

Gabriel Arguello R.
CENTRO NACIONAL DE CONTROL DE ENERGIA
INECEL
IEEE - SECCION ECUADOR

RESUMEN

El flujo de potencia es la solución de estado estacionario de un sistema de potencia bajo ciertas condiciones preestablecidas de generación, carga y topología de red; proporcionando los niveles de tensión de todas las barras del sistema, tanto en magnitud como ángulo, el flujo de potencia por todos los elementos de la red y sus pérdidas.

La solución se ajusta exactamente a las condiciones preestablecidas de generación y carga, como estos valores son obtenidos en base a predicciones, resulta que la solución es buena en tanto en cuanto los datos sean buenos. Como evidentemente siempre hay incertidumbre en la predicción, es obvio que la solución contiene incertidumbre y no puede tomarse como exacta.

En el presente artículo, se presenta la formulación del flujo de potencia tomando en cuenta la incertidumbre en la predicción, resultado de lo cual las variables del problema son variables aleatorias, de las cuales no sólo se obtiene sus valores esperados sino una medida de su dispersión alrededor del valor esperado.

El método está basado en la teoría de estimación por mínimos cuadrados con cero grados de libertad, siendo por tanto imposible el filtrar errores de predicción. Se presentan resultados para un ejemplo sencillo.

INTRODUCCION

El flujo de potencia ha sido y lo sigue siendo, la herramienta fundamental para planeamiento, diseño y operación de sistemas eléctricos de potencia. La formulación del problema es determinística, por tanto los resultados se ajustan exactamente a los datos de entrada. Es práctica común el analizar muchos casos de flujos de potencia para tomar en cuenta errores que pueden darse en la predicción de carga y generación, resultado de lo cual se obtienen posibles rangos de variación de las variables de estado luego de un largo proceso de análisis, el cual además debe ser metódico y organizado. Uno de estos métodos organizados de análisis lo constituye la simulación de Monte Carlo.

El flujo de potencia estocástico, procesa la incertidumbre de los valores pronosticados dando como resultado los valores esperados más probables de las variables de estado así como sus rangos de variación alrededor de su valor esperado en base a límites de confianza. Los valores esperados para cero grados de libertad coinciden con la solución determinística del problema. Por tanto el flujo de potencia estocástico parte de una solución convencional de flujos, debiendo calcularse además las variaciones de las variables alrededor de su solución esperada en base a la incertidumbre de los datos de entrada. Un sólo caso de flujo estocástico, adecuadamente formulado, equivale a muchos casos de flujos de potencia determinísticos.

Cero grados de libertad significa que con las variables de entrada o datos se puede conformar un sistema de ecuaciones cuyo número coincide con el número

de incógnitas, que es el caso cuando se establecen los datos para un estudio de flujo convencional ya que no se conoce de antemano cual es el flujo de potencia por determinadas líneas o la generación de la barra oscilante, etc., esto hace imposible la detección y peor la identificación de posibles errores en las variables de entrada; en cambio es posible tomar en cuenta la existencia de errores en las variables de entrada y conocer su efecto en las variables de salida, lo cual es ya muy importante, y este es el objetivo del flujo estocástico o probabilístico. En aplicaciones en tiempo real para operación de sistemas eléctricos de potencia a través de un centro de control; es posible medir, además de las variables de entrada para un flujo de potencia, los flujos por líneas, voltajes de barra, etc. con lo cual es posible conformar un sistema de ecuaciones sobredeterminado, es decir, más ecuaciones (m) que incógnitas (n) y por tanto con m-n grados de libertad, en este caso no sólo que es posible encontrar la mejor estimación de las variables de estado, sino detectar e identificar errores de medición, este proceso se conoce como estimación de estado, del cual el flujo de potencia estocástico es un caso muy particular. {6}, {7}.

El flujo de potencia estocástico ha sido entonces, formulado en base a la teoría de estimación {1}, mediante la cual se demuestra que para cero grados de libertad, la solución más probable o esperada coincide con la solución determinística, pero además es también posible analizar la estadística de las variables de salida en base a la estadística de las variables de entrada y determinar entonces un rango probable de resultados asignando límites de confianza deseados.

1. FORMULACION LINEAL DEL FLUJO DE POTENCIA ESTOCASTICO

El flujo de potencia es un problema no lineal, el cual puede linealizarse mediante la expansión en series de Taylor de las ecuaciones de flujo, la solución se obtiene mediante un proceso iterativo de solución de ecuaciones lineales. {5}.

Por esta razón analizaremos primero una formulación lineal del flujo de potencia estocástico y luego el no lineal que se transforma en un conjunto de problemas lineales.

La formulación está basada en los principios estadísticos de estimación por mínimos cuadrados. Consideremos el caso que el flujo de potencia puede describirse matemáticamente como un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\bar{y} = A\bar{x} \tag{1}$$

donde:

- A es una matriz de coeficientes constantes
- \bar{y} es el vector de valores observados o pronosticados
- \bar{x} es el vector de variables de estado

La ecuación (1) es la formulación determinística de flujos en la que se asume que los valores observados son precisos y si A es una matriz cuadrada entonces \bar{x} se ajusta exactamente a \bar{y} . Si consideramos que \bar{y} contiene un vector $\bar{\epsilon}$ de ruido o error entonces (1) se transforma en:

$$\bar{y} = A\bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (2)$$

El objetivo es encontrar el mejor estimativo de \bar{x} dado el vector \bar{y} . Para encontrar el mejor estimativo de \bar{x} es conveniente primero asumir que el valor esperado de los errores sea cero, o sea:

$$E\{\bar{\epsilon}\} = \bar{0} \quad (3)$$

Esta ecuación implica que los errores están aleatoriamente distribuidos alrededor de cero, pero es obvio que los errores pueden tener un valor medio o esperado de cero así existan errores muy grandes positivos o negativos en las observaciones \bar{y} . Por lo tanto, siendo las observaciones de diferente calidad o precisión, la matriz de covarianza de los errores $\bar{\epsilon}$ da la indicación de la dispersión de los errores alrededor del valor medio, y está definido por:

$$V = E\{\bar{\epsilon}, \bar{\epsilon}^t\} \quad (4)$$

La teoría de estimación establece que el mejor estimativo de \bar{x} de la ecuación (2) con las consideraciones dadas por las ecuaciones (3) y (4) se obtiene al minimizar la sumatoria de los cuadrados de los errores ponderados por sus varianzas, o sea:

$$\min J(\bar{x}) = \bar{\epsilon}^t V^{-1} \bar{\epsilon} - (\bar{y} - A\bar{x})^t V^{-1} (\bar{y} - A\bar{x}) \quad (5)$$

J(\bar{x}) se denomina función de error y es un valor escalar, con lo que (5) puede transformarse en:

$$J(\bar{x}) = \bar{y}^t V^{-1} \bar{y} - 2\bar{x}^t A^t V^{-1} \bar{y} + \bar{x}^t A^t V^{-1} A \bar{x} \quad (6)$$

J(\bar{x}) se minimiza cuando $\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = 0$, derivando (6) con

con respecto a \bar{x} se obtiene que:

$$\frac{\partial J(\bar{x})}{\partial \bar{x}} = -2 A^t V^{-1} \bar{y} + 2 A^t V^{-1} A \bar{x} = 0$$

donde: $A^t V^{-1} A \bar{x} = A^t V^{-1} \bar{y}$ (7)

designando como \hat{x} a la mejor estimación que minimiza los errores $\bar{\epsilon}$:

$$\hat{x} = (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{y} \quad (8)$$

Como un flujo de potencia se formula en base a que con las observaciones \bar{y} se conforma un sistema de ecuaciones con igual número de incógnitas \bar{x} es decir con cero grados de libertad, resulta que A es una matriz cuadrada, y es obvio de (7) y (8) que la mejor estimación de \bar{x} se reduce a:

$$\hat{x} = A^{-1} \bar{y} \quad (9)$$

De la ecuación (9) se deduce que se obtiene el mismo resultado de la formulación determinística dada por (1); por lo tanto la mejor estimación de la formulación estocástica coincide con la determinística ya que para cero grados de libertad, las matrices que involucran la estadística de los errores de las observaciones se eliminan y por tanto es imposible filtrar errores. Como veremos adelante, al efectuar

el análisis estadístico de los valores estimados, se comprobará que los valores calculados de \hat{x} se ajustan exactamente a las observaciones, siendo entonces la diferencia entre flujo estocástico y determinístico el análisis estadístico posterior que se puede efectuar en las variables de estado \hat{x} en base a la estadística de los errores de las observaciones dadas por la matriz de varianzas V conocida. Además, en este caso particular, de cero grados de libertad, se concluye que $J(\hat{x}) = 0$.

2. ANALISIS ESTADISTICO

A continuación se efectuará un riguroso análisis estadístico tanto de las observaciones como de la estimación de \hat{x} con el fin de obtener conclusiones sobre la formulación estocástica de flujos (2). Se partirá de las ecuaciones generales de estimación dadas por las ecuaciones (2) a (8) y luego se particularizará para cero grados de libertad.

2.1 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE \hat{x}

Designando al valor esperado de \hat{x} como $E\{\hat{x}\}$, tenemos que de (2) y (8), \hat{x} puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} (A\bar{x} + \bar{\epsilon}) \\ \hat{x} &= (A^t V^{-1} A)^{-1} (A^t V^{-1} A) \bar{x} + (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{\epsilon} \\ \hat{x} &= \bar{x} + (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{\epsilon} \\ E\{\hat{x}\} &= E\{\bar{x} + (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1} \bar{\epsilon}\} \end{aligned}$$

como $(A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1}$ es una matriz constante M

$$E\{\hat{x}\} = E\{\bar{x} + M\bar{\epsilon}\} = E\{\bar{x}\} + ME\{\bar{\epsilon}\}$$

De la ecuación (3) se partió que el valor esperado de los errores es cero y que además de la ec (2) resulta que \bar{x} es el valor verdadero, entonces:

$$E\{\hat{x}\} = E\{\bar{x}\} = \bar{x} \quad (10)$$

Por tanto el valor esperado de \hat{x} es el vector de estado \bar{x} verdadero que es precisamente lo que tratamos de estimar. Cuando se cumple esta condición se dice que el estimador es sin desviación ("unbiased").

La varianza de las variables de estado es el valor esperado de las desviaciones cuadráticas de los valores estimados con respecto a sus valores medios, dando como resultado una matriz denominada matriz de covarianza de \hat{x} .

$$\text{cov.}(\hat{x}) = E\{(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t\}$$

De las relaciones anteriores se tiene que

$$\hat{x} = \bar{x} + M\bar{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} \text{por tanto } \text{cov}(\hat{x}) &= E\{(\bar{x} + M\bar{\epsilon} - \bar{x})(\bar{x} + M\bar{\epsilon} - \bar{x})^t\} \\ \text{cov}(\hat{x}) &= E\{(M\bar{\epsilon})(M\bar{\epsilon})^t\} = E\{M\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}^t M^t\} \\ \text{cov}(\hat{x}) &= ME\{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}^t\}M^t \end{aligned}$$

Pero de la ec (4) se tiene que $E\{\bar{\epsilon}\bar{\epsilon}^t\}$ es la matriz de varianzas V de los errores de las observaciones y, matriz que es conocida y reemplazamos el valor

$M = (A^t V^{-1} A)^{-1} A^t V^{-1}$ obtenemos finalmente que:

$$\text{cov}(\hat{x}) = (A^t V^{-1} A)^{-1} \quad (11)$$

La expresión (11) es muy importante en el análisis de flujo estocástico pues da las desviaciones que tendrían los resultados de los valores esperados de las variables de estado ante la incertidumbre de las variables de entrada dada por V. Para cero grados de libertad la ecuación (11) se mantiene.

2.2 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE \hat{y}

Si \hat{x} es la mejor estimación del sistema de ecuaciones $\hat{y} = A\hat{x} + \hat{\epsilon}$, entonces el valor estimado o calculado de las observaciones será:

$$\hat{y} = A\hat{x} \quad (12)$$

Entonces, el valor esperado de \hat{y} es:

$$E\{\hat{y}\} = E\{A\hat{x}\} = AE\{\hat{x}\} = A\bar{x}$$

ahora: $E\{\bar{y}\} = E\{A\bar{x} + \bar{\epsilon}\} = AE\{\bar{x}\} + E\{\bar{\epsilon}\} = A\bar{x}$

por tanto: $E\{\hat{y}\} = E\{\bar{y}\} = A\bar{x} = \bar{y}_t$ (13)

Siendo \bar{y}_t el valor verdadero de las observaciones y \bar{x} el valor verdadero del estado como ya se estableció antes.

De igual manera la matriz de covarianza de los valores estimados de las observaciones es:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{y}) &= E\{(\hat{y} - \bar{y}_t)(\hat{y} - \bar{y}_t)^t\} \\ &= E\{(A\hat{x} - A\bar{x})(A\hat{x} - A\bar{x})^t\} \\ &= E\{A(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t A^t\} \\ &= AE\{(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t\} A^t \end{aligned}$$

$$\text{pero } E\{(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t\} = \text{cov}(\hat{x}) = (A^t V^{-1} A)^{-1}$$

$$\text{por tanto: } \text{cov}(\hat{y}) = A(A^t V^{-1} A)^{-1} A^t \quad (14)$$

para cero grados de libertad en la que A es cuadrada y simétrica (14) se reduce a:

$$\text{cov}(\hat{y}) = V \quad (15)$$

Lo que significa que para cero grados de libertad no es posible obtener un valor de \hat{y} y más cercano a \bar{y}_t que el valor original de la observación \bar{y} ya que la varianza de \hat{y} y \bar{y} es la misma.

2.3 VALOR ESPERADO Y VARIANZA DE LOS ERRORES $\hat{\epsilon}$

De las ecuaciones $\bar{y} = A\bar{x} + \bar{\epsilon}$ y $\hat{y} = A\hat{x}$ tenemos que el valor calculado de los errores es:

$$\hat{\epsilon} = \bar{y} - \hat{y}$$

$$E\{\hat{\epsilon}\} = E\{\bar{y} - \hat{y}\} = E\{\bar{y}\} - E\{\hat{y}\} - \bar{y}_t - \bar{y}_t = \bar{\epsilon}_t = \bar{0}$$

lo cual es obvio por cuanto es una de las condiciones de partida para la formulación del problema, el asumir que el valor medio de los errores de las observaciones es cero y por tanto de los calculados.

La matriz de covarianza de los errores calculados es:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\epsilon}) &= E\{(\hat{\epsilon} - \bar{0})(\hat{\epsilon} - \bar{0})^t\} \\ &= E\{(\hat{\epsilon} - \bar{0})(\hat{\epsilon} - \bar{0})^t\} = E\{\hat{\epsilon} \hat{\epsilon}^t\} \\ &= E\{(A(\bar{x} - \hat{x}) + \bar{\epsilon})(A(\bar{x} - \hat{x}) + \bar{\epsilon})^t\} \end{aligned}$$

lo que se reduce a:

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{\epsilon}) &= AE\{(\bar{x} - \hat{x})(\bar{x} - \hat{x})^t\} A^t + E\{\bar{\epsilon} \bar{\epsilon}^t\} \\ \text{pero } E\{(\bar{x} - \hat{x})(\bar{x} - \hat{x})^t\} &= -\text{cov}(\hat{x}) = -(A^t V^{-1} A)^{-1} \end{aligned}$$

$$y: E\{\bar{\epsilon} \bar{\epsilon}^t\} = V$$

por tanto:

$$\text{cov}(\hat{\epsilon}) = V - A(A^t V^{-1} A)^{-1} A^t \quad (16)$$

o lo que es lo mismo: $\text{cov}(\hat{\epsilon}) = V - \text{cov}(\hat{y})$

Para cero grados de libertad hemos establecido con la ec (15) que $\text{cov}(\hat{y}) = V$ por tanto en este caso particular:

$$\text{cov}(\hat{\epsilon}) = \bar{0} \quad (17)$$

Esto significa que para igual número de ecuaciones que de incógnitas simplemente $\hat{y} = \bar{y}$ como así lo establecen las ecuaciones (9) y (12). Por tanto este análisis de errores para flujo estocástico no aporta nada, demostrando una vez más que es imposible el filtrado de errores para cero grados de libertad. Sin embargo la ec (16) es de extraordinaria importancia en estimación de estado {2}.

2.4 VALOR ESPERADO DE LA FUNCION DE ERROR $J(\hat{x})$

Por no ser de interés para flujo de potencia estocástico no se hará la demostración sobre el valor esperado de la función de error $J(\hat{x}) = \bar{0}$ y por tanto su valor esperado es cero, simplemente estableceremos que en el caso general de m observaciones y n variables de estado:

$$J(\hat{x}) = (\bar{y} - A\hat{x})^t V^{-1} (\bar{y} - A\hat{x})$$

$$\text{y que } E\{J(\hat{x})\} = m - n \quad (18)$$

lo que significa que el valor esperado de $J(\hat{x})$ coincide con el número de grados de libertad. La distribución chi-cuadrado sigue la misma propiedad, por tanto la función de error evaluada en el punto de solución (\hat{x}) sigue la distribución chi-cuadrado. También en estimación de estado la ec (18) es de mucha importancia.

Para cero grados de libertad en que m=n, entonces:

$$E\{J(\hat{x})\} = \bar{0} \quad (19)$$

lo que significa que la solución determinística del flujo de potencia coincide con la mejor estimación de la estocástica, ya que también $J(\hat{x}) = 0$

2.5 VALORES ESPERADOS Y VARIANZA DE LAS VARIABLES DE SALIDA DEPENDIENTES \hat{z}

Hasta aquí se ha analizado completamente la estadística de las variables observadas o de entrada \bar{y} y la de las de salida o de estado \bar{x} que en un flujo de potencia son los voltajes nodales en magnitud y ángulo.

Las variables de salida dependientes \hat{z} son todos aquellos valores que se calculan una vez obtenido el estado \bar{x} , el vector de variables de salida dependientes \hat{z} son entonces los flujos de potencia por las líneas y la potencia reactiva en los generadores. La barra oscilante requiere una consideración especial y se la analizará más adelante.

Continuando con el modelo lineal, consideremos que las variables de salida \hat{z} son funciones lineales del estado \bar{x} y que puede expresarse de la forma:

$$\hat{z} = D \cdot \bar{x} \quad (20)$$

Si \hat{x} es la mejor estimación, entonces los valores calculados de \hat{z} son:

$$\hat{z} = D \cdot \hat{x}$$

el valor esperado de \hat{z} es:

$$E\{\hat{z}\} = D \cdot E\{\hat{x}\} = D \cdot \bar{x} = \bar{z}_t \quad (21)$$

es decir siendo \bar{x} el valor verdadero, los valores esperados de \hat{z} son aquellos obtenidos de la solución determinística.

La matriz de covarianza de \hat{z} es entonces

$$\begin{aligned} \text{cov}(\hat{z}) &= E\{(z - \bar{z}_t)(z - \bar{z}_t)^t\} \\ &= E\{D(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t D^t\} \\ &= D \cdot E\{(\hat{x} - \bar{x})(\hat{x} - \bar{x})^t\} D^t \\ &= D \cdot \text{cov}(\hat{x}) \cdot D^t \\ \text{cov}(\hat{z}) &= D(A^t V^{-1} A)^{-1} D^t \quad (22) \end{aligned}$$

Para cero grados de libertad, la ec (22) se mantiene por tanto es posible calcular la dispersión de las variables de salida dependientes alrededor de su valor esperado.

2.6 INTERVALOS DE CONFIANZA

En todo el análisis estadístico desarrollado hasta aquí, se ha establecido que, dado el vector \bar{y} de observaciones y una matriz de varianzas V de las observaciones, las relaciones de interés para flujo de potencia estocástico son:

$$\hat{x} = A^{-1} \bar{y}$$

$$\hat{z} = D \cdot \hat{x}$$

$$\text{cov}(\hat{x}) = (A^t V^{-1} A)^{-1}$$

$$\text{cov}(\hat{z}) = D(A^t V^{-1} A)^{-1} D^t$$

Las dos primeras relaciones establecen que la mejor estimación de las variables del flujo de potencia son las determinísticas o sea aquellas obtenidas de un flujo convencional, la diferencia radica en las dos relaciones últimas, con las cuales es posible encontrar la dispersión de las variables de salida en función de la incertidumbre de las variables de entrada.

Ahora es conveniente establecer las características de distribución de probabilidad de las variables $\{1\}$. Las observaciones \bar{y} pueden tener cualquier función de distribución de probabilidad la cual es determinada del conocimiento del problema físico, pudiendo establecerse su estadística dada por V . Las variables de salida \hat{x} y \hat{z} son combinaciones lineales de \bar{y} y en base al teorema del límite central que establece que, siendo las observaciones independientes y pudiendo tener diferentes funciones de distribución, su combinación para encontrar \hat{x} y \hat{z} hace que estas tiendan a ser variables aleatorias que siguen la distribución normal con valores medios \bar{x} y \bar{z}_t y con una desviación estandar $\bar{\sigma}_x$ y $\bar{\sigma}_z$ respectivamente, donde:

$$\bar{\sigma}_x^2 = \text{diag}\{\text{cov}(\hat{x})\} = \text{diag}\{(A^t V^{-1} A)^{-1}\} \quad (23)$$

$$\bar{\sigma}_z^2 = \text{diag}\{\text{cov}(\hat{z})\} = \text{diag}\{D(A^t V^{-1} A)^{-1} D^t\} \quad (24)$$

Entonces siendo \hat{x} y \hat{z} los valores esperados o solución determinística de flujo de potencia, \bar{x} y \bar{z}

en vez de tener un valor único, tendrán un rango de variación que tome en cuenta la incertidumbre de las variables de entrada en base a un intervalo de confianza dado por:

$$\bar{x} = \hat{x} \pm s \bar{\sigma}_x \quad (25)$$

$$\bar{z} = \hat{z} \pm s \bar{\sigma}_z \quad (26)$$

donde si $s=1$ entonces el intervalo de confianza es de 65%, si $s=2$ 95% y si $s=3$ 99%. por tanto para tener un 99% de cubrir los valores verdaderos de las variables de salida, se toma en el flujo estocástico que:

$$\bar{x} = \hat{x} \pm 3 \bar{\sigma}_x$$

$$\bar{z} = \hat{z} \pm 3 \bar{\sigma}_z \quad (27)$$

3. FORMULACION NO LINEAL DEL FLUJO DE POTENCIA ESTOCASTICO

Una vez establecido el modelo completo de la formulación lineal del flujo estocástico, la formulación no lineal es una simple extensión. La relación funcional entre \bar{y} y \bar{x} es no lineal en sistemas de potencia, pero como es conocido es posible linealizar las ecuaciones alrededor del punto de solución mediante la expansión de las funciones no lineales en series de Taylor.

Las ecuaciones de flujo de potencia asumiendo error en cada una de las variables de entrada son:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) + \bar{\epsilon} \quad (28)$$

Siendo \bar{x} el vector de estado verdadero.

Efectuando la expansión en series de Taylor alrededor de \bar{x}_s tenemos que (28) se transforma en:

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}_s) + J \Delta \bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (29)$$

donde J es el jacobiano del sistema de ecuaciones que consta de las derivadas parciales de las variables de entrada con respecto a cada una de las variables de estado y evaluado en \bar{x}_s , por tanto:

$$\Delta \bar{y} = \bar{y} - \bar{f}(\bar{x}_s) = J \Delta \bar{x} + \bar{\epsilon} \quad (30)$$

la ecuación (30) es una ecuación lineal que tiene la misma forma de la ec(2) con la diferencia que J no es una matriz constante pero que depende del punto al cual es evaluada, la mejor estimación de $\Delta \bar{x}$ en el caso general es (de la ec (8)).

$$\Delta \bar{x} = (J^t V^{-1} J)^{-1} J^t V^{-1} \Delta \bar{y} \quad (31)$$

Para cero grados de libertad en que el jacobiano es una matriz cuadrada, entonces:

$$\Delta \bar{x} = J^{-1} \Delta \bar{y} \quad (32)$$

que es exactamente la misma solución obtenida por los métodos de Newton-Raphson, los valores más cercanos a la solución se obtienen como:

$$\bar{x}_s = \bar{x}_s + \Delta \bar{x} \quad (33)$$

Las ec.(32) y(33) se repiten hasta que se satisfaga un criterio de convergencia, es decir la solución determinística del flujo de potencia.

La expresión de interés para flujo estocástico es la matriz de covarianza de \hat{x} , de la ec (11).

$$\text{cov}(\hat{\Delta x}) = (J^t V^{-1} J)^{-1} \quad (34)$$

Si ya se ha obtenido convergencia, entonces J es evaluado en el punto de solución y $x_s = \bar{x}$ es la solución del flujo de potencia, como lo que en realidad interesa es la cov(\hat{x}) tenemos que de (33) en la que \bar{x}_s no son variables aleatorias, ya que son valores que se van calculando a partir de valores iniciales asumidos:

$$\text{cov}(\hat{x}) = \text{cov}(\hat{\Delta x}) = (J^t V^{-1} J)^{-1} \quad (35)$$

De idéntica manera las ecuaciones de las variables de salida dependientes son funciones no lineales de las variables de estado, y cuyos valores calculados estarán dados por:

$$\hat{z} = \bar{g}(\hat{x}) \quad (36)$$

Con el objeto de conocer la estadística de \hat{z} y aplicar la teoría lineal, es necesario linealizar (36) por expansión en series de Taylor, así:

$$\bar{z} = \bar{g}(\bar{x}_s) + K \Delta \bar{x}$$

$$\text{donde } \Delta \bar{z} = \bar{z} - \bar{g}(\bar{x}_s) = K \Delta \bar{x} \quad (37)$$

Siendo K el jacobiano de las variables de salida dependiente con respecto a las variables de estado, la ec (37) tiene entonces la misma forma que la ecuación lineal (20). Entonces los valores calculados de $\Delta \bar{z}$ que se pueden obtener a medida que se calcula $\Delta \bar{x}$ es:

$$\Delta \hat{z} = K \Delta \hat{x} \quad (38)$$

Aplicando la ecuación (22)

$$\text{cov}(\Delta \hat{z}) = K(J^t V^{-1} J)^{-1} K^t \quad (39)$$

así mismo:

$$\text{cov}(\hat{z}) = \text{cov}(\Delta \hat{z}) = K(J^t V^{-1} J)^{-1} K^t \quad (40)$$

Si el flujo de potencia ha convergido, K y J se evalúan en el punto de solución y se determina así la estadística de las variables de salida dependientes.

Por último los resultados dados como un intervalo de confianza del 99% son:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \hat{x} \pm 3\bar{\sigma}_x \\ \bar{z} &= \hat{z} \pm 3\bar{\sigma}_z \end{aligned} \quad (41)$$

4. ALGORITMO DE RESOLUCION DEL FLUJO ESTOCASTICO

Una vez presentada la teoría general necesaria para el flujo de potencia estocástico, el algoritmo de solución puede plantearse, para una topología dada de un sistema de potencia, de la siguiente manera:

Siendo: \bar{y} el vector de datos de entrada para un flujo de potencia, P y Q para las barras de carga y P para las de generación en las que se maneja la magnitud de voltaje |E|;

\bar{x} es el vector de las variables |E| y δ

V las varianzas asumidas de los errores en los datos de entrada \bar{y} .

J el jacobiano de las ecuaciones de flujo de potencia compuesta por las derivadas parciales de P y Q con respecto a |E| y δ

\bar{z} las variables de estado dependientes calculadas a partir de \bar{x} , tales como los flujos por las líneas y las potencias reactivas de generación.

K el jacobiano de las variables \bar{z} con respecto a \bar{x}

Paso 1.- Flujo de Potencia.-El vector \hat{x} se determina con un flujo de potencia convencional por el método de Newton Raphson, donde también se calcula \bar{z} .

Paso 2.- Cálculo de cov(\hat{x}).-con el jacobiano J evaluado en el punto de solución \bar{x} , calcular:

$$\text{cov}(\hat{x}) = (J^t V^{-1} J)^{-1}$$

cov(\hat{x}) es una matriz llena, J es muy dispersa, V es generalmente diagonal, por tanto para efectuar esta operación es conveniente utilizar técnicas de descomposición L.U a la matriz $J^t V^{-1} J$.

Paso 3.- Cálculo de cov(\hat{z}).-Establecer el jacobiano K y evaluarlo en el punto de solución \bar{x} , luego

$$\text{cov}(\hat{z}) = K \text{cov}(\hat{x}) K^t$$

Sólo los términos de la diagonal principal de cov(\hat{x}) y cov(\hat{z}) son de interés, ya que con ellos se conforman los vectores $\bar{\sigma}_x^2$ y $\bar{\sigma}_z^2$.

Paso 4.- Intervalos de confianza en \bar{x} y \bar{z} .- Finalmente se calcula el rango de variación de los resultados como:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \hat{x} \pm 3\bar{\sigma}_x \\ \bar{z} &= \hat{z} \pm 3\bar{\sigma}_z \end{aligned}$$

para 99% de confianza (exactamente para 99% es $\pm 2.57\sigma$)

5. CONSIDERACIONES ADICIONALES SOBRE EL FLUJO ESTOCASTICO

5.1 CORRELACION ENTRE VARIABLES

Normalmente se asume que la matriz de varianzas V de los datos de entrada es diagonal, lo que significa que todas las observaciones son independientes o no están correlacionadas entre sí, pero aún así las variables de estado están correlacionadas debido a la conexión de los nodos o barras mediante la red de transmisión, como efectivamente lo demuestra la matriz cov(\hat{x}) que es una matriz llena.

Una formulación más real es aquella que considera que carga y generación no son en la práctica independientes, ya que cambios en carga serán acompañados de cambios en generación en la misma dirección, esta es una indicación de correlación entre generación y carga. Por ejemplo, si una carga está conectada a una barra de generación, los cambios en carga serán seguidos fundamentalmente por dicha generación estableciéndose una alta correlación entre las dos.

Por otra parte la predicción de la carga total del sistema es generalmente más precisa que la predicción de las cargas individuales, esta información adicional puede ser muy valiosa y ser considerada como parte de la información de correlación. Si la carga total del sistema P_t igual a la suma de todas las cargas individuales entonces (3)

$$P_t = \sum_i P_{ci} \quad (42)$$

asumiendo independencia en las inyecciones, el valor esperado de P_t es:

$$E\{P_t\} = \sum_i E\{P_{ci}\} \quad (43)$$

y la varianza:

$$\text{Var}\{P_t\} = \sum_i \text{Var}\{P_{ci}\} \quad (44)$$

Es interesante observar el caso cuando las varianzas tanto de la carga total como de las cargas individuales se especifican independientemente, en dicha circunstancia (44) no se cumple. Si sabemos de antemano que la $\text{Var}\{P_t\}$ debe ser pequeña por ser la predicción más precisa, entonces debe existir correlaciones entre cargas tal que al calcular la varianza de la carga total dé un valor pequeño como el esperado.

Estos aspectos analizados en este numeral hace que V no necesariamente tratada como matriz diagonal, sino que en determinadas circunstancias que resultan ser más reales es necesario establecer correlaciones entre carga y generación y entre carga y carga. Para mayor información ver ref (3)

5.2 ESTADÍSTICA DE LA BARRA OSCILANTE

Como en el sistema de potencia no se especifica la inyección correspondiente a la barra oscilante, es finalmente necesario conocer su estadística en función de la incertidumbre de todas las inyecciones especificadas, para dicho efecto es suficiente considerar que la potencia activa de generación de la barra oscilante es:

$$P_s = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n P_i \quad (45)$$

donde los P_i son las potencias netas inyectadas a cada una de las n barras del sistema. Es obvio que de la ec (45) se desprecian las pérdidas del sistema.

Si todas las inyecciones se consideran independientes entre si, la varianza de P_s es:

$$\text{Var}\{P_s\} = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq s}}^n \text{Var}\{P_i\} \quad (46)$$

De la ecuación (46) se deduce que la varianza de la barra oscilante es grande, ya que es la suma de todas las varianzas de las potencias netas; puesto que ésta trata de compensar todas las variaciones en las inyecciones. Este hecho es importante y debe notarse que el efecto es inverso para lo establecido con la varianza de la carga total que se analizó anteriormente.

También es importante resaltar el hecho de que si la varianza de P_s es alta, también lo serán las varianzas de los flujos de potencia de las líneas que conectan a la barra oscilante. Estos resultados

hay que tomarlos con reserva ya que si cambia la posición de la barra oscilante, también cambiará la estadística de estas líneas. Esto es debido a que se considera independencia en la estadística de las inyecciones y debe considerarse como que se está analizando lo peor que puede ocurrir en el sistema, por ello el establecimiento de una matriz V con correlación entre carga y generación conduce a resultados más reales ya que todos los generadores tratan de compensar la incertidumbre en la carga y no sólo la oscilante.

6. CONCLUSIONES

El flujo de potencia estocástico constituye una herramienta alternativa para considerar la incertidumbre que existe en la predicción de las inyecciones, dando como resultado que las variables de estado no tengan un valor único como en el flujo de potencia determinístico, sino que se presenten en forma de rangos alrededor de este valor.

La formulación del flujo estocástico puede fácilmente extenderse para aplicaciones en tiempo real, donde se puede medir información redundante, con lo que se logra establecer la mejor estimación de las variables de estado y lo que es más importante aún, la detección e identificación de errores de medición.

Un flujo estocástico bien formulado equivale a muchos casos de flujos determinísticos con lo que se puede conseguir notorios ahorros en procesamiento y evaluación de la información.

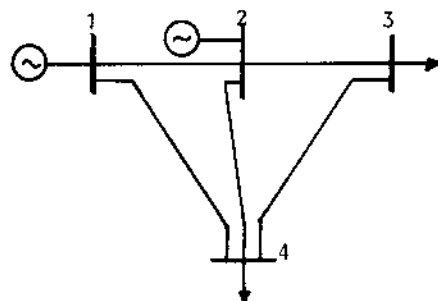
Se recomienda el aplicar esta técnica a los estudios que se efectúan en el planeamiento y operación de los sistemas eléctricos del país ya que es una simple extensión del flujo convencional por Newton Raphson.

La técnica de estimación de estado, que no es sino un flujo de potencia probabilístico redundante será uno de los programas básicos a implementarse en el Centro Nacional de Control de Energía de INECEL, para la supervisión y control en tiempo real del Sistema Nacional Interconectado.

Por último, si bien existen formulaciones alternativas del flujo estocástico (8), pues se cuestiona la aplicabilidad del teorema del límite central, éstas últimas son muy complicadas y con resultados que en la mayoría de los casos pueden no diferir mucho de esta formulación sencilla que requiere un buen juicio de ingeniería en sus resultados para la toma de decisiones.

APENDICE

Se presenta un ejemplo sencillo de flujo estocástico. Consideremos el siguiente sistema de potencia, al cual le resolvemos por el denominado método de corriente directa, con el fin de obtener un sistema lineal de ecuaciones del sistema de potencia (Ref(4))



Los datos de la red son:

BARRAS	P
1	oscil.
2	0.5
3	-0.5
4	-0.3

LÍNEA	REACTANCIA
1-2	0.1
1-4	0.3
2-4	0.15
2-3	0.2
4-3	0.2

Esta constituye la información normal del flujo determinístico, para flujo estocástico debemos establecer los errores probables que se tienen en las inyecciones P. Estos errores probables son sus desviaciones estandar, los valores que se especificaron anteriormente constituyen los valores esperados de P.

Se desea conocer los rangos de variación de los voltajes nodales (ángulos en este caso) y los flujos de potencia por las líneas para un intervalo de confianza del 99%, si los errores de predicción probables en las inyecciones son:

$$\sigma_2 = 2\% E(P_2) = 0.01 \quad \sigma_3 = 3\% E(P_3) = 0.015$$

$$\sigma_4 = 2\% E(P_4) = 0.006 \quad V = \text{diag}\{\sigma_2^2 \quad \sigma_3^2 \quad \sigma_4^2\}$$

Paso 1. Flujo de potencia.- el vector $\hat{\delta}$ de estado lo determinamos en base a un flujo convencional que en este caso es el flujo denominado de corriente directa en el que:

$$\bar{P} = B \cdot \bar{\delta}$$

B es la parte imaginaria de la matriz admitancia de barras, $\bar{\delta}$ el vector de ángulos nodales con respecto a la referencia medidos en radianes y \bar{P} el vector de potencias netas inyectadas que se han especificado. Tomando la barra 1 como referencia: ($\delta_1 = 0.0$)

$$Y = B = \frac{10}{6} \begin{bmatrix} 13 & -3 & -4 \\ -3 & 6 & -3 \\ -4 & -3 & 9 \end{bmatrix} \quad B^{-1} = \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 45 & 39 & 33 \\ 39 & 101 & 51 \\ 33 & 51 & 69 \end{bmatrix} \quad \bar{P} = \begin{bmatrix} 0.5 \\ -0.5 \\ -0.3 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\delta} = B^{-1} \bar{P} = \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.0123 \\ -0.0827 \\ -0.053 \end{bmatrix} \text{ rad} = \begin{bmatrix} -0.704 \\ -4.732 \\ -3.032 \end{bmatrix} \text{ grados}$$

El flujo de potencia por cada una de las líneas está dado por:

$$P_{ij} = \frac{1}{x_{ij}} (\delta_i - \delta_j) = b_{ij} (\delta_i - \delta_j)$$

Con lo que se puede conformar el sistema de ecuaciones:

$$\hat{P}_L = \begin{bmatrix} P_{12} \\ P_{14} \\ P_{23} \\ P_{24} \\ P_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 \\ 5 & -5 & 0 \\ 20/3 & 0 & -20/3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_2 \\ \delta_3 \\ \delta_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.123 \\ 0.177 \\ 0.352 \\ 0.271 \\ 0.148 \end{bmatrix}$$

Este constituye la solución del flujo de potencia determinístico en base a un modelo lineal, en el que la correspondencia de las variables con la teoría es:

$$\bar{y} = A \cdot \bar{x} \quad \bar{P} = B \cdot \bar{\delta} \quad \hat{x} = \hat{\delta} \text{ variables de estado}$$

$$\bar{z} = D \cdot \bar{x} \quad \bar{P}_L = b \cdot \bar{\delta} \quad \hat{z} = \hat{P}_L \text{ variables de estado dependientes}$$

Paso 2.- Cálculo de la matriz de cov de las variables de estado (A=B)

$$\text{cov}(\hat{\delta}) = (B^t V^{-1} B)^{-1} = B^{-1} V B^{-1t}$$

$$\text{cov}(\hat{\delta}) = \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 45 & 39 & 33 \\ 39 & 101 & 51 \\ 33 & 51 & 69 \end{bmatrix} \cdot 10^{-5} \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 22.5 & 0 \\ 0 & 0 & 3.6 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{560} \begin{bmatrix} 45 & 49 & 33 \\ 39 & 101 & 51 \\ 33 & 51 & 69 \end{bmatrix}$$

$$\text{cov}(\hat{\delta}) = \begin{bmatrix} 1.8612 & 3.5789 & 2.162 \\ 3.5789 & 8.1025 & 4.51 \\ 2.162 & 4.51 & 2.76 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

Las desviaciones estandar de las variables de estado son:

$$\hat{\sigma}_X^z = \text{diag}\{\text{cov}(\hat{\delta})\} = \begin{bmatrix} 1.8612 \\ 8.1025 \\ 2.76 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\hat{\sigma}_X = \begin{bmatrix} 1.3643 \\ 2.8465 \\ 1.6613 \end{bmatrix} \cdot 10^{-3}$$

Paso 3. Cálculo de la matriz de cov de las variables de estado dependientes ($b=D$)

$$\text{cov}(\hat{P}_L) = b \cdot \text{cov}(\hat{\delta}) \cdot b^t$$

$$\text{cov}(\hat{P}_L) = \begin{bmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -10/3 \\ 5 & -5 & 0 \\ 20/3 & 0 & -20/3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1.8612 & 3.5789 & 2.162 \\ 3.5789 & 8.1025 & 4.51 \\ 2.162 & 4.51 & 2.76 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -10 & 0 & 5 & 20/3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 & -5 \\ 0 & -10/3 & 0 & -20/3 & 5 \end{bmatrix} \cdot 10^{-6}$$

$$\cdot 10^{-6}$$

$$\text{cov}(\hat{P}_L) = \begin{bmatrix} 1.86 & 0.72 & 0.86 & 0.20 & 0.71 \\ 0.72 & 0.31 & 0.39 & 0.13 & 0.29 \\ 0.86 & 0.39 & 0.70 & 0.21 & 0.54 \\ 0.20 & 0.13 & 0.21 & 0.13 & 0.11 \\ 0.71 & 0.29 & 0.54 & 0.11 & 0.46 \end{bmatrix} \cdot 10^{-4}$$

Las desviaciones estandar de las variables de estado dependientes son $\hat{\sigma}_Z = \text{diag}\{\text{cov}(\hat{P}_L)\}$

$$\hat{\sigma}_Z^t = \begin{bmatrix} 1.364 & 0.557 & 0.837 & 0.360 & 0.678 \end{bmatrix} \cdot 10^{-2}$$

Para un 99% de confianza, el rango de variación de las variables de estado δ y las dependientes \hat{P}_k que toma en cuenta la incertidumbre de los datos de entrada y siendo los valores de δ y \hat{P}_k los valores calculados del flujo determinístico, son:

	$E\{\delta\}$	$E\{\delta\} - 3\sigma_x$	$E\{\delta\} + 3\sigma_x$
δ_2	-0.0123	-0.0164	-0.00821
δ_3	-0.0827	-0.0912	-0.0742
δ_4	-0.053	-0.0580	-0.0480

	$E\{\hat{P}_k\}$	$E\{\hat{P}_k\} - 3\sigma_z$	$E\{\hat{P}_k\} + 3\sigma_z$
P12	0.123	0.0821	0.164
P14	0.177	0.1603	0.1937
P23	0.352	0.3269	0.3771
P24	0.271	0.2602	0.2818
P43	0.148	0.1277	0.1683

Por último, en lo que tiene relación a la barra oscilante:

$$E\{P_1\} = E\{P_{12}\} + E\{P_{14}\} = 0.3$$

y su varianza es:

$$\text{Var}\{P_1\} = \sum_{i=2}^4 \text{Var}\{P_i\} = \text{Var}\{P_{12}\} + \text{Var}\{P_{14}\} + \text{Var}\{P_{23}\}$$

$$\text{Var}\{P_1\} = 10^{-5} (10 + 22.5 + 3.6) = 0.361 \times 10^{-3}$$

Notándose que la varianza de la barra oscilante es la mayor.

REFERENCIAS

- {1} Stochastic Load Flows, J.F.Dopazo, O.A.Klitin, A.M. Sasson IEEE Pas-94 March/April 1975 pp 299-304.
- {2} State Estimation for Power Systems: Detection and Identification of Gross Measurement Errors, J.F.Dopazo, O.A. Klitin, A.M.Sasson-Proceedings of the 8th IEEE PICA Conference, June, 1973.
- {3} An Alternative Formulation of the Stochastic Load Flow Method, F.Aboytes, B.J.Cory-IEEE PICA Conference, July, 1975.
- {4} Nuevas Formulaciones de Estudios de Flujo para la Operación de Sistemas de Potencia, F.Aboytes, D.Romero, Coloquio sobre Aplicaciones de Control a los Sistemas Eléctricos de Potencia, Universidad Autónoma Metropolitana, México, Nov. 1978.
- {5} Flujo de Potencia, G.Argüello, Seminario sobre Técnicas de Computación para Supervisión y Control de Sistemas Eléctricos de Potencia, Escuela Politécnica Nacional, Quito-Ecuador, Enero 1983.
- {6} Estimación de Estado en Sistemas de Potencia, G.Argüello, Seminario EPN, Quito-Ecuador, Enero 1983.
- {7} Power System Static Estimator, F.C.Schwepe et al, parts I-III IEEE Pas vol 89, pp 120-135, Jan 1970
- {8} Probabilistic Load Flow, B.Borkowska, IEEE Pas vol 93, 1974 pp 752-759.
- {9} Notas de clase, R. Rodas, Seminario sobre Técnicas de Computación para Supervisión y Control de Sistemas Eléctricos de Potencia, EPN Quito-Ecuador. Enero 1983.



ARGUELLO GABRIEL. Ingeniero Eléctrico, Escuela Politécnica Nacional, 1974. Master of Electrical Engineering-University of Idaho 1975. Cursos sobre análisis de funciones avanzadas de aplicación para Sistemas de Potencia en la Universidad de Berkeley 1981 y Universidad de Wisconsin 1982.

A partir de 1974 hasta la presente ha trabajado en INECEL en: Despacho de Carga para el SNI, Estudios Eléctricos para el SNI y actualmente en el desarrollo del Proyecto Centro Nacional de Control de Energía.

Su área de especialización es análisis de Sistemas de Potencia para operación en tiempo real. Miembro del CIEEPI y del IEEE.