

RESUMEN

Se estudia en forma experimental un oscilador electrónico y un modelo matemático que poseen regímenes de oscilación periódicos y regímenes de oscilación ruidosos, aperiódicos, caóticos e impredecibles. La transición hacia el caos ocurre por duplicaciones sucesivas del período de oscilación. Este estudio tiene relación con los conceptos de temperatura, entropía, disipación, irreversibilidad, e incluso con la asimetría entre pasado y futuro (a pesar de la simetría de las leyes físicas respecto de la inversión temporal).

En la década de los setenta se descubrió<sup>(2,3)</sup> que a medida que se varía un parámetro de ciertos sistemas oscilatorios el período de la oscilación se duplica sucesivamente hasta hacerse infinito. Entonces ocurre una transición a un estado caótico aperiódico. Curiosamente este mecanismo de transición muestra ciertas características universales<sup>(2,3)</sup> y se ha observado<sup>(2)</sup> en sistemas tan diversos como poblaciones biológicas (en especial insectos), osciladores ruidosos mecánicos, eléctricos y químicos, en flujo de fluidos viscosos, en flujo de superfluidos, en juntas ruidosas de Josephson y en cavidades ópticas bistables.

1.- INTRODUCCION.

En la figura 1 se observa la transición de un régimen laminar, ordenado, determinista, a un régimen ruidoso turbulento, caótico e impredecible. Debido a su complejidad es poco lo que sabemos acerca del estado turbulento. Describir una señal caótica mediante una función analítica es en general imposible y aún inútil. El régimen turbulento se caracteriza por un crecimiento "más o menos exponencial" de los "errores". En consecuencia el resultado de la simulación de la turbulencia en un computador digital depende por completo del número de dígitos con que se realiza el cálculo<sup>(1)</sup>. El resultado de un experimento con un sistema turbulento es impredecible y aún irrepetible: el cambio más leve de un parámetro del sistema o de una condición inicial altera completamente el resultado del experimento si este tiene suficiente duración. Por ejemplo la fotografía en la figura 1 es irrepetible.

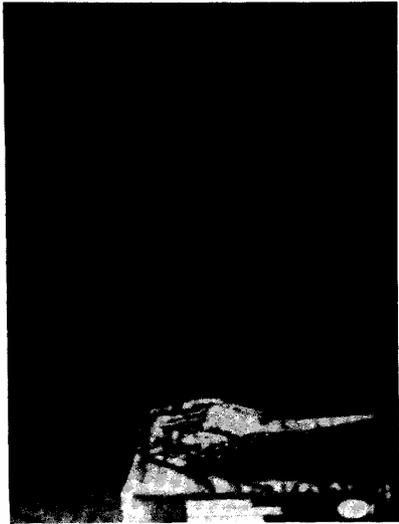


FIG. 1.- Transición de flujo laminar a flujo turbulento.

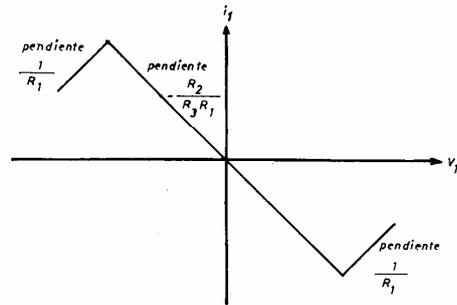
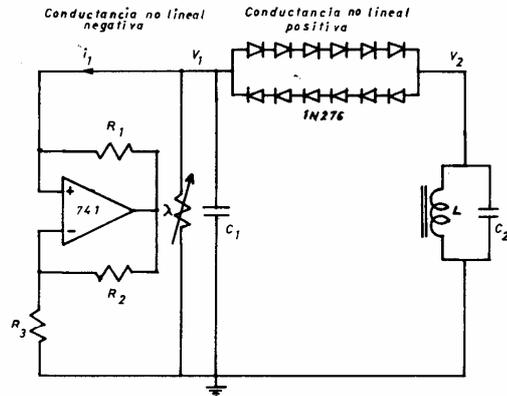


FIG. 2.- Oscilador electrónico. El amplificador operacional y las resistencias  $R_1$ ,  $R_2$  y  $R_3$  generan una conductancia no-lineal negativa como se indica.  
 $R_1 = 4.7 \text{ K}\Omega$ ,  $R_2 = 4.7 \text{ K}\Omega$ ,  
 $R_3 = 10 \text{ K}\Omega$ ,  $C_1 = 100 \text{ pF}$ ,  
 $L = 9.3 \text{ mH}$ ,  $C_2 = 2200 \text{ pF}$ .

Dos sistemas relativamente simples que presentan la transición al estado caótico por duplicaciones sucesivas del período de oscilación son el oscilador electrónico señalado en la figura 2<sup>(4)</sup> y el modelo<sup>(5)</sup> de población de insectos en un medio limitado de finido por la ecuación de diferencias

$$X_{j+1} = \lambda X_j(1 - X_j). \quad (1)$$

$X_j$  es la población en el año  $j$  y el parámetro  $\lambda$  es la fertilidad. Hemos estudiado<sup>(5)</sup> en forma experimental ambos sistemas. Los "experimentos" con poblaciones de insectos fueron realizados con un computador digital. En este artículo presentamos algunos de los resultados obtenidos.

## 2.- TRANSICION HACIA EL CAOS EN UN OSCILADOR ELECTRONICO.

En la figura 3 se indican los resultados correspondientes al oscilador electrónico. Cada fila de la figura corresponde al valor indicado de la resistencia  $\lambda$ . En la primera columna se presenta la tensión  $v_1(t)$  en régimen permanente. En la segunda columna se indican diagramas en el "plano de fase" en régimen permanente con  $v_1(t)$  en el eje vertical y  $v_2(t)$  en el eje horizontal. En la tercera columna se presenta el espectro de frecuencia (o módulo de la transformada de Fourier) de  $v_1(t)$ .

Para  $\lambda < \lambda_0$  el circuito no oscila (los valores de  $\lambda_n$  y  $\lambda'_n$  se resumen en la tabla 1).

TABLA 1

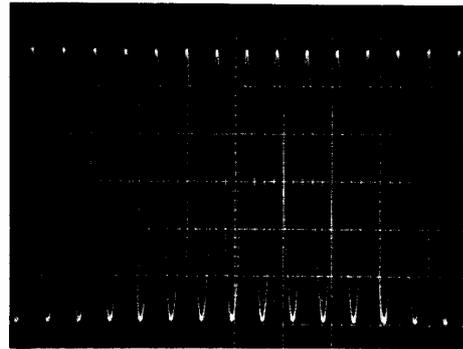
	Circuito Electrónico	Modelo de Población
$\lambda_0$	16.3 K $\Omega$	1
$\lambda_1$	24.9 K $\Omega$	3
$\lambda_2$	27.2 K $\Omega$	3.4
$\lambda_3$	27.7 K $\Omega$	3.54
$\lambda_4$		3.56
$\lambda'_2$	28 K $\Omega$	3.59
$\lambda'_1$	28.5 K $\Omega$	3.67



FIG. 3.- Varias señales en régimen permanente correspondientes al oscilador electrónico. Cada fila corresponde al valor indicado de la resistencia  $\lambda$ . Primera columna:  $v_1(t)$ . Segunda columna:  $v_1(t)$  en eje vertical vs.  $v_2(t)$  en eje horizontal. Tercera columna: espectro de frecuencia de  $v_1(t)$ .

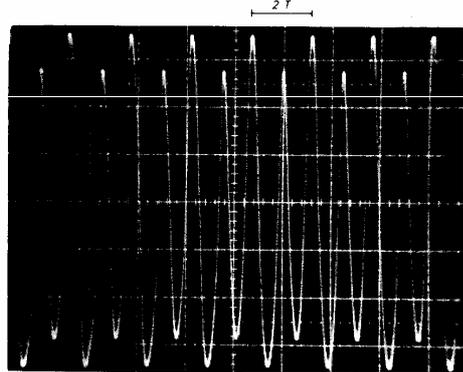
$\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$

$\lambda = 23.7 \text{ K}\Omega$



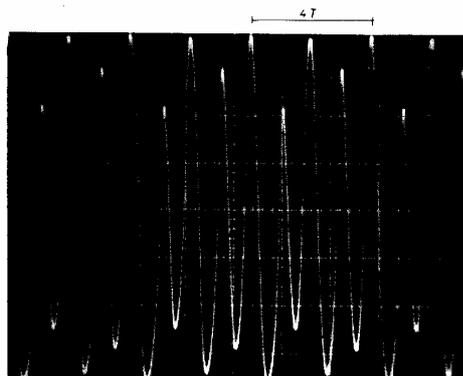
$\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$

$\lambda = 26 \text{ K}\Omega$



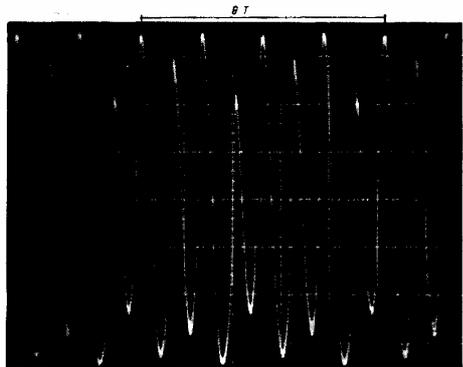
$\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$

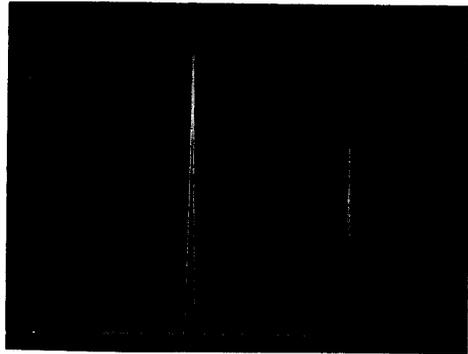
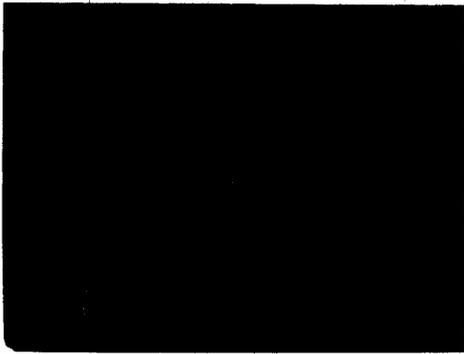
$\lambda = 27.4 \text{ K}\Omega$



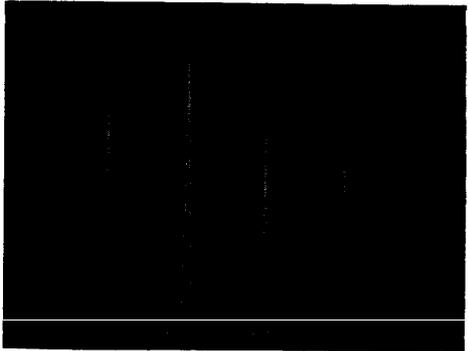
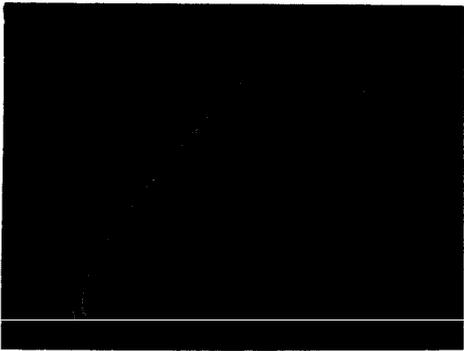
$\lambda_3 < \lambda < \lambda_4$

$\lambda = 27.7 \text{ K}\Omega$

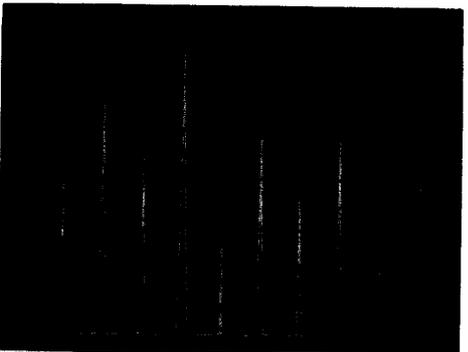
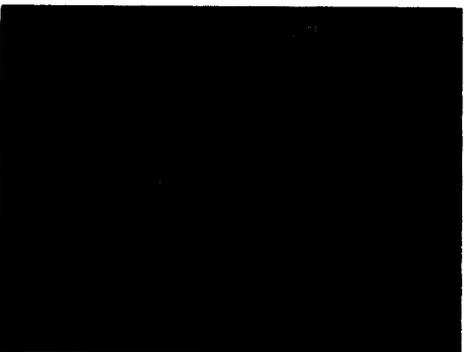




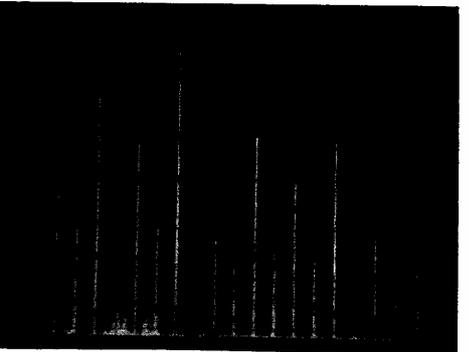
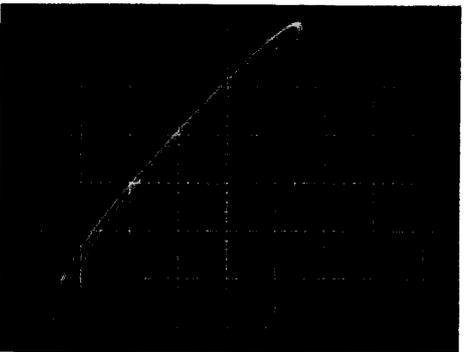
0 1 2



0 1/2 3/2 2 5/2



0 1/4 1/2 3/4 1 5/4 3/2 7/4 2 9/4 5/2



0 1/8 1/4 3/8 1/2 5/8 3/4 1

Para  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$  el circuito oscila con un período  $T = 1/f = 1/35$  KHz; en el plano de fase se tiene una "órbita simple"; y en el espectro de frecuencia se observa una componente a la frecuencia  $f$  (y a las frecuencias "armónicas"  $2f, 3f, \dots$  que en adelante no mencionamos). Para  $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$  el período se ha duplicado a  $2T$ ; en el plano de fase se observa una "órbita doble"; y en el espectro de frecuencia aparece una nueva componente a la frecuencia  $f/2$ . Para  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_3$  el período se duplica nuevamente a  $4T$ ; en el plano de fase se tiene una "órbita de orden 4"; y en el espectro de frecuencia aparecen nuevas componentes a  $f/4$  y  $3f/4$ . Para  $\lambda_3 < \lambda < \lambda_4$  el período se ha duplicado nuevamente a  $2^3T$ ; la órbita en el plano de fase es de "orden 8"; y aparecen nuevas componentes de frecuencia a  $f/8, 3f/8, 5f/8$  y  $7f/8$ . En general para  $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$  el período es  $2^n T$ . En  $\lambda_\infty = \lambda_1'$  el período se hace infinito, la señal se vuelve aperiódica y ocurre la transición al régimen turbulento. Para  $\lambda_3 < \lambda < \lambda_2'$  la señal es aperiódica; en el plano de fase se observa una órbita con 4 "bandas"; y en el espectro de frecuencias parece "ruido" además de las componentes de frecuencia a  $f/4, f/2$  y  $3f/4$ . Para  $\lambda_2 < \lambda < \lambda_1'$  la señal es aperiódica; en el plano de fase se observa una órbita con 2 bandas; y en el espectro de frecuencias hay ruido además de las componentes a  $f/2$  y  $f$ . Para  $\lambda_1 < \lambda$  la señal es aperiódica; en el plano de fase se observa una órbita con una sola banda; y en el espectro de frecuencias se observa ruido además de la componente a la frecuencia  $f$ . En general la órbita en el plano de fase tiene  $2^n$  bandas si  $\lambda_{n+1}' < \lambda < \lambda_n'$ . Es interesante mencionar<sup>(5)</sup> que el punto en el plano de fase recorre las  $2^n$  bandas en un orden bien determinado, y este orden resulta ser el mismo que en el caso de período  $2^n T$ . Sin embargo la señal es caótica en el sentido de que no es posible predecir la trayectoria dentro de una banda con unos pocos ciclos de anticipación. Esta indeterminación se debe al "crecimiento de errores" que describiremos más adelante.

### 3.- UN MODELO MATEMATICO CON TRANSICION HACIA EL CAOS.

Consideremos ahora la ecuación (1). En la figura 4 se ilustra el caso  $\lambda = 3,3$  con la condición inicial  $X_0 = 0,7$ . Se observa un

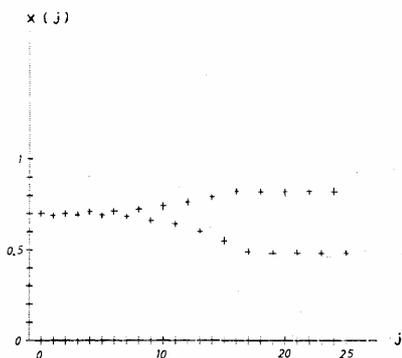
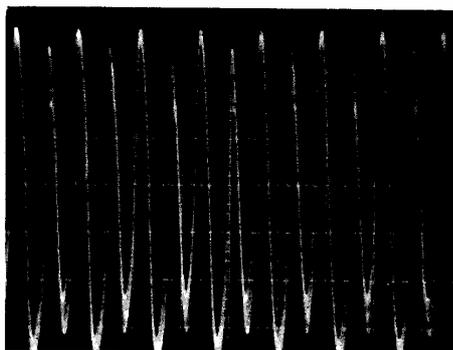
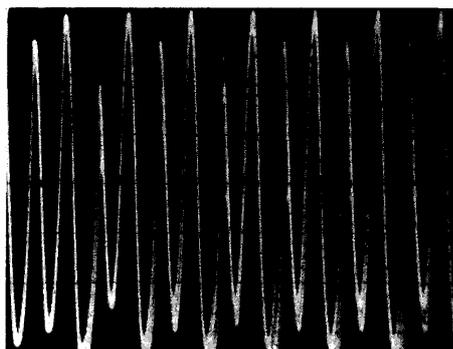
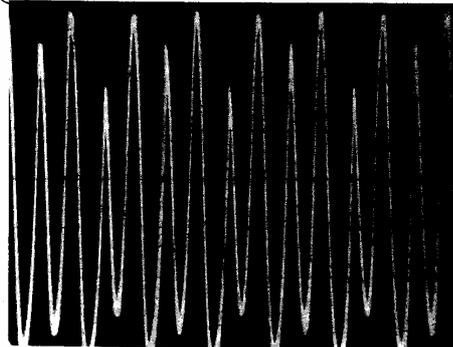


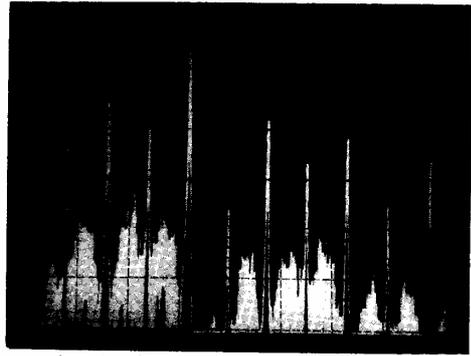
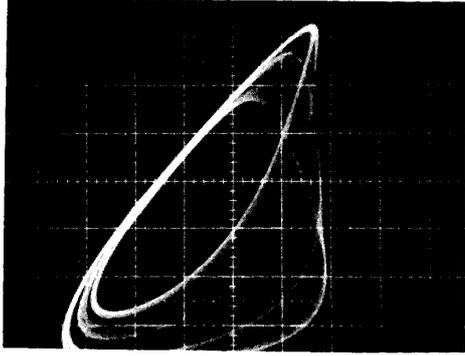
FIG. 4.

$\lambda = 27,9$  KQ.  $\lambda_3' < \lambda < \lambda_2'$   
 $\lambda = 28,2$  KQ.  $\lambda_2' < \lambda < \lambda_1'$   
 $\lambda = 28,6$  KQ.  $\lambda_1' < \lambda < \lambda_0'$

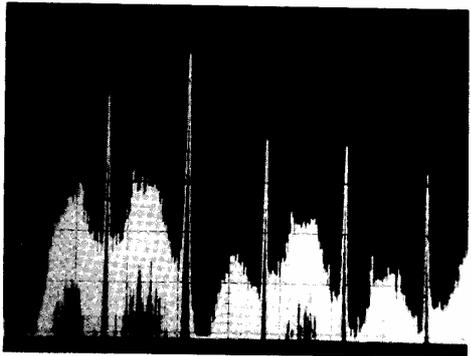
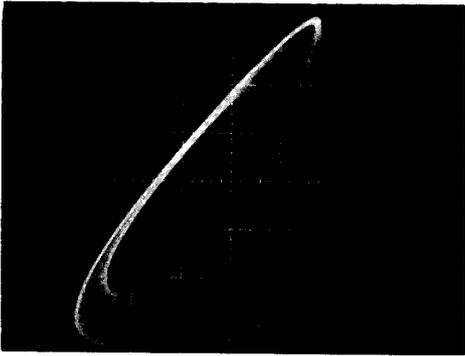


Continuación Fig. 3.

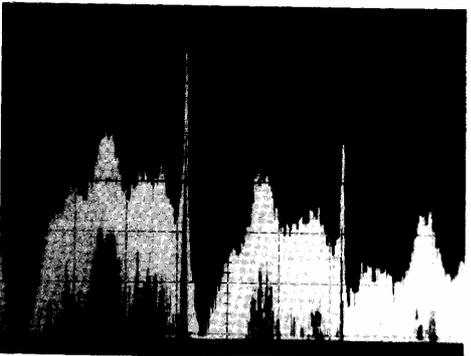
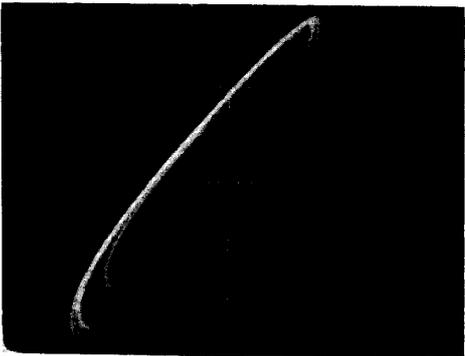
FIG. 4.-  $X_j$  en función de  $j$  para  $\lambda = 3,3$  y  $X_0 = 0,7$ . Note el "régimen transiente" hasta  $j \approx 20$  y el "régimen permanente" para  $j \geq 20$ .



0  $\frac{1}{4}$   $\frac{1}{2}$   $\frac{3}{4}$  1 21



0  $\frac{1}{2}$  1  $\frac{3}{2}$  21  $\frac{5}{2}$



0 1 21

Continuación Fig. 3.

"régimen transiente" hasta  $j \approx 20$  y luego un "régimen permanente" de período  $2T$  (donde  $T$  corresponde al incremento de  $j$  en una unidad). La existencia de un régimen permanente indica que los "errores" decrecen.

Para  $\lambda > \lambda_\infty$  los "errores" crecen y no existe un régimen permanente periódico. En la figura 5 se indica el comportamiento del sistema para varios valores del parámetro  $\lambda$ .

En la primera columna se indica  $X_j$  en función de  $j$ . En la segunda columna se indica  $X_{j+1}$  en función de  $X_j$  en régimen permanente. En la tercera columna se indica el espectro de frecuencia en régimen permanente (hasta una frecuencia  $f/2 = 1/2T$  ya que el "período de muestreo" es  $T$ ). Para  $\lambda < \lambda_0$  se tiene  $X_j = 0$  en régimen permanente (los valores  $\lambda_n$  y  $\lambda_h$  se resumen en la Tabla 1).

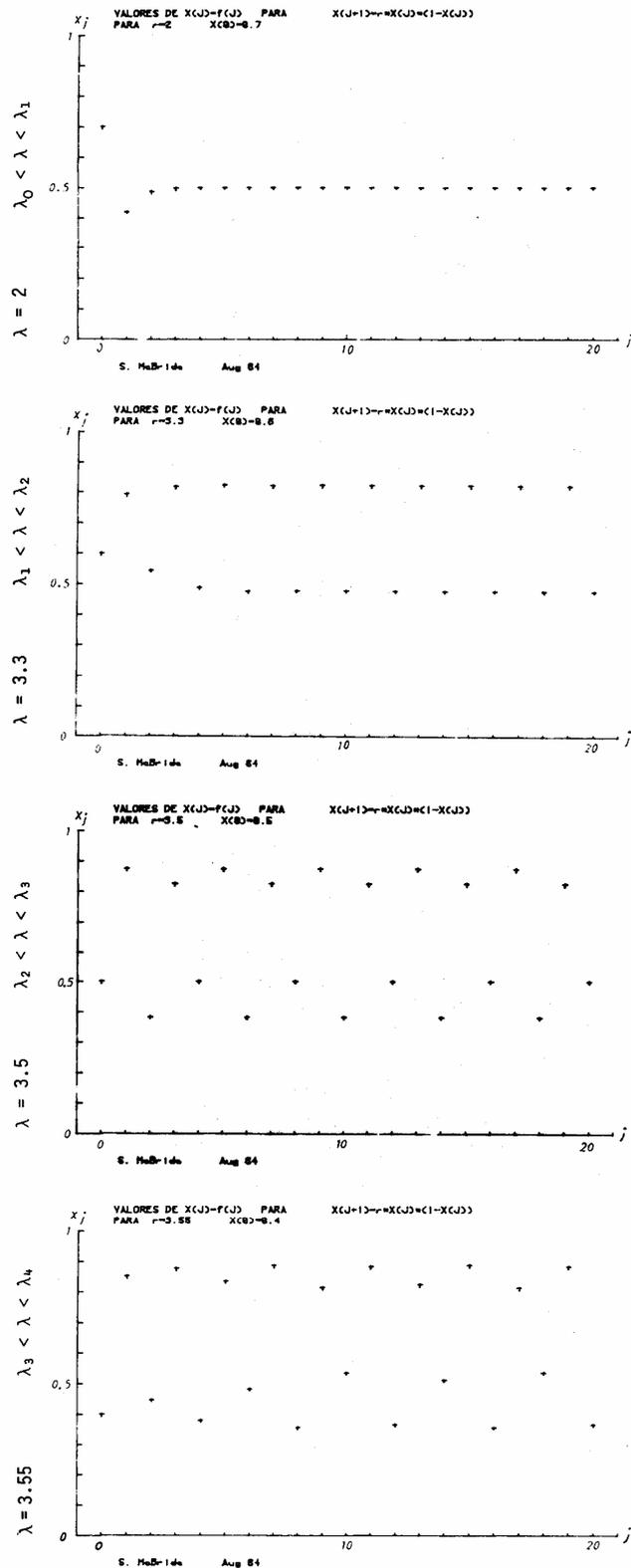
Para  $\lambda_0 < \lambda < \lambda_1$   $X_j$  es constante en régimen permanente. Para  $\lambda_n < \lambda < \lambda_{n+1}$  el período es  $2^n T$ . Para  $\lambda_{n+1} < \lambda < \lambda_n$  hay  $2^n$  "bandas".

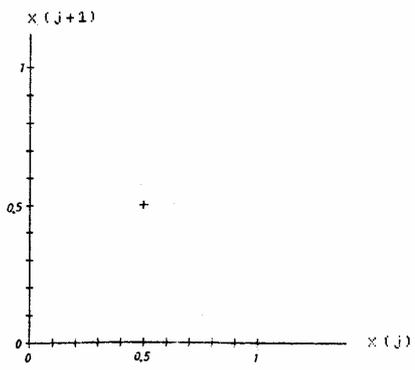
En la figura 5 se indican casos en que el período es  $2^0 T$ ,  $2^1 T$ ,  $2^2 T$ ,  $2^3 T$  y  $2^4 T$ . También se indican los casos en que hay  $2^1$  y  $2^0$  bandas.

El comportamiento del sistema en régimen permanente se resume en el gráfico  $X_j = f(\lambda)$  en la figura 6. En esta figura notamos que a  $\lambda \approx 3,84$  se tiene una oscilación de período  $3T$  que es inestable en el sentido indicado en la figura 7.

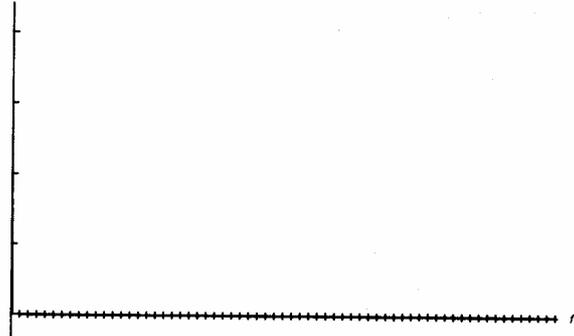
Esta curiosa oscilación de período  $3T$  parece ser otra característica universal de este mecanismo de transición hacia el caos, ya que también se logró observar en el oscilador electrónico como se indica en la figura 8. En la figura 6 también se observa una oscilación de período  $5T$  a  $\lambda \approx 3.74$ .

FIG. 5.- Varias señales correspondientes a la ecuación (1). Cada fila corresponde al valor indicado de  $\lambda$ .  
Primera columna:  $X_j$  en función de  $j$ .  
Segunda columna:  $X_{j+1}$  en vertical vs.  $X_j$  en horizontal, en régimen permanente.  
Tercera columna: espectro de frecuencia de  $X_j$ .

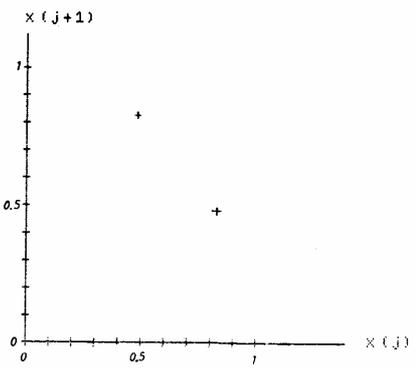




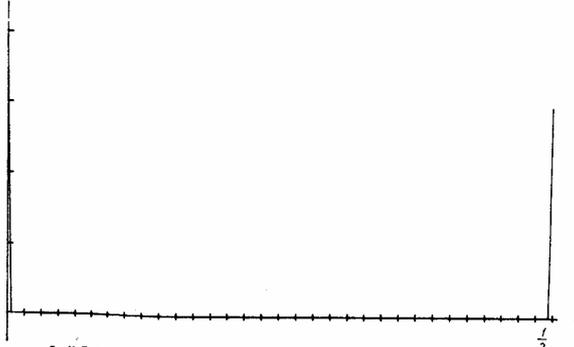
TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $X(j+1) = rX(j) = (1-X(j))$   
 $r=2$   $X(0)=0.4$  RES=612 N=6.5488788848



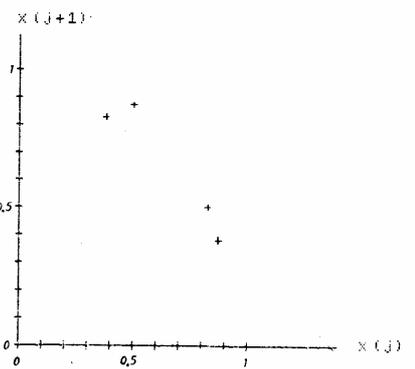
S. McBride Aug 84



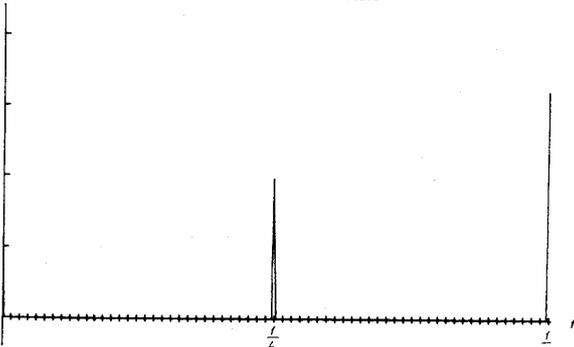
TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $X(j+1) = rX(j) = (1-X(j))$   
 $r=3$   $X(0)=0.4$  RES=258 N=6.1227886636



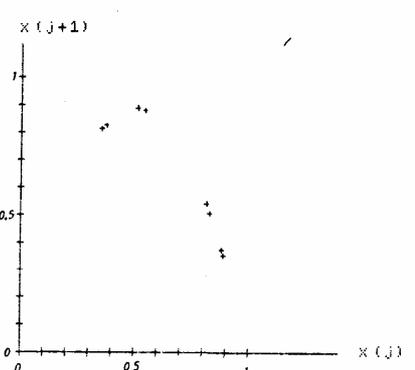
S. McBride Aug 84



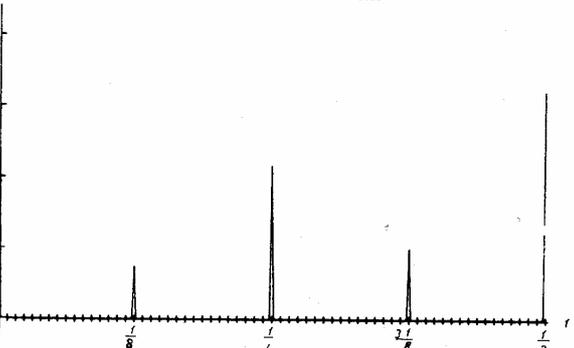
TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $X(j+1) = rX(j) = (1-X(j))$   
 $r=3.5$   $X(0)=0.4$  RES=612 N=6.6062886288



S. McBride Aug 84



TRANSFORMADA DE FOURIER DE  $X(j+1) = rX(j) = (1-X(j))$   
 $r=3.5$   $X(0)=0.4$  RES=612 N=6.6062886288



S. McBride Aug 84

En la figura 9 se ilustra como decrecen los "errores" en el régimen determinista con  $\lambda < \lambda_0$ . En la figura 10 se indica el crecimiento de los "errores" en el régimen caótico con  $\lambda > \lambda_0$ . Ilustramos el crecimiento de los errores en el caso  $\lambda = 4$ . En este caso  $0 < X_j < 1$ . Si la condición inicial  $X_0$  se altera en tan sólo una parte en  $10^{10}$ , el error crece hasta hacerse del orden de 1 en unos 33 pasos.

Feigenbaum<sup>(2)</sup> descubrió que en el límite  $n \rightarrow \infty$  el cociente  $(\lambda_{n+1} - \lambda_n) / (\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1})$  tiende al número 4,6692016... que es independiente del sistema! Para el oscilador obtuvimos  $(\lambda_2 - \lambda_1) / (\lambda_3 - \lambda_2) \approx 4.6$ . También existen otros números universales<sup>(3,5)</sup>.

En la referencia (5) se estudiaron los sistemas  $X_{j+1} = \lambda X_j (1 - X_j)^n$  con  $n = 2, 3$  y  $4$ . En estos sistemas el mecanismo de transición hacia el caos es el mismo que ya hemos descrito. También se estudió el sistema  $X_{j+1} = \lambda \sin^2(2\pi X_j)$  que es especialmente interesante ya que presenta una transición hacia el caos correspondiente a cada máximo de la función  $\sin^2(2\pi X_j)$  (ver figura 11).

Esta observación indica que la transición hacia el caos está relacionada con los máximos de la función  $f(X_j)$  en  $X_{j+1} = \lambda f(X_j)$ , de manera que es un fenómeno no-lineal. Para evitar la oscilación ruidosa de un oscilador deben evitarse las "no-linealidades con máximo".

#### 4. OBSERVACIONES.

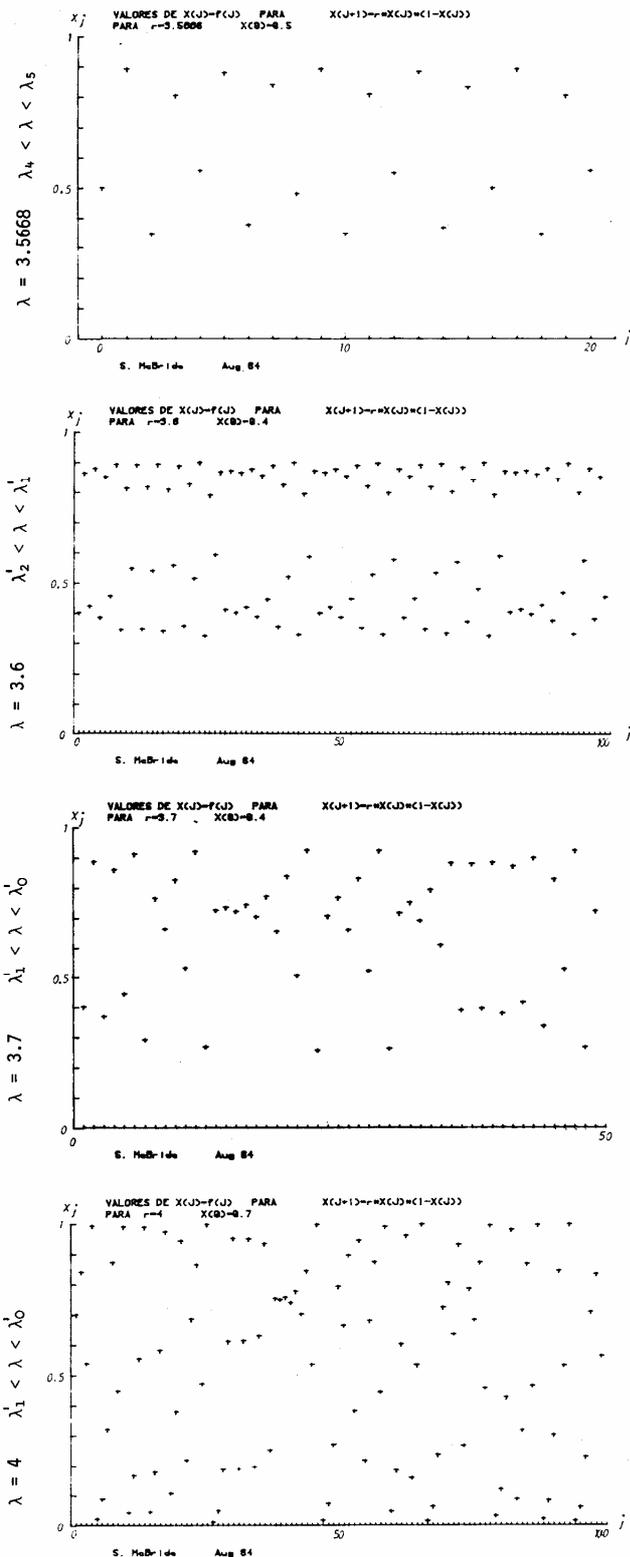
En esta sección presentamos algunas interrogantes que se desprenden del estudio de la ecuación (1).

Reservamos nuestras conclusiones generales para la sección final.

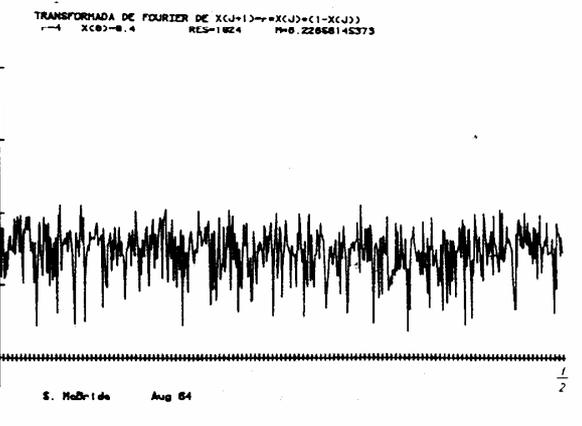
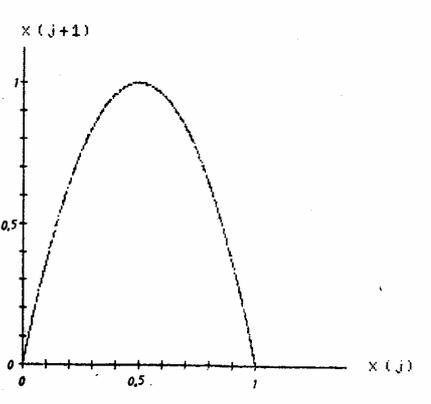
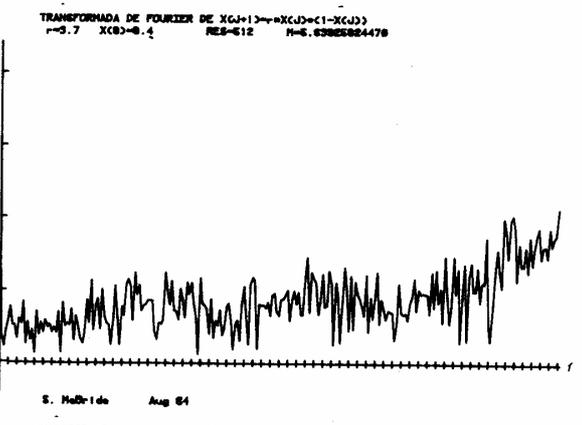
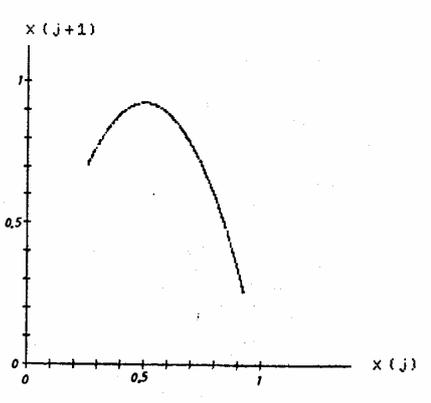
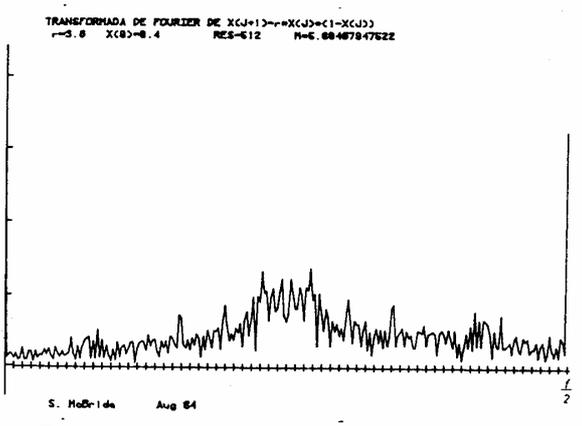
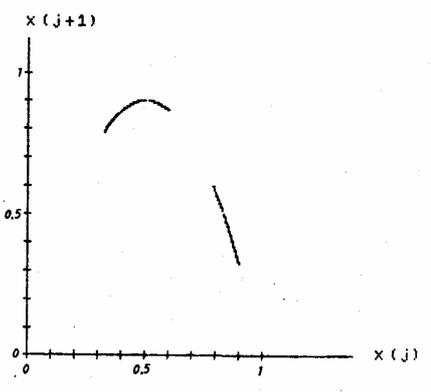
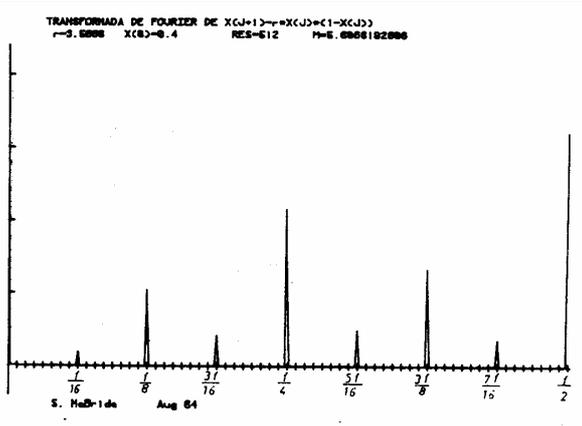
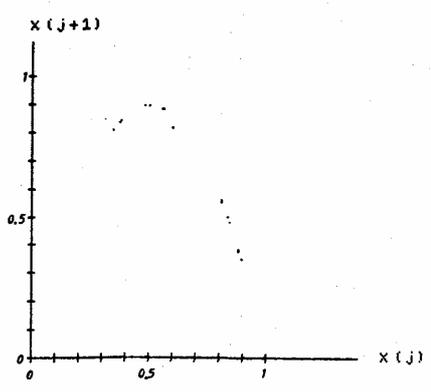
A medida que aumenta  $j$  se pierde información respecto del valor de  $X_0$ ; en este sentido el sistema es irreversible. ¿Hay relación con el concepto de entropía?

El ruido en régimen turbulento no tiene origen térmico, ¿o sí? ¿No está siempre el concepto de temperatura relacionado con un proceso caótico?

En régimen caótico, dado  $X_0$  (con un cierto error), no es posible predecir  $X_j$  si  $j$  es suficientemente grande. Una medida de  $X_j$  "fija el estado del sistema" y permite predecir  $X_{j+1}$  (con un cierto error) ¿Hay alguna relación con la mecánica cuántica?



Continuación FIG. 5.



Continuación FIG. 5.

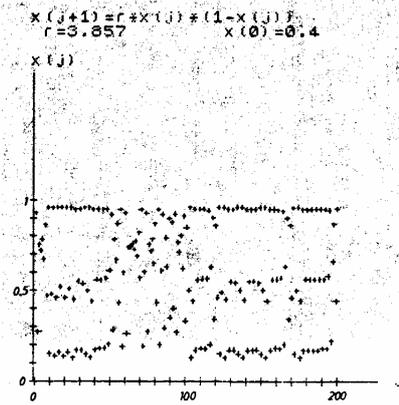
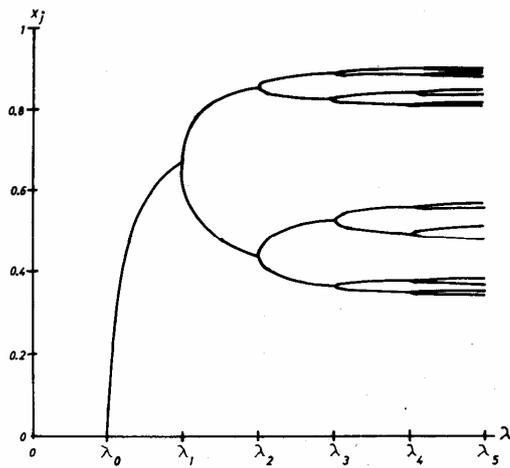


FIG. 7.-  $x_j$  en función de  $j$  con  $\lambda = 3,857$ . Hay intervalos de oscilación de período  $3T$  e intervalos caóticos.

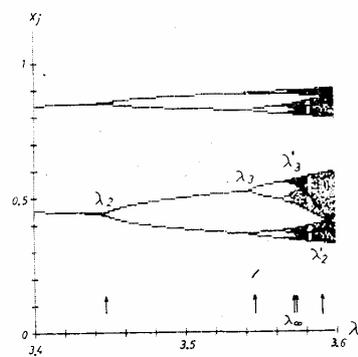
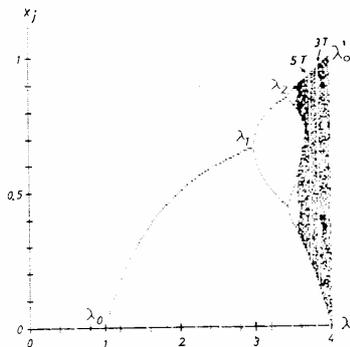


FIG. 6.-  $x_j$  en función de  $\lambda$  en régimen permanente. En  $\lambda = \lambda_\infty = 3,5699$  ocurre la transición hacia el caos.

En la figura 4 hemos visto la transición de un régimen transiente a un régimen permanente sin que el sistema incluya un mecanismo de disipación, ¿o sí?

El futuro nos parece cualitativamente distinto del pasado a pesar de la simetría de las leyes físicas respecto de la inversión temporal. ¿Encontraremos la clave de este misterio en un sistema tan simple y complejo como el descrito por la ecuación (1)?

#### 5.- LAS NO-LINEALIDADES DE LA NATURALEZA.

En mecánica clásica un sistema lineal aislado está descrito por la ecuación de Isaac Newton  $M\ddot{x} = F = -kx$ . Multiplicando a la izquierda por la matriz  $M^{-1}$  se obtiene  $\ddot{x} = -M^{-1}kx$ . Las matrices constantes  $M$  y  $k$  son reales, la matriz  $M$  es diagonal (si  $x$  son coordenadas cartesianas), y la matriz  $k$  es simétrica (por el principio de acción y reacción). En consecuencia la matriz  $M^{-1}k$  es hermitiana y puede diagonalizarse mediante una transformación de similitud:  $C = SM^{-1}kS^{-1}$  donde  $S^{-1} = S^\dagger$ . Los elementos diagonales de  $C$  son  $\omega_i^2$  donde  $\omega_i$  son las frecuencias propias del sistema. Obtenemos así la ecuación  $\ddot{u} = -Cu$  donde  $u \equiv Sx$  son las coordenadas normales. Cada coordenada normal  $u_i$  satisface la ecuación de un oscilador armónico desacoplado:  $\ddot{u}_i = -\omega_i^2 u_i$ . La solución general es  $u_i = A_i \cos \omega_i t + B_i \sin \omega_i t$ . Dado  $u_i$  y  $\dot{u}_i$  en un instante, obtenemos  $u_i$  para todo  $t$  en el futuro y en el pasado. En este sentido el sistema es determinista. La teoría es invariante respecto de la inversión temporal  $t \rightarrow -t$ . La información contenida en los valores iniciales de  $u_i$  y  $\dot{u}_i$  no se pierde con el transcurrir del tiempo hacia el futuro o hacia el pasado. No existe un mecanismo para transferir energía de un oscilador a otro. Por lo tanto en un sistema lineal aislado los osciladores armónicos no pueden llegar a equilibrio térmico entre sí. Para estos sistemas no existen los conceptos de temperatura y entropía.

En mecánica cuántica un sistema lineal aislado también es un conjunto de osciladores

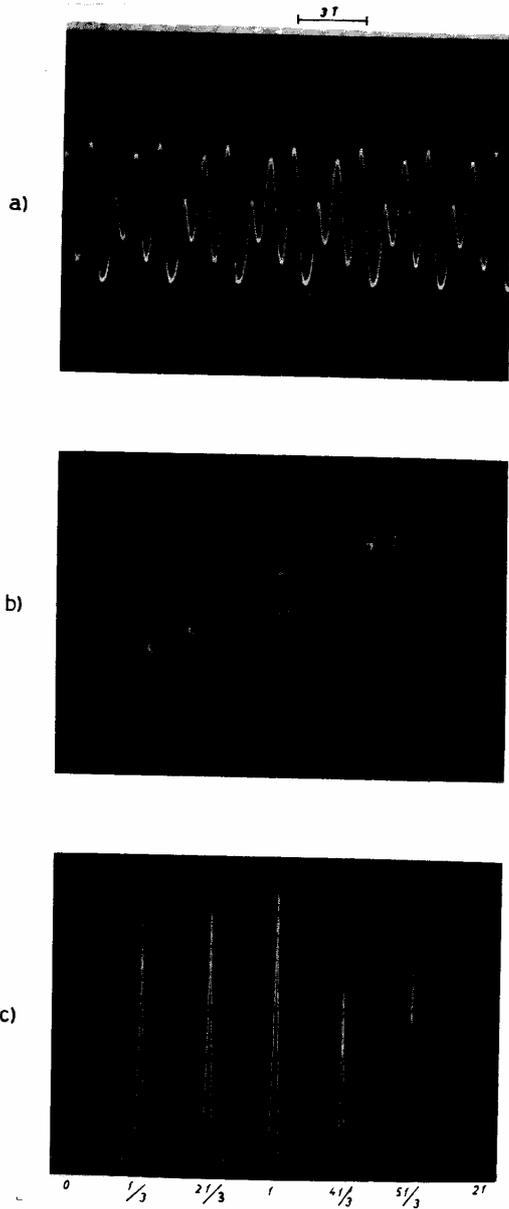


FIG. 8.- Oscilación de período  $3T$  en el oscilador electrónico con  $\lambda = 40,8 \Omega$ .  
 a)  $v_1(t)$ .  
 b)  $v_1(t)$  en vertical vs.  $v_2(t)$  en horizontal.  
 c) Espectro de frecuencia de  $v_1(t)$ .

armónicos desacoplados. En estos sistemas no existe un mecanismo de transición de un estado cuántico a otro.

En teoría cuántica de campos se estudian sistemas continuos. Si el sistema es lineal y aislado se obtienen infinitos osci-

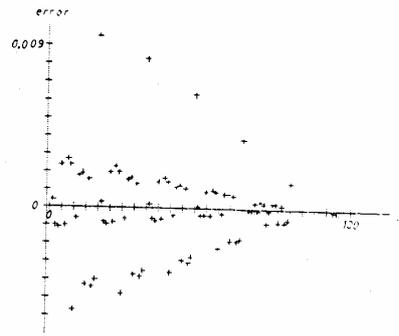


FIG. 9.- Se ilustra el decrecimiento de "errores" en régimen determinista. En este ejemplo  $\lambda = 3,5668$ , (o sea  $\lambda_4 < \lambda < \lambda_5$ ) y "error" =  $X_j$  (con  $X_0 = 0,51$ ) -  $X_j$  (con  $X_0 = 0,50$ ).

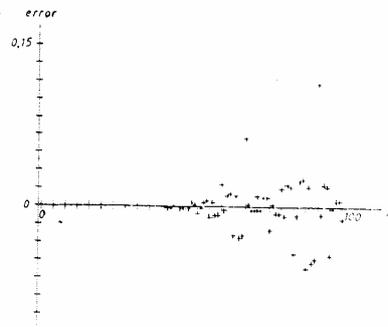


FIG. 10.- Se ilustra el crecimiento de "errores" en régimen caótico. En este ejemplo  $\lambda = 3,58$  (o sea  $\lambda'_3 < \lambda < \lambda'_2$ ) y "error" =  $X_j$  (con  $X_0 = 0,5005$ ) -  $X_j$  (con  $X_0 = 0,5000$ ).

ladores armónicos desacoplados. En este caso es conveniente escribir la solución de las ecuaciones de onda como una superposición de ondas planas. Estas ondas planas describen partículas que no interactúan entre sí. Hay simetría respecto de la inversión temporal: las partículas en el espacio-tiempo se propagan hacia el futuro o hacia el pasado (en este último caso se les llama "anti-partículas"). La física no-trivial es precisamente la interacción entre partículas, y esta interacción está determinada por los términos no-lineales de las ecuaciones de onda.

## REFERENCIAS

- (1) R.G. Deissler, Turbulent solutions of the equations of fluid motion, Rev. Mod. Phys., Vol. 56, Number 2, Part 1, pag. 223 - 254, April 1984.
- (2) G.B.L, Period-doubling route to chaos shows universality, Physics Today, pag. 17 - 19, March 1981.
- (3) L.P. Kadanoff, Roads to chaos, Physics Today, pag. 46 - 53, Dec. 1983.
- (4) E. Freire, L.G. Franquelo, J. Aracil, Periodicity and chaos in an Autonomous Electronic System, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol CAS-31, pag. 237 - 247, March 1984.
- (5) Sterling McBride, Turbulencia, Tesis de Grado, E.P.M. Quito, 1984.

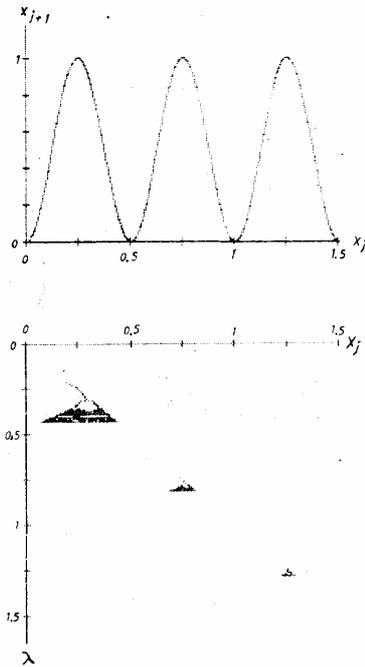


FIG. 11.- Se indica  $X_j$  en función de  $\lambda$  en régimen permanente correspondiente a la ecuación  $X_{j+1} = \lambda \sin^2(2\pi X_j)$ . En el intervalo graficado  $0 < \lambda < 1,5$  se observan tres transiciones hacia el caos.

La naturaleza es no-lineal. Los sistemas lineales son modelos aproximados. Las no-linealidades de la naturaleza causan la transferencia de energía entre osciladores, la transición entre estados cuánticos, las reacciones químicas, la interacción entre partículas, el equilibrio térmico (lo que permite definir la temperatura y entropía) la pérdida de información, el ruido, la disipación (roce, resistencia, amortiguador), la existencia de regímenes caóticos, las ondas de choque, las ondas solitarias (solitones), la asimetría entre pasado y futuro (a pesar de la simetría de las ecuaciones de la naturaleza respecto de la inversión temporal), y mucho más. En las no-linealidades de la naturaleza hemos de buscar el misterio de la vida.

Algunas de estas conclusiones han sido sugeridas por el presente trabajo de investigación.