MECANICA CUANTICA ESTOCASTICA (1)

ING. DOUGLAS MOYA A.
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA POLITECNICA NACIONAL

RESUMEN

Como alternativa de la interpretación "subjetiva" de Copenhage de la mecánica cuántica, se plantea otra que siempre quiere ser consistente con la teoría de la relatividad. Para ello se sigue sosteniendo la idea de punto material clásico, y a pesar de ello deduce las mismas relaciones fundamentales de la mecánica cuántica no relativista. Esto sería, lo que llamaríamos una interpretación "objetiva".

1. INTRODUCCION

De acuerdo a la teoría de la relatividad una partícula fundamental debe ser un punto material |1|. En efecto, en mecánica clásica se puede introducir el concepto de cuerpo rígido, es decir, un cuerpo cuya deformación sea absolutamente imposible. Sin embargo, en la teoría de la relatividad es imposible la existencia de cuerpos absolutamente rígidos. Supongamos que un cuerpo sólido se pone en movimiento por aplicación de una fuerza exterior en uno de sus puntos. Si el cuerpo fuese absolutamente rígido, todos sus puntos deberán ponerse en movimiento en el mismo instante en que comienza a moverse el punto en que se aplica la fuerza, pues si así no ocurriera el cuerpo sufriría una deformación. Sin embargo la teoría de relatividad afirma que esto es imposible, ya que la fuerza aplicada en tal punto se transmite a los demás con una velocidad finita y, por lo tanto, no es posible que todos los puntos se pongan en movimiento simultáneamente.

Las partículas elementales son aquellas cuyo estado mecánico queda descrito completamente por sus tres coordenadas. Es evidente que si una partícula elemental tuviese dimensiones no nulas, esto es, si poseyera una cierta extensión en el espacio, no podría deformarse, dado que el concepto de deformación está ligado al de posibilidad de movimiento independiente de las diferentes partes del cuerpo. Pero, conforme acabamos de ver, la teoría de la relatividad prueba la imposibilidad de existencia de cuerpos absolutamente rígidos.

Llegamos así a la conclusión de que en mecánica relativista no podemos atribuir dimensiones finitas a las partículas que consideramos elementales. Así deberán considerarse como puntos.

A temperatura absoluta cero (T = 0) la partícula en promedio está en reposo. Sin embargo es necesario observar lo siguiente:

a) No se puede hablar de temperatura de una sola partícula, pues la temperatura es una definición válida a un sistema termodinámico en equilibrio.

b) Lo anterior conlleva que carece de sentido hablar de una sola partícula. Siempre debe existir un sistema. Para ratificar lo dicho imaginemos una sola partícula cargada. El potencial que ésta genera es

$$U = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r} \tag{1}$$

Se ve que $U \to \infty$ si $r \to 0$. Por lo tanto la energía asociada al campo de la partícula es infinita. De la relación de equivalencia masa-energía concluimos que la masa inercial es infinita. Esto podría parecer una paradoja (pues nadie podría mover un electrón); pero hay un argumento que salva esta situación: Desde la teoría de la relatividad el módulo del cuadrivector energía - impulso es invariante, luego

$$E^2 - p^2c^2 = m_0^2 c^4 \tag{2}$$

(1) Nota del Autor: Este es el primero de una serie de artículos que se publicarán sobre este tema.

Para una partícula en reposo $E = \pm m_oC^2$. Así realmente a la partícula de masa mo le corresponde otra de masa $-m_o$. De acuerdo a la figura Nº 1 una transición desde la nada al nivel del vacío crea una partícula de masa m_o y un hueco en el espacio de masa nula. Pero ese hueco antes estaba ocupado por una partícula de masa $-m_o$. La transición es lo mismo que agregar masa a la nada de valor m_o. Así la energía requerida para tal transmisión es $2m_oC^2$ para generar dos masas de valor m_o, una de materia y otra de antimateria.

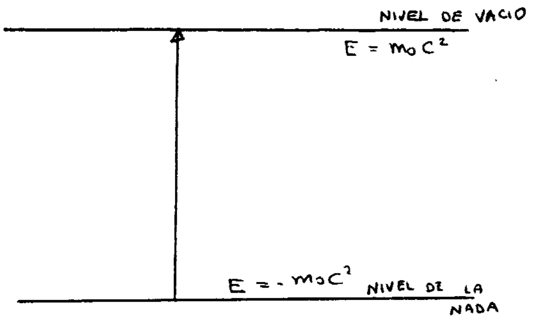

FIG. 1.- TRANSICION DE UNA PARTICULA DESDE LA "NADA" AL ESPACIO VACIO.

Cuando nos aproximamos a la partícula elemental, la energía potencial crece hasta llegar a $E = 2m_oC^2$. En ese momento aparecen una partícula y una antipartícula. La de carga opuesta es atraída por la partícula original y la otra es repelida. El resultado es que ahora vemos el campo de un dipolo, y una carga desplegada, disminuyendo radicalmente la energía. En las inmediaciones de cada partícula - antipartícula así generada deben presentarse otros pares partícula - antipartícula. Así hasta el infinito. El resultado es una polarización del vacío que apantalla el campo eléctrico de la carga inicial. Pero tales partícula - antipartículas no son virtuales sino reales. La razón es que aquí sí se conserva el momentum pues la transición se hace en presencia de una masa infinita. El resultado es que el electrón en sí mismo no es una partícula aislada sino un sistema.

Podría pensarse que la ley de Coulomb posiblemente no es válida a distancias tan pequeñas. Pero ésta debe cumplirse inexorablemente aún cuando $r \to 0$ puesto que de su válidez depende que la masa del fotón sea cero |2|. Y desde la teoría de la relatividad debe ser cero. (O si no la teoría sería errada).

Sin embargo el campo del dipolo inducido apantalla la carga desnuda y evita que el campo diverja al infinito cuando $r \to 0$ dando la energía de la masa del electrón.

Por los procesos de generación y aniquilación de pares, el electrón es una partícula sometida a un campo estocástico, pues la generación y aniquilación serán procesos no correlaciondos. El resultado es similar al de el movimiento Browniano de una partícula suspendida en un medio acuoso.

Por isotropia del espacio, la fuerza neta que se ejercerá sobre el electrón será cero (en promedio). Pero instantáneamente sufrirá variaciones de su posición de equilibrio oscilando en torno a ella. El resultado es una carga oscilante en un pozo de potencial. Como toda carga oscilante emitirá radiación y podremos escribir la ecuación de su movimiento como

$$m\ddot{x} + w_0^2mx - \frac{2e^2}{3C^3}\dddot{x} = eE(t) \qquad (3)$$

el término $2e^2\dddot{x}/3mC^3$ es la reacción y $E(t)$ es el campo estocástico.

La ecuación (3) es del tipo de Langevin-Braffort.

2. ANALISIS DEL CAMPO ESTOCASTICO

La transformada de Fourier $E(w)$ de $E(t)$ es

$$E(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E(t)\, e^{-iwt}dt \qquad (4)$$

y la inversa $E(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} E(w)e^{iwt}dw \qquad (5)$

donde $E(w) = E(-W)$

Si el electrón está sometido a un movimiento Browniano $E(w)$ tiene una distribución gaussiana tal que

$$\langle E(w)\rangle = 0 \;\; y \;\; \langle E(t)\rangle = 0 \qquad (6)$$

Para caracterizar la distribución gaussiana hay que especificar la autocorrelación del campo, lo que puede hacerse en términos de la densidad espectral $\rho(w)$

La densidad de energía en el punto cero (energía del vacío) puede escribirse

$$U = \frac{\varepsilon_0}{2}\langle\vec{E}(t)^2\rangle = \frac{3\varepsilon_0}{2}\langle E_i(t)^2\rangle \qquad (7)$$

con E_i la componente de cada dirección del espacio.

Así pues

$$U = \frac{3\varepsilon_0}{2}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} dw' \langle E_i(w)E_i^*(w')\rangle\, e^{i(w'-w)t} \tag{8}$$

y

$$U = \frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dw \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2}\langle E_i(w)E_i^*(w')\rangle\, e^{i(w'-w)t}\,dw'$$

de allí

$$\rho(w) = 4\pi\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varepsilon_0}{2}\langle E(w)E^*(w')\rangle\, e^{i(w'-w)t}\,dw' \tag{9}$$

el término 4π aparece porque hacemos un promedio especial sobre una esfera de radio 1. Así

$$U = \frac{3}{8\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\rho(w)\,dw \tag{10}$$

Para que (9) se cumpla es necesario que

$$4\pi\frac{\varepsilon_0}{2}\langle E(w)E^*(w')\rangle = \rho(w)\,\delta(w-w') \tag{11}$$

en efecto

$$\rho(w) = \int_{-\infty}^{\infty}\rho(w)\,\delta(w-w')\,e^{i(w-w')t}\,dw'$$

La relación 11 indica que la densidad espectral es esencialmente la transformada de Fourier de la función autocorrelación del campo

$$\langle E(t')E(t)\rangle = \frac{1}{2\pi}\int\rho(w)\,e^{iw(t-t')}\,dw \tag{12}$$

Partamos de la ecuación $\ddot{x} + w_0^2 x - \frac{2e^2}{3mc^3}\dddot{x} =$

$$= \frac{eE(t)}{m}. \tag{13}$$

llamando $\tau = \frac{2e^2}{3mc^3}$, y si tomamos la transformada de Fourier de (13)

$$-w^2X(w) + w_0^2X(w) + i\tau w^3 X(w) = \frac{e}{m}E(w)$$

de allí

$$X(w) = \frac{e}{m}\,\frac{E(w)}{-w^2 + w_0^2 + i\tau w^3} \tag{14}$$

de donde

$$X(t) = \frac{e}{\sqrt{2\pi}\,m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{E(w)\,e^{iwt}}{-w^2+w_0^2+i\tau w^3}\,dw \tag{15}$$

así, si promediamos la ecuación anterior sobre el conjunto

$$\langle x(t)\rangle = \frac{e}{\sqrt{2\pi}\,m}\int_{-\infty}^{\infty} X e^{\frac{-x^2}{2\sigma^2}}\,dx = 0 \tag{16}$$

la partícula permanece en su posición. Para la autocorrelación de X(T)

$$\langle x(t)X(t')\rangle = \frac{e^2}{2\pi m}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} *$$

$$* \frac{E(w)E^*(w')e^{iwt}e^{-iw't'}\,dw\,dw'\;P(E)\,dE}{(-w^2+W_0^2+i\tau w^3)(-w'^2+w_0^2\;\; i\tau w'^3)} \tag{17}$$

con $P(E) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\,e^{\frac{-E^2}{2\sigma^2}}$ (18)

y dado que $\langle E(w)E^*(w')\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\infty} E(w)E^*(w')\,e^{\frac{-E^2}{2\sigma^2}}\,dE$

$$= 2\pi\varepsilon_0\,\rho(w)\,\delta(w-w') \tag{19}$$

tenemos $\langle x(t)x(t')\rangle =$

$$= \frac{e^2}{2m^2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(w)\,\delta(w-w')\,e^{iwt}e^{-iw't'}\,dw\,dw'}{(-w^2+w_0^2+i\tau w^3)(-w'^2+w_0^2\;\; i\tau w'^3)} \quad (20$$

y si $t = t'$

$$\langle x(t)^2\rangle = \frac{e^2}{2m^2\pi}\cdot\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\rho(w)\,dw}{|-w^2+w_0^2\;\; i\tau w^3|^2} \tag{21}$$

3. CALCULO DE LA DENSIDAD ESPECTRAL.

Supongamos que hay radiación en equilibrio termodinámico con las partículas. Se demuestra |3| que

$$\rho(w) = \frac{1}{a^3}\frac{dN}{dw}E = \frac{w^2E}{2\pi^2c^3} \tag{22}$$

donde E es la energía de cada modo.

De la teoría de la relatividad especial encontramos que si observadores inerciales miran los destellos fluctuantes y sincrónicos de una fuente puntual de luz; la frecuencia observada por el sistema que se aleja es |4|:

$$f' = f\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \tag{23}$$

Si la fuente emite un destello de energía total E, el observador que se aleja mide en su sistema de referencia una energía E' dada por

$$E' = \frac{E-\beta P x C}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{24}$$

Dado que por (24) suponemos que el destello se mueve en diracción X

$$P \times C = E \tag{25}$$

$$y \; E' = \frac{E-E\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = E\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}} = E\sqrt{\frac{1-v/c}{1+v/c}} \tag{26}$$

dividiendo (23) y (26) $\frac{f'}{E'} = \frac{f}{E} = \text{constante}$ (27)

de allí $E' = hf'$ y $E = hf$ (28)

De allí que la energía de los cuantos de luz $\hbar\omega$ sea compatible con la teoría de la relatividad.

Así (22) puedo escribirla $\rho(w) = \frac{\hbar w^3}{2\pi^2 C^3}$ (29)

4. RELACIONES CUANTICAS

De (21) y(29) tenemos $\langle x(t)^2 \rangle =$

$$= \frac{\hbar e^2}{8\pi^3 \varepsilon_0 m^2 C^3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|w|^3 \, dw}{|-w^2+w_0{}^2+i\tau w^3|^2} \tag{30}$$

El subintegrando presenta un pico muy pronunciado en w_o (las fuerzas de frenado electromagnético son muy pequeñas, y estas las que hacen el papel de disipación). Hacemos $w = w_o + z$ con $z \ll w_o$ y poniendo en todos lados $w = w_o$ excepto en los casos en que aparezcan términos del tipo $w-w_o$; entonces

$$\sigma x^2 = \langle x(t)^2 \rangle = \frac{\hbar}{2mw_o} \tag{31}$$

Así nuestro electrón sometido al camo de fondo tiene por distribución de probabilidad

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma x^2}} e^{\frac{-x^2}{2\sigma x^2}} = \sqrt{\frac{mw_o}{\pi\hbar}} e^{\frac{-mw_o x^2}{\hbar}} \tag{32}$$

que coincide con la distribución de probabilidad del oscilador armónico simple en su energía más baja. (A la densidad de probabilidad de incertidumbre mínima).

Veamos ahora la variación cuadrática media del impulso. De

$$\dot{P} = -mw_o{}^2 X = m\ddot{x} - m\tau\dddot{x} - eE \tag{33}$$

Dado que $E = -\frac{1}{C}\frac{\delta A}{\delta t}$ en la aproximación de onda larga $\frac{\delta A}{\delta X} = 0$

$$\frac{\delta A}{\delta t} = \frac{dA}{dt} \tag{34}$$

$$\text{Así } \dot{P} = \frac{d}{dt}(m\dot{x} - m\tau\ddot{x} + \frac{e}{c}A) \tag{35}$$

$$\text{Así el momentum } p = m\dot{x} - m\tau\ddot{x} + \frac{e}{c}A \tag{36}$$

La forma de calcular los p se hace de forma totalmente análoga a lo que hicimos con x. Se llega así

$$\langle p(t) \rangle = 0 \tag{37}$$

$$y \quad \sigma p^2 = \langle p(t)^2 \rangle - \langle p(t) \rangle^2 = \frac{1}{2} m\hbar w_o \tag{38}$$

La energía media del estado base es

$$E = \langle H \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2} mw_o{}^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\sigma p^2}{2m} + \frac{1}{2} mw_o{}^2 \sigma x^2 = \frac{1}{2}\hbar w \tag{39}$$

Que es precisamente la energía del vacío (a T=0°K) que predice la mecánica cuántica no relativista.

De las relaciones encontradas para σx y σp encontramos

$$\sigma p^2 \sigma x^2 = \frac{1}{2} m\hbar w_o \frac{\hbar}{2mw_o} = \frac{\hbar^2}{4}$$

es decir, la relación de "incertidumbre" de Heisemberg

$$\sigma p \sigma x = \frac{\hbar}{2} \qquad (40)$$

5. CONCLUSIONES

La mecánica cuántica parece ser el tratamiento estocástico de una partícula <u>clásica</u> elemental sometida a un campo de radiación de fondo que ella misma crea. La característica "dual" no es sino una descripción de términos medios. Desde este punto de vista, la naturaleza cuántica de las partículas es una conclusión lógica de la teoría de la relatividad.

BIBLIOGRAFIA

1. Landau y Lifishitz. Teoría de los campos. Editorial Reverté S.A.

2. Jackson. Electrodinámica Clásica. 2° Edición. Ediciones Alahambra.

3. Douglas Moya. Tecnología de Materiales. FIE, Escuela Politécnica Nacional, 1983.

4. JAMES H. SMITH. Introducción a la Relatividad especial. Editorial Reverté S.A. 1969.