

FLUJO OPTIMO DE POTENCIA

Francisco Vinuesa Gómez
Escuela Politécnica Nacional

Gabriel Arguello Ríos
Instituto Ecuatoriano de Electrificación

RESUMEN

El presente trabajo enfoca la optimización del flujo de potencia desde tres puntos de vista: flujo óptimo de potencia activa (despacho económico); flujo óptimo de potencia reactiva (minimización de pérdidas de transmisión); flujo óptimo de potencia en general (despacho económico y minimización de pérdidas, simultáneamente).

El método utilizado es aquel propuesto por Dommel-Tinney, el cual necesita de una formulación del flujo de potencia en variables de estado; de la formulación de funciones objetivo, y de la técnica del gradiente reducido para la optimización. El punto óptimo de operación de un SEP, se consigue cuando las variables de control toman valores tales que permiten que la función objetivo planteada tenga su valor mínimo, o muy cercano a éste.

Se presentan resultados obtenidos sobre tres sistemas de potencia sobre los cuales el esquema fue probado.

1. Introducción [4]

El flujo óptimo de potencia nace con el problema del despacho económico. Este problema empezó a ser discutido a partir de 1920, o quizás antes, cuando se debió repartir la carga total de un sistema, entre las unidades generadoras disponibles. Hacia 1930 se tomaron básicamente dos criterios para resolver el problema:

- a) El método de la carga base, en el que la unidad más eficiente era la primera en tomar carga, y lo hacía a su máxima capacidad, luego la segunda unidad más eficiente tomaba carga a su máxima capacidad, y así sucesivamente hasta satisfacer la demanda.
- b) El mejor punto de carga, en el que las unidades generadoras tomaban carga hasta alcanzar su punto mínimo de calentamiento, empezando con la unidad más eficiente, y cargando la menos eficiente al final.

Posteriormente se conoció que el método del costo incremental era el que daba los mejores resultados económicos, y a partir de 1931 se tomó como criterio que para realizar despacho económico, el costo incremental debe ser igual; criterio que se usa hasta hoy. Este modelo, que hoy se conoce como despacho económico simplificado, era sencillo y práctico, pero no considera las pérdidas de transmisión.

En la década de los 40, se hicieron intentos por incluir las pérdidas de transmisión, con lo que se consiguió la construcción de diagramas aproximados para calcular dichas pérdidas. Sin embargo se requería de un método que combine los costos incrementales de combustible con las pérdidas incrementales y con refinamientos de una fórmula de pérdidas.

Los trabajos de Kron y paralelamente de Kirchmayer y Stagg, dieron como resultado lo que ahora se conoce como las ecuaciones de coordinación, primeramente sugeridas por Ward y que se usan actualmente:

$$\frac{df_i}{dPG_i} + \lambda \frac{\partial PL}{\partial PG_i} = \lambda \quad ; \quad i = 1, 2, \dots$$

con la restricción:

$$\phi(P_i) = \sum PG_i - \sum PC_j - PL = 0$$

en donde:

$$PL = \sum_i \sum_j PG_i B_{ij} PG_j \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots$$

Al final de la década de los 50 aparece el flujo de potencia en computadores digitales. Con estas bases, a principios de la década de los 60, Squires y Carpentier formulan métodos más poderosos que no requieren de suposiciones que se hacían con la matriz (B) de coeficientes, y que pueden incluir un modelo exacto de la red. Tales modelos recibieron el nombre de flujos óptimos de potencia.

Finalmente, en 1967, Dommel y Tinney formulan el flujo óptimo de potencia partiendo de un flujo de potencia factible. El proceso de optimización conlleva la técnica de los multiplicadores de Lagrange y la técnica del gradiente reducido. Como restricciones de igualdad toman el flujo de potencia mismo. Toman como restricciones de desigualdad los límites máximos y mínimos de las variables de control. Incluyen restricciones funcionales de desigualdad, para tomar en cuenta los límites máximos y mínimos de las variables de estado y de las potencias reactivas de generación, y amplían las funciones objetivo con penalizaciones para incluir tales restricciones.

Este modelo tiene la ventaja de que no necesita de la matriz de coeficientes (B) ni de la fórmula de pérdidas, y es el motivo del presente trabajo. Para la aplicación de este modelo se requiere de:

1. Formulación del flujo de potencia en variables de estado.
2. Formulación de las funciones objetivo
3. Formulación del proceso de optimización

2. Formulación del flujo de potencia en variables de estado (X, Y)

Sea un sistema de potencia formado por M barras de carga, S barras de tensión controlada y una barra oscilante. Llamando N al número total de barras del sistema, se tiene que $N = M + S + 1$.

En el flujo de potencia convencional, se tiene que por definición, la potencia neta aparente en una barra K es:

$$S_K = E_K I_K^* = PNET_K + jQNET_K ; K = 1, 2, \dots, N \quad (1)$$

o su conjugada:

$$S_K^* = E_K^* I_K = PNET_K - jQNET_K ; K = 1, 2, \dots, N \quad (2)$$

$$I_K = \sum_{i=1}^N Y_{Ki} E_i ; K = 1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$E_K = V_K e^{j\theta_K} = V_K \angle \theta_K ; K = 1, \dots, N \quad (4)$$

$$Y_{Ki} = |Y_{Ki}| e^{j\gamma_{Ki}} = |Y_{Ki}| \angle \gamma_{Ki} ; K, i = 1, \dots, N \quad (5)$$

Combinando las ecuaciones 2, 3, 4 y 5, y separando en sus partes real e imaginaria, se llega a:

$$PNET_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i |Y_{Ki}| \cos(\theta_i - \theta_K + \gamma_{Ki});$$

$$K = 1, \dots, N \quad (6a)$$

$$QNET_K = \sum_{i=1}^N V_K V_i |Y_{Ki}| \sin(\theta_i - \theta_K + \gamma_{Ki});$$

$$K = 1, \dots, N \quad (6b)$$

Llamando a los segundos términos de estas ecuaciones $P_K(V, \theta)$ y $Q_K(V, \theta)$, respectivamente (2), se tiene:

$$P_K(V, \theta) - PNET_K = 0 \quad K = 1, \dots, N \quad (7)$$

$$Q_K(V, \theta) - QNET_K = 0 \quad K = 1, \dots, N \quad (8)$$

que son las ecuaciones de incrementos, utilizadas para la solución del flujo de potencia, será necesario plantear M ecuaciones de la forma de la ec. (7), M ecuaciones de la forma de la ecuación (8) y S ecuaciones de la forma de la ec. (7), es decir, un sistema de (2M+S) ecuaciones con (2M+S) incógnitas, para obtener la solución del flujo, suponiendo que la barra 1 es la oscilante, y que por lo tanto se conocen V1 y θ_1 .

Para plantear el flujo de potencia en variables de estado, se definen tres vectores, a saber:

\bar{x} : Vector de estado. Contiene todos los V y θ desconocidos

\bar{y} : Vector de variables independientes. Contiene todas las variables especificadas

$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$: Vector de incrementos. Se forma con las ecuaciones (7) y (8)

Estos vectores tendrán la siguiente forma:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} V \\ \theta \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{en las barras PQ} \\ \text{en las barras PV} \end{matrix}$$

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \left. \begin{matrix} PNET \\ QNET \end{matrix} \right\} \text{ en las barras PQ} \\ \left. \begin{matrix} PNET \\ V \end{matrix} \right\} \text{ en las barras PV} \\ \left. \begin{matrix} V1 \\ \theta1 \end{matrix} \right\} \text{ en la barra oscilante} \end{bmatrix}$$

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{y}) = \begin{bmatrix} \left. \begin{matrix} \text{ec (7)} \\ \text{ec (8)} \end{matrix} \right\} \text{ para las barras PQ} \\ \left. \begin{matrix} \text{ec (8)} \end{matrix} \right\} \text{ para las barras PV} \end{bmatrix}$$

Adicionalmente a esto, al vector \bar{y} se lo puede dividir en dos vectores:

$$\bar{y} = \begin{bmatrix} \bar{u} \\ \bar{p} \end{bmatrix}$$

en donde \bar{p} es un vector constante, y \bar{u} es el vector de control y contiene las variables de control. De aquí que indistintamente se puede referir a esta modelación como en variables (\bar{x}, \bar{y}) ó variables $(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})$. Cabe mencionar que la composición del vector \bar{y} está incompleta ya que los taps de transformadores con cambiadores automáticos forman también parte del vector \bar{y} , y más específicamente, del vector \bar{u} , dependiendo del tipo de optimización que se desee realizar. La solución del flujo de potencia será obtenida cuando se conozca el vector de estado \bar{x} que satisfaga la nulidad del vector $\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$. El algoritmo de Newton-Raphson, para la solución del flujo de potencia, es como sigue:

1. Suponer un vector inicial de estado \bar{x}_0
2. Obtener correcciones sucesivas para \bar{x} , mediante

$$\bar{x}^{(h+1)} = \bar{x}^{(h)} + \Delta \bar{x}^{(h+1)}$$

con la ecuación recursiva:

$$\left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}^{(h)}, \bar{y})}{\partial \bar{x}} \right] \Delta \bar{x}^{(h+1)} = - \bar{g}(\bar{x}^{(h)}, \bar{y}) \quad (9)$$

3. Probar un criterio de convergencia:

$$|\Delta \bar{x}| \leq \epsilon$$

$$\text{ó } |\bar{g}(\bar{x}, \bar{y})| \leq \epsilon$$

4. Si no se satisface el criterio de convergencia, regresar al paso 2; en caso contrario, se tiene la solución \bar{x} .

En la ecuación (9) se tiene la matriz $[\partial \bar{g} / \partial \bar{x}]$. Esta es la matriz jacobiano. El desarrollo de los vectores $\bar{x}, \bar{y}, \bar{g}(\bar{x}, \bar{y})$ y de la matriz $[\partial \bar{g} / \partial \bar{x}]$, así como sus demostraciones, se encuentran ampliamente expuestos en la referencia [10]

3. El Flujo Optimo de Potencia

Para determinar un punto óptimo de operación de un sistema eléctrico de potencia, ha sido práctica común realizar primeramente despacho económico y luego minimización de pérdidas. Los problemas que trae consigo este método son la determinación de la matriz de coeficientes [B] y la inclusión de la fórmula de pérdidas. Esto puede obviarse mediante la utilización del flujo óptimo de potencia.

En la operación de sistemas de potencia, el poder realizar despacho económico, minimización de pérdidas, o ambos a la vez, convierten al flujo óptimo de potencia en un modelo poderoso y útil para dicha actividad. Además de poder programar adecuadamente las centrales de generación, se podrá mantener un buen perfil de voltaje a lo largo de toda la red, mediante las restricciones que se impongan al flujo óptimo, lo cual permite que el sistema opere en las mejores condiciones técnicas y económicas para una carga dada.

Formulación matemática del flujo óptimo de potencia

En general, cualquier tipo de optimización consiste en buscar el valor óptimo (máximo o mínimo) de un función objetivo, siempre y cuando en el óptimo se cumpla con un conjunto de restricciones de igualdad y desigualdad.

En el caso del flujo óptimo de potencia, generalmente, la optimización es una minimización. Para que ésta sea posible, se necesita de un conjunto de variables de control y de la formulación de funciones objetivo.

Como se dijo antes, a partir del vector \bar{y} se obtendrá el vector de control \bar{u} . Este vector, dependiendo del tipo de optimización, estará conformado por una combinación de los siguientes parámetros controlables:

- Magnitudes de voltaje en las barras PV
- Taps en transformadores
- Potencias activas de generación PG

Para el propósito del presente trabajo, se consideraran tres tipos de optimización, que son: flujo óptimo de potencia activa (despacho económico), flujo óptimo de potencia reactiva (minimización de pérdidas), o las dos a la vez (flujo óptimo en general). A continuación se presentan las funciones objetivo y las variables de control utilizadas en cada caso.

3.1 Función objetivo y variables de control para flujo óptimo de potencia activa

La función objetivo para este caso es el costo total de generación. Para esto se consideran unidades térmicas de generación, por cuanto la función objetivo para cada unidad será su función de ENTRADA - SALIDA. Se considerará que dichas curvas son cuadráticas, por cuanto la función analítica de costo será representada, en general, por la ecuación:

$$C(PG) = a PG^2 + b PG + c \quad (10)$$

De aquí que la función objetivo será la suma de todas las funciones de costo, para las barras de generación, de modo que:

$$f = a_1 PG_1^2 + b_1 PG_1 + c_1 + \sum_i (a_i PG_i^2 + b_i PG_i + c_i) \quad (11)$$

en donde i representa cada una de las barras PV capaces de generar potencia activa.

El vector de control \bar{u} estará formado por las siguientes variables:

- Potencias activas de generación de las barras PV, no asociadas a condensadores sincrónicos.

Nótese: 1) Las potencias de generación están intrínsecamente relacionadas con el vector \bar{y} , ya que:

$$PNET_i = PG_i - Pc_i$$

- 2) No se toma la potencia de la barra oscilante como variable de control, ya que se deberá tener en cuenta las pérdidas del sistema.

3.2 Función objetivo y variables de control para flujo óptimo de potencia reactiva

Puesto que no se conocen con anterioridad las pérdidas del sistema, cuando el flujo de potencia queda resuelto, la barra oscilante tendrá que cubrir dichas pérdidas, según la ecuación de equilibrio:

$$PG_1 = PL + \Sigma Pc - \Sigma PG \quad (12)$$

- En donde: PG_1 = potencia de generación de la barra oscilante
- PL = potencia de pérdidas del sistema
- ΣPc = carga total del sistema
- ΣPG = potencia total de generación, excluyendo a la barra oscilante.

Según esto, minimizar las pérdidas del sistema, significa precisamente minimizar la potencia neta de la barra oscilante, de aquí que:

$$f = PNET_1 = P_1(\bar{x}, \bar{y}) \quad (13)$$

El vector \bar{u} estará formado por:

- Magnitudes de voltaje en las barras PV
- Magnitud de voltaje en la barra oscilante
- Taps en transformadores

3.3 Función objetivo y variables de control para flujo óptimo en general

Para este caso la función objetivo será idéntica a la función objetivo del despacho económico (ec. 11). La diferencia radica en el vector de control, que en este caso estará conformado por:

- Magnitudes de voltaje en las barras PV
- Magnitud de voltaje en la barra oscilante
- Taps en transformadores
- Potencias activas de generación en las barras PV, no asociadas a condensadores sincrónicos.

3.4 Modelo general de optimización

Con la función objetivo y las variables de control para cada uno de los casos planteados, el modelo general será expresado como:

$$\min_{\bar{u}} f(\bar{x}, \bar{u}) \quad (14)$$

Sujeto a las restricciones de igualdad impuestas por el flujo de potencia:

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \quad (15)$$

Para resolver el problema, se aplica el método clásico de optimización de los multiplicadores de Lagrange, para lo cual se debe obtener la función ampliada de Lagrange:

$$L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda}) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \bar{\lambda}^T \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) \quad (16)$$

En donde los λ_i , elementos del vector $\bar{\lambda}$, son llamados los multiplicadores de Lagrange. La función ampliada de Lagrange, deberá cumplir las siguientes condiciones necesarias, en el mínimo:

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}} + \left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{\lambda} = 0 \quad (17)$$

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{u}} = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} + \left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{u}} \right]^T \bar{\lambda} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\partial L(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}, \bar{\lambda})}{\partial \bar{\lambda}} = \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0 \quad (19)$$

La ecuación (17) contiene $[\partial \bar{g} / \partial \bar{x}]^T$, que como se vio antes, es la matriz jacobiano de la última iteración del flujo de potencia, razón por la cual se sugiere [2] que se use el método formal de Newton-Raphson para la resolución del mismo. Esto porque se requiere del conocimiento de todo el jacobiano, y no solamente de sus partes dominantes.

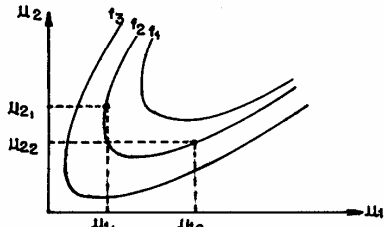
La ecuación (18) contiene la matriz $[\partial \bar{g} / \partial \bar{u}]$ que se conoce como el jacobiano reducido. La ecuación (19) es igual a la ecuación (15) y es una ecuación vectorial que representa al flujo de potencia.

Método del gradiente reducido para la solución del flujo óptimo de potencia

En cualquier punto factible, el flujo de potencia puede ser resuelto, es decir que la ecuación (19) puede ser satisfecha. Una vez resuelto el flujo de potencia, con ayuda del jacobiano de la última iteración del flujo, y con el vector $\partial f / \partial \bar{x}$, se puede encontrar el vector $\bar{\lambda}$, a partir de la ecuación (17).

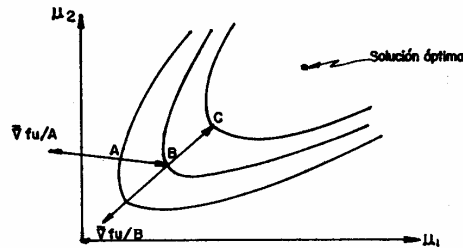
Reemplazando este vector $\bar{\lambda}$ en la ecuación (18), se encontrará, en general que $\partial L / \partial \bar{u} \neq 0$, ya que el punto factible de operación, no será necesariamente el óptimo. El vector $\partial L / \partial \bar{u}$ tiene un significado importante; es el vector gradiente $\bar{\nabla} f_u$, el cual es ortogonal a los contornos de valores constantes de la función objetivo [2].

Los contornos de valores constantes de las funciones objetivo que se está planteando, son curvas convexas, y en el caso de dos dimensiones, tienen las siguientes formas:



En donde las curvas más abiertas tienen mayor valor, así, $f_3 > f_2 > f_1$. Cada una de estas curvas indica el lugar geométrico en donde la función objetivo tiene un valor constante, así por ejemplo, se tendrá un valor f_2 con las coordenadas (u_{11}, u_{21}) ó con las coordenadas (u_{12}, u_{22}) . Partiendo de este concepto, se puede obtener infinidad de pares de coordenadas para obtener un mismo valor de las funciones objetivo, en el caso de dos dimensiones.

Por otro lado, las ecuaciones (17), (18) y (19) son ecuaciones no lineales y deben ser resueltas por métodos iterativos. El esquema iterativo más simple es el "método del descenso más pronunciado" llamado también método del gradiente reducido. La idea básica de este método es partir de una solución factible (un punto en la curva anterior) y hacer que la optimización busque nuevas soluciones en la dirección del descenso más pronunciado, es decir, en la dirección del gradiente negativo. El nuevo punto factible encontrado estará más cerca al punto óptimo. La interpretación gráfica del método, en dos dimensiones, es la siguiente:



En el gráfico anterior, si A es una solución factible inicial, y si se evalúa el gradiente $\bar{\nabla} f_u / A$, en este punto, se encontrará la dirección en que más rápidamente crecen las funciones. Por lo tanto, si se encuentra otra solución B, en la dirección del gradiente negativo, esta nueva solución tendrá un menor valor para la función objetivo y, consecuentemente, B estará más cerca de la solución óptima que A. Procediendo de la misma forma, se encontrará el punto C, y así sucesivamente hasta satisfacer un criterio de convergencia.

Se llama método del gradiente reducido porque para hacer las correcciones descritas, además de cambiar de signo al gradiente, se lo multiplica por una constante c.

5. Algoritmo de solución

El algoritmo de solución por el método del gradiente reducido es el siguiente [2]:

- Asumir un conjunto de variables de control, para formar el vector de control \bar{u} .
- Encontrar una solución factible del flujo de potencia, por el método de Newton-Raphson formal. Con esto se obtendrá la matriz jacobiano en el punto de solución, en forma factorizada.
- Resolver la ecuación (17) para obtener $\bar{\lambda}$

$$\left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{x}} \right]^T \bar{\lambda} = - \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{x}} \quad (20)$$

- Insertar el vector $\bar{\lambda}$ obtenido, en la ecuación (18) para obtener el gradiente $\bar{\nabla} f_u$.

$$\bar{\nabla} f_u = \frac{\partial f(\bar{x}, \bar{u})}{\partial \bar{u}} + \left[\frac{\partial \bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p})}{\partial \bar{u}} \right]^T \bar{\lambda} \quad (21)$$

El gradiente $\bar{\nabla} f_u$ mide la sensibilidad de la función objetivo con respecto a cambios en el vector \bar{u} , sujeto a las restricciones de igualdad (19). Nótese que el vector $\partial f / \partial \bar{u}$, por sí mismo, no da información útil puesto que ignora las restricciones de igualdad [2].

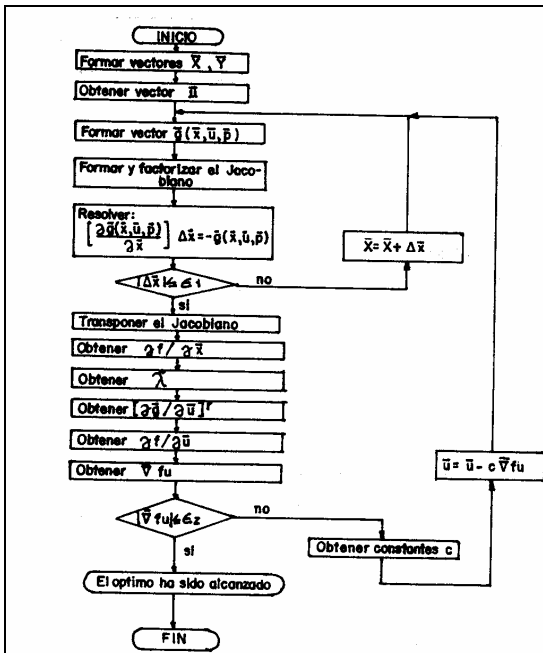
- Verificación de convergencia: Si $|\bar{\nabla} f_u|$ es suficientemente pequeño, el mínimo (óptimo) ha sido alcanzado, de otra forma ir al paso f.
- Encontrar un nuevo valor para cada una de las variables de control:

$$\bar{u} \text{ (nuevo)} = \bar{U} \text{ (anterior)} + \Delta \bar{u} \quad (22)$$

$$\text{con: } \Delta \bar{u} = -c \bar{\nabla} f_u$$

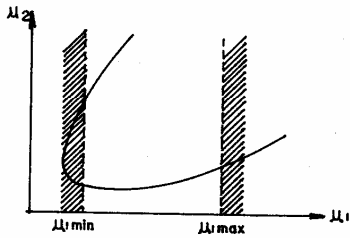
y regresar al paso b)

Este algoritmo sugiere el siguiente diagrama de flujo:



6. Modelo con restricciones de desigualdad

En este modelo se incluyen restricciones de desigualdad sobre los parámetros de control, componentes del vector u . El restringir dichos parámetros significa reducir el amplio espacio de posibles soluciones, a un espacio más pequeño, en donde los parámetros de control tomen valores que están entre sus límites máximos y mínimos. Gráficamente, en dos dimensiones, significa:



Como se observa, se ha reducido el espacio de posibles soluciones. En este caso, solamente se ha restringido a una variable de control u_1 , pero en general se puede restringir a todos los parámetros de control, y de hecho, en casos reales, se procede así.

Matemáticamente, el modelo con restricciones de desigualdad sobre los parámetros de control se plantea como sigue:

$$\min_u f(\bar{x}, \bar{u})$$

Sujeto a las restricciones de igualdad

$$\bar{g}(\bar{x}, \bar{u}, \bar{p}) = 0$$

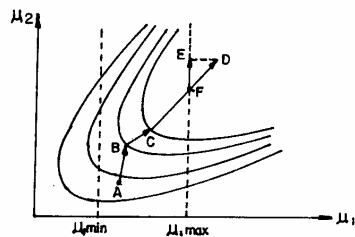
Y a las restricciones de desigualdad:

$$\bar{u}_{\min} \leq \bar{u} \leq \bar{u}_{\max} \quad (23)$$

Las restricciones de la expresión (23) son manipuladas de modo que el algoritmo descrito en la sección 5, no envíe a las variables de control más allá de sus límites permisibles. Si cualquier u_i , componente del vector \bar{u} , al corregirse con Δu_i , llega a tener un valor tal que exceda uno de sus límites, entonces u_i se colocará en el límite correspondiente: [2]¹

$$u_i \text{ (nuevo)} = \begin{cases} u_{i,\max}, & \text{si } u_i \text{ (anterior)} + \Delta u_i > u_{i,\max} \\ u_{i,\min}, & \text{si } u_i \text{ (anterior)} + \Delta u_i < u_{i,\min} \\ u_i \text{ (anterior)} + \Delta u_i, & \text{de cualquier otra forma} \end{cases} \quad (24)$$

Esto implica que cuando una de las variables de control ha llegado a uno de sus límites, entonces el movimiento en la dirección del gradiente negativo puede no efectuarse, sino que se realizará a lo largo de la proyección del gradiente negativo sobre el límite alcanzado. Gráficamente, en dos dimensiones, se tiene:



Los movimientos sucesivos en las direcciones de los gradientes negativos se efectúan a partir del punto A, hasta llegar al punto C. En este punto, el algoritmo sin restricciones de desigualdad enviaría a una solución en el punto D. Sin embargo, al incluir tales restricciones, se tiene una solución en el punto E. Dicho en otras palabras, del punto C se llegaría al punto E, al punto E, en la dirección de la proyección del gradiente negativo sobre el límite alcanzado.

Ahora, no importa que un parámetro haya alcanzado un límite; su participación en el gradiente debe ser siempre tomada en cuenta, ya que en los siguientes ciclos iterativos puede salir del límite, hacia regiones no permitidas, o en el otro caso, volver a regiones donde su valor esté dentro del rango permitido. [2]

Cuando hay restricciones de desigualdad sobre los parámetros de control, en el mínimo las componentes del vector gradiente $\bar{v}^T fu$ deben cumplir con las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial u_i} = 0; & \text{si } u_{i,\min} \leq u_i \leq u_{i,\max} \\ \frac{\partial L}{\partial u_i} \leq 0; & \text{si } u_i = u_{i,\max} \\ \frac{\partial L}{\partial u_i} \geq 0; & \text{si } u_i = u_{i,\min} \end{cases} \quad (25)$$

El teorema de Kuhn-Tucker prueba que las condiciones (25) son necesarias en el mínimo, puesto que las funciones involucradas son convexas.

7. Modelo con restricciones funcionales

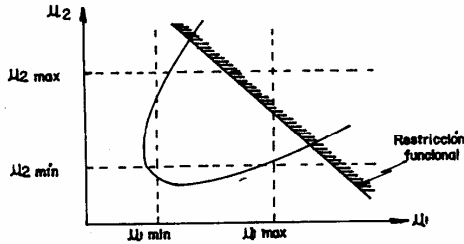
Además de las restricciones de desigualdad sobre el vector de control \bar{u} , puede también haber restricciones funcionales de desigualdad:

$$\theta(\bar{x}, \bar{u}) \leq 0 \quad (26)$$

Un caso frecuente de este tipo de restricciones son los límites de las variables dependientes o de estado, componentes del vector \bar{x} .

$$\bar{x}_{\min} \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{\max} \quad (27)$$

Gráficamente, en dos dimensiones, se presentan como:



El problema de este tipo de restricciones está en que no pueden ser manipuladas de la misma forma que las restricciones sobre los parámetros de control. Existen algunos métodos para tomar en cuenta las restricciones funcionales de desigualdad, de los cuales los más importantes son:

1. Linealizar el problema y usar programación lineal.
2. Transformar las restricciones funcionales a restricciones de desigualdad sobre parámetros de control, cambiando variables \bar{x} a \bar{u} , y viceversa.
3. Técnica del sumatorio del gradiente múltiple.

Sin embargo estos tres métodos necesitan de la matriz de sensibilidad, o al menos de sus elementos dominantes, para relacionar cambios en \bar{u} para cambios en \bar{x} .

El método que plantean Dommel-Tinney es el método de penalización, que consiste en aumentar a la función objetivo, penalizaciones a las restricciones funcionales, lo cual hace retroceder la solución a un punto suficientemente cercano a la restricción. Se escoge este método por tres razones:

1. Las restricciones funcionales tienen rara vez límites rígidos, sino que más bien tienen límites blandos.
2. Este método añade muy poco al algoritmo, ya que las penalizaciones influyen solamente en los vectores $\partial f/\partial \bar{x}$ y $\partial f/\partial \bar{u}$.
3. Este método da soluciones factibles en donde otros métodos, con límites rígidos, excluirían soluciones.

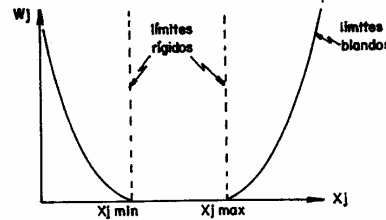
Para usar el método de penalización se deberá modificar las funciones objetivo de la siguiente manera:

$$f(\text{con penalización}) = f(\bar{x}, \bar{u}) + \sum_j W_j \quad (28)$$

En donde se introduce una penalización W_j para cada una de las restricciones funcionales. Estas funciones de penalización tienen la siguiente forma:

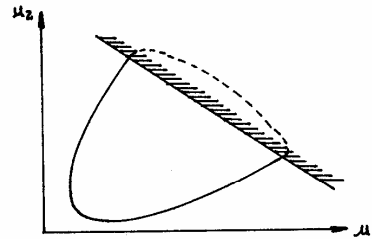
$$W_j = \begin{cases} s_j(x_j - x_{j,\max})^2; & \text{cuando } x_j > x_{j,\max} \\ s_j(x_j - x_{j,\min})^2; & \text{cuando } x_j < x_{j,\min} \end{cases}$$

Las funciones de penalización pueden ser representadas gráficamente del siguiente modo:



Los límites blandos se acercan más a los rígidos cuanto más alto es el valor de los s_j . De aquí que el método sugiere que se empiece el proceso de optimización con valores bajos de s_j , y que se los vaya incrementando a lo largo del proceso, si la solución excede a un determinado límite de tolerancia.

La introducción de penalización en la función objetivo hace que los contornos de ésta se cierren cerca de la restricción funcional



Cuanto más alto sea el valor de s_j , más cercano estará el cierre (de los contornos) a la restricción funcional.

En el presente trabajo se ha tomado como restricciones funcionales:

- Las diferencias angulares entre dos barras interconectadas, que deberán ser menores a un cierto ángulo α_{\max} especificado.
- Las magnitudes de voltaje de las barras PQ, que deberán estar dentro de sus límites máximo y mínimo, y que no son controlables.
- Las potencias reactivas de generación de las barras PV y oscilante, que también deberán estar dentro de sus límites máximo y mínimo.

El presente trabajo se halla desarrollado en detalle en la referencia [10], en donde se puede encontrar todos los detalles de modelación expuestos brevemente aquí.

8. Resultados obtenidos

El programa digital que se ha desarrollado consta de algo más de 3000 proposiciones FORTRAN. Este programa fue probado para los tres tipos de optimización planteados, sobre tres sistemas eléctricos:

1. Sistema de 5 barras (referencias 6, 8 y 9)
2. Sistema de 14 barras (referencias 8 y 9)
3. Sistema Nacional Interconectado

Los resultados se encuentran comparativamente analizados en la referencia 11.

Para propósitos de este trabajo, se presentan los resultados de estos tres sistemas, para el caso de Flujo óptimo en general.

1. Sistema de 5 barras:

Caso Base

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE	GENERACION		CARGA	
		p.u.	MW	MVAR	MW	MVAR
1	S	1.050	71.94	6.07		
2	C	0.9922			30.00	12.00
3	C	0.9916			70.00	3.00
4	T	1.050	100.00	16.03	86.00	20.00
5	T	1.050	100.00	45.12	80.00	10.00

S: Slack T: Tensión controlada C: Carga

Condiciones finales:

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE	GENERACION		CARGA	
		p.u.	MW	MVAR	MW	MVAR
1	S	1.050	54.49	8.18		
2	C	0.9817			30.00	12.00
3	C	0.9843			70.00	3.00
4	T	1.050	169.83	14.87	86.00	20.00
5	T	1.0344	47.76	43.74	80.00	10.00

S: Slack T: Tensión controlada C: Carga

	COSTOS S./h	PERDIDAS MW
INICIALES	1201.95	5.934
FINALES	1153.29	6.11

2. Sistema IEEE de 14 barras

Caso base:

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE	GENERACION		CARGA	
		p.u.	MW	MVAR	MW	MVAR
1	S	1.060	65.96	10.21		
2	T	1.045	100.00	-12.53	21.70	12.70
3	T	1.070	100.00	41.63	11.20	7.50
4	C	1.0338			47.80	3.90
5	C	1.0446			7.60	1.60
6	T	1.010		15.00	94.20	19.00
7	C	1.0334				
8	T	1.090		35.02		
9	C	0.9979			29.50	16.60
10	C	1.0013			9.00	5.80
11	C	1.0298			3.50	1.80
12	C	1.0513			6.10	1.60
13	C	1.0404			13.50	5.80
14	C	0.9969			14.90	5.00

S: Slack T: Tensión controlada C: Carga

Condiciones finales

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE	GENERACION		CARGA	
		p.u.	MW	MVAR	MW	MVAR
1	S	1.0579	159.61	-23.32		
2	T	1.0501	68.40	27.92	21.70	12.70
3	T	1.0526	40.40	36.07	11.20	7.50
4	C	1.0303			47.80	3.90
5	C	1.0375			7.60	1.60
6	T	1.0164		20.85	94.20	19.00
7	C	1.0369				
8	T	1.100		39.39		
9	C	1.0017			29.50	16.60
10	C	1.0025			9.00	5.80
11	C	1.0234			3.50	1.80
12	C	1.0357			6.10	1.60
13	C	1.0274			13.50	5.80
14	C	0.9939			14.90	5.00

S: Slack T: Tensión controlada C: Carga

	COSTOS GENER. S./h	PERDIDAS MW
INICIALES	1212.87	6.95
FINALES	1136.42	9.31

3. Sistema Nacional Interconectado (25 barras)

Caso base

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE	GENERACION		CARGA	
		p.u.	MW	MVAR	MW	MVAR
1	S	1.050	301.62	17.08		
2	C	1.0483				
3	C	1.0392				
4	C	1.0313			8.60	12.00
5	C	1.0489				
6	C	1.0315			12.20	3.00
7	C	1.0263				
8	C	1.0438			19.90	9.00
9	C	1.0066				
10	C	1.0144			255.00	87.00

sigue.....

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE p.u.	GENERACION		CARGA	
			MW	MVAR	MW	MVAR
11	T	1.030	139.98	76.22		
12	T	1.020	30.00	- 2.08		
13	C	1.0324				
14	C	1.0283			41.70	9.00
15	C	1.0267				
16	C	1.0308			10.00	5.00
17	C	1.0322			11.20	6.00
18	C	1.0093				
19	C	1.0249				
20	T	1.020	15.00	- 4.29		
21	T	1.010	75.01	41.49	192.30	82.20
22	C	1.0056			18.40	7.00
23	C	1.0060				
24	T	1.020	69.00	13.50		
25	C	0.9848			39.10	22.00

S: Slack T: Tensión Controlada C: Carga

Condiciones finales:

BARRA No.	TIPO	VOLTAJE p.u.	GENERACION		CARGA	
			MW	MVAR	MW	MVAR
1	S	1.050	223.75	-12.19		
2	C	1.0533				
3	C	1.0444				
4	C	1.0364			8.60	12.00
5	C	1.0558				
6	C	1.0477			12.20	3.00
7	C	1.0421				
8	C	1.0573			19.90	9.00
9	C	1.0186				
10	C	1.0136			255.00	87.00
11	T	1.030	107.60	75.91		
12	T	1.020	99.73	20.70		
13	C	1.0483				
14	C	1.0443			41.70	9.00
15	C	1.0397				
16	C	1.0441			10.00	5.00
17	C	1.0460			11.20	6.00
18	C	1.0188				
19	C	1.0315				
20	T	1.020	40.87	- 9.33		
21	T	1.0100	86.14	30.77	192.30	82.20
22	C	1.0102			18.40	7.00
23	C	1.0072				
24	T	1.020	58.16	12.36		
25	C	0.9860			39.10	22.00

S: Slack T: Tensión controlada C: Carga

	COSTOS GENE.	PERDIDAS
	S./h	MW
INICIALES	1132.81	13.202
FINALES	1117.51	7.839

NOTA: Los costos de generación para este último ejemplo son hipotéticos, puesto que no se pudo encontrar datos de los coeficientes de las funciones objetivo.

REFERENCIAS

- Arguello, G., Operación Óptima de Sistemas de Potencia, INECEL, Quito, 1977
- H.W. Dommel, W.F. Tinney, Optimal Power Flow Solutions, IEEE Trans. on PAS Vol 87, 1968, pp.

1866-1876.

- W.F. Tinney, W.L. Powell, Notes on Newton-Raphson Method For Solutions of AC Power Flow Problem, BPA, Portland, 1971.
- H.H. Happ, Optimal Power Dispatch - A Comprehensive Survey, IEEE Trans on PAS Vol 96, 1977, pp. 841-851.
- A.M. Sasson, Optimal Load Flow - A practical Outlook, IEEE Tutorial Course, New York, 1976.
- F. Aboytes, B. Vidrio, H. Torres, Estudios de Flujos Óptimos en Sistemas Eléctricos de Potencia, GGO, Atliguetzia, 1979.
- J. Peschon, W.F. Tinney, O.J. Tveit, M. Cuécod, Optimum Control of Reactive Power Flow, IEEE Trans. on PAS Vol. 87, 1968, pp. 40-48.
- Cruz J.J., Programa Digital para Despacho Económico de Potencia Real, Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Eléctrico, E.P.N., Quito, 1983.
- González M.R., Optimización de la Producción de Energía en Sistemas Eléctricos de Potencia, Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Eléctrico, E.P.N., Quito, 1983.
- Vinueza F.J., Flujo Óptimo de Potencia, Tesis previa a la obtención del título de Ingeniero Eléctrico, E.P.N., Quito, 1984.