

# CANCELACION ADAPTIVA DE UNA INTERFERENCIA DE BANDA ANCHA EN UNA SENAL PERIODICA

JIMENEZ M. SOLEDAD, Ing.  
Politécnica Nacional

HIDALGO GUALEBERTO, Ing.  
Politécnica Nacional

## RESUMEN

El presente trabajo trata sobre los filtros adaptivos utilizados para cancelar una interferencia de banda ancha en una señal periódica, donde no se dispone de una fuente de referencia externa; siendo ésta una de las tantas aplicaciones que tienen los filtros adaptivos en cancelación de ruido. Esta misma aplicación será estudiada mediante dos tipos de filtros adaptivos, los cuales son idénticos en su estructura, ambos del tipo no recursivo, filtros FIR (Finite Impulse Response), pero difieren en el algoritmo utilizado para la actualización de los coeficientes; así pues se estudiará el algoritmo LMS (Least Mean Squares) y el algoritmo RLS (Recursive Least Squares).

El cancelador adaptivo de ruido se simulará por medio de un computador, con la entrada una sinusoide o suma de sinusoides que representarán a la señal, y ruido blanco o coloreado que representarán a la interferencia.

## 1 INTRODUCCION A FILTROS ADAPTIVOS

### 1.1 CANCELACION ADAPTIVA DE RUIDO

El método usual de estimar una señal que contiene ruido aditivo, consiste en pasar dicha señal a través de un filtro que tiende a suprimir el ruido mientras mantiene la señal relativamente inalterada. Para tal propósito se podrían usar tanto filtros fijos como adaptivos, el diseño de un filtro fijo requiere de un conocimiento previo de la señal y del ruido; en tanto que un filtro adaptivo tiene la capacidad de ajustar sus parámetros automáticamente y su diseño requiere de un mínimo conocimiento previo acerca de la señal y de las características del ruido.

La cancelación adaptiva de ruido utiliza una entrada auxiliar o de referencia que se obtiene por medio de uno o mas sensores localizados en puntos en el campo del ruido donde la señal es débil o indetectable, esta entrada se filtra de forma tal que tienda a parecerse lo más cercanamente posible al ruido que contamina la señal de la entrada principal, y posteriormente se sustrae de dicha entrada principal (que contiene tanto la señal como el ruido); como resultado el ruido primario se atenúa o elimina por cancelación.

A primera vista, el sustraer el ruido mediante ésta técnica podría parecer un proceso peligroso, efectivamente si se lo hace en una forma inapropiada podría producir un incremento en la potencia del ruido a la salida; sin embargo si el filtrado y la sustracción se controlan con un proceso adaptivo adecuado, es posible cancelar el ruido sin riesgo de producir distorsión en la señal o incrementar el nivel de ruido a la salida.

### 1.2 PRINCIPIO DE CANCELACION ADAPTIVA DE RUIDO

La figura 1.1 muestra el principio de un cancelador adaptivo de ruido. Una señal  $s_j$  se transmite a través de un canal a un sensor que también recibe un ruido  $n_j$  el cual es no correlacionado con la señal, la señal más el ruido  $s_j+n_j$  constituye la entrada principal al cancelador; la entrada de referencia es provista por un segundo sensor que recibe un ruido  $n_j$  no correlacionado con la señal  $s_j$  pero correlacionado en alguna forma desconocida con el ruido  $n_j$  (se podría pensar que el ruido  $n_j$  se obtiene desde un sensor localizado en un punto en el campo del ruido donde la señal es débil o indetectable). El ruido  $n_j$  se filtra a fin de generar a la salida una señal  $y_j$  que sea una réplica tan cercana como sea posible del ruido  $n_j$ , de manera que al restarla de la entrada principal produzca una salida del sistema,  $z_j=s_j+n_j-y_j$ , que corresponda a señal sin ruido.

Si de antemano se conoce las características del canal a través del cual se transmiten las entradas de referencia y principal hacia los sensores respectivos, es posible diseñar un filtro fijo capaz de transformar  $n_j$  en  $n_j$ , de modo que al restar la salida del filtro desde la entrada principal produzca una salida del sistema igual a la señal sin ruido. Sin embargo, en vista de que las características del canal de transmisión son desconocidas o conocidas sólo aproximadamente y rara vez de naturaleza fija, no es posible usar filtros fijos; más aún, si fuera posible usar un filtro fijo, sus características deberían ajustarse con una precisión difícil de conseguir, y el más pequeño error provocaría un incremento en la potencia del ruido de salida.

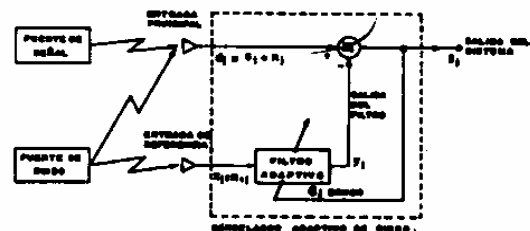


Fig. 1.1 Concepto de cancelación adaptiva de ruido.

Un filtro adaptivo difiere de uno fijo en que tiene la capacidad de ajustar automáticamente su propia respuesta impulsiva, el ajuste se realiza por medio de un algoritmo adaptivo, con un algoritmo apropiado el filtro puede operar bajo condiciones cambiantes y se puede reajustar por sí mismo continuamente para minimizar la señal de error.

El éxito de un sistema de cancelación adaptiva de ruido depende entonces de la disponibilidad de una señal de referencia adecuada, la misma que contenga ruido no correlacionado con la señal pero altamente correlacionado con el ruido aditivo que contamina dicha señal.

### 1.3 CANCELACION ADAPTIVA DE RUIDO EN UNA SENAL PERIODICA

En esta sección se describe el principio de cancelación adaptativa de ruido aplicado para eliminar una interferencia de banda ancha que contamina a una señal periódica, donde no se dispone de una fuente de referencia externa. Al parecer la técnica de cancelación adaptativa de ruido no se podría aplicar para reducir o eliminar esta clase de interferencia, puesto que no se dispone de la entrada de referencia necesaria en el proceso adaptivo como se estableció en la sección anterior; sin embargo, es posible obtener a partir de la entrada principal una entrada de referencia adecuada para esta aplicación, esto se realiza insertando una línea de retardo fija en la entrada principal y tomando la salida de dicha línea de retardo como la entrada de referencia.

#### Cancelador de Interferencia Periódica en una señal de banda ancha, sin fuente de referencia externa

Considérese el caso donde una señal de banda ancha está contaminada por una interferencia periódica (lo contrario a nuestro problema) y así mismo no se dispone de una entrada de referencia externa libre de señal; aplicando el principio anteriormente expuesto es posible obtener una entrada de referencia adecuada a partir de la señal de entrada principal, tal hecho se muestra gráficamente en la figura 1.2 [1].

El retardo debe ser de una longitud suficiente para garantizar que las componentes de señal de banda ancha en la entrada de referencia sean no correlacionadas con las de la entrada principal, esto es  $s_j$  y  $s_{j-T}$  sean no correlacionadas entre sí y sean no correlacionadas con la señal de interferencia; las componentes de interferencia, a causa de su naturaleza periódica permanecerán correlacionadas entre sí, es decir  $n_j$  y  $n_{j-T}$  conservarán su alto grado de correlación. El filtro adaptivo tratará de producir a su salida una señal que sea lo más similar posible a la señal de interferencia periódica, de manera que al restarla de la entrada principal generará a la salida del cancelador de ruido la señal de banda ancha libre de interferencia.

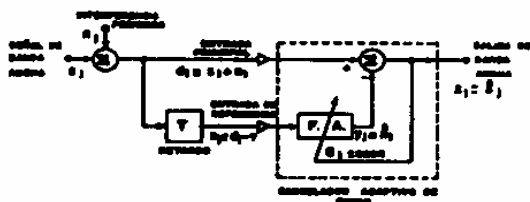


Fig. 1.2 Cancelador de interferencia periódica sin fuente de referencia externa.

#### Cancelador de interferencia de banda ancha en una señal periódica, sin fuente de referencia externa

El mismo principio utilizado en la aplicación anterior se puede usar, con una ligera variante, para eliminar una interferencia de banda ancha que contamina a una señal periódica; así pues, si la salida del sistema de cancelación se toma desde la salida del filtro, el resultado es un sistema capaz de extraer una onda periódica a partir de una señal contaminada por un ruido de banda ancha aditivo. La figura 1.3 muestra el

cancelador adaptivo de ruido para esta aplicación [1].

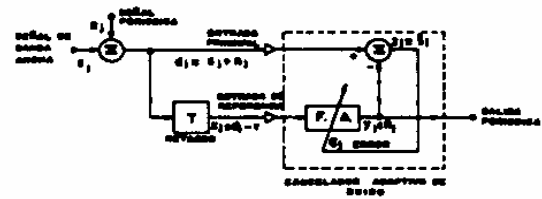


Fig. 1.3 Cancelador adaptivo de ruido para eliminar una interferencia de banda ancha.

## II ALGORITMO ADAPTIVO DE MINIMOS CUADRADOS MEDIOS O LMS (LEAST-MEAN-SQUARES)

El algoritmo adaptivo LMS conocido también como técnica del gradiente, desarrollado por Widrow y Hopf, constituye un predecesor del filtro adaptivo RLS; su simplicidad lo hace atractivo para muchas aplicaciones en las cuales interesa bajos requerimientos computacionales. Las desventajas fundamentales del algoritmo LMS se relacionan con sus propiedades de convergencia, pues este algoritmo se basa en una técnica de búsqueda del gradiente para minimizar una función de comportamiento cuadrática, en tanto que el algoritmo RLS es más bien un procedimiento del tipo Newton-Raphson, que como es bien conocido converge generalmente mucho más rápido que la técnica de búsqueda del gradiente.

### 2.1 EL FILTRO ADAPTIVO LMS

El filtro adaptivo LMS consta de un filtro digital FIR, con una estructura recursiva constituida por una línea de retardos, cuyos coeficientes son ajustables y cuya respuesta impulsiva se controla por medio del algoritmo LMS, tal estructura se muestra en la figura 2.1.

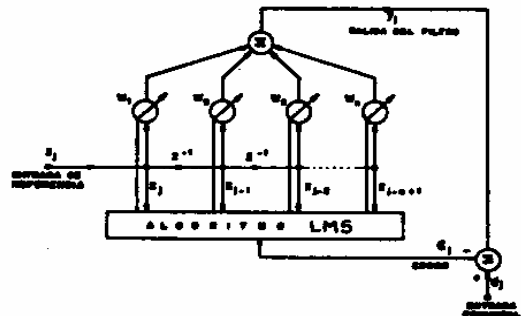


Fig. 2.1 Diagrama esquemático del filtro LMS.

El vector señal de entrada  $X_j$ , debido a la estructura de la línea de retardos tendrá la forma<sup>1</sup>:

$$X_j = [x_j \ x_{j-1} \ \dots \ x_{j-n+1}]^T \quad (2.1)$$

Los coeficientes de ponderación o factores de multiplicación  $w_1, w_2, \dots, w_n$  son ajustables, el vector de coeficientes de ponderación se define de la siguiente manera:

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T \quad (2.2)$$

Es evidente de la figura 2.1 que la señal de salida,  $y_j$ , es igual al producto interno de  $X_j$  y  $W$ :

$$y_j = X_j^T W = W^T X_j \quad (2.3)$$

donde  $W^T$  representa la matriz transpuesta de  $W$ .

Se define la señal de error  $\epsilon_j$ , como la diferencia entre la señal  $d_j$  (la cual se provee externamente y se suele conocer como la respuesta deseada y, constituye la entrada principal al sistema de cancelación adaptiva de ruido) y la salida del combinador lineal  $y_j$ .

$$\epsilon_j = d_j - X_j^T W = d_j - W^T X_j \quad (2.4)$$

### 2.1.1 EL ALGORITMO ADAPTIVO LMS

El algoritmo adaptivo tiene como finalidad ajustar el valor de los coeficientes de ponderación a fin de que se minimice el error cuadrático medio (valor esperado del cuadrado de la señal de error).

Si se acume que la señal de entrada al filtro y la respuesta deseada son estadísticamente estacionarias y que los coeficientes de ponderación son fijos, se puede obtener una expresión general para el error cuadrático medio como:

$$E[\epsilon_j^2] = E[d_j^2] - 2E[d_j X_j^T] W + W^T E[X_j X_j^T] W \quad (2.5)$$

Definiendo el vector  $R_{xd}$  como la correlación cruzada entre la respuesta deseada  $d_j$  (un escalar) y el vector de datos de entrada  $X_j$ , y la matriz  $R_{xx}$  como la autocorrelación de los datos de entrada, se tiene:

$$R_{xd} = E[d_j X_j] \quad (2.6)$$

$$R_{xx} = E[X_j X_j^T] \quad (2.7)$$

La matriz  $R_{xx}$  es simétrica, definida positiva y en raras excepciones semidefinida positiva. Se puede entonces expresar el error cuadrático medio como:

$$E[\epsilon_j^2] = E[d_j^2] - 2R_{xd}^T W + W^T R_{xx} W \quad (2.8)$$

El error cuadrático medio es por tanto una función cuadrática del vector de coeficientes de ponderación en cualquier tiempo particular.

El gradiente de la función de error cuadrático medio será:

$$\nabla_j = -2R_{xd} + 2R_{xx} W \quad (2.9)$$

De acuerdo con (2.9), el vector de coeficientes de ponderación óptimo  $W^*$ , al cual generalmente se le conoce como el vector de coeficientes de ponderación de Wiener, y con el que se obtiene el error cuadrático medio mínimo, vendrá dado por:

$$W^* = R_{xx}^{-1} R_{xd} \quad (2.10)$$

El algoritmo LMS es un método que permite obtener una solución aproximada a la ecuación (2.10), constituye un procedimiento iterativo en el cual la actualización del vector de coeficientes,  $W_{j+1}$ , se realiza en base al vector de coeficientes de ponderación anterior,  $W_j$ , más un término proporcional al gradiente negativo, esto es:

$$W_{j+1} = W_j - \mu \nabla_j \quad (2.11)$$

La constante escalar  $\mu$  es el factor que controla la estabilidad y la velocidad de convergencia.

El algoritmo LMS estima un gradiente instantáneo en una forma burda pero eficiente; esto lo hace asumiendo que  $\epsilon_j^2$ , el cuadrado de una muestra de error simple, es un estimado del error cuadrático medio, es decir,  $E[\epsilon_j^2] = \epsilon_j^2$ , y luego diferenciando  $\epsilon_j^2$  con respecto a  $W$ . Esto es:

Gradiente verdadero:

$$\nabla_j = \frac{\delta E[\epsilon_j^2]}{\delta W} \quad (2.12a)$$

Gradiente estimado:

$$\hat{\nabla}_j = \frac{\delta[\epsilon_j^2]}{\delta W} = 2\epsilon_j \frac{\delta[\epsilon_j]}{\delta W} \quad (2.12b)$$

De acuerdo con la ecuación (2.4), el gradiente estimado vendrá dado por:

$$\hat{\nabla}_j = -2\epsilon_j X_j \quad (2.13)$$

El gradiente estimado en la ecuación (2.13) es exacto. Así, para un vector de coeficientes de ponderación dado, el valor esperado del gradiente estimado será:

$$E[\hat{\nabla}_j] = -2R_{xd} + 2R_{xx} W \quad (2.14)$$

Comparando la ecuación (2.14) con la ecuación (2.9) se observa que:

$$E[\hat{\nabla}_j] = \nabla_j \quad (2.15)$$

Es decir, para un vector de coeficientes de ponderación dado, el valor esperado del gradiente estimado es igual al gradiente verdadero. Sustituyendo el gradiente estimado por el gradiente verdadero en la ecuación (2.11), se tiene una expresión para la actualización del vector de coeficientes de ponderación de acuerdo con el algoritmo LMS de Wiener-Hopf:

$$W_{j+1} = W_j + 2\mu\epsilon_j X_j \quad (2.16)$$

Empezando con un vector de coeficientes de ponderación inicial arbitrario, el valor esperado de dicho vector convergirá a la solución de Wiener únicamente si la constante de proporcionalidad " $\mu$ " está dentro de ciertos límites, como se demuestra en [2]:

$$0 < \mu < 1/c_{\max} \quad (2.17)$$

donde  $c_{\max}$  es el máximo valor propio de  $R_{xx}$ . La condición de convergencia sobre  $\mu$  puede relacionarse con la traza de la matriz de autocorrelación como sigue: Considerando que  $R_{xx}$  es una matriz definida positiva se cumple [2]:

$$c_{\max} < \text{traza}[R_{xx}] \quad (2.18)$$

Por lo tanto, es posible obtener una convergencia satisfactoria haciendo que:

$$0 < \mu < 1/\text{traza}[R_{xx}] \quad (2.19)$$

En la práctica cuando se desea una adaptación precisa debe trabajarse con una constante de convergencia  $\mu$  mucho menor, aunque esto implica que el proceso de adaptación se torne más lento.

Al utilizar la ecuación (2.19), se obvia el cál-

culo de los valores propios de la matriz de autocorrelación,  $R_{xx}$ , ya que estos en la práctica rara vez se los conoce.

### 2.1.2 CURVA DE APRENDIZAJE.

La curva de aprendizaje constituye un gráfico del error cuadrático medio para cada etapa del proceso de aprendizaje como una función del número de ciclos de adaptación, esto posibilita evaluar el comportamiento del proceso adaptivo usando como criterio el valor del error cuadrático medio.

La ecuación (2.8) se puede expresar de la siguiente forma:

$$E[\epsilon_j^2] = E[\epsilon_j^2]_{\min} + (W - W^*)^T R_{xx} (W - W^*) \quad (2.20)$$

Esta última ecuación constituye una expresión para el error cuadrático medio que permitirá dibujar la curva de aprendizaje.

Durante el proceso de adaptación, el error  $\epsilon_j$  es no estacionario conforme el vector de coeficientes de ponderación tiende al vector de Wiener  $W^*$ . Sin embargo, si el proceso adaptivo es convergente, cuando el número de iteraciones se aumenta considerablemente, en el límite el error cuadrático medio,  $E[\epsilon_j^2]$ , converge al error cuadrático medio mínimo,  $E[\epsilon_j^2]_{\min}$ , esto es [2]:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} E[\epsilon_j^2] = E[\epsilon_j^2]_{\min} \quad (2.21)$$

## 2.2 IMPLEMENTACION DE PROGRAMAS

En algoritmo LMS en esencia consta de los siguientes pasos:

### 1.- Selección de Parámetros:

- Orden del filtro,  $n$
- Número de retardos,  $T$

El número de retardos deberá garantizar que las componentes de banda ancha de la entrada de referencia sean no correlacionadas con las de la entrada principal. Tal retardo podrá variar entre 1 y  $n$  (orden del filtro).

El orden del filtro podrá seleccionarse como máximo igual a 25 debido a limitaciones de memoria del computador, sin embargo éste es un rango suficiente puesto que con valores de  $n$  menores se consiguen buenos resultados, como lo demuestran los ejemplos que constan en el sección IV.

### 2.- Inicialización:

Deberán inicializarse tanto el vector de datos de entrada,  $X(0)$ , como el de coeficientes de ponderación,  $W(0)$ , ambos vectores se los inicializa con un valor de 0, pues se supone que antes de este instante no existe señal de entrada y, el vector de coeficientes del filtro puede inicializarse con cualquier valor.

### 3.- Conformación de la señal de referencia a partir de la entrada principal.

Disponiendo del archivo de datos y del número de retardos seleccionado, se obtiene la señal de referencia como una versión retardada ( $T$  retardos) de la entrada principal.

## 4.- Cálculo del parámetro de convergencia crítico $\mu_{crit}$ .

Para el efecto deberá primero calcularse la traza de la matriz de autocorrelación,  $R_{xx}$ , la misma que tomando en consideración que el proceso es estacionario, vendrá dada por:

$$R_{xx} = \begin{bmatrix} r_{xx}(0) & r_{xx}(1) & \dots & r_{xx}(n-1) \\ r_{xx}(1) & r_{xx}(0) & \dots & r_{xx}(n-2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{xx}(n-1) & r_{xx}(n-2) & \dots & r_{xx}(0) \end{bmatrix}$$

Por consiguiente:

Traza[ $R_{xx}$ ] =  $n r_{xx}(0)$ , donde

$$r_{xx}(0) = E[x_j x_j] \quad j=1 \dots \text{NUM}$$

$$r_{xx}(0) = \frac{1}{\text{NUM}} \sum_{j=1}^{\text{NUM}} x_j^2$$

Como se estableció en la sección 2.1, el valor de  $\mu$  deberá estar limitado al rango:

$$0 < \mu < 1/\sigma_{\max}$$

Sin embargo recientes resultados sobre el análisis de las propiedades de convergencia del algoritmo LMS [3] señalan que el parámetro  $\mu$  debe estar restringido a un intervalo significativamente más pequeño que el dominio comúnmente establecido. Así la convergencia se asegura si y solamente si:

$$0 < \mu < 1/3 \sigma_{\max}$$

Con este criterio se procedió a determinar el valor de  $\mu$  crítico, de acuerdo al cual:

$$\mu_{critico} = 1/3 \text{traza}[R_{xx}]$$

Lógicamente que con este valor de  $\mu$  o con un valor cercano, el error en estado estable será significativo, de manera que es preferible usar un valor de  $\mu$  menor, a pesar de que esto implica que la velocidad de convergencia del algoritmo disminuye.

### 5.- Ejecución del algoritmo:

A cada paso del tiempo y con cada nueva muestra del archivo de datos se deberán realizar los siguientes pasos:

$$y_j = X_j^T W \quad \text{calcular la salida del filtro.}$$

$$\epsilon_j = d_j - y_j \quad \text{calcular la señal de error.}$$

$$W_{j+1} = W_j + 2\mu \epsilon_j X_j \quad \text{actualizar los coeficientes del filtro.}$$

## III ALGORITMO DE MINIMOS CUADRADOS RECURSIVOS O RLS (RECURSIVE-LEAST-SQUARES)

El algoritmo RLS ha sido muy utilizado principalmente en el campo de control para identificación de sistemas. A pesar de su comportamiento potencialmente superior, su uso en aplicaciones de procesamiento de señal ha sido muy limitado, debido fundamentalmente a sus altos requerimien-

tos computacionales.

### 3.1 DERIVACION DEL ALGORITMO ADAPTIVO RLS

#### 3.1.1 ALGORITMO ADAPTIVO RLS PREVENTANEADO

El filtro adaptivo RLS es un filtro digital con una estructura recursiva, constituida por una línea de retardos, cuyos coeficientes de ponderación son ajustables, y cuya respuesta impulso se controla por el algoritmo adaptivo RLS, tal estructura se muestra en la figura 3.1.

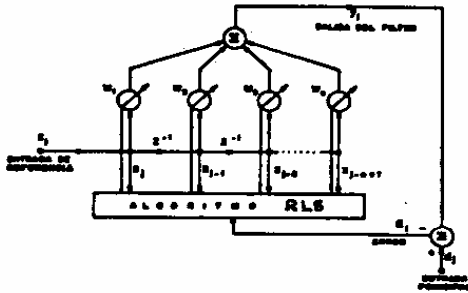


Fig. 3.1 Diagrama de un filtro adaptivo RLS.

Tal filtro en esencia es similar al filtro adaptivo LMS, pero difiere como se verá más adelante en la ley adaptiva usada para actualizar los coeficientes del filtro.

Sea entonces  $d_j$  la entrada principal al sistema de cancelación de ruido en el instante de tiempo discreto  $j$ ;  $X_j$  la entrada al filtro FIR de orden  $n$ , y  $y_j$  la salida del filtro y, sea  $e_j$  la salida del sistema de cancelación de ruido; es evidente desde la figura 3.1 que se cumplirá:

$$e_j = d_j - w_1 X_j - w_2 X_{j-1} \dots - w_n X_{j-n+1} \quad (3.1)$$

donde el vector de coeficientes del filtro al igual que en sección II será denotado por:

$$W = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_n]^T \quad (3.2)$$

A continuación se considerará un algoritmo diseñado para minimizar la suma de los cuadrados de la salida del cancelador, la cual viene dada por la siguiente expresión:

$$V_j = \sum_{s=1}^j e_s^2 \quad (3.3)$$

El vector de coeficientes del filtro óptimo para el que esta suma se minimiza es  $W^*$ .

Se tratará primeramente con un problema de minimización puramente determinístico, y luego se extenderá su interpretación al caso estocástico. Para ver el problema más claramente se reescribirá (3.1) en forma matricial, tal que:

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \\ \vdots \\ e_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_j \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \dots & 0 \\ x_2 & x_1 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & x_1 \\ x_j & x_{j-1} & \dots & x_{j-n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

donde  $n$  es el orden del filtro. Los datos han

sido preventaneados, esto es multiplicados por una función ventana  $r_j$ , donde  $r_j=0$  para  $j<0$  y  $r_j=1$  para  $j \geq 1$ .

Escribiendo la ecuación (3.4) en forma matricial se tendrá:

$$e_j = d_j - [X_j]W \quad (3.5)$$

Minimizar la función de costo,  $V_j$ , dada en la ecuación (3.3) es equivalente a minimizar la norma al cuadrado de  $e_j$  en la ecuación (3.5). El vector que minimiza esta norma vendrá dado por [3]:

$$W_j = [[X_j]^T [X_j]]^{-1} [X_j]^T d_j \quad (3.6)$$

A cada paso del tiempo se podría evaluar (3.6) a fin de obtener los coeficientes del filtro; esto sin embargo involucra una gran cantidad de cálculos, puesto que los coeficientes se determinan tomando en consideración todos los datos observados desde el inicio. Una forma más útil de este algoritmo se obtiene desarrollando un método recursivo para el cálculo de  $W$ .

El algoritmo de los mínimos cuadrados recursivos posibilita actualizar los coeficientes del filtro tomando en consideración toda la información contenida en el conjunto actual de coeficientes del filtro y, solamente es necesario una cantidad de cálculos incremental a cada paso de tiempo. A fin de derivar el algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, considérese que se realiza una observación más al instante  $j+1$ , de modo que el vector de datos de entrada al filtro para este instante será:

$$X_{j+1} = [x_{j+1} \ x_j \ \dots \ x_{j-n+2}] \quad (3.7)$$

Si en la ecuación (3.6) definimos como:

$$P_j = [[X_j]^T [X_j]]^{-1} \quad (3.8)$$

al considerar una nueva observación la ecuación (3.8) se transformará en [3]:

$$P_{j+1} = [[X_j]^T [X_j] + X_{j+1} X_{j+1}^T]^{-1} \quad (3.9)$$

Aplicando el lema de inversión de matrices [3], es posible llegar a:

$$P_{j+1} = P_j - P_j X_{j+1} [1 + X_{j+1}^T P_j X_{j+1}]^{-1} X_{j+1}^T P_j \quad (3.10)$$

Por otro lado tomando en consideración la ecuación (3.6) e incluyendo una nueva observación, el vector de coeficientes de ponderación del filtro para el instante  $j+1$  vendrá dado por:

$$W_{j+1} = P_{j+1} [[X_j]^T d_j] + P_{j+1} X_{j+1} d_{j+1} \quad (3.11)$$

al sustituir en esta ecuación la expresión para  $P_{j+1}$ , ecuación (3.10), se tendrá:

$$W_{j+1} = W_j - P_j X_{j+1} [1 + X_{j+1}^T P_j X_{j+1}]^{-1} X_{j+1}^T W_j + P_{j+1} X_{j+1} d_{j+1} \quad (3.12)$$

Definiendo:

$$K_{j+1} = P_{j+1} X_{j+1} \quad (3.13)$$

de modo que al sustituir nuevamente  $P_{j+1}$  dado en la ecuación (3.10) en esta última expresión se tendrá:

$$K_{j+1} = P_j X_{j+1} [1 + X_{j+1}^T P_j X_{j+1}]^{-1} \quad (3.14)$$

usando entonces la expresión dada en (3.14) para  $K_{j+1}$ , y sustituyéndola en la ecuación (3.12) se obtiene:

$$W_{j+1} = W_j + K_{j+1}[d_{j+1} - X_{j+1}^T W_j] \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.10), (3.14) y (3.15) constituyen al algoritmo RLS.

### 3.1.2 ALGORITMO RLS PONDERADO EXPONENCIALMENTE

El algoritmo RLS tal y como se ha enunciado tiene una memoria infinita, pues los valores de los coeficientes del filtro son funciones de todas las entradas pasadas; es sin embargo a menudo útil introducir un "factor de olvido" dentro del algoritmo, de esta forma se da mayor peso o importancia a los datos más recientes y menor peso o importancia a los datos anteriores. Una alternativa para el factor de olvido es sustituir la función de costo,  $V_j$ , por una suma de los cuadrados de los errores ponderada exponencialmente, esto es:

$$V_j = \sum_{s=1}^j \phi^{j-s} \epsilon_s^2 \quad (3.16)$$

donde  $\phi$  es una constante que determina la memoria efectiva del algoritmo; tal que  $0 < \phi \leq 1$ . Cuando  $\phi = 1$  el algoritmo tendrá una memoria infinita y estaremos en el caso anteriormente visto del algoritmo preventaneado. Cuando  $\phi < 1$  el algoritmo tendrá una memoria efectiva de  $\Omega$  puntos de datos, donde  $\Omega$  estará dado por [3]:

$$\Omega = \frac{-1}{\log \phi} \approx \frac{1}{1 - \phi} \quad (3.17)$$

Mientras  $\phi$  se aproxime más a la unidad, la memoria efectiva del algoritmo se irá incrementando, en tanto que para valores pequeños de  $\phi$  la memoria efectiva del algoritmo disminuirá. Los valores típicos de  $\phi$  están en el rango de 0.95 (para variaciones rápidas, es decir damos mayor peso a los datos más recientes y prácticamente olvidamos los datos anteriores) a 0.999 (para variaciones lentas, pues con tal valor de  $\phi$  damos importancia a casi todos los datos pasados).

Tomando en consideración el factor de olvido es posible llegar a las siguientes expresiones:

$$P_{j+1} = \frac{P_j - P_j X_{j+1} [\phi + X_{j+1}^T P_j X_{j+1}]^{-1} X_{j+1}^T P_j}{\phi} \quad (3.18)$$

$$K_{j+1} = P_j X_{j+1} [\phi + X_{j+1}^T P_j X_{j+1}]^{-1} \quad (3.19)$$

$$W_{j+1} = W_j + K_{j+1}[d_{j+1} - X_{j+1}^T W_j] \quad (3.20)$$

las cuales se corresponden con las ecuaciones (3.10), (3.14) y (3.15) para el caso del algoritmo RLS sin factor de olvido, y donde:

$$\Phi_j = \text{diag}[\phi^{j-1}, \phi^{j-2}, \dots, \phi, 1] \quad (3.21)$$

### 3.1.3 INTERPRETACION ESTOCASTICA

El algoritmo RLS se derivó sin hacer ninguna consideración acerca de los datos de entrada, se estableció únicamente que minimizaría la suma de los errores al cuadrado a cada paso del tiempo,

este hecho es por sí solo muy útil; sin embargo a menudo es deseable conocer más acerca del comportamiento del filtro. Para analizar más detalladamente las propiedades del filtro adaptivo RLS es necesario establecer la naturaleza de los estadísticos de los datos.

Consideraremos el caso para el cual los datos de entrada  $x_j$  corresponden a un proceso estocástico estacionario y ergódico de media cero y correlación  $r(\tau)$ , donde  $r(\tau)$  esta dado por:

$$r(\tau) = E[x_j x_{j-\tau}] \quad (3.22)$$

Si el proceso es ergódico los promedios en el tiempo pueden reemplazarse en el límite por los valores esperados, es decir:

$$r(\tau) = E[x_j x_{j-\tau}] = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N-\tau} x_j x_{j+\tau} \quad (3.23)$$

donde  $N$  representa el número de datos muestreados. De manera que si se toma en consideración que los datos del proceso satisfacen la ecuación (3.23) es posible demostrar que se cumple:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{[X_j]^T [X_j]\} = R_{xx} \quad (3.24)$$

Como es evidente,  $R_{xx}$ , es la matriz de autocorrelación de los datos de entrada. En forma análoga se tiene que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \{[X_j]^T d_j\} = R_{xd} \quad (3.25)$$

Por consiguiente se cumplirá:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} N P_j = \lim_{N \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{N} \{[X_j]^T [X_j]\} \right]^{-1} = R_{xx}^{-1} \quad (3.26)$$

De manera que es posible determinar, en el límite, a que tiende el vector de coeficientes de ponderación del filtro, así pues:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} W_j &= \lim_{N \rightarrow \infty} \{[X_j]^T [X_j]\}^{-1} [X_j]^T d_j \\ &= R_{xx}^{-1} R_{xd} = W^* \end{aligned} \quad (3.27)$$

En otras palabras, en el límite, el vector de coeficientes de ponderación del filtro converge a la ecuación de Wiener-Hopf establecida en la sección II. Por otro lado de acuerdo a la ecuación (3.27) es evidente que la matriz  $P_j$  convenientemente normalizada converge al inverso de la matriz de autocorrelación.

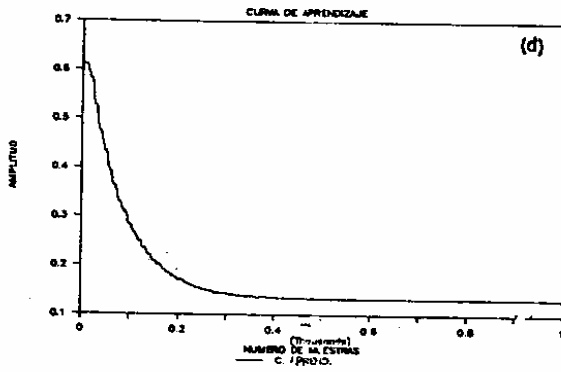
### 3.2 ANALISIS DE CONVERGENCIA

La varianza de la salida del sistema de cancelación (error cuadrático medio) provee una medida útil del comportamiento del filtro adaptivo. La salida del sistema de cancelación (señal de error) para un vector de coeficientes arbitrario esta dada, según la ecuación (3.5), por:

$$\epsilon_j = d_j - X_j^T W \quad (3.28)$$

Tal ecuación puede descomponerse siempre en una suma del error de predicción óptimo,  $\epsilon_j^*$ , (dado por el vector de coeficientes de ponderación óp-



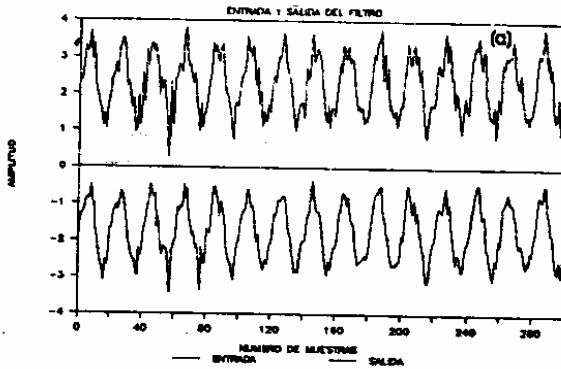


(d) Curva de aprendizaje.

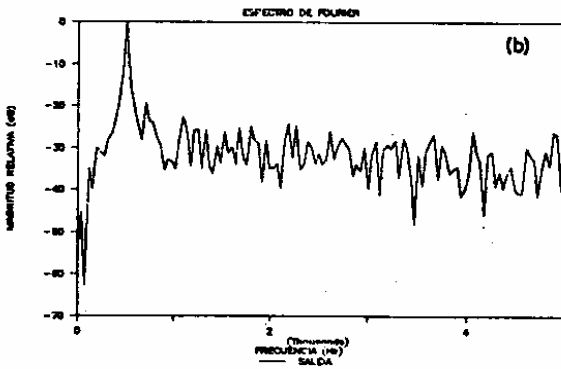
**Ejemplo # 2**

Se trata de analizar la influencia del parámetro de convergencia  $\mu$  en el comportamiento de un sistema de cancelación adaptivo de ruido que utiliza el algoritmo LMS para la actualización de los coeficientes del filtro.

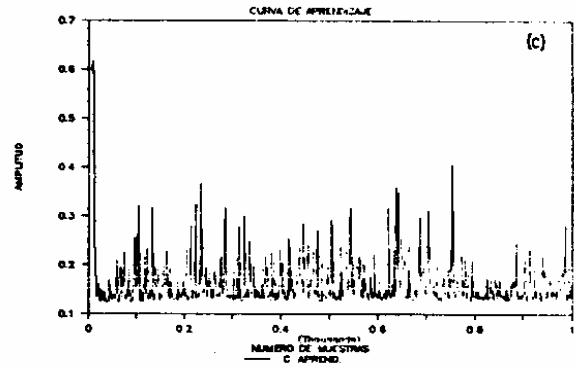
La señal a procesarse es la misma del ejemplo anterior, pero en este caso se ha ecogido tal que el parámetro de convergencia  $\mu = \mu_c$ .



(a) Comparación entrada/salida del sistema.



(b) Análisis espectral de la señal de salida.

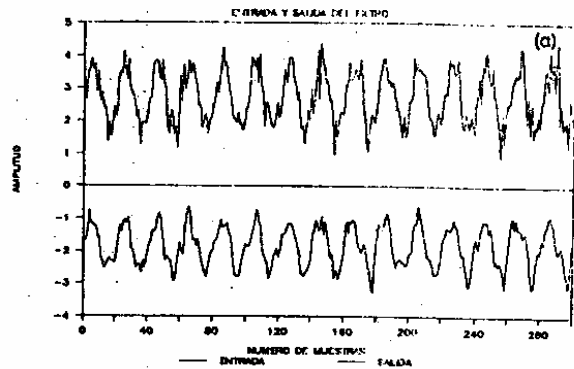


(c) Curva de aprendizaje.

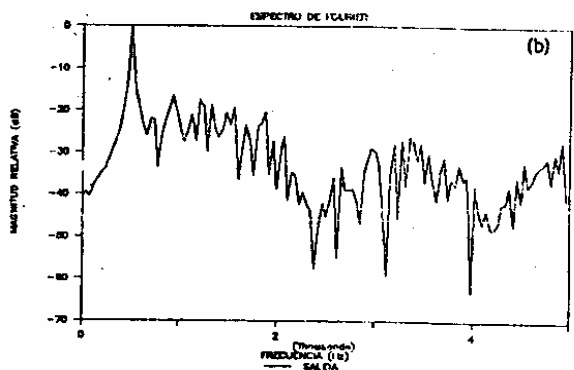
**Ejemplo # 3**

Se pretende estudiar la influencia del orden del filtro en el comportamiento del sistema de cancelación adaptivo de ruido.

La señal a procesarse es la misma del ejemplo anterior. El filtro adaptivo en este caso es de orden 6 y el número de retardos igual a 3, el parámetro de convergencia igual a  $\mu_c/50$ .

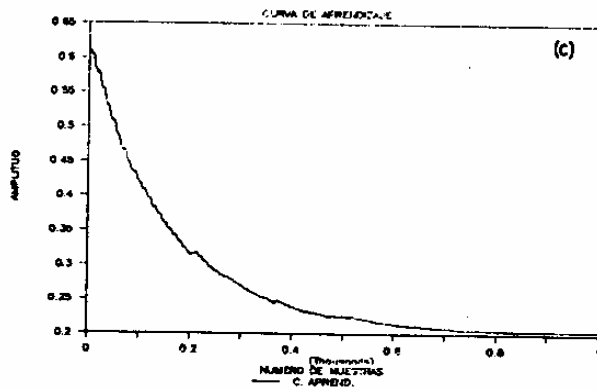


(a) Comparación entrada/salida.



(b) Análisis espectral de la señal de salida.

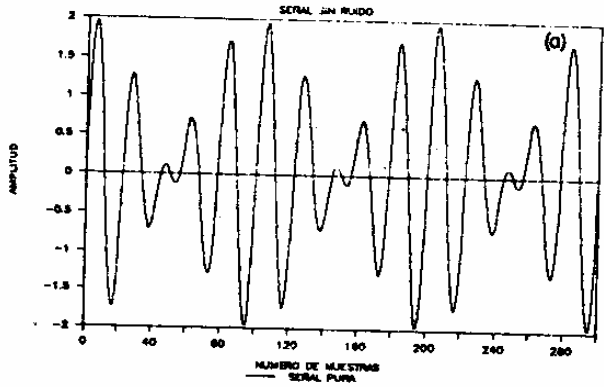
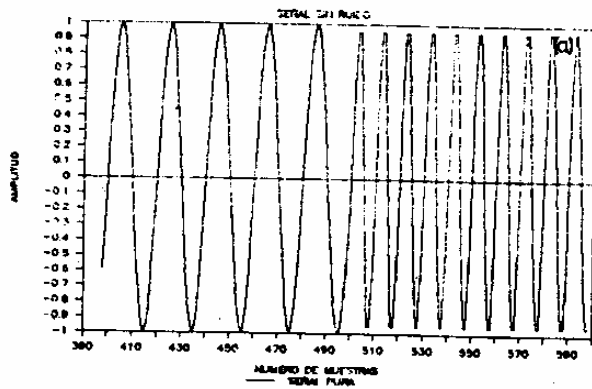




(c) Curva de aprendizaje.

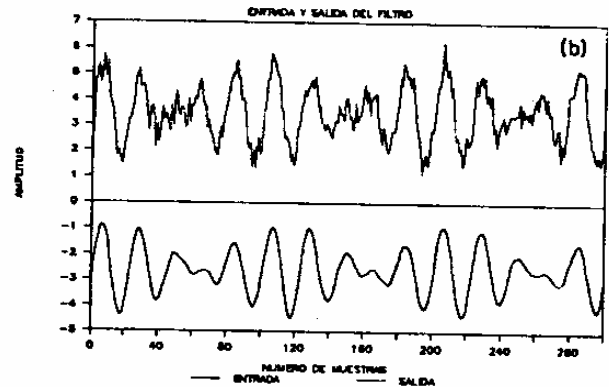
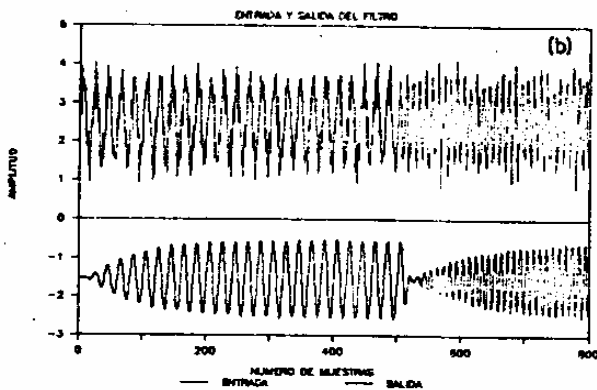
**Ejemplo # 4**

Con este ejemplo se trata de comprobar si el filtro se ajusta frente a cambios en las características de la señal. La señal a procesarse está conformada por dos bloques: el primero constituido por una señal de 500Hz. y amplitud unitaria, el segundo por una señal de 1000Hz y amplitud unitaria; a ésta señal se le sumó ruido coloreado. El filtro adaptivo para este ejemplo fue de orden 16 y  $T=8$ , con un parámetro de convergencia  $\mu = \mu_c/25$ .



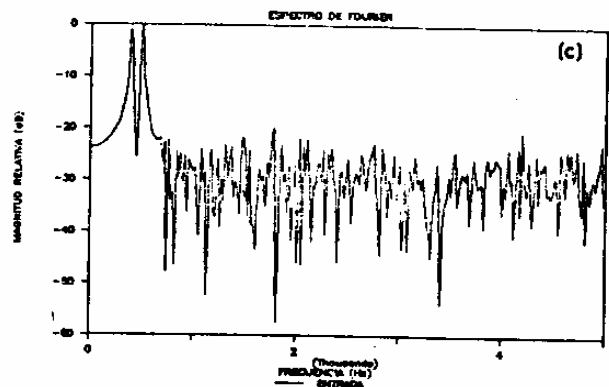
(a) Señal periódica libre de ruido.

(a) Señal a procesarse.



(b) Comparación entrada/salida.

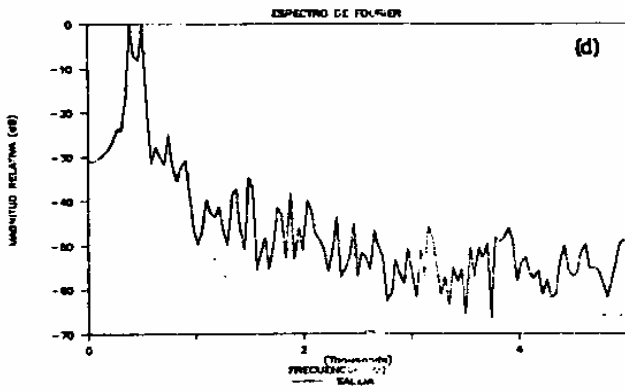
(b) Comparación entrada/salida.



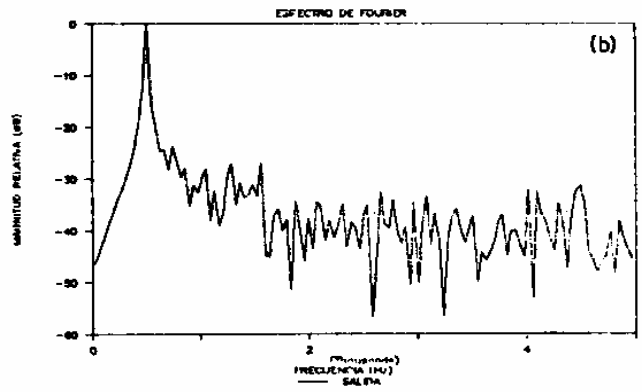
(c) Análisis espectral de la señal de entrada.

**Ejemplo # 5**

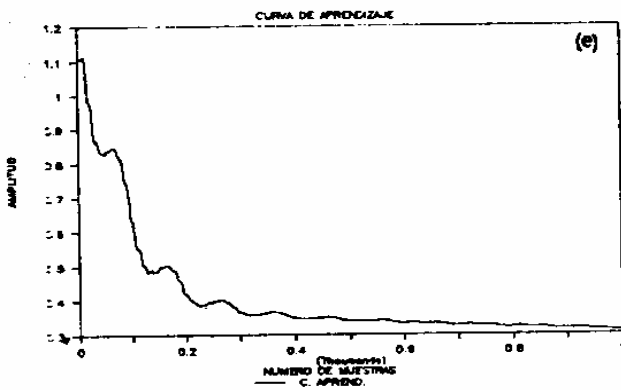
En este ejemplo se procesa una señal periódica constituida por la suma de 2 sinusoides; se seleccionó una sinusoides con  $f=400$  Hz., amplitud unitaria, y otra sinusoides con  $f=500$  Hz. y amplitud así mismo unitaria. El ruido contaminador fue ruido coloreado. El filtro adaptivo seleccionado fue de orden 16, con una longitud de retardo igual a 8, y el parámetro de convergencia  $\mu = \mu_c/50$ .



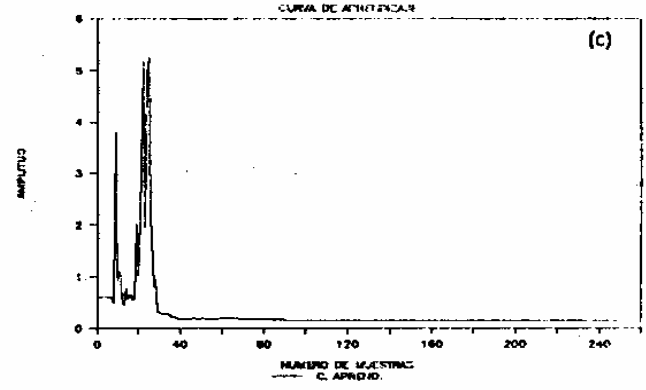
(d) Análisis espectral de la señal de salida.



(b) Análisis espectral de la señal de salida.



(e) Curva de aprendizaje.

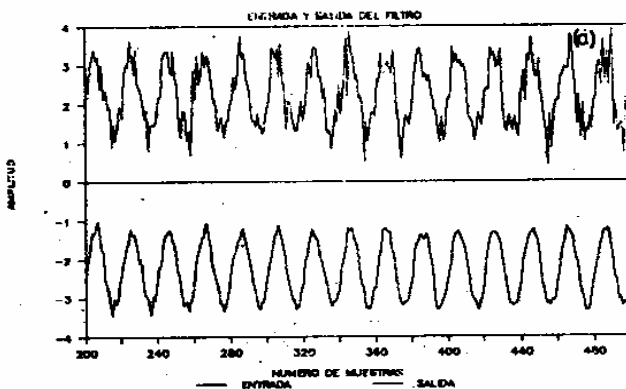


(c) Curva de aprendizaje.

#### 4.1.3 RESULTADOS SOBRE EL FILTRO ADAPTIVO RLS

##### Ejemplo # 6

La señal que se procesa es una senoide de frecuencia igual a 500Hz y amplitud unitaria; contaminada con ruido coloreado (este es un ejemplo idéntico al #1, desarrollado para el filtro LMS). El filtro adaptivo seleccionado fue de orden 16 y  $T=8$ , el factor de olvido  $\phi = 0.995$ , y la constante de inicialización  $\sigma=10^2$ .

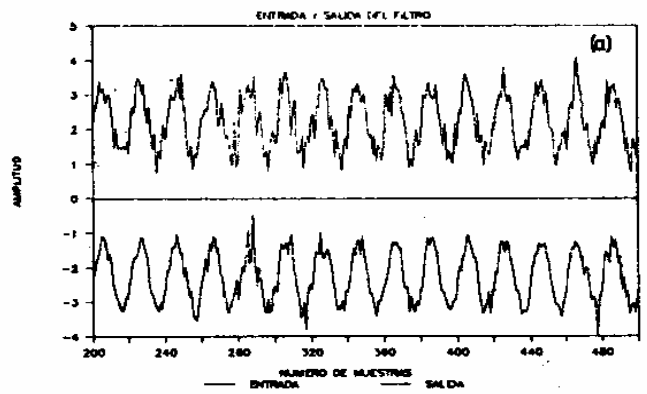


(a) Comparación entrada/salida.

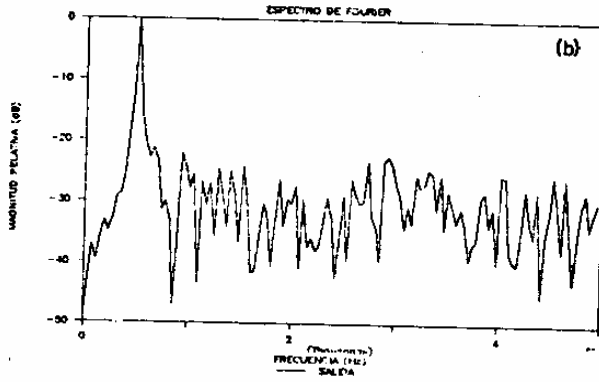
##### Ejemplo # 7

Se trata de analizar la influencia del factor de olvido en el comportamiento del sistema de cancelación adaptivo de ruido que utiliza un filtro RLS.

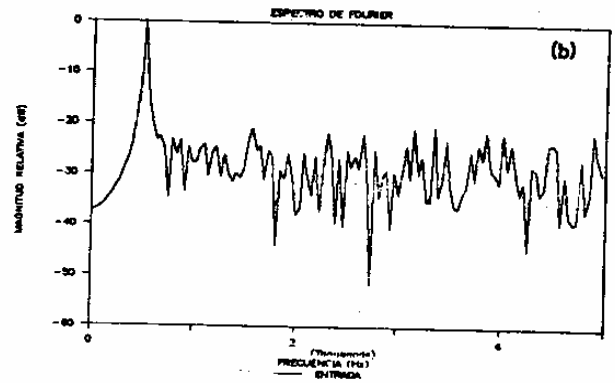
La señal a procesarse es idéntica a la del ejemplo anterior, los parámetros del filtro son los mismos a excepción del factor de olvido que en este ejemplo es  $\phi = 0.95$ .



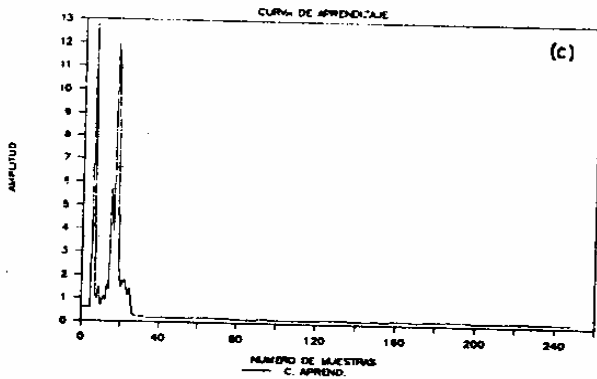
(a) Comparación entrada/salida.



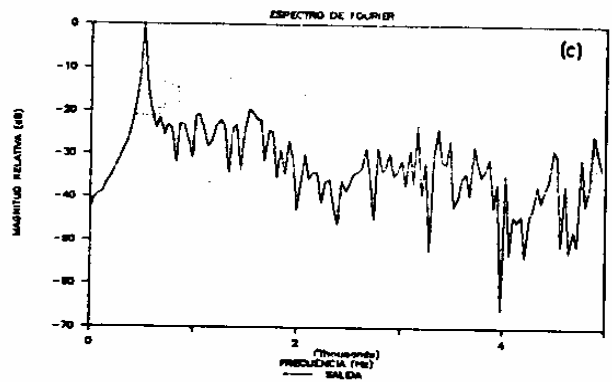
(b) Análisis espectral de la señal de salida.



(b) Análisis espectral de la señal de entrada.



(c) Curva de aprendizaje.

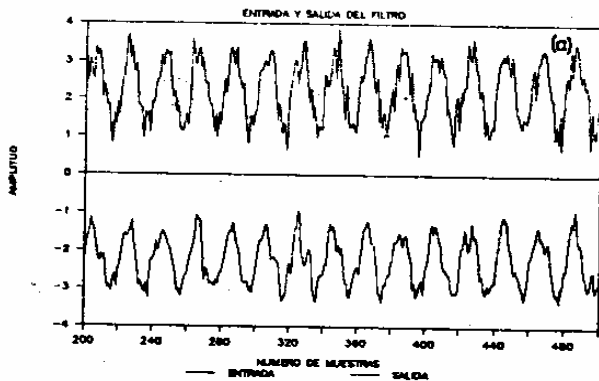


(c) Análisis espectral de la señal de salida.

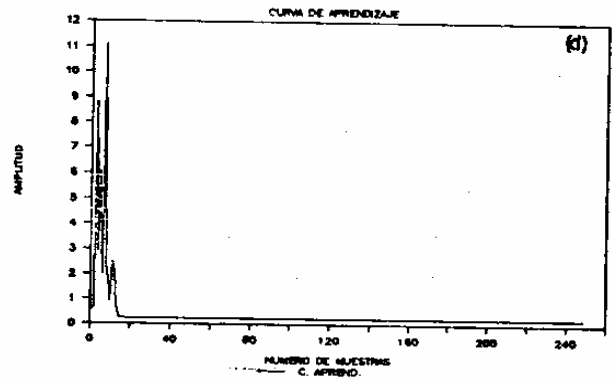
**Ejemplo # 8**

Se trata de analizar la influencia del orden del filtro en el comportamiento del sistema de cancelación de ruido que utiliza el algoritmo RLS.

La señal a procesarse es la misma del ejemplo #7, el filtro fue de orden 6 y el número de retardos, 3, el factor de olvido  $\rho = 0.998$ , y la constante de inicialización,  $\sigma = 10^2$ .



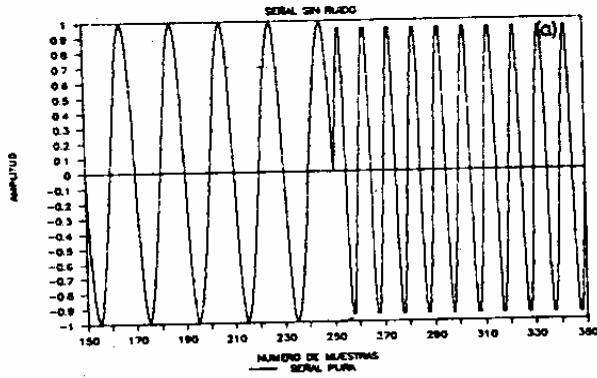
(a) Comparación entrada/salida.



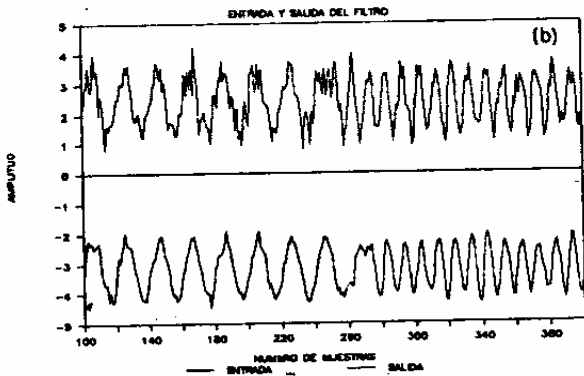
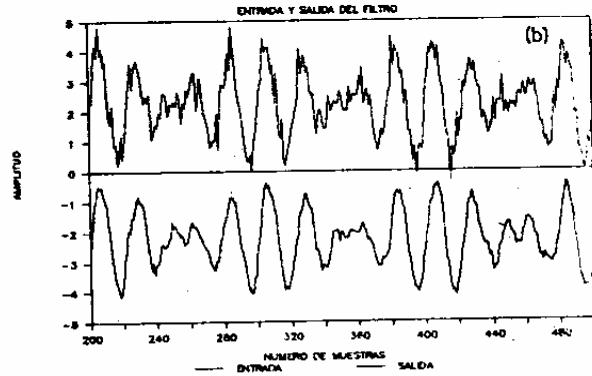
(d) Curva de aprendizaje.

**Ejemplo # 9**

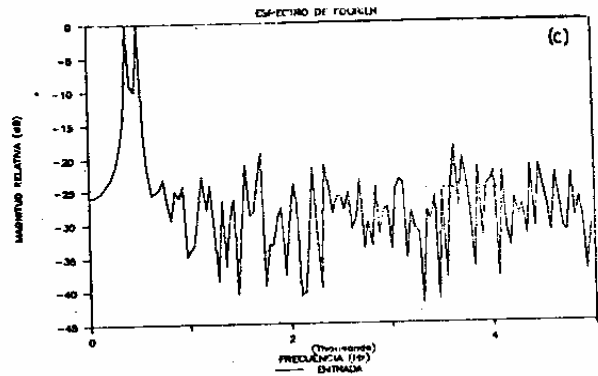
En este ejemplo durante el proceso se realizó cambios en la frecuencia de la señal periódica, tratando de analizar si el sistema de cancelación se adapta a tales variaciones. Durante los 0.025 seg. de muestreo inicial se generó una senoide de frecuencia 500 Hz. y amplitud unitaria, luego en los 0.025 seg. restantes la frecuencia de la señal se varió a 1 KHz. y la amplitud se mantuvo en 1. La señal se contaminó con ruido coloreado. El filtro adaptivo utilizado fue de orden 16,  $T = 8$ ,  $\sigma = 10^2$  y  $\rho = 0.998$ .



(a) Señal periódica libre de interferencia.



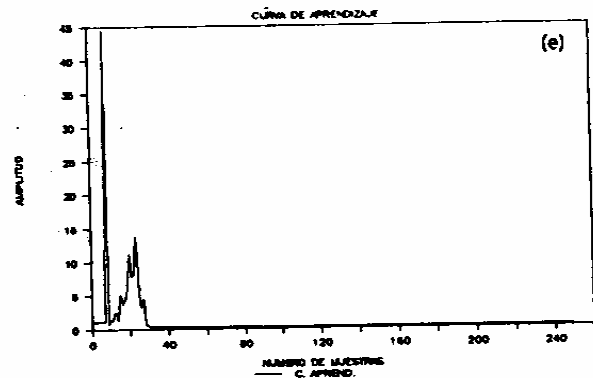
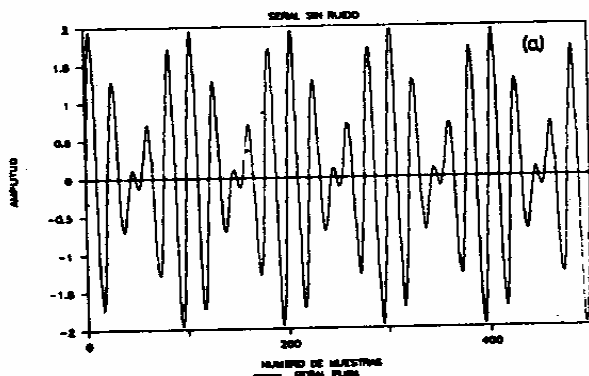
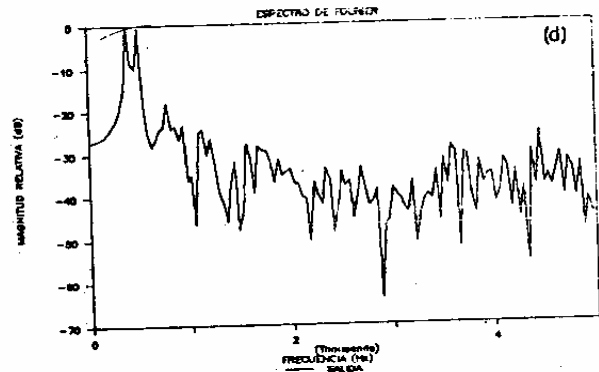
(b) Comparación entrada/salida.



**Ejemplo # 10**

En este caso la señal periódica estuvo constituida por la suma de 2 sinusoides, la primera de frecuencia 400 Hz. y amplitud unitaria, y la segunda de frecuencia 500 Hz. y amplitud así mismo unitaria; a la señal resultante se le añadió ruido coloreado de iguales características a la de los ejemplos 7, 8 y 9. El filtro adaptivo utilizado fue el mismo del ejemplo anterior.

(a) Señal periódica libre de ruido. (b) Comparación entrada/salida del sistema. (c) Análisis espectral de la señal de entrada. (d) Análisis espectral de la señal de salida. (e) Curva de aprendizaje.



## 4.2 CONCLUSIONES

A partir del estudio realizado en el presente trabajo se puede concluir lo siguiente:

- Las principales ventajas del método de cancelación adaptiva de ruido son: su capacidad adaptiva, bajo nivel de ruido de salida y baja distorsión de señal.
- Queda demostrada la eficiencia de un cancelador adaptivo de ruido, aplicado para eliminar una interferencia de banda ancha que contamina a una señal periódica, a pesar de que en esta aplicación no se dispone de una entrada de referencia externa. La correspondencia entre la señal pura y la salida del filtro adaptivo no es perfecta a causa de dos limitaciones fundamentales, así:
  - el filtro es de longitud finita
  - el filtro tiene una velocidad finita de adaptación.
- Mientras mayor sea el número de coeficientes de ponderación que se usen en el filtro, más cercana es su respuesta a la del filtro óptimo de Wiener. Sin embargo, incrementando el número de coeficientes el proceso adaptivo se torna más lento y además se incrementa el costo de implementación.
- El algoritmo LMS es más eficiente computacionalmente que el algoritmo RLS; sin embargo la ventaja de este último radica en su velocidad de convergencia superior.
- La elección del parámetro  $\mu$  en el algoritmo LMS determina la velocidad de convergencia de éste, valores de  $\mu$  cercanos al límite superior producen adaptaciones rápidas pero generan un valor relativamente grande del error en estado estable; un valor de  $\mu$  próximo a cero producirá un error en estado estable cercano al mínimo posible, pero la velocidad de convergencia se torna mucho más lenta.
- El factor de olvido,  $\beta$ , determina la memoria efectiva del algoritmo RLS, por tanto la elección de este parámetro está íntimamente ligada con las características del sistema y de la señal, si estas varían lentamente es adecuado un valor de  $\beta$  cercano a la unidad, por el contrario si tales variaciones son rápidas es necesario un valor de  $\beta$  menor a la unidad.

## NOTAS

1. En general se usará notación en mayúsculas para identificar vectores y matrices y, notación en minúsculas para escalares.
2.  $E[\cdot]$  representa el valor esperado.
3. Donde  $[X_j]$  señalará que se trata de una matriz a fin de diferenciarla de  $X_j$  vector y, la notación (en letras minúsculas subrayadas) identificará a las variables como vectores.

## REFERENCIAS

- [1] Bernard Widrow and others, Adaptive noise cancelling: Principles and Application, Proceedings of the IEEE, Vol.63, pp 1962-1716.
- [2] Bernard Widrow and others, Stationary and Nonstationary Learning Characteristics of

the LMS Adaptive Filter, Proceedings of the IEEE, Vol.64, No. 8, August 1976, pp 1151-1162.

- [3] C.F.N. Cowan and P.M. Grant, Adaptive Filters, Prentice Hall, 1985.
- [4] Jiménez M. Soledad, Cancelación Adaptiva de Ruido, Tesis de Grado. E.P.N., Marzo 1988.

## BIOGRAFIA



JIMENEZ MA. SOLEDAD. Nació en Cariamanga el 17 de Septiembre de 1961. Realizó sus estudios superiores en la Escuela Politécnica Nacional y se graduó de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones en Marzo de 1988.

Actualmente presta sus servicios en la Escuela Politécnica Nacional, Facultad de Ingeniería Eléctrica, en calidad de Profesor Asistente en el Área de Electrónica.