

CURVATURA Y TORSION EN SISTEMAS LINEALES Y NOLINEALES

Ing. J. ALBERTO DELGADO R.
Bogotá - COLOMBIA

RESUMEN

La trayectoria descrita por un sistema lineal o no lineal en el espacio de estado, al evolucionar en el tiempo, contiene la información de estabilidad y controlabilidad.

El objeto del artículo, es presentar algunos resultados derivados al aplicar conceptos como curvatura y torsión a la geometría de la trayectoria.

INTRODUCCION

Al estudiar la trayectoria de un sistema en el espacio de estado, es posible determinar la estabilidad de los puntos críticos utilizando el concepto de curvatura de una curva. Adicionalmente, es factible conocer la controlabilidad del sistema con el concepto de torsión.

En el desarrollo de este escrito se presentan, inicialmente, las definiciones matemáticas de curvatura y torsión. Posteriormente, se muestran dos ejemplos donde se determina la estabilidad de los puntos críticos.

En el primer caso no es necesario solucionar la ecuación diferencial del sistema y no se linealiza; simplemente se evalúa la curvatura.

En el segundo ejemplo, la solución numérica de la ecuación diferencial aplicada a la curvatura, permite identificar el punto crítico con mayor exactitud que el primer enfoque.

1. TEORIA DE CURVAS

Los elementos tomados de la geometría diferencial que utilizaremos para estudiar la estabilidad y controlabilidad de sistemas lineales y no lineales son la curvatura y la torsión. La curvatura señala el comportamiento de las curvas en la vecindad del punto crítico, mientras la torsión, para un sistema de tres estados, indica qué tan lejos se encuentran las trayectorias del plano; torsión cero significa no controlable.

1.1 CURVATURA [1,2]

La curvatura de una curva satisface dos criterios : (1) la

curvatura de una recta es cero; y (2) la curvatura de un círculo es la misma en cada punto.

Verificando los anteriores criterios se define la curvatura de una curva $\alpha(s)$, parametrizada en longitud de arco s , como :

$$K(s) = \left| \frac{dT(s)}{ds} \right| \quad (1)$$

Es decir, la magnitud de la variación del vector tangente respecto a la longitud de arco.

Una línea recta está dada por $K(s) = 0$ (para todo s) y si $\alpha(s)$ es un círculo $K(s) = 1/r$ (para todo s), con $\alpha(s)$ un círculo de radio r .

Para curvas planas, la curvatura se puede interpretar de la siguiente forma; si $\alpha(s)$ está en el plano (x,y) entonces $\alpha(s)$ será :

$$\alpha(s) = (x(s), y(s), 0)$$

Por tanto, $\frac{d\alpha(s)}{ds} = T(s) = (x'(s), y'(s), 0)$ (2)

Sea θ el ángulo entre la horizontal y el vector tangente a $\alpha(s)$ como se muestra en la Fig. 1.

Debido a la descripción del ángulo θ tenemos,

$$X'(s) = \langle T'(s), (1, 0, 0) \rangle = \cos \theta(s)$$

($\langle \rangle$, denota producto interno)

$$Y \quad T(s) = (\cos\theta(s), \sin\theta(s), 0)$$

$$\text{Así, } \frac{dT}{ds} = (-\sin\theta(s), \cos\theta(s), 0) \frac{d\theta}{ds}$$

Finalmente,

$$K(s) = \left| \frac{dT(s)}{ds} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right| \quad (3)$$

Esto muestra que la curvatura de una curva plana es la rata de cambio del ángulo que forma el vector tangente con la horizontal.

Cuando la curva está parametrizada en el tiempo, $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la curvatura verifica la expresión,

$$K(t) = \frac{|\beta^{\circ}(t) \times \beta^{\circ\circ}(t)|}{|\beta^{\circ}(t)|^3} \quad (4)$$

$$\left(\alpha = \frac{d}{dt} \right)$$

TORSION [1,2]

Dada una curva en el espacio tridimensional y parametrizada en longitud de arco $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$, con curvatura no nula, se define la torsión $\tau(s)$ como,

$$\tau(s) = - \left\langle \frac{d\mathbf{B}(s)}{ds}, \mathbf{N}(s) \right\rangle \quad (5)$$

con, $\mathbf{B}(s)$: Vector Binormal

$\mathbf{N}(s)$: Vector Normal

$\mathbf{B}(s) = \mathbf{T}(s) \times \mathbf{N}(s)$

La magnitud de la torsión $\tau(s)$ indica si la curva $\alpha(s)$, tridimensional, puede reducirse a un plano con la variación de algún factor. La torsión $\tau(s) = 0$, señala una curva plana.

Cuando la curva está parametrizada en el tiempo, $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t))$ la torsión obedece,

$$\tau(t) = \frac{\langle \beta^{\circ}(t) \times \beta^{\circ\circ}(t), \beta^{\circ\circ\circ}(t) \rangle}{|\beta^{\circ}(t) \times \beta^{\circ\circ}(t)|} \quad (6)$$

2. IDENTIFICACION DE PUNTOS CRITICOS

A continuación se tratará la identificación de los puntos de equilibrio en sistemas lineales y no lineales, utilizando la definición de curvatura de una curva parametrizada en tiempo (4). La ventaja de este procedimiento reside en que no es necesario resolver las ecuaciones diferenciales del sistema y requiere poco tiempo de cómputo.

2.1 METODO

El método consiste en trazar un círculo de radio R , con centro en el punto crítico y evaluar la expresión (4) sobre este, posteriormente se grafica la curvatura contra ángulo de barrido como muestra la Fig. 2.

2.2. EJEMPLOS

En las líneas que siguen se ilustrará la aplicación de (4) para identificar los puntos críticos de dos sencillos sistemas no lineales.

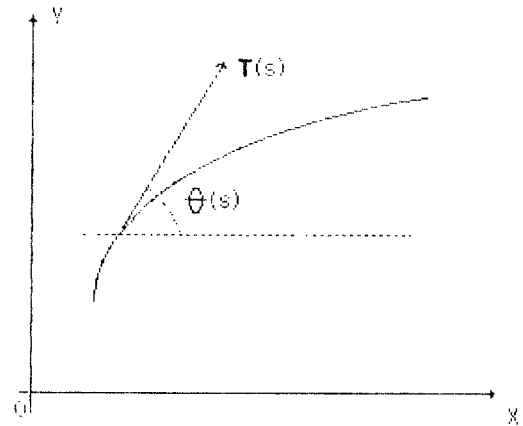


Fig.1.- Interpretación de la curvatura para curvas planas

2.2.1 Máquina Sincrónica

Dadas las ecuaciones diferenciales correspondientes a la máquina sincrónica ideal,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= 1 - 2 \text{ Sen } X \end{aligned} \quad (7)$$

identificar la naturaleza de los puntos singulares $(\pi/6, 0)$ y $(5\pi/6, 0)$. A priori, es conocido que el primer punto es un centro y el segundo una silla.

Según el método del párrafo 2, para identificar el punto $(\pi/6, 0)$ hacemos centro allí y trazamos un círculo de radio $R = 0.5$, la gráfica Curvatura - Angulo se observa en la Fig. 3.

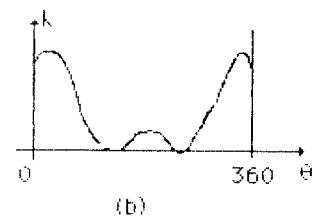
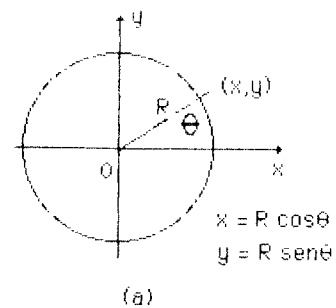


Fig.2.- Identificación de puntos críticos. En (a) se muestra el círculo de barrido, (b) Corresponde a la gráfica de curvatura-ángulo

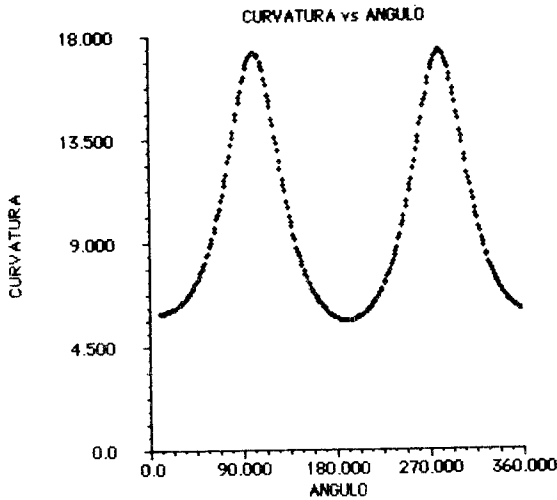


Fig 3.- Curvatura - Angulo del sistema (7), alrededor de $(\pi/6,0)$.

Al estudiar la Fig 3, vemos que la curvatura oscila entre dos valores de forma suave. Para un círculo la curvatura es constante, y si es una elipse la curvatura varía suavemente sobre un valor medio. Por tanto, concluimos que el punto $(\pi/6,0)$ es un centro y las trayectorias son elípticas.

Ahora, efectuando el barrido con centro en $(5\pi/6,0)$ y radio $R = 0.5$ se logra la Fig.4.

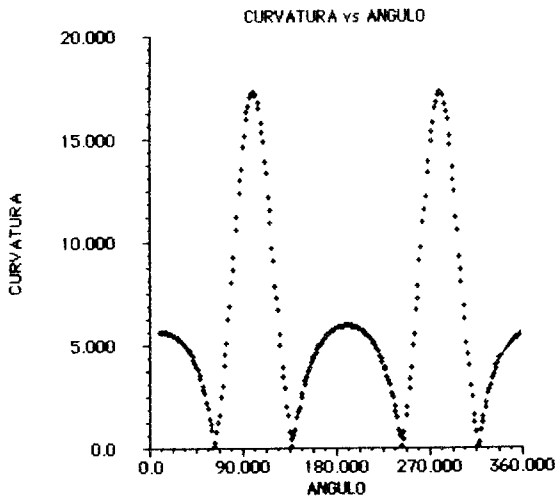


Fig 4.- Curvatura - Angulo de (7) alrededor de $(5\pi/6,0)$.

En la Fig 4, vemos que hay máximos de curvatura y estos se encuentran en medio de direcciones con curvatura nula. Cuando la curvatura es cero, significa que estamos tratando con un segmento de recta, en este caso son los manifolds estable e inestable de la silla; puesto que en la vecindad de $(5\pi/6,0)$ estos se aproximan a los subespacios estable e inestable.

2.2.2 Ejemplo 2 [8]

Para el sistema,

$$\begin{aligned} \dot{X} &= Y \\ \dot{Y} &= -0.5Y - 2X - X^2 \end{aligned} \quad (8)$$

determinar la naturaleza del origen.

En la Fig 5, se aprecia una trayectoria en el plano de fase correspondiente a la condición inicial $X(0) = -3.5$; $Y(0) = 3.0$.

La Fig.6, señala otra forma de aplicar la expresión (4), consiste en evaluar la curvatura sobre la trayectoria y graficarla en función del parámetro tiempo. Esta aproximación es necesaria puesto que el método del ejemplo 2.2.1 permite identificar un foco o un nodo pero no dice nada acerca de su estabilidad.

Al detallar la Fig.6, vemos un pico de curvatura cuando la trayectoria es rechazada en la vecindad de la silla $(-2,0)$. Posteriormente la curvatura pulsante creciente facilita concluir que el origen es un foco estable.

3. CONTROLABILIDAD Y TORSION

En esta última parte veremos cómo la torsión suministra información sobre la controlabilidad del sistema. La generalización de esta expresión conduce al Wronskiano y de allí a la matriz de controlabilidad para sistemas lineales.

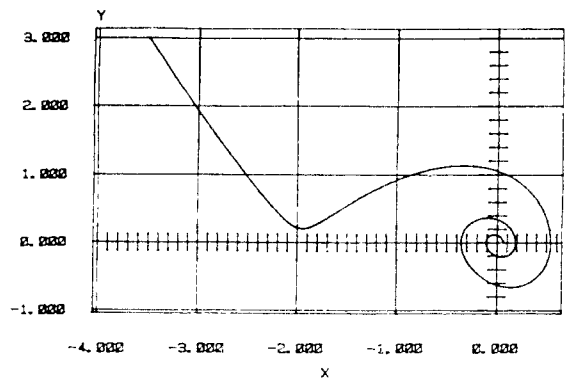


Fig 5.- Trayectoria descrita por el sistema (8) desde $X(0) = -3.5$, $Y(0) = 3.0$.

3.1 CASO TRIDIMENSIONAL

Tomando en consideración solamente el numerador de la expresión (6). Una curva parametrizada en tiempo $\beta(t) = (x(t), y(t), z(t))$ será plana si,

$$\langle \beta^0(t) \times \beta^{00}(t), \beta^{000}(t) \rangle = [\beta^0(t), \beta^{00}(t), \beta^{000}(t)] = 0 \quad (9)$$

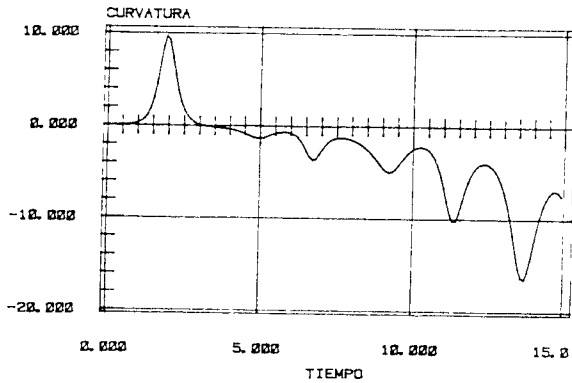


Fig.6 - Curvatura - Tiempo del sistema (8) desde $X(0) = -3.5, Y(0) = 3.0$.

El valor de (9) es similar al determinante de la matriz W definida como,

$$W = \begin{bmatrix} X^0 & X^{00} & X^{000} \\ Y^0 & Y^{00} & Y^{000} \\ Z^0 & Z^{00} & Z^{000} \end{bmatrix} \quad (10)$$

De este modo,

$$\begin{bmatrix} \beta^0(t), \beta^{00}(t), \beta^{000}(t) \end{bmatrix} = \det [W] \quad (11)$$

Donde. $W = \begin{bmatrix} X^0 & X^{00} & X^{000} \\ Y^0 & Y^{00} & Y^{000} \\ Z^0 & Z^{00} & Z^{000} \end{bmatrix}$
 $X^T = [X, Y, Z]$

La expresión (11), denominada Wronskiano [3,4], es nula si la trayectoria $\beta(t)$ se encuentra reducida a un plano. Esto indica que el sistema no es controlable, o similarmente, las soluciones de las ecuaciones diferenciales del sistema son linealmente dependientes.

3.2 GENERALIZACION

Dado un sistema lineal (siso) invariante en el tiempo, con representación de estado,

$$\begin{aligned} \dot{X}^0 &= A X + B U \quad (12) \\ X^T &= [X_1, X_2, \dots, X_n] \end{aligned}$$

será controlable si el Wronskiano,

$$W = \text{Det} \begin{bmatrix} X^0 & X^{00} & \dots & X^{(n)} \end{bmatrix} \neq 0 \quad (13)$$

Con, $X^{(n)} = \frac{d^n X}{dt^n}$

Para verificar (13) en sistemas lineales es preciso derivar (12),

$$\begin{aligned} \dot{X}^0 &= A X + B u \\ \dot{X}^{00} &= A^2 X + AB u + B \dot{u} \\ &\dots \\ \dot{X}^{(n)} &= A^n X + A^{n-1} B u + \dots + B u^{(n)} \end{aligned} \quad (14)$$

Efectuando una combinación lineal con las columnas de (13) tenemos,

$$\alpha_1 X^0 + \alpha_2 X^{00} + \dots + \alpha_n X^{(n)} = 0 \quad (15)$$

Sustituyendo (14) en (15) y agrupando en potencias de la excitación u se logra,

$$\begin{aligned} &[\alpha_1 A + \alpha_2 A^2 + \dots + \alpha_n A^n] X + [\alpha_1 B + \alpha_2 AB + \dots + \alpha_n A^{n-1} B] U \\ &+ [\alpha_2 B + \dots + \alpha_n A^{n-2} B] U^0 + \dots + [\alpha_n B] U^{(n)} = 0 \quad (17) \end{aligned}$$

Si,

$$\begin{aligned} H_c &= \begin{bmatrix} B & AB & A^2 B & \dots & A^{n-1} B \end{bmatrix} \\ \text{Rango } [H_c] &= n \quad (18) \end{aligned}$$

Esto implica que,

$$\alpha_1 X^0 + \alpha_2 X^{00} + \dots + \alpha_n X^{(n)} = 0$$

para,

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0 \quad (20)$$

y por tanto (17) se cumple en cualesquier punto en el espacio de estado X y para una entrada arbitraria U .

Es decir, el determinar la independencia lineal de las soluciones de una ecuación diferencial o un sistema de estas, dado por el Wronskiano (13), se reduce a verificar el rango de la matriz M_c para sistemas lineales (12).

CONCLUSIONES

(i) Se ha señalado cómo la curvatura de una trayectoria descrita por un sistema permite determinar la naturaleza de los puntos críticos, es decir la estabilidad.

(ii) La torsión de una curva, la cual permite conocer la controlabilidad, se extendió y de allí obtuvimos el Wronskiano, y aplicando este último logramos la clásica matriz de controlabilidad de sistemas lineales.

(iii) Los trabajos continúan con el propósito de expresar de forma más rigurosa los anteriores desarrollos cualitativos y de este modo lograr mejor comprensión de los sistemas no lineales.

REFERENCIAS

- [1] R. S. Millman and G. D. Parker, "Elements of Differential Geometry," Prentice-Hall, New York, pp. 13-48, 1977.
- [2] J. A. Thorpe, "Elementary Topics in Differential Geometry," Springer-Verlag, New-York, pp. 62-67, 1979.
- [3] E. L. Ince, "Ordinary Differential Equations," Dover, New-York, pp. 116-119.
- [4] D. C. Murdoch, "Linear Algebra," John Wiley, New-York, pp. 142.
- [5] H. Gluck, "Higher Curvatures of Curves in Euclidean Space," American Mathematical Monthly, vol. 73, pp. 699-704; vol. 74, pp. 1049-1056, 1967.
- [6] M. Vidyasagar, "New Directions of Research in Nonlinear Systems Theory," Proc. IEEE, vol. 74, pp. 1060-1091, August 1986.
- [7] P. Holmes and J. Guckenheimer, "Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields," Springer-Verlag, New-York, 1983.
- [8] K. Ogata, "Ingeniería de Control Moderna," Prentice-Hall, México, pp. 612-673, 1980.
- [9] D. P. Atherton, "Nonlinear Control Engineering," Van Nostrand Reinhold, New-York, pp. 17-74, 1982.
- [10] G. E. Gless, "Direct Method of Liapunov Applied to Transient Power System Stability," vol. PAS - 85, nº 2, pp. 159-168.

DATOS BIOGRAFICOS

J. Alberto Delgado R., finaliza estudios secundarios (1979) en el área de Electricidad y Electrónica. Posteriormente (1986) obtiene el título de Ingeniero Eléctrico en la Universidad de los Andes.

Durante los años 1986 - 1988 realiza estudios de posgrado en la misma institución, trabajando en las áreas de control y tratamiento de señales.

El Ing. Delgado ha participado en varios congresos de ingeniería a nivel nacional e internacional.