.

Denominando, W, al vector de flujos de potencia en las líneas y utilizando las definiciones de vector de control y de vector de estado presentados anteriormente, los flujos en las líneas se pueden escribir en forma compacta como:

$$W = H(X,U) \qquad (12)$$

4. FLUJOS DE CARGA:

Las ecuaciones (10) y (12) constituyen el modelo del sistema.

Para determinar el conjunto de características del sistema real se debe determinar el conjunto de variables de estado, Xs, y el vector de flujos, W, que satisfacen el modelo para determinados vectores de control y perturbación, Vo y Do, respectivamente.

Una de las técnicas más eficientes utilizadas para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, es el conocido método de Newton. Este método es un proceso interactivo que se inicia con un supuesto vector de estado, Xo, que se lo asume como solución del sistema, hasta obtener que:

$$|F(Xs,Uo,Do)| \leq \alpha \qquad (13)$$

en la que α, es el valor de una constante positiva tan pequeña como se desee*.

Desarrollando en serie de Taylor el vector F, alrededor del vector inicial Xo, y despreciando los términos en ΔX, ΔU y ΔD cuyo orden sea superior al segundo, se tiene:

$$F(Xs,Uo,Do) = F(Xo,Uo,Do) + \left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{(Xo,Uo,Do)} \Delta X \; \left.\frac{\partial F}{\partial F}\right|_{(Xo,Uo,Do)} \Delta U \; \frac{\partial F}{\partial D}_{(Xo,Uo,Do)} \Delta D \qquad (14)$$

El vector, U, que es el conjunto de variables independientes, refleja las condiciones impuestas para la operación del sistema, (impuestas por razones técnicas, políticas de las empresas, etc.), éstas permanecen constantes y por lo tanto la expresión (14) puede escribirse como:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial X}_{(Xo,Uo,Do)} \Delta X + \frac{\partial F}{\partial D}_{(Xo,Uo,Do)} \Delta D \qquad (15)$$

En la expresión (15) se puede considerar que el vector de perturbaciones, Do, permanece constante durante todo el proceso, ésto transforma a la ecuación (15) en:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial X}_{(Xo,Uo,Do)} \Delta X \qquad (16)$$

de la expresión (16) se determina que:

$$\Delta X = -\left(\left.\frac{\partial F}{\partial X}\right|_{Xo}\right)^{-1} F(Xo,Uo,Do) \qquad (17)$$

Si al vector inicial, Xo, se le suma el vector ΔX, se obtiene el nuevo vector, X_1, como mejor aproximación.

Siguiendo el proceso interactivo, se determina un vector de estado que satisface las condiciones de operación impuestas a través del vector Uo, y satisface además las demandas establecidas por el vector de carga, Do. Desde luego que las condiciones impues-

* o las condiciones lo permitan

tas en el vector Uo, conjuntamente con el vector Do, pueden originar un vector de estado, Xs, inaceptable. Bajo estas condiciones, se debe determinar los cambios en el vector de control, que permitan obtener un estado del sistema aceptable.

La sensitividad del estado del sistema con respecto a todas las variables de control y a todas las variables de perturbaciones, puede obtenerse resolviendo las ecuaciones de flujos de potencia para perturbaciones lineales. Esta ecuación está dada por la expresión (14) modificada únicamente en el punto de operación. Para este caso, debe considerarse el vector de estado para el cual quiere determinarse las sensitividades. Al conjunto de vectores que representan la solución del sistema, o sea (Xs, Uo, Do) determinan un punto de operación, Op.

De acuerdo con lo indicado anteriormente, el vector de perturbaciones D, está fuera del control directo del sistema. La expresión (16) se obtuvo, no sólo asumiendo que los valores del vector D son constantes sino que obviamente se los asume perfectamente conocidos y constantes. Esto no necesariamente es correcto, especialmente si se trata de determinar la operación futura de un sistema y entonces se dispone únicamente de valores proyectados para los elementos del vector D. Con el objeto de introducir la incertidumbre asociada con el vector D, la ecuación (15) puede escribirse como:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial X}\bigg|_{Op} \Delta X + \frac{\partial F}{\partial D}\bigg|_{Op} \Delta D \qquad (17)$$

Donde Op, es un punto de operación previamente determinado, si se asume entonces que el último término de la expresión anterior es diferente de cero, y su valor se lo puede representar por el vector aleatorio, v, la expresión (17) puede escribirse como:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial X}\bigg|_{Op} \Delta X + v \qquad (18)$$

El problema de flujos de carga, se transforma entonces, a términos estocásticos.

En estos términos se debe determinar el mejor estimado para el vector de estado, X, y su covariancia, cov $\hat{X}$, para un vector de control conocido y para un vector como el de "ruido", que incluye la incertidumbre de los valores de D.

Si el valor esperado de la componente aleatoria incluida en las cargas es conocido y se utiliza, por ejemplo, el método de los mínimos cuadrados para estimar el valor de X, e incluyendo como factor de ponderación la covariancia de los componentes de la carga, fácilmente se puede determinar el valor del mejor estimado para el vector de estado, $\hat{X}$.

Por razones especialmente de falta de espacio, no se incluye en este artículo, el tratamiento de ésta y otras variables aleatorias que afectan el proceso de optimización, dejándoles para un siguiente artículo.

5. FLUJOS DE CARGA OPTIMOS:

Del análisis de flujo de carga es posible determinar que existe un número infinito de puntos de operación que permiten satisfacer una demanda dada en un sistema de potencia. Desde luego que un vector de control que permita obtener un vector de estado, dentro de los límites de operación impuestos y que además minimice los costos de generación tiene que ser determinado.

El método más simple, que es utilizado por muchas empresas, es el tener "buen ojo", o sea escoger el vector de control de acuerdo con la experiencia de los ingenieros del sistema. Un método como ese, no garantiza que se está aprovechando plenamente los recursos del sistema.

Un sistema eléctrico compuesto por centrales termoeléctricas con suficiente almacenamiento de combustible y/o por centrales hidro-eléctricas con reservorios suficientemente grandes (regulación por estaciones), puede operar cualquiera de sus centrales a plena carga, cualquier instante y teóricamente por cualquier lapso de tiempo. Opuestamente, aquellos sistemas con centrales hidro-eléctricas con pequeños reservorios (permiten plena carga solamente por pocas horas) deben aprovechar este recurso convenientemente y obviamente cuando es posible. En el primer caso los vectores de control y estado deben determinarse para obtener el menor costo de generación instantáneo. En el segundo caso un período de optimización debe ser determinado y el proceso debe optimizar cada punto, considerándole como parte del período completo.

Con estas consideraciones en mente y asumiendo que los valores de las demandas de las diferentes cargas, se consideran determinísticos, ésto es, que no se consideran asociados con las cargas componentes por incertidumbre y/o riesgo, se puede establecer los siguiente:

El costo total de producción es igual a la suma de los costos de producción de cada unidad. Este es función de las condiciones de operación, o sea función de las variables de control y de estado. Esta relación es generalmente no lineal, o sea:

$$\text{Costo de producción} = C(X,U) \qquad (19)$$

Esta función debe ser minimizada.

Desde luego, los vectores de control y de estado deben satisfacer las ecuaciones no lineales del sistema (para un vector de perturbación dado), ésto es:

$$F(X,U,Do) = 0 \qquad (20)$$

Durante la operación normal del sistema, ciertas restricciones deben aplicarse a las variables de control y a las de estado. Por ejemplo: los voltajes de barras, no pueden exceder o ser inferiores a ciertos valores, o las diferencias de los ángulos de fase entre los voltajes de barras deben estar entre ciertos límites con el fin de preservar la estabilidad del sistema, ésto es:

$$\begin{aligned} Umin &\le U \le Umax \\ Xmin &\le X \le Xmax \end{aligned} \qquad (21)$$

Si se considera que las funciones antes mencionadas son cóncavas para un sistema eléctrico de potencia, entonces el teorema de Kuhn-Tucker puede ser aplicado y éste establece que las condiciones necesarias para obtener un mínimo son:

$$\nabla C^* = 0 \quad \text{(gradiente con respecto a } U, X, \lambda\text{)} \qquad (22)$$

donde C^*, U, X y λ son la función sin restricciones, el vector de control, el vector de estado y el vector de multiplicadores de Lagrange, respectivamente, y además:

$$\begin{aligned} &\mu^T_{max} (U-U_{max}) = 0 \qquad \beta_{max} \ge 0 \text{ y } \beta_{min} \ge 0 \\ &\mu^T_{min} (U_{min}-U) = 0 \\ &\mu_{max} \ge 0 \text{ y } \mu_{min} \ge 0 \\ &\beta^T_{max} (X-X_{max}) = 0 \\ &\beta^T_{min} (X_{min}-X) = 0 \end{aligned} \qquad (23)$$

μ_{max}, μ_{min}, β_{max} y β_{min} son variables duales asociadas con los límites superior e inferior de las variables de control y estado, respectivamente. Si alguna de las variables de control o estado alcanza uno de sus límites, sea el máximo, o el mínimo, entonces se utilizará una de las variables duales.

La función sin restricciones puede escribirse como:

$$C^* = C + \lambda^T F\ (X,U,Do) + \mu^T_{max}\ (U-U_{max}) + \mu^T_{min}\ (U_{min}-U) + \beta^T_{max}\ (X-X_{max}) + \beta^T_{min}\ (X_{min}-X) \qquad (24)$$

Entonces $\nabla C^* = 0$ es:

$$0 = \frac{\partial C^*}{\partial X} = \frac{\partial C}{\partial X} + \lambda T\ \frac{\partial F}{\partial X} + \beta^T_{max}(\mu^T_{min})$$

$$0 = \frac{\partial C^*}{\partial U} = \frac{\partial C}{\partial U} + \lambda T\ \frac{\partial F}{\partial U} + \mu^T_{max}(-\mu^T_{min})$$

$$0 = \frac{\partial C^*}{\partial \lambda T} = F\ (X,U,Do) \qquad y$$

$$\mu_{max}\ (U-U_{max}) = 0 \quad ó \quad \mu_{min}\ (U_{min} - U) = 0$$

$$\beta_{max}\ (X - X_{max}) = 0 \quad ó \quad \beta_{min}\ (X_{min} - X) = 0$$

Este método presenta la dificultad de que no se conoce cual de las desigualdades debe ser incluida en las condiciones necesarias y por lo tanto, la determinación del vector de control óptimo, que de por resultado el mínimo costo de producción, no es fácil de determinar.

Si se analiza, que una de las condiciones necesarias establecidas por el método de Kuhn-Tucker es:

$$0 = \frac{\partial C^*}{\partial \lambda T} = F\ (X,U,Do) \qquad (30)$$

Esta condición no implica sino que los vectores de control y estado deben satisfacer las ecuaciones de potencia del sistema. Las ecuaciones de potencia, de hecho implican, que asociado con un vector de control se encuentra únicamente un vector de estado.

Si durante el proceso de solución, algún valor de las variables de control, está fuera del rango preestablecido, entonces se debe determinar otro vector de control. Durante el proceso de solución se puede determinar si el vector de estado satisface las restricciones impuestas por la ecuación (21), bajo esta condición se puede eliminar de la expresión (24) los términos en

Simultáneamente, cuando se utilizan los valores de potencia para determinar los costos de generación, puede incluirse un procedimiento que force a las variables de control a permanecer dentro de los límites establecidos por las ecuaciones (21). De esta manera, los términos en de la ecuación (24) pueden también ser eliminados

Bajo estas consideraciones la ecuación de costo, sujeta a minimización se transforma en:

$$C^* = C + \lambda^T\ F\ (X,U,Do) \qquad (31)$$

Las condiciones necesarias para determinar el vector de control óptimo se reducen entonces a:

$$0 = \frac{\partial C^*}{\partial X} = \frac{\partial C}{\partial X} + \lambda^T\ \frac{\partial F}{\partial X} \qquad (32)$$

$$0 = \frac{\partial C^*}{\partial U} = \frac{\partial C}{\partial U} + \lambda^T\ \frac{\partial F}{\partial U} \qquad (33)$$

$$0 = F\ (X,U,Do) \qquad (34)$$

Las derivadas del costo de generación con respecto a las variables de control o de estado son iguales a cero, excepto cuando la variable de estado o control considerada es la potencia de la propia unidad de generación. Entonces en las ecuaciones (32) y (33) si los primeros términos son iguales a cero, entonces los segundos términos también deben ser cero, ésto implica que los correspondientes multiplicadores de Lagrange, valores de λ_j de esas ecuaciones, tienen también que ser cero.

Despreciando todos los componentes de los vectores iguales a cero, las condiciones para el vector óptimo de control se reducen a:

$$0 = \frac{\partial C}{\partial Pg} + \lambda^T\ \frac{\partial F}{\partial Pg} \qquad (35)$$

$$0 = F\ (X,U,Do) \qquad (36)$$

Donde los componentes $\partial C/\partial U$ y $\partial C/\partial X$ han sido intercaladas en $\partial C/\partial Pg$.

Para poder evaluar fácilmente la ecuación (35), las ecuaciones del sistema deben escribirse en función de las potencias generadas.

El método descrito anteriormente, fácilmente permite la obtención del vector de control que lleva a obtener una condición de mínimos costos de producción, para un valor de demanda dado.

Los resultados de aplicar este método a un sistema simple de 8 barras, se presenta en el apéndice A-1.

El método descrito anteriormente, permite obtener el vector de control que a su vez lleva a los costos de generación mínimos para un valor de demanda dado. Considerando este valor como constante durante un período razonable, se puede determinar un plan de operación que lleve a las condiciones de mínimos costos de generación para un período dado y que considere variaciones de demandas.

Mediante este método, se optimiza, considerando cada valor de demanda totalmente independiente de los demás y asumiendo además que toda la capacidad de generación está disponible. Esto puede ser teóricamente aceptable para sistemas donde no existen limitaciones de "energía"

Un sistema constituido por centrales hidráulicas con pequeños reservorios, deben acumular energía y entregarla al sistema de tal manera de obtener máxima utilidad. Durante el período de optimización, debe considerarse, el proceso de "llenado" y de "vaciado" de los reservorios. De esta manera se busca obtener mínimos costos de generación para satisfacer una curva de demanda dada para un cierto período, ésto es:

$$\text{Costos de Producción} = C\ (X,U,t) \qquad (36)$$

Esta función tiene que ser minimizada para un período T. Entonces, la expresión a ser optimizada es la de costos de producción de energía para el período, T. Esto es:

$$Ce = \int_0^T C\ (X,U,t)\ dt \qquad (37)$$

Además las siguientes restricciones deben observarse:

$$F\ (X,U,D) \overset{\forall t}{=} 0 \tag{38}$$

$$U_{min} \leq U \leq U_{max} \tag{39}$$

$$X_{min} \leq X \leq X_{max} \tag{40}$$

Los correspondientes valores de X y U que establecen las potencias para las estaciones hidráulicas deben satisfacer además las siguientes ecuaciones:

$$X \text{ ó } U = P\ (t) = \mu Hs(t) + \mu h(t)\ s(t) \tag{41}$$

$$h(t) = h(o) + K \int_{o}^{T} [e(t) - s(t)]\ dt \tag{42}$$

desde luego que:

$$0 \leq P_H(t) \leq P_{max} \tag{43}$$

$$0 \leq h(t) \leq h_{max} \tag{44}$$

$$0 \leq s(t) \leq s_{max} \tag{45}$$

Para los que:

H = altura fija; h (t) = altura variable en el reservorio
e (t) = caudal disponible, s (t) = volúmen de descarga

Además para asegurarse la operación cíclica del reservorio

$$h\ (0) = h\ (T) \tag{46}$$

Estas ecuaciones describen un problema de ruta óptima sujeto a un conjunto de restricciones representadas por las igualdades y las desigualdades anotadas.

Un problema con éste, desde luego, no puede ser considerado trivial.

En el apéndice A-2, se presenta los resultados obtenidos en el mismo sistema de A-1, pero donde una de las centrales se la ha considerado hidráulica. Sólo se presenta el plan de operación de la central, para una supuesta curva de demanda y para un supuesto caudal disponible.

En lugar de determinar una solución matemática de tipo general, o incluir las posibles simplificaciones que permiten llegar a determinar la solución deseada, se presenta un ejemplo sencillo en el cual se aplica el cálculo de variaciones en la determinación de la ruta óptima.

6. EJEMPLO:

Considérese un pequeños sistema eléctrico compuesto para una central térmica y una central hidráulica. Para este sistema se debe determinar un programa de operación de la central hidráulica, de tal manera que los costos de producción en un determinado período de tiempo sean mínimos.

$P_H(t)$ es la potencia entregada por la central hidráulica.
$P_T(t)$ es la potencia entregada por la central térmica.
$l(t)$ es la curva de demanda del sistema.
$P_p(t)$ es la pérdida de potencia por transmisión.

Utilizando esta simbología, se puede escribir que:

$$0 \quad P_H(t) \quad P_T(t) - P_p(t) - l\ (t)$$

Si se asume que el costo del combustible para general P_T es igual a $C(P_T)$, entonces la función a optimizar es:

$$\text{Costo de la energía} = \int_{o}^{T} C(P_T)\ dt \tag{47}$$

sujeta a las restricciones:

$$l(t) = P_H(t) + P_T(t) - P_p(t) \tag{48}$$

$$h'(t) = e(t) - s(t) \tag{49}$$

Con el objeto de simplificar el cálculo, se asume que la altura cosntante, H, es igual a cero, que es cero el costo de "combustible" en la estación hidráulica y que no existen restricciones de desigualdades.

En estas condiciones, la función a optimizar sin restricciones puede escribirse como:

$$C^* = C(P_T) + \lambda_1(t) + P_p(t) + P_H(t) + P_T(t)$$
$$\lambda_2\ h' - e(t) + s(t)$$

Existen dos multiplicadores de Lagrange, ambas funciones del tiempo.

Con el objeto de determinar las condiciones necesarias para el mínimo, las ecuaciones de Euler - Lagrange deben aplicarse. Estas ecuaciones tienen la forma:

$$\frac{\partial C^*}{\partial W} - \frac{d}{dt}\ \frac{\partial C^*}{\partial W} = 0$$

Donde W se define como un vector compuesto por las variables en C*, para este caso y aplicando las ecuaciones con respecto a P_T (t), h (t) y s(t) se obtiene:

$$\frac{\partial C}{\partial P_T} - \lambda_1 \left(1 - \frac{P_p(t) - P_H(t)}{\partial P_T(t)} \right) = 0$$

$$- \lambda_1 \left(1 - \frac{\partial P_p(t)}{\partial P_p(t)} \right) \frac{\partial P_H(t)}{\partial\ s(t)} + \lambda_2 = 0$$

$$- l(t) \left(1 - \frac{\partial P_p(t)}{\partial P_p(t)} \right) \frac{\partial P_H(t)}{\partial\ h(t)} - \frac{d}{dt} = 0$$

La solución del sitema de las 5 ecuaciones, conduce a la determinación del mínimo buscado. Desde luego, que se debe determar suficientes condiciones iniciales para poder resolver las dos ecuaciones diferenciales de primer orden que forman parte del sistema.

Como se comprenderá una solución de tipo analítico que incluya todos los casos aparte de ser poco práctico, es sumamente difícil de determinar. Para ésto piensese solamente en las diferentes curvas de demanda, l (t), o en las diferentes funciones de costo de cada unidad $C(P_T$ (t), que deberían ser considerados.

APENDICE A

Los resultados que se presentan en este apéndice, se obtuvieron mendiante soluciones numéricas y los programas se corrieron en un Computador IBM 370/148. El Lenguaje Fuente utilizado es FORTRAN IV.

Un sistema simple, compuesto por 8 barras, 4 estaciones de generación, 14 líneas de transmisión, y 3 barras con carga se utilizó como ejemplo.

Se asume funciones no lineales para los costos de generación.

A-1. La Tabla A-1, presenta los resultados de un estudio de flujo de carga para este sistema. Se observa que el costo de generación para el punto de operación asumido es de 183.09 unidades de costo.

Al mismo sistema, se la aplica el método de optimización y se fija las restricciones como:

Módulo del voltaje en cualquier barra.

$$0.95 \leq |V| \leq 1.05 \qquad \text{(A-1)}$$

Restricciones de los ángulos de potencia.

$$\delta \leq 20^{o} \qquad \text{(A-2)}$$

y las potencias nominales de cada central.

La Tabla A-2, presenta el programa de operación que lleva al costo mínimo, en este caso se observa que el programa de operación determinado bajo las restricciones impuestas, lleva a un costo de operación de 173,65 unidades de costo, o sea, 5 o/o inferior al inicialmente presentado. Para la determinación de estos valores se estableció las siguientes tolerancias:

Error Máximo de voltaje 0.1o/o
Error Máximo de potencia total 0.1o/o
Error Máximo por unidad de generación 1.0o/o

La tendencia en los costos no pudo ser establecido ya que los multiplicadores de Lagrange se determinaron por búsqueda binaria.

A-2. A la estación de generación ubicada en la barra 3, se la asume hidráulica y de las siguientes características:

Altura neta: 100 metros
Altura variable: 5 metros (reservorio)
Capacidad reservorio: 100.000 m^3
Potencia nominal: 12 MW

Además se asume una curva de demanda y una curva de caudal disponible.

De aplicar el método descrito en este artículo, se determinó el esquema de operación de esta central, para un período de 24 horas.

El programa de operación, así determinando, aparece en la Tabla A-3.

A.1 Flujos de Potencia
Gauss-Seidel Iterative Technique Converge en 17 Iteraciones

Barra	Voltaje		Magnitud	Delta (degs)	Potencia Real (MW)	Potencia Reactiva (MVAR)	Generación (MVA)	
1	1.0000	0.0000	1.0000	0.00000	10.6341	2.6099	10.6341	2.6099
2	0.9484	-0.3169	1.0000	-18.47650	-20.0000	6.8160		
3	0.9993	0.0367	1.0000	2.10108	12.0000	2.7362	12.0000	2.7362
4	0.9642	-0.2653	1.0000	-15.38575	-20.0000	7.0700		
5	1.0332	0.1221	1.0404	6.73934	25.0000	10.0000	25.0000	10.0000
6	0.9556	-0.0550	0.9472	-3.29646	-30.0000	-5.0000		
7	0.9783	0.0512	0.9796	2.99540	25.0000	0.0000	25.0000	0.0000
8	0.9753	-0.0140	0.9754	-0.82159	0.0000	-5.0000		

Costo de Generación: 183.09 U.C.

A-2 Punto de Operación Optimo (costo de generación)

Barra	Voltaje		Magnitud	Angulo (deg)	Potencia Real (MW)	Potencia Reactiva (MVAR)
1	1.0000	0.0000	1.0000	0.00000	13.1998	2.0610
2	0.9492	-0.3147	1.0000	-18.34267	-20.0000	6.9266
3	0.9948	0.1021	1.0000	5.86172	20.2635	2.8312
4	0.9698	-0.2437	1.0000	-14.10531	-20.0000	7.0608
5	1.0379	0.0826	1.0412	4.55260	19.5953	10.0000
6	0.9545	-0.0720	0.9572	-4.31180	-30.0000	-5.0000
7	0.9774	0.0326	0.9780	1.91273	19.5509	0.0000
8	0.9762	0.0008	0.9762	0.04893	0.0000	05.0000

Costo de Generación: 173.65 U.C.

Tabla A-3 Programa de Operación

Intervalo	Tiempo (Horas)	Potencia (MW)
1	1.00	8.40
2	1.50	8.40
3	2.00	7.74
4	2.50	4.94
5	3.00	2.84
6	3.50	1.44
7	4.00	0.00
8	4.50	0.00
9	5.00	0.00
10	5.50	0.00
11	6.00	0.00
12	6.50	2.14
13	7.00	4.24
14	7.50	7.74
15	8.00	8.08
16	8.50	7.64
17	9.00	7.94
18	9.50	7.57
19	10.00	7.72
20	10.50	7.57
21	11.00	7.50
22	11.50	7.53
23	12.00	7.53
24	12.50	7.46
25	13.00	7.46
26	13.50	7.38
27	14.00	7.30
28	14.50	7.14
29	15.00	6.98
30	15.50	6.98
31	16.00	6.98
32	16.50	6.85
33	17.00	6.76
34	17.50	6.69
35	18.00	6.63
36	18.50	6.63
37	19.00	12.00
38	19.50	12.00
39	20.00	12.00
40	20.50	6.86
41	21.00	6.79
42	21.50	6.65
43	22.00	6.58
44	22.50	6.65
45	23.00	6.72
46	23.50	6.72
47	24.00	6.72
48	24.50	6.72

Operación del Reservorio

Recuperación de Energía cuando la demanda del sistema inferior a 13.26 MW.

Abriendo desde: 1.74 a 3.66 Horas

Cerrando desde: 6.12 a 7.62 Horas

Uso de la energía del Reservorio desde 18.55 a 20.03 Horas

REFERENCIAS

1.- Elgard, Olle, **"Electric Energy System Theory"**. McGraw Hill International, 1971.

2.- Rand, Elassi and A. Keyhami. "A Simulation Study in Recursive Load Modeling Techniques" **IEEE Paper No. FA7-11 45.**

3.- De Mello, J. and R. J. Mills. "Automatic Generation Control". **IEEE Paper 772487-7**. February 1972.

4.- El-Abiad, A.H. and A. Keyhami. "Real Time Modeling Techniques for AGC." **IEEE Paper A76458-0**. 1976.

5.- Anderson, J. H. and U.M. Raina. "Optimal AGC with Economic Allocation." University of Waterloo. 1975.

6.- Aboytes, Fernando. "Stochastic Contingency Analysis," **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems.** PAS No. 93. May/June. 1974.

7.- Happ, H.H. "Optimal Power Dispatch," **Transactions on Power Apparatus and Systems.** PAS No. 93. May/June 1974.

8.- IEEE Committee. "Computer Controlled Power Systems" **IEEE Spectrum** May 1965.

9.- Sullivan, R. L. **Power System Planning,** McGraw-Hill International, 1977.

10.- Sasson, Albert. "Nonlinear Programming Solution for Load Flow Minimum loss and Economic Dispatch. **IEEE Transactions.** PAS 88 1969. pp. 3999-408.

11.- Tinney, W. and Peschon Lohn. "Optimun Control of Reactive Power Flow." **IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems.** PAS 87 1968. pp. 40-48.

12.- Alsac, D. and B. Stott. "Optimal Load Flow Steady-State Security." **IEEE Transactions.** Paper T73484-3. 1973.

13.- Carynen, G. C. and S. Aogoruwal. "Toward a Mathematical Theory of Modeling." University of California. Lawrence Livermore Laboratory. 1979.

14.- Lowe, Mike. **Nonlinear Programming: Augmented Lagrange Techniques for Constrained Minimization.** Montana State University. Ph.D. tesis. 1974.

15.- Weiman, Gottfired. **Introduction to Optimization Theory,** Prentice Hall International. 1973.

16.- Rodas, Ramiro. **Estudio de una linea de Transmisión mediante un modelo.** EPN Tesis de Ingeniero 1970.

17.- El-Abiad, Ahmed. **Computer Methods in Power System Analysis.** McGraw Hill. 1968.

18.- Arvonitides, Nicholas and Jack Rosing. "Composite Representation of a Multireservoir Hydraulic Power System." **IEEE Transactions.** PAS Vol. 89 No. 2. February 1970.

19.- Arvonitides, Nicholas and Jack Rosing. "Optimal Operation of Multireservoir System Using a Composite Representation." **IEEE Transactions.** PAS Vol. 89 No. 2. February 1970

20.- Domme, Herman and William Tinney. "Optimal Power Flow Solution" **IEEE Transactions.** PAS Vol. 87 No. 10. October 1968.

21.- Rodas, Ramiro. **"Stochastic Load Flows"** Directed Study. Summer 1979. Vol. I.

22.- Bryson, Arthur, and Yo-Chi Ho. **Applied Optimal Control.** Halsted Press. 1975.

23.- Melsa, James. **An Introduction to Probability and Stochastic Processes.** Prentice Hall. EE Series. 1973.

24.- Golfied, Byron. **Introduction to Optimization Theory.** Prentice Hall. 1974.

25.- Dixon, L. C. Nonlinear Optimization. Crane Russok and Company. 1972.

26.- Prof. P. Mann. "Power System Planning and Resources." Fall 1978. Class notes.

27.- J. Peshon & W. Tinney. "Sensitivity in Power Systems." **IEEE PAS-87** Ec. 1968.

28.- Poshley, Rw. "Central Computer Control and Protection functions." **IEEE** PAS- 97 January/February 1978.