

APLICAÇÃO DE FUNÇÕES ELÍPTICAS DE JACOBI NO
PROJETO DE FILTROS DIGITAIS

FREITAS, FRANCISCO DAMASCENO
FILHO, JOSÉ HENRIQUE R.
ABDALLA JR., HUMBERTO
Departamento de Engenharia Elétrica
Universidade de Brasília - UnB
70910 - Brasília - DF - Brasil

RESUMO

Neste trabalho foi utilizado a aproximação e líptica para realizar o filtro no domínio s. Através de uma transformação conforme, obtém-se a função de transferência no domínio z.

Pode ser mostrado que os filtros elípticos são ótimos no sentido de que para uma dada ordem e determinadas especificações de ondulação na banda passante e na banda de rejeição, nenhum outro filtro apresenta uma banda de transição tão estreita. Foi desenvolvido um programa, com o qual obtemos a função de transferência do filtro no domínio z a partir de suas características.

INTRODUÇÃO

Um método bastante utilizado de projetos de filtros digitais com resposta impulsional infinita (IIR), baseia-se na realização do filtro no domínio s e em seguida, através de uma transformação conforme, obtém-se o filtro digital desejado.

Este artigo aborda o projeto de um filtro elíptico, onde se usa a aplicação de funções elípticas de Jacobi. Os filtros elípticos são caracterizados por uma resposta em magnitude que apresenta igual ondulação tanto na banda passante quanto na banda de rejeição e uma banda de transição bastante estreita com parada a de um outro filtro IIR de mesma ordem.

Em 1931, Cauer apresentou a primeira solução para o problema da aproximação fundamentada das funções elípticas de Jacobi, até que Darlington consolidasse, em 1939, a organização de um método que permitisse a construção de uma curva de atenuação equi-ondulante na faixa passante e equimínima na faixa de rejeição⁶

Os desenvolvimentos que sucederam ao pioneirismo de Cauer e Darlington contribuíram, entre outras coisas, para simplificar a matéria e fazer com que a sua exposição adquirisse um cunho mais didático. A complexidade dos cálculos, porém, levou ao surgimento de tabelas e curvas e com o advento do computador em grande escala, passou-se a ter então maior facilidade no projeto direto sem recorrência às curvas.

1. FUNÇÕES ELÍPTICAS

No projeto de um filtro passa baixa, uma aproximação $|H(\omega)|$ da resposta em amplitude satisfaz as condições¹

$$A_1 \leq |H(\omega)| \leq 1, \quad |\omega| \leq c \quad (1.1)$$

$$|H(\omega)| \leq A_2, \quad |\omega| \geq d \quad (1.2)$$

onde A_1 , A_2 , c e d são escolhidos conforme a figura 1. A resposta $|H(\omega)|$ é monotonicamente decrescente na região de transição $c \leq \omega \leq d$.

Uma aproximação geralmente utilizada para a resposta em amplitude é a função^{1,2}

$$|H(\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \epsilon^2 f(\omega^2)}} \quad (2)$$

onde ϵ é uma constante real e $f(\omega^2)$ é uma função polinomial ou racional.

Se $f(\omega^2)$ é uma função racional, o filtro ótimo é elíptico¹ e

$$f(\omega^2) = R_n^2(\omega) \quad (3)$$

é o quadrado de uma função racional de Che-

byshev definida por ¹

$$R_n(\omega) = \frac{\pi}{n} \prod_{i=1}^{n/2} \frac{(\omega_{2i-1}^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_{2i-1}^2 \omega^2)}, \quad n = 2, 4, \dots \quad (4)$$

$$R_n(\omega) = \omega \prod_{i=1}^{(n-1)/2} \frac{(\omega_{2i}^2 - \omega^2)}{(1 - \omega_{2i}^2 \omega^2)}, \quad n = 3, 5, \dots \quad (5)$$

A teoria requerida para a determinação da função $R_n(\omega)$ envolve o conhecimento de funções elípticas de Jacobi. Em ambos os casos das equações (4) e (5), os zeros positivos de $R_n(\omega)$ são dados por²

$$\omega_m = \sqrt{k'} \operatorname{Sn}(m K/n) \quad (6)$$

onde $m = 1, 3, \dots, n-1$, se n é par ou $m = 2, 4, \dots, n-1$, se n é ímpar; $\operatorname{Sn}(u)$ é a função seno elíptica definida por³

$$\operatorname{Sn}(u) = \operatorname{Sen} \phi \quad (7)$$

As quantidades u , ϕ e k estão relacionadas por^{2, 4, 5}

$$u(k, \phi) = \int_0^\phi \frac{dx}{\sqrt{1 - k^2 \operatorname{Sen}^2 x}} \quad (8.1)$$

$$K = u(k, \pi/2) \quad (8.2)$$

onde k , $0 \leq k \leq 1$, é o módulo e vale c^2 .

Para valores de k em torno da unidade, a função $\operatorname{Sn}(u)$ pode ser aproximada por⁵

$$\operatorname{Sn}(u) = \operatorname{tgh}(u) + \frac{1}{4} \hat{k}^2 \operatorname{Sech}^2(u) \cdot [\operatorname{Senh}(u) \operatorname{Cosh}(u) - u] \quad (9)$$

Sendo $\hat{k}^2 = 1 - k^2$.

A função $R_n(\omega)$ tem a propriedade

$$R_n(1/\omega) = 1/R_n(\omega) \quad (10)$$

de que seus pólos e zeros são recíprocos, se $|H(\omega)|$ apresenta igual ondulação nas bandas $(0, c)$ e (d, ∞) , com $d = 1/c$.

2. DETERMINAÇÃO DOS PARÂMETROS

Tendo-se k como a relação c/d e k_1 definido por

$$k_1 = \frac{\alpha}{\sqrt{(1/A_2)^2 - 1}} \quad (11)$$

e ainda

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{(1/A_1)^2 - 1}} \quad (12)$$

$$\hat{k}_1^2 = 1 - k_1^2 \quad (13)$$

Podemos estimar a ordem do filtro através da expressão³

$$n = \frac{K(k) \cdot K(k_1)}{K(\hat{k}) \cdot K(\hat{k}_1)} \quad (14)$$

A obtenção da função $R_n(\omega)$ consiste em se achar os parâmetros n, a, b usando-se curvas apropriadas para a determinação da função racional $f_n(a, b, \omega)$ dada por¹

$$f_n(a, b, \omega) = \frac{p_n(a, a)(b\omega)}{\omega^n p_n(a, a)(b/\omega)} \quad (15)$$

onde $p_n(a, a)(x)$ é o polinômio ultra esférico de grau n com parâmetro a . A função f_n pode ser colocada na forma

$$f_n(a, b, \omega) = \frac{(-1)^{[n/2]} \prod_{i=0}^{[n/2]} B_{n-2i} \omega^{n-2i}}{\prod_{i=0}^{[n/2]} B_{n-2i} \omega^{2i}} \quad (16)$$

onde $[n/2]$ significa o maior inteiro contido em $n/2$ e B_{n-2i} é tabelado para $n=2, 3, \dots, 9$.

Uma maneira apropriada para o cálculo de $R_n(\omega)$, utilizando o computador digital é calcular os ω_m (frequências críticas) a partir da equação (6) e a ordem n através da equação (14). Desta forma, a função de transferência do filtro elíptico $H(s)$ pode ser obtida de^{1, 2}.

$$H(s)H(-s) = \frac{1}{1 + \epsilon^2 R_n^2(\omega)} \Big|_{\omega^2 = -s^2} \quad (17)$$

onde s é o operador complexo de Laplace.

Tomando-se apenas os pólos e zeros do semi-plano esquerdo do plano s , obtemos

$$H(s) = \frac{A \prod_{i=1}^{[n/2]} (a_{2i}^2 + s^2)}{s^{n+b_{n-1}} s^{n-1} + \dots + b_1 s + b_0} \quad (18)$$

onde A é uma constante de ganho e

$$a_{2i} = \begin{cases} 1/\omega_{2i}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \\ 1/\omega_{2i-1}, & \text{se } n \text{ é par} \end{cases} \quad (19)$$

$$\epsilon^2 = \frac{\sqrt{(1-A_1^2)(1-A_2^2)}}{A_1 A_2} \quad (20)$$

os b_{is} são obtidos tomando-se apenas os pólos do semi-plano esquerdo do plano s .

3. ALGORITMO PARA PROGRAMAÇÃO

3.1 - Cálculo dos Zeros de $G(s)$

O programa para obtenção da função de transferência $H(z)$ do filtro digital consiste basicamente em se encontrar os coeficientes de $H(z)$. Para isto, encontramos os pólos e zeros da expressão

$$G(s) = 1 + \epsilon^2 R_n^2(s) \quad (21)$$

ou substituindo $R_n(s)$ em (21)

$$G(s) = \frac{\left\{ \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 + \omega_{2i-1}^2 s^2) \right\}^2 + \epsilon^2 \left\{ \prod_{i=1}^{[n/2]} (\omega_{2i-1}^2 + s^2) \right\}^2}{\left\{ \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 + \omega_{2i-1}^2 s^2) \right\}^2} \quad (22)$$

se n é par, ou ainda

$$G(s) = \frac{\left\{ \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 + \omega_{2i}^2 s^2) \right\}^2 - \epsilon^2 s^2 \left\{ \prod_{i=1}^{[n/2]} (\omega_{2i}^2 + s^2) \right\}^2}{\left\{ \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 + \omega_{2i}^2 s^2) \right\}^2} \quad (23)$$

se n é ímpar.

Calculamos os zeros de $G(s)$ (todos zeros complexos conjugados para n par; dois zeros reais de sinais opostos com os restantes complexos conjugados para n ímpar) e em seguida separamos aqueles que estão no semi-plano esquerdo de s .

Usando-se a transformada bilinear para mapearmos o plano s no plano z

$$s' = \frac{2}{T} \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}} \quad (24)$$

e desnormalizando s'

$$s = \frac{s'}{\frac{2}{T} \operatorname{tg} \pi F_c} \quad (25)$$

onde T é o período de amostragem, F_c é a frequência de corte digital normalizada em relação a frequência de amostragem.

Observa-se que para ordens elevadas do filtro, o algoritmo para o cálculo das raízes (zeros de $G(s)$) não converge em virtude dos valores bastante próximos do polinômio reduzido.

Em geral, um filtro elíptico de ordem 6 a 9 já apresenta um excelente desempenho. Neste caso não há problema de convergência.

Caso se queira um filtro passa faixa, é necessário a transformação

$$s' = \frac{s + 1/s}{\delta} \quad (26.1)$$

$$s = \frac{2}{T} \frac{(1 - z^{-1})}{1 + z^{-1}} / \left(-\frac{2}{T} \operatorname{tg} \pi F_c \right)$$

$$(26.2)$$

onde δ é a largura de faixa.

3.2 - Obtenção de $H(z)$

Com a obtenção da função $H(s)$ através da equação (18) e usando as equações (24) e (25) obtemos a função de transferência do filtro digital.

$$H(z) = \frac{K_D \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 + c_i z^{-1} + z^{-2})}{\prod_{i=1}^{[n/2]} (1 - a_i z^{-1} - b_i z^{-2})}, \quad n \text{ par} \quad (27)$$

$$H(z) = \frac{K_D (1 + z^{-1}) \prod_{i=1}^{[n/2]} (1 + c_i z^{-1} + z^{-2})}{(1 - a_1 z^{-1}) \prod_{i=2}^{[n/2]} (1 - a_i z^{-1} - b_i z^{-2})}, \quad n \text{ ímpar} \quad (28)$$

onde K_d é o ganho digital e as expressões acima já saem apropriadas para representação em uma estrutura em cascata.

4. EXEMPLO E RESULTADOS

O programa foi testado para várias especifici

cações. Seja por exemplo os dados abaixo

- Frequência de corte $F_c = 0.1$
- Largura da banda de transição = 0.001
- Ripple na banda passante = 0.1
- Ripple na banda de rejeição = 0.1

Isto nos leva a $n = 6$

4.1 - Resposta em Frequência

A função de transferência do filtro digital obtida é

$$H(z) = \frac{0.08116(1-0.6564z^{-1}+z^{-2})}{(1-1.5950z^{-1}+0.9691z^{-2})} \dots$$

$$\dots \frac{(1-1.5400z^{-1}+z^{-2})(1-1.6078z^{-1}+z^{-2})}{(1-1.5733z^{-1}+0.9046z^{-2})(1-1.4003z^{-1}+0.5691z^{-2})}$$

(29)

A resposta em frequência é mostrada na figura 2 e a representação em cascata é apresentada na figura 3.

4.2 - Simulação do Filtro

Para verificar a validade do filtro, foi feito uma simulação da implementação em microprocessador, tomando-se a forma de onda ruidosa apresentada na figura 4, cuja equação é

$$x_k = \begin{cases} 5 \text{Sen } 0.1\pi(k-1), & \text{se } 1 \leq k \leq 20 \\ 5 \text{Sen } 0.1\pi(k-1) + \text{Cos } 0.6\pi(k-1) - \text{Sen } 0.8\pi(k-1), & \text{se } k > 20 \end{cases}$$

(30)

Utilizando a estrutura em cascata para representação do filtro digital, teremos o seguinte desenvolvimento

$$w_k = x_k - 0.6564x_{k-1} + x_{k-2} + 1.5950w_{k-1} - 0.9691w_{k-2} \quad (31.1)$$

$$U_k = w_k - 1.5400w_{k-1} + w_{k-2} + 1.5733U_{k-1} - 0.9046U_{k-2} \quad (31.2)$$

$$Y_k = 0.08116(U_k - 1.6078U_{k-1} + U_{k-2}) + 1.4003Y_{k-1} - 0.5690Y_{k-2} \quad (31.3)$$

cuja forma de onda filtrada Y_k é mostrada na figura 5.

Pode-se verificar através da figura 5 que o ruído contido em (30) foi eliminado, passando apenas o sinal de frequência $F=0.05$, senoidal, cuja amplitude é 5.

5. CONCLUSÃO

Com este trabalho, apresentamos uma técnica simples de projeto de filtros elípticos, utilizando os conhecimentos de funções elípticas de Jacobi. Os procedimentos seguidos são facilmente implementados em computador, fugindo-se assim da rotina de consulta de tabelas de funções elípticas.

6. REFERÊNCIAS

- ¹ D.E.Johnson, "Introduction to Filter Theory". New Jersey: Prentice-Hall, inc., 1976
- ² D.E.Johnson, J.R.Johnson, M.D.Kashefi, "Ultraspherical Rational Filters". IEEE Trans. Circuit Theory, pp.596-599, set. 1973
- ³ L.R.Rabiner, B.Gold, "Theory and Application of Digital Signal Processing". New Jersey: Prentice Hall, inc., 1975
- ⁴ L.M.Milne-Thomson, "Jacobian Elliptic Function Tables". New York: Dover Publication, inc., 1950
- ⁵ P.F.Byrol, M.D.Friedman, "Handbook of Elliptic Integrals for Engineers and Physicists". Springer-Verlog, 1954
- ⁶ C.P.Serra, "Teoria e Projeto de Filtros". Vol.1, Série Ouro CPqD:Cartgraf Editora Ltda., 1983.

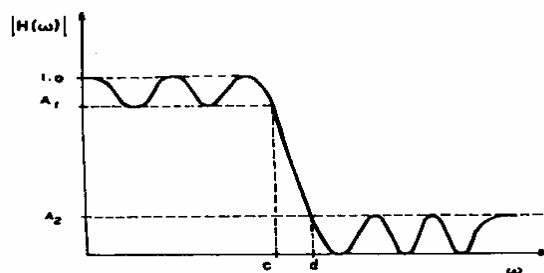


Fig.1 - Resposta em amplitude de um filtro elíptico analógico

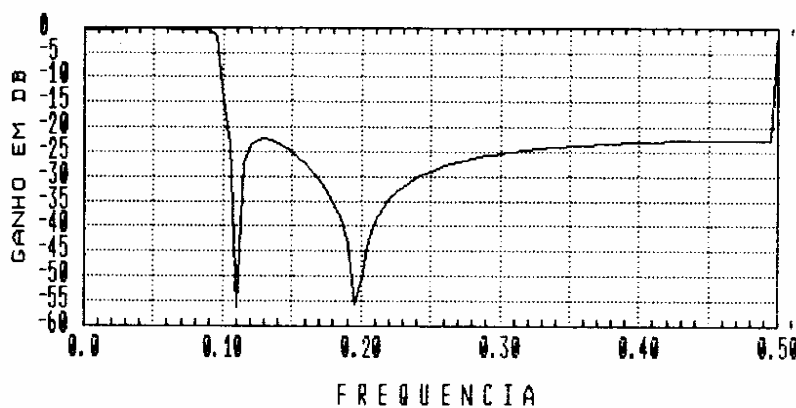


Fig.2 - Magnitude de $H(z)$

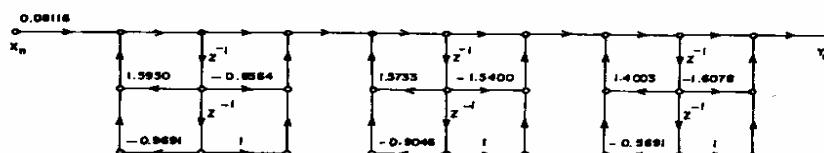


Fig.3 - Representação em cascata do filtro digital projetado

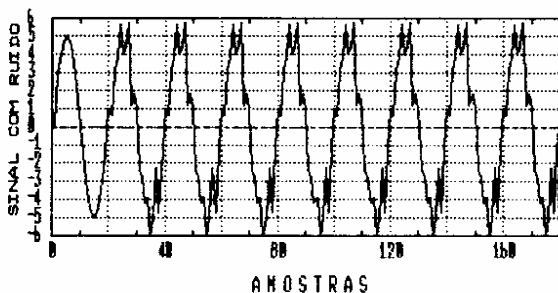


Fig. 4 - Sinal de entrada

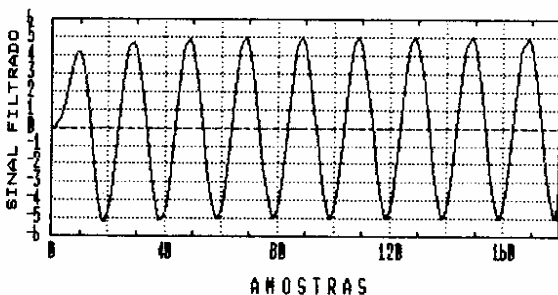


Fig.5 - Sinal de saída

BIOGRAFIAS




Francisco Damasceno Freitas nasceu na cidade de Nova Russas - CE, Brasil, em 4 de setembro de 1961. Obteve o título de Engenheiro Eletricista pela Universidade de Brasília em julho de 1985. Atualmente está concluindo a tese de mestrado na Universidade de Brasília, opção Sistemas de Potência, onde também é Professor Auxiliar desde agosto de 1986 e desenvolve pesquisas na área de filtragem de sinais de baixas frequências para aplicação em proteção digital de Sistemas de Potência.



José Henrique Rodrigues Filho nasceu em 12 de maio de 1963, na cidade de São Luís, Brasil. Graduou-se em Engenharia Elétrica em 1986, pela Universidade de Brasília opção Telecomunicações. Atualmente cursa o

Mestrado em Engenharia Elétrica na UnB na área de processamento de sinais.

 Humberto Abdalla Júnior nasceu em 29 de abril de 1950, na cidade de Recife, Brasil. Formou-se em Engenharia Elétrica em 1972, pela Universidade Federal de Pernambuco. Obteve o grau de Mestre em Engenharia Elétrica opção Telecomunicações na PUC/RJ no ano de 1976. Foi professor da PUC/RJ de 1976 à 1978. Concluiu seu Doutorado na Universidade de Limoges-França em 1982. Desde de 1983 trabalha como professor na Universidade de Brasília. Atualmente vem desenvolvendo pesquisas sobre métodos de análise e síntese de redes Analógicas e Digitais.