

GRAFICOS TRIDIMENSIONALES

Fernando FLORES CIFUENTES y Carlos H. J. CALDERON CHAMOCHUMBI

SUMARIO

Se establece las bases teóricas para la proyección de un punto en el espacio sobre un plano cualquiera y, a partir de éstas, se elabora un programa de computadora para la representación tridimensional de un objeto. Se aplica la técnica lograda a la graficación de las transformadas de Fourier bidimensionales.

ABSTRACT

The theoretical bases for the projection of a space point on any given plane are established and, from these, a computer program for the three-dimensional representation of an object is developed. The resulting technique is applied to illustrate two-dimensional Fourier transforms.

I INTRODUCCION

En primer término se establece las bases teóricas fundamentales para la proyección de las coordenadas, en el plano de visión, de un punto cualquiera en el espacio.

Sobre la base de consideraciones prácticas se deduce que la representación gráfica más adecuada de un objeto corresponde al corte del mismo mediante planos paralelos entre sí y perpendiculares a la línea de visión por lo que conviene que la representación algebraica del objeto esté dada en coordenadas Cartesianas. Acto seguido se hace una relación del equipo requerido para llevar a cabo la graficación determinada por un programa escrito en BASIC.

En tercer lugar se indica que el objeto a ser graficado se representa como una nube de puntos dentro de un paralelepípedo conformado por pequeños cubos. Se establece una analogía entre el paralelepípedo y una matriz tridimensional en la que la presencia del objeto en uno de los cubos se representa mediante un uno (1) en el elemento correspondiente de la matriz tridimensional, la ausencia se denota por un cero (0). Se comienza con los puntos del plano más próximos a la vista del observador y se continúa con el inmediatamente siguiente teniendo cuidado de esconder los puntos que no deben ser vistos por encontrarse en la sombra del contorno anterior (técnica de las líneas escondidas).

Continúa el trabajo con la representación gráfica tridimensional de las transformadas de Fourier bidimensionales y se le compara visualmente con la representación convencional.

Se finaliza indicando la bondad de la técnica lograda aunque se espera mejorar su rapidez.

II ASPECTOS TEORICOS

El problema teórico fundamental consiste en determinar las coordenadas, en el plano de visión, de un punto cualquiera en el espacio.

Consideremos un sistema de ejes coordenados cartesianos xyz , un punto cualquiera $r_i(x_i, y_i, z_i)$ y una dirección de observación $R(1, T, F)$ según lo ilustra la Figura 1

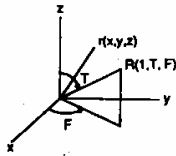


Figura 1. Disposición geométrica bajo consideración.

La proyección del punto x_1 sobre un plano de visión, normal a la línea de observación R, viene dada por

$$x_1 - (x_1 \cdot R)R \quad (1)$$

Esta expresión indica que las componentes de x_1 , transversales a R, resultan al ser restada la componente longitudinal del vector x_1 .

Una manera alternativa de calcular las componentes transversales de x_1 consiste en adoptar un nuevo sistema de ejes coordenados cartesianos con uno de sus ejes coincidente con la dirección de observación. Esta operación podría ser lograda a través de dos pasos. Primeramente cabría rotar el sistema xyz alrededor de su eje z de modo que el nuevo eje x' forme un ángulo F con el antiguo eje x, como lo describe la Figura 2.

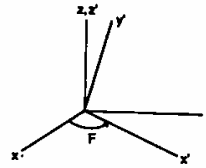


Figura 2 Rotación del sistema xyz alrededor de su eje z para configurar el sistema x'y'z'.

En segundo lugar cabría rotar el sistema x'y'z' alrededor de su eje y' de modo que el nuevo eje x'' forme un ángulo $\pi/2 - T$ con el antiguo eje x' , como lo describe la Figura 3.

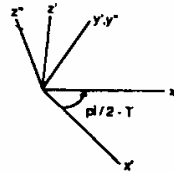


Figura 3 Rotación del sistema x'y'z' alrededor de su eje y' para configurar el sistema x''y''z''.

Con el fin de analizar la situación conviene dibujar únicamente los planos de interés de las Figuras 2 y 3. Así

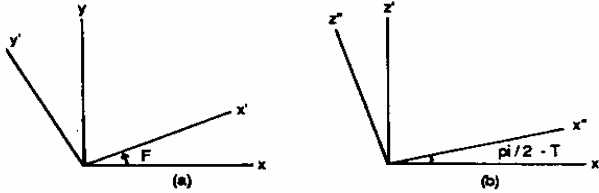


Figura 4 Planos de interés para el cálculo de los vectores unitarios $\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$.

A partir de la figura 4 (a) se obtiene:

$$\hat{x} = \hat{x}'\cos(F) - \hat{y}'\sin(F) \quad (2a)$$

$$\hat{y} = \hat{x}'\sin(F) + \hat{y}'\cos(F) \quad (2b)$$

$$\hat{z} = \hat{z}' \quad (2c)$$

mientras que de la figura 4(b) resulta

$$\hat{x}' = \hat{x}''\sin(T) - \hat{z}''\cos(T) \quad (3a)$$

$$\hat{y}' = \hat{y}'' \quad (3b)$$

$$\hat{z}' = \hat{x}''\cos(T) + \hat{z}''\sin(T) \quad (3c)$$

Combinando las ecuaciones 2 y 3 se logra:

$$\hat{x} = \hat{x}''\sin(T)\cos(F) - \hat{y}''\sin(F) - \hat{z}''\cos(T)\cos(F) \quad (4a)$$

$$\hat{y} = \hat{x}''\sin(T)\sin(F) + \hat{y}''\cos(F) - \hat{z}''\cos(T)\sin(F) \quad (4b)$$

$$\hat{z} = \hat{x}''\cos(T) \quad (4c)$$

Reemplazando la ecuación (4) en la expresión para r_i se obtiene

$$r_i = \hat{x}''[x_i\sin(T)\cos(F) + y_i\sin(T)\sin(F) + z_i\cos(T)] + \hat{y}''[-x_i\sin(F) + y_i\cos(F)] + \hat{z}''[-x_i\cos(T)\cos(F) - y_i\cos(T)\sin(F) + z_i\sin(T)] \quad (5)$$

Es fácil comprobar que al efectuar el mismo reemplazo en la expresión (1) se logra el segundo miembro de la ecuación (5) sin el coeficiente de \hat{x}'' . Esto se debe a que \hat{x}'' coincide con la dirección de observación R y en la expresión (1) la componente longitudinal ha sido eliminada adrede.

Para los fines de graficación conviene definir un par de coordenadas X_i, Y_i que corresponden directamente a las coordenadas y'', z'' respectivamente. Así

$$X_i = -x_i\sin(F) + y_i\cos(F) \quad (6a)$$

$$Y_i = -x_i\cos(T)\cos(F) - y_i\cos(T)\sin(F) + z_i\sin(T) \quad (6b)$$

III ASPECTOS PRACTICOS

Para la resolución del presente problema, inicialmente se utilizó la representación en coordenadas polares, sin embargo se presentó el inconveniente que al cambiar los ángulos no se cubría una variación uniforme de la figura en el sistema Cartesiano de coordenadas. Se tuvo necesidad de recurrir a la representación Cartesiapa, con la cual se obtuvo un resultado satisfactorio. Lo que se deseaba inicialmente era conformar una matriz tridimensional que tuviera una correspondencia con la figura que se quería graficar.

La figura así representada podía ser cortada mediante planos paralelos, obteniendo de esa manera curvas contenidas en esos planos que son procesadas adecuadamente para determinar las partes que se debían dibujar.

Para la escritura del programa se utilizó el lenguaje BASIC (QUICK BASIC versión 4.0-), con los siguientes requerimientos mínimos:

Computador IBM PC/XT/AT/PS/2.
640 KB de memoria.

1 disco fijo.
 1 unidad de diskette de 1.44 MB/1.44 MB/720 KB/360 KB.
 Monitor con capacidad de gráficos (CGA, EGA, VGA).
 Opciones:
 Coprocesador de matemáticas 80287
 Impresor matricial
 Graficador Hewlett-Packard 7475A o compatible.

IV ALGORITMO

La representación de la figura en el espacio se realiza utilizando un arreglo tridimensional. Cada elemento del arreglo define una posición en dicho espacio, el valor almacenado en ese elemento indica si el objeto está presente o no. Se obtiene por lo tanto un arreglo tridimensional que almacena ceros y unos que definen la presencia o no del objeto. Esta forma de representación permite almacenar información de uno o varios objetos relacionados entre sí o no. Para conseguir una representación bastante buena del objeto se debería definir un arreglo con una gran cantidad de elementos. En la práctica la mayoría de microcomputadores limita dicho número a valores relativamente pequeños. La representación de la figura se la realiza de una manera discretizada.

Se define por tanto una matriz tridimensional IFIGURA(I,J,K) con:

$$1 \leq I \leq N1$$

$$1 \leq J \leq N2$$

$$1 \leq K \leq N3$$

Para el caso en que $N1=N2=N3$ la figura se la representa en un cubo. El observador, estará ubicado en una posición dada por los ángulos T y F, en esta versión del programa se asume que el observador se encuentra a una distancia bastante grande.

Para empezar el algoritmo, se analiza la

matriz IFIGURA(I,J,K) manteniendo constante uno de los índices (J). Para el valor de $J=1$, todos los puntos de esta superficie se grafican, ya que para el observador esta primera curva (qué está más cerca a él) se verá completa. Esta curva que está representada en el espacio tridimensional es transformada a un espacio bidimensional para que pueda ser representada en el dispositivo de salida que se utilice (pantalla, graficador). Simultáneamente se debe generar un vector en el que se almacene el contorno que ha sido graficado, de tal manera, que cuando se analice la siguiente curva, se pueda determinar perfectamente las partes de la nueva curva que deban ser dibujadas y las que deban ser escondidas.

El proceso se continúa para las diferentes superficies cuidando que el vector que almacena el contorno sea actualizado correctamente.

V EJEMPLOS

En las figuras 5 y 6 se presentan las transformadas de Fourier para los siguientes casos:

- a) $f(x,y) = \text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y)$
- b) $g(x,y) = \text{circ}((x^2 + y^2)^{.5})$
- c) $h(x,y) = \cos(x) \cdot \cos(y) \cdot \text{rect}(x) \cdot \text{rect}(y)$

VI CONCLUSIONES

El programa desarrollado permite representar en forma gráfica un cuerpo tridimensional, considerando la técnica de las líneas escondidas. El campo de aplicación del mismo es bastante amplio pero para nuestro estudio se lo ha utilizado en la representación de las transformadas de Fourier bidimensionales.

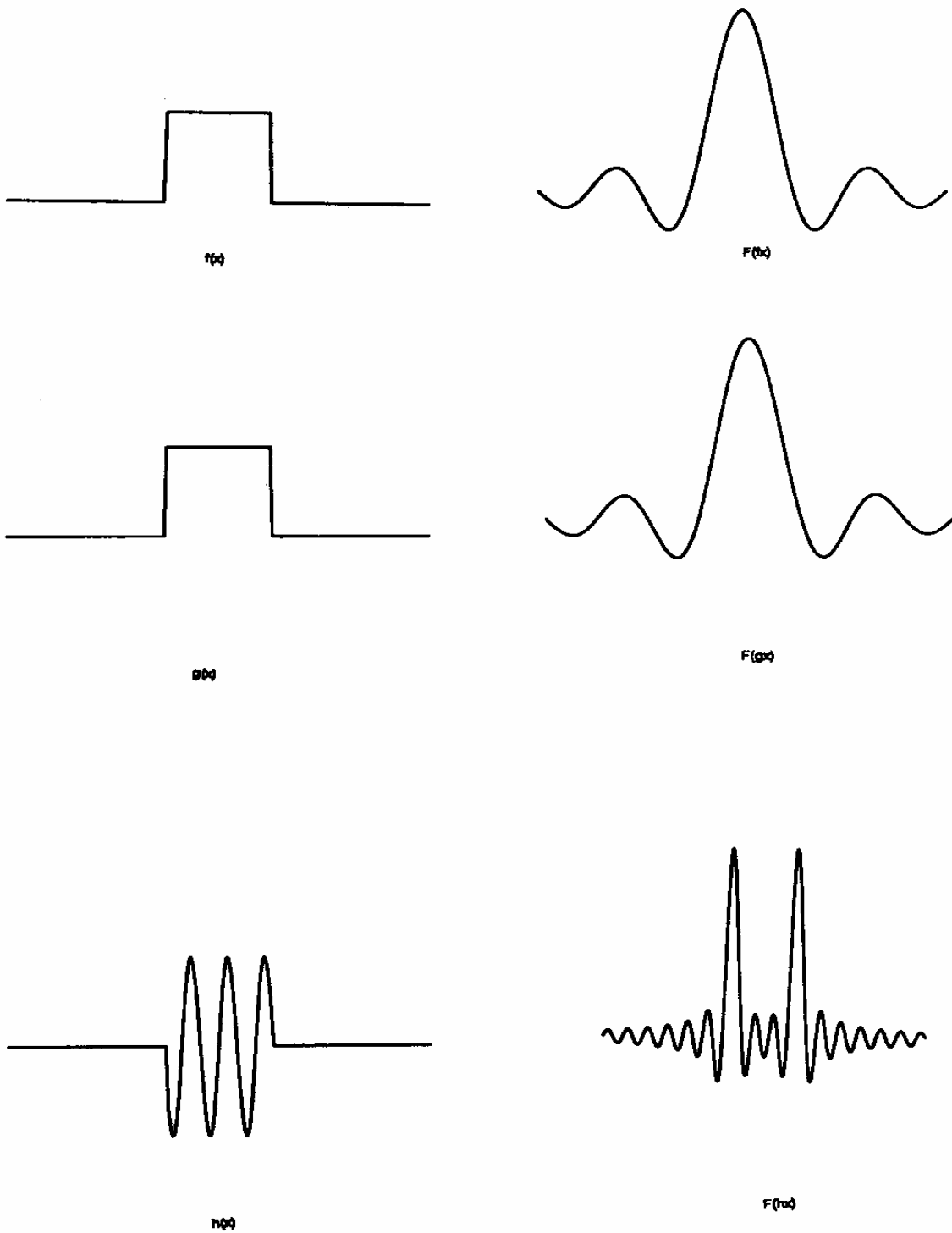
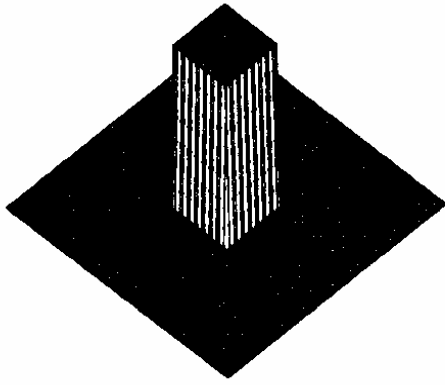
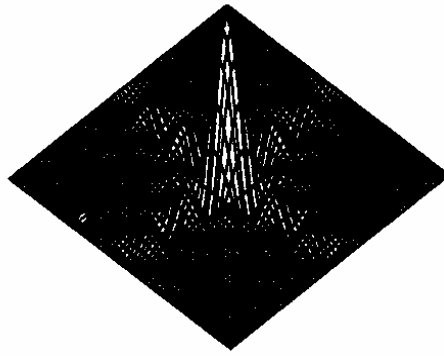


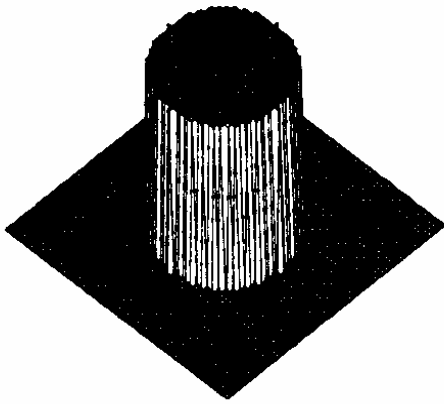
Figure 5



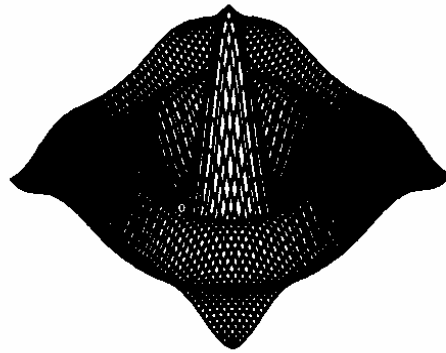
$f(x,y)$



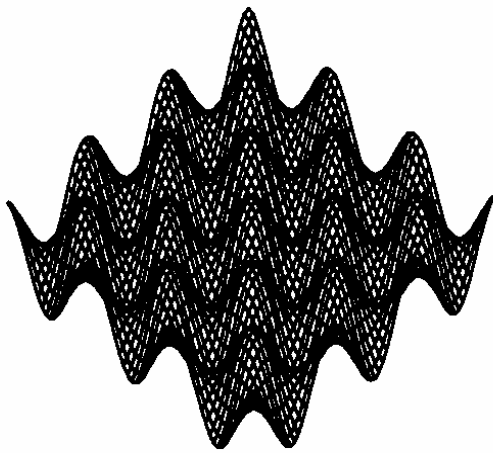
$F(fx, fy)$



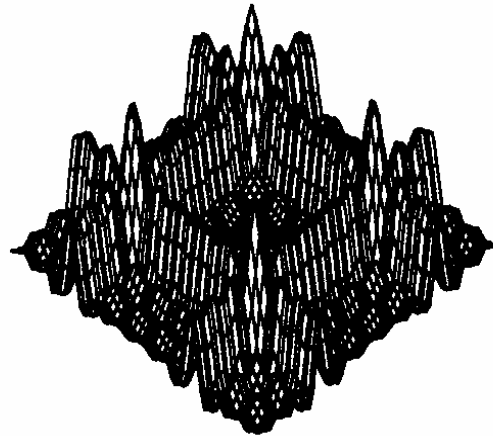
$g(x,y)$



$F(gx, gy)$



$h(x,y)$



$F(hx, hy)$

Figura 6

El programa fué realizado en lenguaje BASIC, por tratarse de un lenguaje simple de manejar y de aplicación inmediata. Sin embargo del análisis de los resultados, se pudo comprobar que el mismo opera con cierta demora en el procesamiento de cada figura por lo que se ha previsto desarrollar este programa utilizando lenguaje C, con lo cual se conseguirá una rapidez considerable.

AUTORES



Fernando Flores Cifuentes es profesor de la Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Escuela Politécnica Nacional, en el departamento de Electrónica y Control. Ha desempeñado sus funciones en los campos de Computadores Personales y Control con Microprocesadores. Actualmente colabora con ASETA en el campo de informática. Posee el título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones otorgado por la Escuela Politécnica Nacional.



Carlos M. J. Calderón Chamocho es Asesor del Departamento de Asuntos Satelitales de ASETA, ha desempeñado diversas actividades en universidades del Perú y de los Estados Unidos de América; ha desarrollado labores en la Junta de Control de Energía Atómica, Instituto Geofísico del Perú, Comisión Nacional de Investigación y desarrollo Aeroespacial, Dirección General de Comunicaciones, ENTEL PERU S.A. y ASETA. Es autor de varios trabajos en física ionosférica y matemáticas y posee un grado de B.S.E.E. otorgado por el Instituto Tecnológico de Massachusetts y otro de Ph. D. conferido por el Dartmouth College.