LAS ESTRELLAS ENANAS BLANCAS

ING. DOUGLAS MOYA A.
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE FISICA
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

RESUMEN

Se realiza un estudio mecánico - estadístico de la estabilidad de los sistemas estelares y se aplica el modelo del gas de Fermi degenerado, extendiéndolo al caso particular de las estrellas denominadas enanas blancas.

1.- INTRODUCCION.

La densidad de gas de Fermi degenerado es proporcional a la presión. La ecuación de estado nos dice que la presión es proporcional a la energía interna por volumen. Por lo tanto, una densidad alta implica una energía interna alta (que para un gas ideal es energía cinética).

Si la densidad del sistema en consideración es muy alta, entonces la energía cinética de las partículas es muy alta y puede ser comparable o mayor que la energía de reposo de las partículas. En ese caso necesitamos usar la dinámica relativista y la conexión entre energía (energía total) y momentum está dada por

$$E^2 = c^2 p^2 + m^2 c^4 \qquad (1)$$

Veremos que es suficiente tratar el caso de degeneración completa. El número de electrones por volumen V está dado por

$$N = 2\,\frac{N}{h^3}\,4\pi \int_0^{P_F} p^2\,dp = \frac{8\pi}{3}\,\frac{V}{h^3}\,P_F^{\,3} \qquad (2)$$

Introducimos la variable

$$X = \frac{p}{mc} \;;\quad X_F = \frac{P_F}{mc}$$

y obtenemos

$$\frac{N}{V} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{mc}{h}\right)^3 X_F^{\,3} \qquad (3)$$

ó

$$X_F = \frac{h}{mc}\left(\frac{3N}{8\pi V}\right)^{1/3} \qquad (4)$$

para la energía cinética debemos calcular

$$E_{cin} = \int_0^{E_F} (\varepsilon - mc^2)\,\rho(\varepsilon)\,d\varepsilon =$$

$$= \frac{8\pi}{h^3}\,V \int_0^{P_F} \{\sqrt{c^2p^2 + m^2c^4} - mc^2\}\,p^2\,dp \qquad (5)$$

o en términos de la variable X

$$\frac{E_{cin}}{V} = \frac{8\pi}{h^3}\,mc^2\,(mc)^3 \int_0^{X_F} \{\sqrt{1+X^2} - 1\}\,X^2\,dx \qquad (6)$$

después de la integración parcial

$$\frac{E_{cin}}{V} = \frac{8\pi}{3h^3}\,m^4c^5\,\{X_F^{\,2}\,(\sqrt{1+X_F^{\,2}} - 1) - \int_0^{X_F} \frac{X^4}{\sqrt{1+X^2}}\,dx\} \qquad (7)$$

introduciendo $X = \operatorname{sen} h\,\theta$;

$$\sqrt{1+X^2} = \cos h\,\theta \qquad (8)$$

obtenemos después de dos integraciones parciales

$$\int_0^{\theta(X_F)} \operatorname{sen} h^4\,\theta\,d\theta = \left[\frac{\operatorname{sen} h^3\theta\,\cos h\theta}{4} - \frac{3}{8}\operatorname{sen} h\theta\,\cos h\theta + \frac{3}{8}\,\theta\right]_0^{\theta(X_F)} \qquad (9)$$

Ahora podemos escribir

$$\frac{E_{cin}}{V} = \frac{\pi}{3h^3}\,m^4c^5\left[8\,X_F^{\,3}\,(\sqrt{1+X_F} - 1) - X_F\,(2X_F^{\,2} - 3)\,\sqrt{1+X_F^{\,2}} - 3\,\operatorname{arc\,sen} h\,X_F\right. \qquad (10)$$

lo cual escribimos

$$\frac{E_{cin}}{V} = \frac{\pi}{3h^3}\,m^4c^5\,g\,(X_F) \qquad (11)$$

la función g(x) tiene las siguientes formas asintóticas:

(a) Límite no relativista $X_F << 1$: Hacemos una expansión en términos de X_F y obtenemos:

$$g(X_F \to 0) = 8\, X_F^3 \left(1 + \frac{1}{2} X_F^2 - 1\right) -$$

$$- (2\, X_F^3 - 3 X_F)\left(1 + \frac{1}{2} X_F^2 - \frac{1}{8} X_F^4\right)$$

$$- 3\left(X_F - \frac{1}{2.3} X_F^3 + \frac{3}{2.4.5} X_F^5\right)$$

$$= 4\, X_F^5 - X_F^5 - \frac{3}{8} X_F^5 - \frac{9}{40} X_F^5$$

$$= \frac{12}{5} X_F^5 \qquad (12)$$

(b) Límite relativista extremo $X_F >> 1$: Aquí notemos que para X_F grande arc senh $X_F \approx$ Log $(2\, X_F)$ el cual se puede despreciar comparándolo con X_F^4

$$g(X_F \to \infty) = 8\, X_F^4 - 8\, X_F^3 - 2\, X_F^4 + 3\, X_F^2$$

$$\approx 6\, X_F^4 - 8\, X_F^3 \qquad (13)$$

Hablemos ahora de la teoría de la estructura estelar. Una estrella es un gran sistema en equilibrio. Para simplificar supondremos que la estrella no gira y que el sistema es esféricamente simétrico.

Entonces calculamos la masa de la esfera de radio r

$$m(r) = \int_0^r 4\pi\, \rho\, \gamma'^2\, d\gamma' \qquad (14)$$

P(r) es la densidad de materia estelar. La energía total de tal sistema puede ser globalmente escrito como

$$E = \int_0^M \varepsilon_{term}\, dm - G \int_0^M \frac{m\, dm}{r} \qquad (15)$$

M = masa total de la estrella
ε_{term} = energía térmica por unidad de masa
G = constante gravitacional

Dado que m es función de r, podemos también tomar a r como función de m.

Para un sistema ligado (que mantiene su volumen finito sin paredes), debemos tener $E < 0$, y para un estado de equilibrio la energía debe tomar un valor mínimo.

Buscamos "la condición de mínimo" por una variación de E. Si ahora

$$V = \frac{4\pi}{3} r^3$$

introducimos el "volumen específico"

$$v = \frac{dV}{dm} = 4\pi\, r^2 \frac{dr}{dm} \qquad (17)$$

y escribimos para la variación de la energía termodinámica

$$\delta\, \varepsilon_{term} = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)_s \delta v = \left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)_s \frac{d\, \delta V}{dm} \qquad (18)$$

Suponemos aquí cambios adiabáticos y mantenemos la masa constante (lo que significa lógicamente que la densidad ρ cambia).

De la termodinámica $p dv + d\varepsilon = T ds$ (19)

donde todo es por unidad de masa, de aquí que

$$\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial v}\right)_s = - p \qquad (20)$$

y podemos escribir

$$\delta \int_0^M \varepsilon_{term}\, dm = \int_0^M \delta\, \varepsilon_{term}\, dm =$$

$$- \int_0^M p \frac{d}{dm} (4\pi r^2\, \delta r)\, dm \qquad (21)$$

que nos da después de una integración parcial

$$\delta \int_0^M \varepsilon_{term}\, dm = \int_0^M \frac{dP}{dm} (4\pi r^2\, \delta r)\, dm \qquad (22)$$

Donde hemos usado el hecho de que en el centro de la estrella $r = 0$ $(m = 0)$ y en la superficie $p = 0$ $(m = M)$

Así obtenemos para la variación de la energía total

$$\delta E = \int_0^M \left(4\pi r^2 \frac{dp}{dm} + \frac{GM}{r^2}\right) \delta r\, dm \qquad (23)$$

o para una variación arbitraria δr

$$\frac{dp}{dm} = - \frac{Gm}{4\pi r^4} \qquad (24)$$

si usamos ahora (14);

$$dm = 4\pi\rho\, r^2\, dr \qquad (25$$

obtenemos la condición de equilibrio

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{Gm}{r^2}\,\rho \qquad (26)$$

El gradiente de presión (la fuerza que tiende a difundir el sistema), tiene que ser balanceado por una atracción gravitacional de la misma magnitud.

Procedamos a derivar un teorema del virial. Multipliquemos (26) por el volumen

$$Vdp = -\frac{Gm}{r^2}\, p\, V\, dr \qquad (27)$$

e integramos sobre la estrella

$$3\int Vdp = -\int \frac{Gm}{r}\, 4\pi\rho\, r^2\, dr = -\int \frac{Gm}{r}\, dm \qquad (28)$$

una integración parcial al término de la izquierda da

$$\int Vdp = -\int pdV \qquad (29)$$

puesto que V = 0 al centro y p = 0 en la superficie de la estrella. De este modo tenemos el teorema del virial

$$-3\int pdV = -\int \frac{Gmdm}{r} = E_G \qquad (30)$$

donde E_G es la energía gravitacional.

Para un gas clásico perfecto (no relativista) tenemos

$$p = \frac{2}{3}\,\frac{U}{V} = \frac{2}{3}\,\rho\,\varepsilon_{term} \qquad (31)$$

y el teorema del virial tiene la forma usual

$$2\ E_{térmica} = -E_G \qquad (32)$$

Para un gas relativista se encuentra

$$E_{térmica} = -E_G \qquad (33)$$

puesto que aquí la presión está dada por

$$p = \frac{1}{3}\,\rho\,\varepsilon_{térm} \qquad (34)$$

Así E total para (32) es $\frac{1}{2}E_G$, pero para el caso ultrarelativista $E_{total} = 0$, y por lo tanto el sistema no es estable. En realidad se encuentra un valor intermedio entre estas dos situaciones límites.

Probaremos (34) para el límite relativista extremo de nuestro gas de Fermi totalmente degenerado. Aquí la energía cinética es casi la energía total ($X_F \gg 1$ ó $P_F \gg mc$) y escribimos combinando (11) y (13)

$$E_{térmica} = \frac{2\pi}{h^3}\, m^4\, c^5\, X_F^4\, V \qquad (35)$$

Así la presión va a estar dada por

$$p = KT\int_0^\infty \mathrm{Log}\, Z(\varepsilon)\, \rho(\varepsilon)\, d\varepsilon =$$

$$= \int_0^\infty \mathrm{Log}\,(1 + e^{\frac{\mu + mc^2 - \varepsilon}{KT}})\,\frac{8\pi}{h^3}\, p^2\, dp \qquad (36)$$

donde ε se relaciona con p a través de (1). Introducimos nuevamente la variable θ

$$\theta = \mathrm{arc\ sen\,h}\,(\frac{p}{mc});\ \frac{\varepsilon}{mc^2} = \cosh\theta$$

y escribimos

$$\frac{P}{KT} = 8\pi\,(\frac{mc}{h})^3\ \times$$

$$\times \int_0^\infty \mathrm{Log}\,(1 + e^{\frac{\mu + mc^2(1-\cosh\theta)}{KT}})\,\mathrm{sen\,h}^2\theta\, d(\mathrm{sen\,h}\,\theta) \qquad (37)$$

aquí integramos por partes y obtenemos

$$P = \frac{8\pi}{3}\,(\frac{mc}{h})^3\, mc^2\ \times$$

$$\times \int_0^\infty \frac{\mathrm{sen\,h}^4\,\theta}{e^{-(\mu + mc^2(1-\cosh\theta))/KT} + 1}\, d\theta \qquad (38)$$

y aquí pasamos al límite totalmente degenerado poniendo T = 0. En ese caso

$$P = \frac{8\pi}{3}\,(\frac{mc}{h})^3\, mc^2 \int_0^{\theta_F} \mathrm{sen\,h}^4\,\theta\, d\theta \qquad (39)$$

Esta integral ya ha sido calculada y nos da en el límite $X_F >> 1$ y después de comparar la con (34)

$$P = \frac{2\pi}{3} \frac{m^4 c^5}{h^3} X_F^{\ 4} = \frac{1}{3} \frac{E\ \text{térmica}}{V} \qquad (40)$$

de ese modo se comprueba (34).

2.- ENANAS BLANCAS.

Los astrónomos clasifican las estrellas de acuerdo a su lugar en el diagrama de Hertzprung - Russell donde la luminosidad (el esplandor como se le parece a un observador en la tierra), es dibujado contra el color predominante (frecuencia de radiación) de la estrella. Es una regla empírica que para la mayoría de estas estrellas estas cantidades son proporcionales (se dice que la estrella es de secuencia principal)

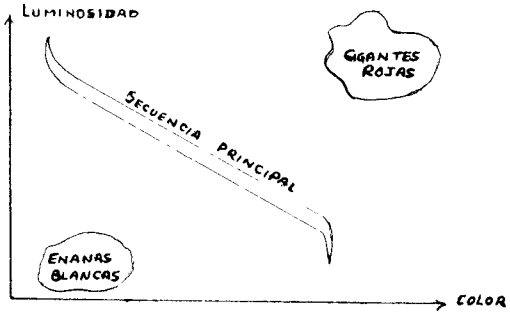

Fig. 1.- Diagrama de Hertzprung - Russell.

Pero hay excepciones a la regla. Se encuentran estrellas muy brillantes pero que emiten frecuencias relativamente bajas. Se ha concluido que la brillantez debe provenir de un tamaño excepcionalmente grande (de aquí el nombre de gigantes rojos). Por otro lado se encuentran estrellas muy tenues que emiten luz de alta frecuencia y que se les da el nombre de enanas blancas.

La evolución de una estrella se da crudamente en cuatro etapas:

1) La contracción gravitacional de masas de gas eleva la temperatura, se establecen reacciones nucleares (esta etapa dura de 10^4 a 10^8 años de acuerdo a la masa).

2) Etapa de quemado de hidrógeno: el hidrógeno se convierte en helio (el sol se encuentra en esa etapa). Duración 10^7 a 10^{12} años de acuerco a la masa.

   Ahora bien, las estrellas menos masivas viven más, puesto que debido a la baja energía gravitacional, ellas no se contraen tan rápidamente, de aquí que la temperatura se eleva más lentamente y las reacciones nucleares no se establecen tan fuertemente.

3) El hidrógeno se comienza a agotar. El Helio se acumula (debido a su peso) en el centro y se contrae calentando de este modo la parte interior. La temperatura del interior aumenta, las masas de los gases circundantes se expanden y de ese modo se enfrian. La estrella se convierte en una gigante roja.

4) Cuando casi todo el combustible se ha consumido la estrella se contrae nuevamente creando enormes temperaturas y densidades hasta que eventualmente alcanza un nuevo equilibrio. Esta es la etapa de la enana blanca.

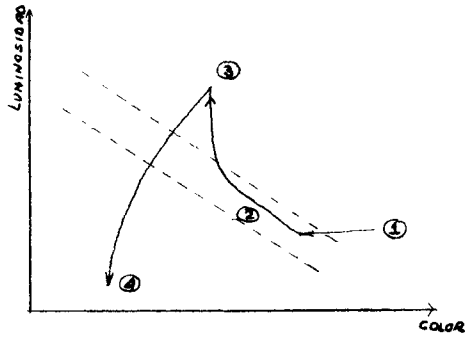

Fig. 2.- Ciclo de vida de una estrella en el diagrama H - R.

Como dato típico tomemos la densidad de una enana blanca como 10^7 gr/cm^3 y su temperatura en el centro de 10^7 ° K, temperatura de superficie de 10^4 °K; la temperatura en el centro corresponde a una energía térmica de KT ≈ 1000 eV, lo cual significa que los átomos están completamente ionizados. En lo que sigue consideraremos un gas de electrones. De la densidad anterior encontramos (con una masa nucleónica igual $1{,}7 \times 10^{-24}$ gr. y la superposición de un electrón por dos nucleones, lo cual es cierto para el helio) una densidad electrónica

$$\frac{N}{V} = 10^7 \frac{gr}{cm^3} \cdot \frac{1}{1.7 \times 10^{-24}} \frac{\text{nucleón}}{\text{gramo}} \cdot$$

$$\frac{1\ \text{electrón}}{2\ \text{nucleón}} \approx 3 \times 10^{30} \frac{\text{electrón}}{cm^3}$$

Esta densidad corresponde al momento de Fermi

$$X_F = \frac{P_F}{mc} = \frac{h}{mc} \left(\frac{3}{8\pi} \frac{N}{V} \right)^{1/3} \approx 1.5 \qquad (41)$$

de aquí vemos que a esta densidad los efectos relativistas comienzan a hacerse importantes. Puesto que el número anterior es una densidad promedio, es claro que en el interior de la estrella, donde la densidad es mayor, los electrones deben ser tratados como un gas de Fermi altamente relativista.

La energía del sistema (correspondiente al caso no relativista) está dado por

$$E_F = (\sqrt{1+X_F^2} - 1)\, mc^2 = 0{,}8\, mc^2 = 0.4 \text{ MeV} \qquad (42)$$

y la correspondiente temperatura de Fermi

$$T_F = \frac{E_F}{K} = 4 \times 10^9 \text{ °K} \qquad (43)$$

De este modo la temperatura actual del gas es mucho más baja que la de Fermi y podemos tomar el gas del electrón de una enana blanca como un gas de Fermi totalmente degenerado.

Si escribimos el teorema de virial para el caso relativista

$$E_G = - E \text{ térmica} \qquad (44)$$

o usando (11) y (13) para la energía térmica

$$\frac{GM^2}{R} = \frac{\pi}{3h^3} m^4 c^5 \,(6\, X_F^4 - 8\, X_F^3)\,.\, V \qquad (45)$$

donde M y R son masa y radio de la estrella.

En la ecuación (41) tenemos X_F expresado en términos de la densidad del número de partículas (electrones) N/V. Puesto que ya hemos supuesto un electrón por dos nucleones, podemos expresar X_F en términos de M y R.

$$M = (m + 2m_p)\, N \approx 2\, m_p N$$

donde m es la masa del electrón y m_p la masa del nucleón o protón. Por lo tanto

$$\frac{N}{V} = \frac{M}{2m_p} \frac{1}{\frac{4\pi}{3} R^3} \qquad (46)$$

y

$$X_F = \frac{h}{mc} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{M}{m_p}\right)^{4/3} \frac{1}{R} = a \frac{M^{1/3}}{R} \qquad (47)$$

de ese modo (45) se convierte en

$$\frac{GM^2}{R} = A \left(3a \frac{M^{4/3}}{R^4} - 4 \frac{M}{R^3} \right) R^3 \qquad (48)$$

donde

$$A = \frac{2\pi}{3} \left(\frac{m^4 c^5}{h^3}\right) \frac{4\pi}{3} a^3 = \frac{1}{8} \frac{m}{m_p} c^2 \qquad (49)$$

luego de resolver (48) para R obtenemos

$$4AR = 3aA\, M^{1/3} - GM \qquad (50)$$

que nos da R en función de M (A es una constante positiva) y de la diferencia vemos que hay un límite superior de M (el radio no puede ser negativo)

$$M^{2/3} < \frac{3aA}{G} \qquad (51)$$

debe ser válida para que el radio estelar sea una cantidad positiva.

La base de nuestras consideraciones fue el teorema del Virial el cual es válido para sistemas en equilibrio. De este modo (51) es otra condición de equilibrio posible (en la etapa 4) debido al gas de Fermi de electrones, pero solamente si la masa total de la estrella es más pequeña que $\bar{M}$.

$$\bar{M} = \left(\frac{3aA}{G}\right)^{3/2} =$$

$$= \left[\frac{3}{8} \frac{m}{m_p} c^2 . \frac{1}{G} . \frac{h}{mc} \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{2/3} \left(\frac{1}{m_p}\right)^{1/3} \right]^{3/2} = 1{,}18 \times 10^{30} \text{ Kg}$$

$\bar{M}$ = 1.2 masas solares.

Un análisis más detallado de Chandrasekhar, basado en equilibrio hidrodinámico, da 1.4 masas solares.

Para una masa más grande la presión del punto cero del gas de electrones degenerado no puede balancear la interacción gravitacional, por lo que en esos casos la contracción no puede ser detenida y termina en un desastre.

NOTA: Este análisis no ha tomado en cuenta la teoría de la relatividad general. La relatividad especial da (34). De modo que desde un punto de vista de la relatividad especial se puede deducir una condición de condensación infinita en la muerte de una estrella. (Huecos negros).

BIBLIOGRAFIA.-

LANDAU y LIFISHITZ.- MECANICA ESTADISTICA. Editorial Reverté S.A.

ECKART HEIMENDAHL.- FISICA y FILOSOFIA. ARTICULO DE CARL FRIEDRICH VON WEIZSÄCKER "SOBRE COSMOGONIA y COSMOLOGIA". Ediciones Guardarrama S.A. Madrid 1969.

PAUL R. WOODWARD.- SHCK-DRIVEN IMPLOSION OF INTERESTELAR CLOUDS AND STAR FORMATION. THE ASTROPHYSICAL JOURNAL. Vol 207, nº 2, parte 1ª. 15 de Julio de 1976.

C de LOBRE.- LAS ESTRELLAS DOBLES. MUNDO CIENTIFICO. Nº 4. Volumen 1.

CHARLES KITTEL. FISICA TERMICA. Editorial Reverté S.A. 1973.