

FACTOR DE POTENCIA EN CIRCUITOS CON FORMAS
DE ONDA COMPLEJAS

BANDA GAMBOA, HUGO A.
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

RESUMEN

Se presentan las definiciones y el análisis, en base a las Series de Fourier, de la potencia media, potencia aparente, factor de potencia y otros parámetros relacionados con los circuitos eléctricos. Se dan también algunas aplicaciones generales, con el objeto de aclarar los conceptos y aportar a la comprensión de la validez e importancia de dichos parámetros en la evaluación del comportamiento y eficiencia de los circuitos eléctricos.

INTRODUCCION

La mayoría de sistemas modernos que utilizan componentes electrónicos para el control del flujo de potencia, introducen sustanciales deformaciones a las formas de onda de corriente y voltaje presentes en las redes y fuentes de alimentación. Esto, además de causar interferencia y perturbaciones, puede reducir el factor de potencia del sistema alimentado.

Tradicionalmente se ha considerado que el factor de potencia es el coseno del ángulo de defasamiento entre el voltaje y la corriente ($\cos\phi$), sin embargo esto es únicamente cierto para circuitos en los que las ondas consideradas son puramente sinusoidales. En circuitos en los que las formas de onda son complejas, la aplicación del concepto de factor de potencia, conduce a resultados muy importantes, cuya incidencia en la eficiencia de los circuitos eléctricos merece ser más ampliamente investigada.^{1,2}

DEFINICIONES GENERALES

En el presente análisis, se considerará que las funciones son periódicas y además satisfacen las condiciones de Dirichlet, de tal forma que pueden ser representadas por las Series de Fourier.³

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos n\omega_0 t + B_n \sin n\omega_0 t) \quad (1)$$

$$f(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin(n\omega_0 t + \psi_n) \quad (2)$$

en donde, los coeficientes están dados por las Fórmulas de Euler,

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \cdot dt \quad (3)$$

$$A_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \cos n\omega_0 t \cdot dt \quad (4)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cdot \sin n\omega_0 t \cdot dt \quad (5)$$

$$C_n = (A_n^2 + B_n^2)^{1/2} \quad (6)$$

$$\psi_n = \text{tg}^{-1} \frac{A_n}{B_n} \quad (7)$$

- Si $f(t)$ es una función par $B_n \equiv 0$ para cualquier n
- Si $f(t)$ es una función impar $A_0 \equiv 0$ y $A_n \equiv 0$ para cualquier n

La expresión (3), define además el valor promedial, medio o componente continua de la función $f(t)$.

El valor medio cuadrático (RMS) de una función periódica, está dado por,

$$V_{RMS} = \left(\frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) \cdot dt \right)^{1/2} \quad (8)$$

La relación entre los valores medio cuadrático y promedial de una función periódica, se la denomina factor de forma.

$$F = \frac{V_{RMS}}{V_{MED}} \quad (9)$$

El factor de pico, está definido por la relación entre el valor pico y el valor medio cuadrático de una función periódica.

$$K_F = \frac{\hat{V}}{V_{RMS}} \quad (10)$$

Cuando en un circuito eléctrico los voltajes y corrientes están representados por funciones periódicas, se pueden aplicar las siguientes definiciones relacionadas con la potencia eléctrica:

- *Potencia Instantánea*, es el producto de la función del voltaje y la función de corriente, en un determinado dispositivo.

$$p = v(t) \cdot i(t) \quad (11)$$

- *Potencia Activa*, es el valor medio de la función que representa la potencia instantánea. Por esta razón, también se la denomina *Potencia Media*.

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \cdot dt \quad (12)$$

- *Potencia Aparente*, se define como el producto de los valores medios cuadráticos del voltaje y la corriente, en un determinado dispositivo.

$$S = V \cdot I \quad (13)$$

- *Factor de Potencia*, se define como la relación entre la potencia activa y la potencia aparente.

$$f_p = \frac{P}{S} \quad (14)$$

ANÁLISIS

Para el análisis se considera una red conformada por elementos eléctricos o electrónicos, que puede ser lineal o no-lineal. Está alimentada por una fuente de voltaje cuya compleja forma de onda, origina una corriente también de forma de onda compleja, diferente de la del voltaje.

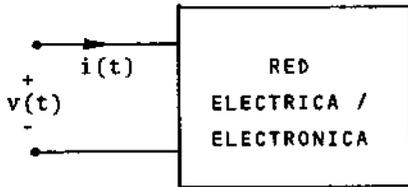


FIG. 1 Sistema eléctrico/electrónico generalizado

$v(t)$ e $i(t)$ son funciones periódicas, que cumplen las siguientes condiciones,⁴

$$v(t) = v(t + nT_v) \quad (15)$$

$$i(t) = i(t + qT_i) \quad (16)$$

$$T_v = pT_i = T_o \quad (17)$$

donde, n y q son números enteros; el período T_v de la función del voltaje está relacionado con el período T_i de la función de la corriente, por medio de un número racio-

nal p , que en la generalidad de los casos prácticos resulta ser un número entero, en consecuencia,

$$v(t) = V_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n \text{sen}(n\omega_0 t + \psi_{vn}) \quad (18)$$

$$i(t) = I_0 + \sum_{m=1}^{\infty} \hat{i}_m \text{sen}(m\omega_0 t + \psi_{im}) \quad (19)$$

$$\text{donde, } \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} \quad (20)$$

$$\hat{v}_n = \sqrt{2} V_n = (A_{vn}^2 + B_{vn}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (21)$$

$$\hat{i}_m = \sqrt{2} I_m = (A_{im}^2 + B_{im}^2)^{\frac{1}{2}} \quad (22)$$

$$\psi_{vn} = \text{tg}^{-1} \frac{A_{vn}}{B_{vn}} \quad (23)$$

$$\psi_{im} = \text{tg}^{-1} \frac{A_{im}}{B_{im}} \quad (24)$$

Los coeficientes de las series de Fourier de las funciones de voltaje y corriente, están dados por las Fórmulas de Euler.

Los valores medios cuadráticos de las expansiones dadas en (18) y (19), son respectivamente iguales a,

$$V = [V_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \hat{v}_n^2]^{\frac{1}{2}} = [\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2]^{\frac{1}{2}} \quad (25)$$

$$I = [I_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \hat{i}_m^2]^{\frac{1}{2}} = [\sum_{m=0}^{\infty} I_m^2]^{\frac{1}{2}} \quad (26)$$

La potencia activa suministrada por la fuente resulta ser igual a la suma de la potencia de las componentes continuas con el sumatorio de la potencia aparente de las componentes armónicas de similar orden ($n=m$), multiplicadas por el respectivo coseno del ángulo de defasamiento entre dichas componentes.

$$P = V_0 I_0 + \sum_{n=1}^{\infty} V_n I_n \cos(\psi_{vn} - \psi_{in}) \quad (27)$$

De (25) y (26) se puede obtener la potencia aparente entregada por la fuente.

$$S = V \cdot I = [\sum_{n=0}^{\infty} V_n^2 \cdot I_m^2]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

La relación entre (27) y (28) está definida como el factor de potencia.

$$f_p = \frac{V_0 I_0}{V I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{V_n I_n}{V I} \cos(\psi_{vn} - \psi_{in}) \quad (29)$$

En (29) se identifica por un lado, el fac-

tor de potencia de las componentes continuas al que se puede representar como el inverso del producto de los factores de forma de las funciones de voltaje y corriente; y por otro lado, el sumatorio de los factores de potencia de las componentes armónicas de orden n similar ($n = m$).

$$f_p = f_{p0} + \sum_{n=1}^{\infty} f_{pn} \quad (30)$$

$$f_{p0} = \frac{1}{F_v \cdot F_i} \quad (31)$$

$$f_{pn} = \frac{V_n}{V} \cdot \frac{I_n}{I} \cos(\psi_{vn} - \psi_{in}) \quad (32)$$

La relación entre el valor RMS de la componente armónica de orden n , y el valor RMS de su función periódica, se lo va a definir como FACTOR ESPECTRAL.

$$d_{vn} = \frac{V_n}{V} \quad (33)$$

$$d_{in} = \frac{I_n}{I} \quad (34)$$

$$f_{pn} = d_{vn} \cdot d_{in} \cdot \cos(\psi_{vn} - \psi_{in}) \quad (35)$$

Al coseno del ángulo de defasamiento entre las componentes armónicas de voltaje y corriente de igual orden, se lo denomina usualmente Factor de desplazamiento.

APLICACIONES ESPECIALES

Cuando las funciones de las fuentes de alimentación, cumplen ciertos requisitos especiales, se puede particularizar para cada caso la expresión del factor de potencia dada en (29).

En cualquier caso en el que las formas de onda de las funciones de voltaje y corriente sean idénticas, el factor de potencia será igual a la unidad.

CIRCUITOS LINEALES ALIMENTADOS POR VOLTAJE ALTERNO.- Si el voltaje alterno es puramente sinusoidal también lo será, en el estado estable, la corriente producida. Para este caso el factor de potencia resulta,

$$f_p = \cos(\psi_v - \psi_i) = \cos\phi \quad (36)$$

$$\phi = \text{tg}^{-1} \frac{X}{R} \quad (37)$$

CIRCUITOS RECTIFICADORES Y CONTROLADORES DE CORRIENTE ALTERNA.- En estos casos, si se asume que el voltaje de alimentación es puramente sinusoidal, independientemente de la forma de onda de la función periódica de la corriente, el factor de potencia estará dado por,

$$f_p = d_{i1} \cos(\psi_v - \psi_{i1}) \quad (38)$$

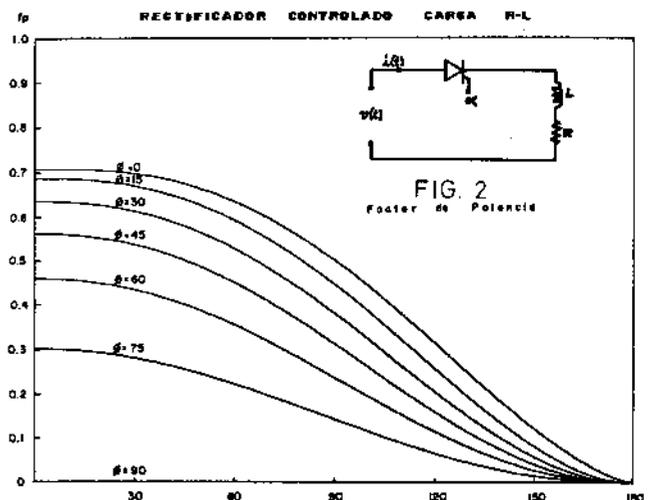
CIRCUITOS ALIMENTADOS POR FUENTES CONSTANTES.- Para el caso en que la fuente de voltaje tiene una amplitud invariable con el tiempo, y la corriente cualquier forma de onda, el factor de potencia es igual a,

$$f_p = \frac{I_0}{I} = \frac{1}{F_i} \quad (39)$$

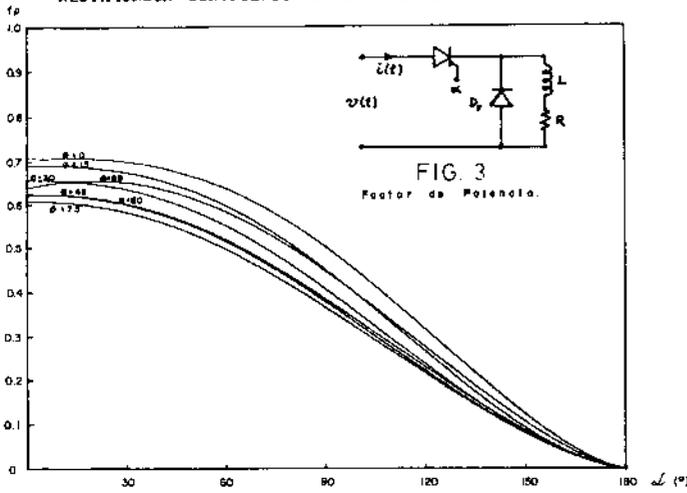
Si la fuente es de corriente invariante en el tiempo, pero el voltaje tiene cualquier forma de onda, resulta,

$$f_p = \frac{V_0}{V} = \frac{1}{F_v} \quad (40)$$

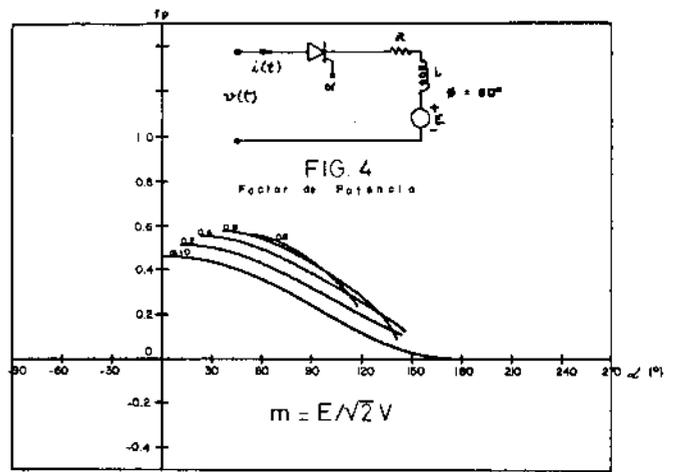
A continuación se muestran algunos resultados gráficos obtenidos para el factor de potencia en diversos circuitos de alterna, en donde el flujo de potencia se controla por medio de tiristores.⁵ En la referencia indicada, de donde se han tomado los gráficos, se podrá encontrar el análisis detallado de algunos circuitos típicos alimentados por voltaje alterno sinusoidal, así como también los resultados experimentales.



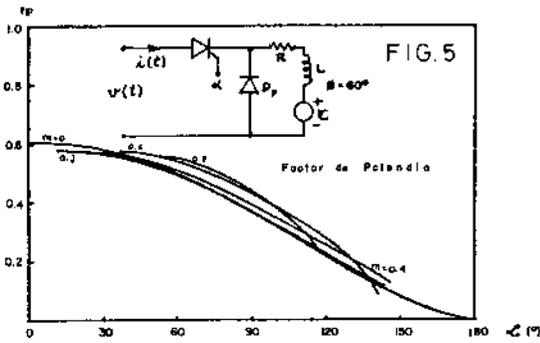
RECTIFICADOR CONTROLADO CARGA R-L CON DI



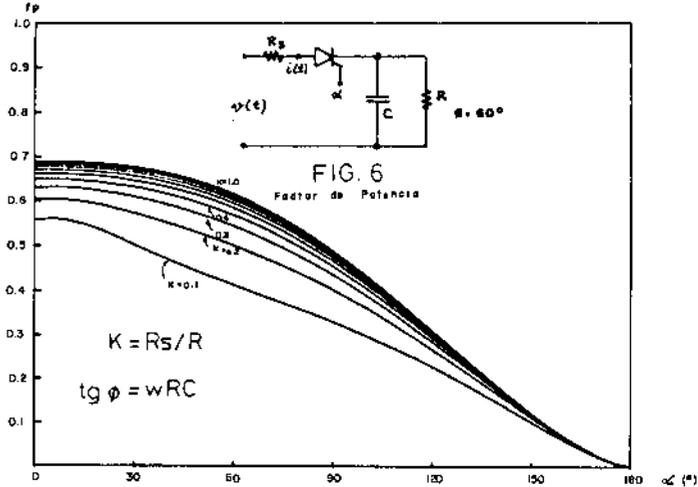
RECTIFICADOR CONTROLADO CARGA R-L-E



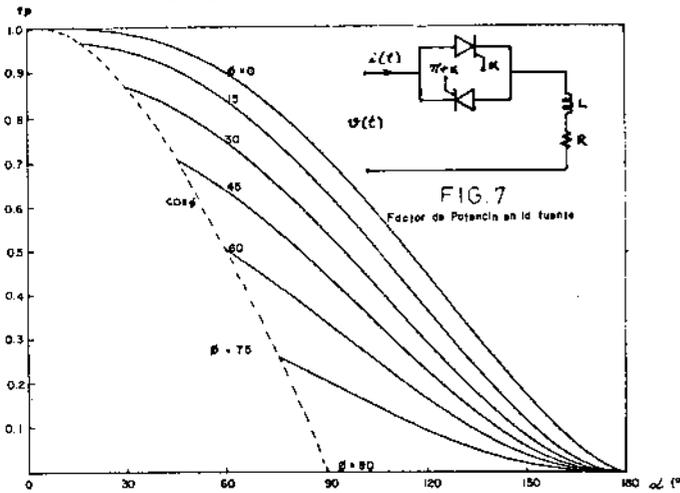
RECTIFICADOR CONTROLADO CARGA R-L-E, Df



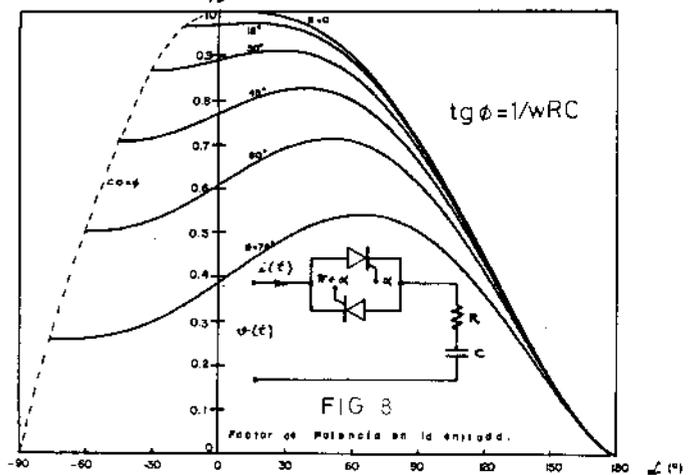
RECTIFICADOR CONTROLADO CARGA R-C



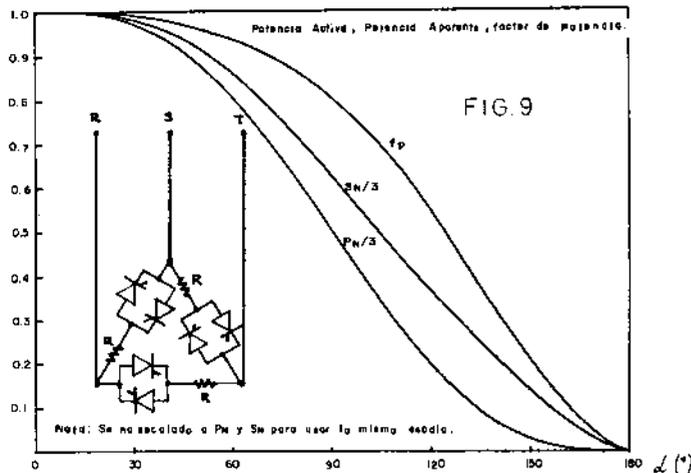
CONTROL AC SIMETRICO CARGA R-L



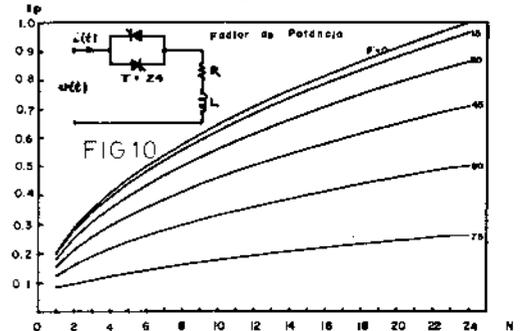
CONTROL AC SIMETRICO CARGA R-C



CONTROL TRIFASICO SIMETRICO AC



CONTROL POR CICLO INTEGRAL CARGA R-L



CONCLUSIONES

Con el empleo de las series de Fourier, se ha efectuado el análisis del factor de potencia en una red generalizada. Los resultados gráficos presentados, dan una idea más clara de la influencia de diversos parámetros en el factor de potencia de algunos de los circuitos estudiados.

Queda también perfectamente claro que el "triángulo de potencias" únicamente mantiene su validez en circuitos lineales bajo régimen estrictamente sinusoidal. Analizando la expresión obtenida para el factor de potencia (29), se puede concluir, que para el caso más general, la potencia aparente es una compleja combinación de las componentes de potencia asociadas con los elementos reactivos y con las armónicas generadas, incluyendo aquellas de frecuencia cero (componentes continuas).

De igual manera, es posible afirmar que la corrección del factor de potencia no solamente se puede hacer generando potencia reactiva conjugada, sino también generando potencia contenida en componentes armónicos que tiendan a cancelarse con aquellas generadas por la carga, y que no sean de utilidad.^{6,7}

Otro aspecto importante, derivado del presente análisis, es el relacionado con la necesidad de contar con instrumentos capaces de medir los diversos parámetros de las variables eléctricas que son de compleja forma de onda. Significativos estudios y avances se han efectuado dentro de este campo, que han contribuido a reducir las limitaciones y los errores de los respectivos instrumentos de medida.⁸⁻¹²

Finalmente, se debe aclarar que en numerosos trabajos y textos, se acostumbra a definir, lo que aquí se ha denominado FACTOR ESPECTRAL, con el nombre de FACTOR DE DISTORSION. Esto no es muy propio, ya que el FACTOR DE DISTORSION está dado por la relación entre el valor RMS de las componentes armónicas de orden $n=2,3,\dots,\infty$, y el valor RMS de la componente fundamental.¹³

$$D_n = \frac{|C_n|}{|C_1|} \quad n = 2,3,\dots,\infty \quad (41)$$

$$D = \left[\sum_{n=2}^{\infty} D_n^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

GLOSARIO DE SIMBOLOS UTILIZADOS

v o $v(t)$	Función del tiempo del voltaje
i o $i(t)$	Función del tiempo de la corriente
\hat{v}	Valor pico del voltaje
\hat{i}	Valor pico de la corriente
V	Valor RMS del voltaje
I	Valor RMS de la corriente
V_0	Valor medio del voltaje
I_0	Valor medio de la corriente
p	Potencia instantánea
P	Potencia media
S	Potencia aparente
K_F	Factor de pico
F_v	Factor de forma de $v(t)$
F_i	Factor de forma de $i(t)$
f	Factor de potencia
d_{vn}^p	Factor espectral de la n -ésima componente armónica de $v(t)$
d_{in}	Factor espectral de la n -ésima componente armónica de $i(t)$
ω_0	Frecuencia angular fundamental
ψ_{vn}	Angulo de fase de la n -ésima componente armónica de $v(t)$
ψ_{in}	Angulo de fase de la n -ésima componente armónica de $i(t)$
ϕ	Angulo de fase de la carga
X	Reactancia total de la carga
R	Resistencia total de la carga
α	Angulo de activado de los tiristores
D_n	Distorsión armónica de orden n
D	Factor de distorsión o Distorsión armónica total

REFERENCIAS

- [1] RICHMAN Peter, "Wave Factors and Power Factor for General Voltage and Current Waveforms". IEEE Trans. Ind. Electron. Control Instrum., VOL. IECI - 22, No 3, pp. 420-424, Aug. 1975.
- [2] BANDA Hugo, "Factor de Potencia en Circuitos con Tiristores". 1er. Seminario de Educación Continua en Ingeniería Eléctrica y Electrónica 10-20 Noviembre 1980, Escuela Politécnica Nacional - Quito.

- [³] KREYSZIG *Erwin*, "Advanced Engineering Mathematics", Wiley Int. Ed. 3th. Edition, 1972.
- [⁴] PAPOULIS *Athanasios*, "Circuits and Systems, a Modern Approach", Holt - Saunders Int. Ed., 1981.
- [⁵] PAREDES *Eduardo*, "Factor de Potencia en Circuitos A.C. con Control no-lineal", Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Marzo 1982.
- [⁶] SHEPHERD *William*, "Thyristor Control of A.C. Circuits", Bradford University Press, Bradford, England, 1976.
- [⁷] SHIPP *D.D.*, "Harmonic Analysis and Suppression for Electrical Systems Supplying Static Power Converters and other Nonlinear loads", IEEE Trans. Ind. App., VOL IA-15, No 5, pp. 453-458, Sept/Oct. 1979.
- [⁸] LINDERS *J.R.*, "Electric Wave Distortions: Their Hidden Costs and Containment", IEEE Trans. Ind. App., VOL IA-15 No 5, pp. 458-471, Sept/Oct. 1979.
- [⁹] INIGO *R.M.*, "An Electronic Energy and Average Power Factor Meter with Controllable Nonuniform Rate". IEEE Trans. Ind. Electron. Contr. Instrum., VOL IECI -27, No 4, pp. 271-278, Nov. 1980.
- [¹⁰] EMANUEL *A.E.* and LEVITSKY *F.J.*, "Induction Watthour Meter Performance on Rectifier/Inverter Circuits", IEEE Trans. Pow. Appar. Syst., VOL PAS-100, No 11, pp. 4422-4427, Nov. 1981.
- [¹¹] MATOUKA *M.F.*, "A Wide Range Digital Power/Energy Meter for Systems with Nonsinusoidal Waveforms", IEEE Trans. Ind. Electron., VOL IE-29, No 1, pp. 18-31, Feb. 1982.
- [¹²] ANDRADE *Aurelio*, "Medidor Digital del Factor de Potencia utilizando Microprocesador", Tesis de Grado, Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, Marzo 1983.
- [¹³] MILLMAN *J.* and HALKIAS *C.*, "Integrated Electronics: Analog and Digital circuits and Systems", Int. Student Ed., Mc Graw-Hill Kogakusha Ltd., pp. 683, Sec. 18-3, 1972.



BANDA GAMBOA, Hugo A., nació en Quito el 7 de Julio de 1950. Obtuvo el título de Bachiller Técnico en Radiotecnica en el Colegio Central Técnico en 1968. Sus estudios superiores los realizó en la Escuela Politécnica Nacional, obteniendo el título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones en 1975. En la Universidad de Bradford, Inglaterra luego de realizar sus estudios de Post-Grado obtuvo el título de Master of Science in Power Electronics, en 1978. Actualmente presta sus servicios en calidad de Profesor Principal en el Departamento de Electrónica de La Facultad de Ingeniería Eléctrica de La Escuela Politécnica Nacional.