

# Materia oscura y la formación de galaxias

Bruce Hoeneisen  
 Universidad San Francisco de Quito  
 Marzo 1991

## Resumen

Las observaciones indican que los halos de las galaxias espirales tienen una densidad proporcional a  $r^{-2}$  que se extiende "en promedio" hasta el halo de la próxima galaxia. El  $\approx 1\%$  de la masa del halo está formada por materia luminosa que ha radiado energía y caído al fondo del pozo de potencial del halo. El  $\approx 99\%$  restante se llama "materia oscura", y no sabemos que es. La densidad proporcional a  $r^{-2}$  corresponde a la solución crítica de un gas no-relativista auto-gravitante. Se estudia la formación de estos halos en la cual juega un papel importante la radiación de energía de los bariones. La primera generación de halos tiene propiedades en conflicto con las observaciones. Esto sugiere que los choques y fusiones de halos son importantes en la evolución de galaxias espirales.

## Abstract

Observations suggest that spiral galaxies have a halo with a density proportional to  $r^{-2}$  that extends "on average" to the next galaxy. Approximately 1% of the mass of the halo is luminous matter that has radiated energy and has settled to the bottom of the halo potential well. The remaining  $\approx 99\%$  is "dark matter" of unknown composition. The halo density proportional to  $r^{-2}$  corresponds to the critical solution of a non-relativistic self-gravitating gas. We study the formation of this halo in which energy radiation by the luminous component is crucial. The first generation of halos has properties in conflict with observations. We therefore suggest that halo collisions and mergers are important in the evolution of spiral galaxies.

## 1.- Introducción.

Continuamos el trabajo iniciado en la referencia (1). En esa referencia señalamos que la mayor parte de la materia en el universo es no-luminosa. Esta "materia oscura" forma el "halo" de las galaxias. El objetivo de estos estudios es descubrir ¿qué es la materia oscura?, y ¿cómo se formaron las galaxias? Desgraciadamente estamos aún lejos de una respuesta a estas preguntas.

Para establecer la notación recordemos lo siguiente. Se observa que las estrellas, los cúmulos globulares y el gas neutro y ionizado de galaxias espirales giran en torno del centro de la galaxia. Se observa que la velocidad orbital  $v(r)$  es aproximadamente independiente del radio  $r$  de la órbita desde  $r_0 \approx 1 - 3$  kpc hasta el límite de observación de  $\approx 100$  kpc. Sea  $v_0$  este valor constante de la velocidad orbital. Consideremos una estrella en órbita circular. Igualando la aceleración centrífuga a la fuerza de gravitación por unidad de masa se obtiene una masa de la galaxia proporcional al radio:

$$M(r) = \frac{v_0^2}{G} r \quad (1)$$

Por simplicidad hemos supuesto que la galaxia tiene una densidad con simetría esférica.  $M(r)$  es la masa de la galaxia contenida en una esfera de radio  $r$ . La masa (1) corresponde a una densidad

$$\rho(r) = \frac{v_0^2}{4\pi G r^2} \quad (2)$$

La relación  $\rho(r) \propto r^{-2}$  corresponde a la solución "crítica" (o sea la solución con condición de borde  $\rho(0) = \infty$ ) de un gas ideal no-relativista auto-gravitante con una relación temperatura/masa dada por(1)

$$v_0 = \sqrt{\frac{2kT_d}{m}} \quad (3)$$

Notamos que la velocidad eficaz de las partículas de este gas

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} \equiv \sqrt{\frac{3kT_d}{m}} = \sqrt{\frac{3}{2}} v_0 \quad (4)$$

es independiente de  $m$ , y es similar a la velocidad de las estrellas en la galaxia.

## 2.- Observaciones recientes.

De la observación de siete galaxias espirales con masas (luminosas) en el disco galáctico entre  $13 \cdot 10^{10} M_\odot$  y  $0.16 \cdot 10^{10} M_\odot$  se concluye(2):

$$M_d(R_b)/M_b \approx 1 \quad (5)$$

donde  $M_d(R_b)$  es la masa oscura dentro del radio luminoso de la galaxia  $R_b$ , y  $M_b$  es la masa luminosa del disco.

$$\rho_d(R_b)/\rho_b(R_b) \approx 0.3 \quad (6)$$

$$\rho_d(R_b) \approx 0.0015 M_\odot / \text{pc}^3 \quad (7)$$

$$M_b \propto v_0^\alpha \quad (8)$$

con  $\alpha \approx 2.5$ , y

$$R_b \propto v_0 \quad (9)$$

(ver figura 1).

Otro estudio(3) señala que  $\rho_d(0) \approx 0.01$  a  $0.05 M_\odot / \text{pc}^3$ , y

$$L_b \propto v_0^4 \quad (10)$$

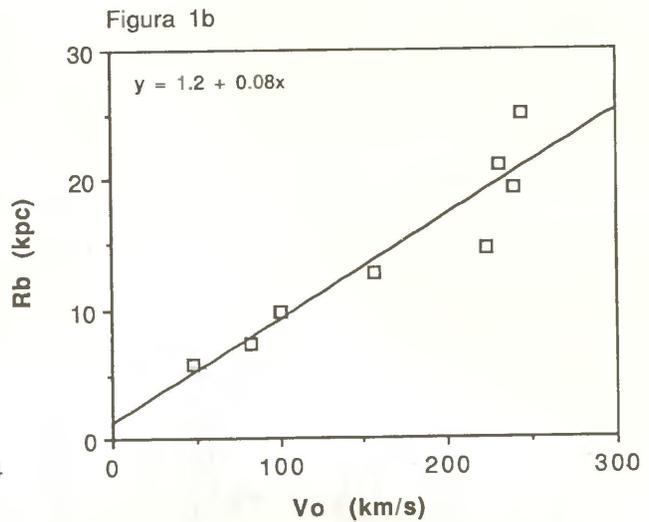
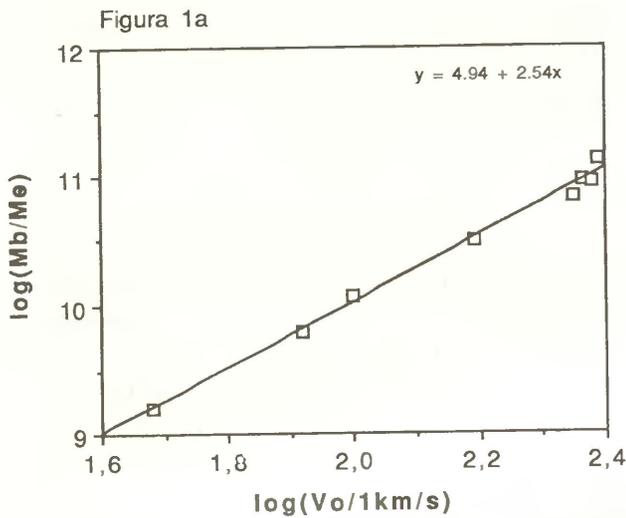


Figura 1. Masa visible  $M_b$  y radio visible  $R_b$  en función de la velocidad de rotación  $v_0$  de varias galaxias(3).

con  $a$  en el intervalo 2.6 a 5 (relación de Fisher-Tully). También se ha observado(4) que el momento angular de galaxias espirales son proporcionales a  $M_b^2$ , lo que es compatible con (1), (8) y (9).

### 3.- El halo galáctico actual.

Las relaciones entre masa visible y oscura señaladas en la sección anterior sugieren que la materia oscura y la materia visible en un volumen  $V$  colapsan para formar el halo y el disco de una galaxia. Según este modelo el volumen  $V$  determina tanto la masa visible de la galaxia

$$M_b = V\Omega_{lum}\rho_{co} \quad (11)$$

como su masa total

$$M \equiv M_d + M_b = V\Omega\rho_{co} \quad (12)$$

$\Omega\rho_{co}$  es la densidad media del universo,  $\Omega_{lum}\rho_{co}$  es la densidad luminosa media, y(5)

$$\rho_{co} \equiv \frac{3H^2}{8\pi G} = 1.88 \cdot 10^{-26} h_0^2 \text{ kg/m}^3 = 2.8 \cdot 10^{11} h_0^2 M_\odot/\text{Mpc}^3 \quad (13)$$

es la densidad crítica actual del universo.

$$H = 100h_0 \text{ km/(s} \cdot \text{Mpc)} = h_0 \cdot 1.0 \cdot 10^{-10} \text{ anos}^{-1} \quad (14)$$

es la constante de Hubble. Las observaciones(5) indican que  $0.4(h_0/1)$ ,  $0.05(\Omega/4)$ , y  $0.005 \leq \Omega_{lum} \leq 0.02$ . La bariósinthesis indica que  $0.04 \leq \Omega_b h_0^2 \leq 0.04$

A partir de (1) con  $r=R$ , (12), (13) y  $V \equiv \frac{4}{3}\pi R^3$  (utilizamos el mismo  $R$  con justificación *a posteriori*) se obtiene

$$R = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \frac{v_0}{H} = 3.1 \text{ Mpc} \cdot \Omega^{-1/2} h_0^{-1} \left( \frac{v_0}{220 \text{ km/s}} \right) \quad (15)$$

$$V = \left[ 5.0 \text{ Mpc} \frac{1}{\sqrt{\Omega} h_0} \frac{v_0}{220 \text{ km/s}} \right]^3 \quad (16)$$

lo que es compatible con el volumen/galaxia observado(6). Por lo tanto "en promedio" el halo de una galaxia con densidad (2) se extiende aproximadamente hasta el halo de la "próxima" galaxia. Notamos que la velocidad de Hubble a la distancia  $R$ ,  $H R$ , es del orden de  $v_0$ . Una partícula con velocidad (4) demora un tiempo comparable con la edad del universo en recorrer el radio  $R$  del halo.

Las ecuaciones (11) y (12) pueden escribirse en la forma

$$M = \sqrt{\frac{2}{\Omega}} \frac{v_0^3}{GH} \quad (17)$$

$$M_b = \frac{\sqrt{2}\Omega_{lum} v_0^3}{\Omega^{3/2} GH} = 3.6 \cdot 10^{13} M_\odot \frac{\Omega_{lum}}{h_0 \Omega^{3/2}} \left[ \frac{v_0}{220 \text{ km/s}} \right]^3 \quad (18)$$

lo que es compatible, en orden de magnitud, con las observaciones. Notamos que

$$\rho(R) = \frac{1}{3}\Omega\rho_{co} \quad (19)$$

es independiente de  $v_0$  (o  $M$ ). Notamos que, en orden de magnitud,  $\rho(0)/\rho(R) \approx 10^6$ .

Los bariones interactúan con el campo electromagnético y por lo tanto pueden perder energía por radiación. Los bariones caen entonces en el pozo de potencial del halo galáctico ocupando radios menores que el radio luminoso  $R_b$ . Utilizamos (5) como definición de  $R_b$ . A partir de (1) con  $r=R_b$  y  $r=R$  se obtiene el radio óptico de

la galaxia:

$$R_b = 2 \frac{\Omega_{lum}}{\Omega} R = \frac{2^{3/2} \Omega_{lum} v_0}{\Omega^{3/2} H} \quad (20)$$

lo que es compatible con (9).

En la figura 2 se presenta la densidad del halo de varias galaxias según el modelo descrito en esta sección.

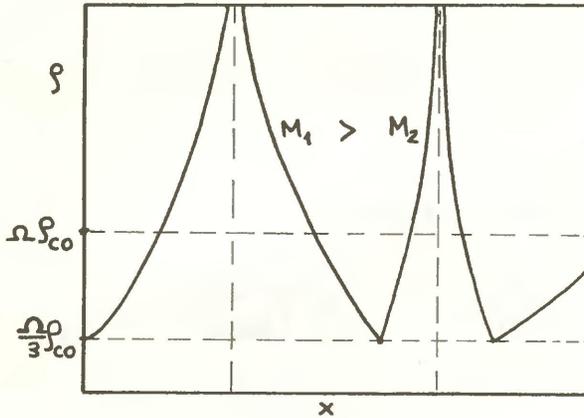


Figura 2. Halo de varias galaxias.

¿Es casualidad que hoy el halo de una galaxia se extiende "en promedio" hasta el halo de la próxima galaxia? ¿Es justificable utilizar  $\rho_{\infty}$  en vez de la densidad  $\rho_c$  correspondiente a la época en que se formó el halo (alternativa que se considera en la sección 6)? En retrospectiva, es sorprendente que los argumentos de esta sección sean compatibles, en orden de magnitud, con las observaciones.

#### 4.- La formación del halo.

Para entender la formación del halo consideremos un gas de masa  $M$  en un recipiente esférico de radio  $R$ . El gas tiene temperatura  $T_d$ . Suponemos que las partículas del gas tienen masa  $m$  y no tienen grados de libertad de rotación o vibración, de manera que  $\gamma = 5/3$ . La interacción gravitacional entre las partículas del gas puede despreciarse si  $M$  es mucho menor que

$$M_v \approx \sqrt{\frac{5P}{G}} R^2 \quad (21)$$

(esta masa se obtiene a partir del teorema virial). En este caso la densidad del gas es homogénea.

Aumentamos el radio  $R$  del recipiente de manera que el gas se expande en forma adiabática. Se tiene  $T \propto R^{-2}$  y  $P \propto R^{-5}$  de manera que  $M_v$  decrece según  $M_v \propto R^{-1/2}$ . Cuando  $M_v$  se vuelve comparable a  $M$  cobra importancia la interacción gravitacional entre las partículas del gas y este deja de ser homogéneo. La densidad del gas decrece desde el centro del recipiente hacia su

periferia según la curva universal presentada en la figura 3a.

Todas las variables en la figura 3 son adimensionales. En la figura 3a se tiene  $R_c \equiv v_0 / \sqrt{2\rho(0)G}$ , y las energías y masas se dan en unidades  $G\rho(0)^2 R_c^5$  y  $\rho(0)R_c^3$  respectivamente. En la figura 3b se tiene  $R_0 \equiv w^2/GM$  donde  $w \equiv (v_0 \cdot R)_{R \rightarrow 0}$  y  $v_0 \equiv \sqrt{2kT_d/m}$ , y la densidad, velocidad y  $R_c$  están dadas en unidades  $3M/(4\pi R_0^3)$ ,  $GM/w$ , y  $R_0$  respectivamente. Las curvas de la figura 3b dependen de la potencia radiada.

Al aumentar  $R$  la energía decrece y se vuelve negativa si hay radiación. La densidad central crece hasta que diverge en  $R = R_{crit}$  como se indica (para un ejemplo particular) en la figura 3b. Para este radio crítico  $R_{crit}$  se obtiene la solución "crítica"  $\rho \propto r^{-2}$  correspondiente al halo galáctico dado por (1) a (4). La solución "crítica" corresponde al límite entre un gas no-confinado y un gas confinado gravitacionalmente. La solución "crítica" tiene energía negativa (respecto de las partículas en reposo en el infinito), pero no lo suficientemente negativa como para satisfacer el teorema virial (ver sección 5). Para formar la solución crítica en el universo es necesaria la pérdida de energía por radiación si  $\Omega \leq 1$ .

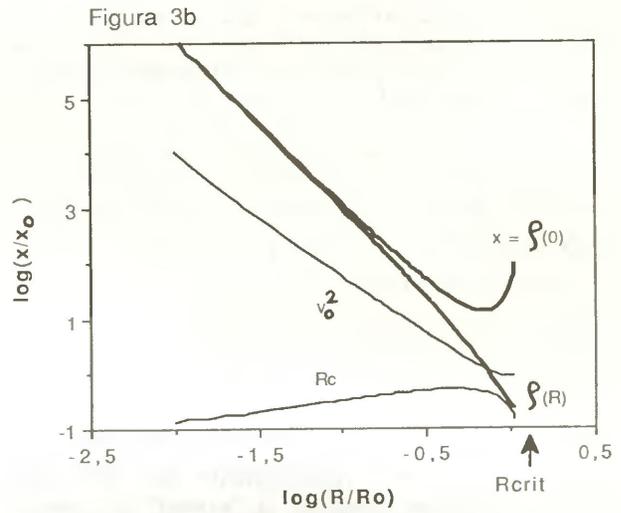
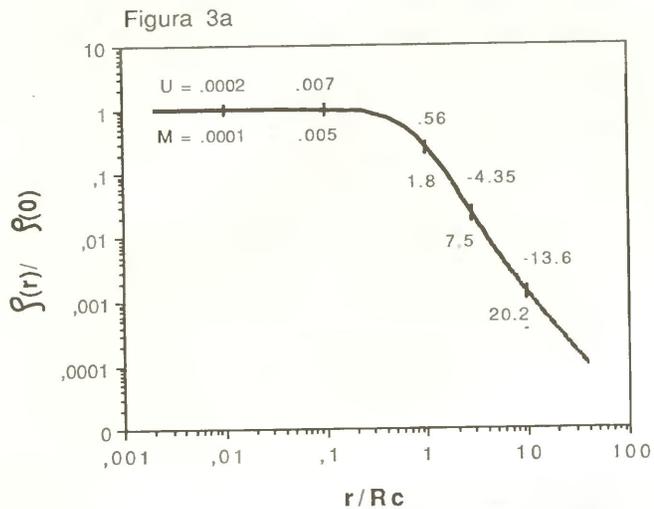
La solución crítica es estable respecto de expansión: si las distancias entre partículas se multiplican por  $a$ , la temperatura del gas varía en proporción a  $a^{-2}$ , mientras que la temperatura requerida para mantener equilibrio varía solo en proporción a  $a^{-1}$ .

Si continúa aumentando  $R > R_{crit}$  el gas prácticamente no se expande ni se enfría, salvo si puede perder energía por radiación. Este es el caso de materia ordinaria formada por electrones y núcleos atómicos cargados. En cambio la materia oscura, que no tiene interacción electromagnética y no puede radiar energía, tiene una densidad que se asemeja a  $r^{-2}$  aún si  $R > R_{crit}$ .

Un gas de materia ordinaria radía energía de manera que puede quedar confinado por la gravitación y satisfacer el teorema virial. Consideremos el caso particular mas simple en que la energía de la radiación y la energía cinética del movimiento colectivo del gas son despreciables. En este caso se tiene según el teorema virial (ver el Apéndice A):

$$2U_{gas} + \Phi = 0 \quad (22)$$

donde  $U_{gas}$  es la energía cinética térmica del gas y  $\Phi$  es la energía potencial gravitacional. Entonces si el gas radía energía  $\Delta U$ , el gas aumenta su densidad reduciendo su energía potencial  $\Phi$  en  $2 \cdot \Delta U$ , y aumenta su temperatura aumentando  $U_{gas}$  en  $\Delta U$ . El aumento de densidad y temperatura eventualmente enciende reacciones



**Figura 3.** a) Densidad en función del radio de un gas auto-gravitante en un recipiente esférico. b) Densidades  $\rho(0)$  y  $\rho(R)$ , y  $v_0^2$  y  $R_c$  en función del radio  $R$  del recipiente. Todas las variables en la figura son adimensionales. Las unidades se definen en el texto.

nucleares (para hidrógeno si  $M > 0.08M_\odot$ ) y nace una estrella.

**5.- Consideraciones energéticas.**

Consideremos materia oscura con interacción gravitacional únicamente. Las energías potencial, cinética de expansión y cinética térmica del gas contenido en una esfera de radio  $R$  se presentan en la tabla 1. La segunda columna corresponde a un universo homogéneo en expansión de Hubble. La tercera columna corresponde a un halo galáctico en expansión de Hubble (con la densidad (2) con  $v_0 \propto a^{-1/2}$ ). La cuarta columna corresponde a un halo estático (con  $v_0$  constante).

Los cambios de energía en la expansión adiabática de  $R$  a  $R+dR$  se indican en la tabla 2. Estos cambios debieran ser iguales al trabajo  $-PdV$ .

**Tabla 2.** Cambios de energía.

Energía	Universo homogéneo	Halo en expansión
Potencial	$\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} dR$	$\frac{GM^2}{R^2} dR$
Cinética de expansión	$-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R^2} dR$	$-\frac{1}{3} \frac{GM^2}{R^2} dR$
Cinética térmica	$-3 \frac{kT_d}{R} \frac{M}{m} dR$	$-\frac{3}{4} \frac{GM^2}{R^2} dR$
PdV	$3 \frac{kT_d}{R} \frac{M}{m} dR$	$\frac{1}{2} \frac{GM^2}{R^2} dR$
Suma:	0	> 0

**Tabla 1.** Energías.

Energía	Universo homogéneo	Halo en expansión	Halo estático
Potencial	$-\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$	$-\frac{GM^2}{R}$	$-\frac{GM^2}{R} = -v_0^2 M$
Cinética de expansión	$\frac{3}{5\Omega} \frac{GM^2}{R}$	$\frac{1}{3\Omega} \frac{GM^2}{R}$	0
Cinética térmica	$\frac{3}{2} kT_d \frac{M}{m}$	$\frac{3}{4} \frac{GM^2}{R}$	$\frac{3}{4} \frac{GM^2}{R} = \frac{3}{4} v_0^2 M$

Notamos en la tabla 2 que la expansión del halo requiere aportes "externos" de energía que no se encuentran disponibles. En consecuencia el halo no puede hallarse en expansión según la ley de Hubble.

De la tabla 1 se concluye que para formar un halo estático en un universo crítico ( $\Omega=1$ ) es necesario radiar una energía por unidad de masa total (oscura y visible) del orden de  $\approx v_0^2$ , lo que es  $0.022 \cdot (v_0/220\text{km/s})^2 h_0^2$  veces la energía por unidad de masa total de la radiación cósmica de 2.7 K. La materia visible puede radiar energía. Materia adyacente al halo que cae en el pozo de potencial del halo desde el radio R hasta la mitad del radio luminoso (20) adquiere una velocidad  $v = v_0 \sqrt{2 \cdot \ln(\Omega/\Omega_{lum})}$  independiente del radio del halo R. Podemos comparar el "exceso" de energía cinética de una partícula de materia luminosa que cae en el pozo de potencial del halo,  $\frac{1}{2} m_b (v^2 - \frac{3}{2} v_0^2)$ , ver (4), con la energía que debe ser radiada:  $\approx v_0^2 \cdot (\Omega/\Omega_{lum}) \cdot m_b$ . La materia luminosa puede intercambiar energía con la materia oscura por relajación gravitacional violenta.

#### 6.- Evolución de las perturbaciones.

Las discusiones en este artículo y en la referencia (1) indican que es plausible que las galaxias se hayan formado de la siguiente manera:

a) Antes de que la materia oscura se vuelva no-relativista se tiene

$$T_d \equiv T/g \propto a^{-1} \quad (23)$$

donde  $T_d$  es la temperatura de la materia oscura, y T es la temperatura de los fotones. g es un factor numérico. Por ejemplo, para tres neutrinos izquierdos  $g=1.401$ .

b) La materia oscura se vuelve no-relativista a una temperatura de los fotones

$$T = gT_d = gmc^2/3k \quad (24)$$

La materia oscura no-relativista se enfría según  $T_d \propto a^{-2}$ , mientras que los fotones continúan enfriándose según  $T \propto a^{-1}$ , de manera que

$$T_d = \frac{3kT^2}{g^2 mc^2} \quad (25)$$

c) La densidad de partículas no-relativistas es igual a la densidad de partículas ultra-relativistas cuando la temperatura de los fotones es(1)

$$T_{eq} = 5.6[\text{eV}] \Omega h_0^2 \frac{3.36}{N_{ef}} \quad (26)$$

(si  $m \gg 17\text{eV}$ ).

d) Cuando la temperatura de los fotones alcanza (24) o (26) (cualesquiera sea menor) pueden comenzar a crecer las perturbaciones de densidad de la materia oscura correspondientes a

masas mayores que la masa de Jeans. En régimen lineal ( $\delta \ll 1$ ) tanto la longitud de onda  $\lambda$  de la perturbación como la amplitud relativa  $\delta(x) = (\rho(x) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$  de los modos crecientes crecen en proporción a a.

La masa de Jeans es(7)

$$M_J = 4 \left( \frac{\pi}{3} \right)^{5/2} \left( \frac{5kT_d}{G} \right)^{3/2} n^{-1/2} m^{-2} \quad (27)$$

donde

$$n \approx \frac{\rho}{m} \approx \frac{\Omega \rho_{co}}{m} \left( \frac{T}{T_0} \right)^3 \quad (28)$$

es la densidad numérica de partículas de materia oscura.  $T_0 = 2.7\text{K}$  es la temperatura actual de la radiación cósmica. (27) es válido si el camino medio libre de las partículas de materia oscura es mucho menor que la longitud de onda. Reemplazando (28) en (27) y utilizando (25) se obtiene

$$M = \alpha \frac{1}{\sqrt{\Omega \rho_{co}}} \left( \frac{T T_0}{G} \right)^{3/2} \left( \frac{k}{gmc} \right)^3 = \frac{\alpha}{6^{3/4}} \frac{1}{\sqrt{\Omega \rho_{co}}} \left( \frac{v_0 k T_0}{gmc G} \right)^{3/2} \\ = \alpha \cdot 3.4 \cdot 10^{12} M_\odot \Omega^{-1/2} h_0^{-1} \left( \frac{v_0}{220\text{km/s}} \right)^{3/2} \left( \frac{1\text{eV}}{m} \right)^{3/2} g^{-3/2} \quad (29)$$

con  $\alpha \approx 261$  (hemos omitido el subíndice J). Es interesante mencionar que a partir de la masa (21) dada por el teorema virial, se obtiene (29) con  $\alpha \approx 3.3$ , y a partir de la masa crítica (1) se obtiene (29) con  $\alpha \approx 7.2$ .

A la temperatura (26) se tiene la masa de Jeans señalada en la figura 4. A temperaturas menores, la masa de Jeans decrece según  $M_J \propto T^{3/2}$

Recordemos que perturbaciones correspondientes a masas menores que la masa de Silk(1) quedan atenuadas por el movimiento de las partículas de materia oscura. La masa de Silk está dada por(1) (29) con  $T = T_{eq} = 6.5 \cdot 10^4 \text{K} \cdot \Omega h_0^2$  y

$$\alpha = 1.38 \cdot \Omega^{3/2} \left[ 5 + \ln \left[ \left( \frac{gmc^2}{3kT_{eq}} \right)^2 \right] \right]^3$$

o sea

$$M_s = 1.2 \cdot 10^{19} M_\odot \Omega^{5/2} h_0^2 g^{-3} m^{-3} \left[ 5 + \ln \left( 3.5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-2} h_0^{-4} g^2 m^2 \right) \right]^3 \quad (30)$$

con m en eV. Ver la figura 4. Notamos que  $M_s \approx M_J(T_{eq})$ .

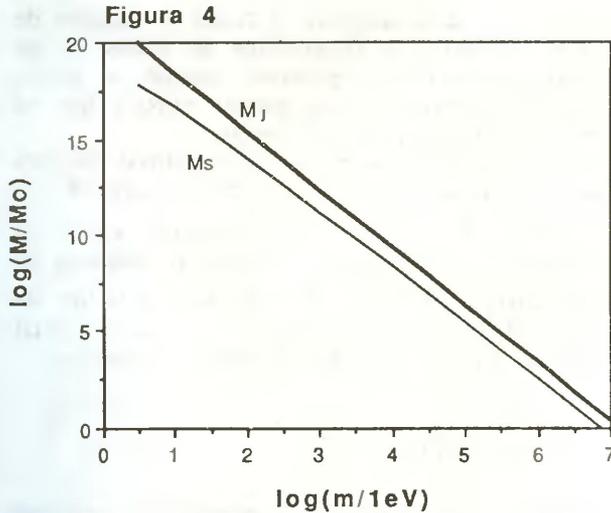


Figura 4. Masa de Jeans  $M_J$  a  $T_{eq}$ , y masa de Silk  $M_s$ .

e) A  $T \approx 0.3 \text{ eV} \approx 4000 \text{ K}$  se recombinan electrones con núcleos formando átomos de hidrógeno y helio. El universo se vuelve transparente a los fotones. Los átomos se desacoplan de la radiación cósmica y pueden caer a los pozos de potencial de los halos galácticos en formación.

#### 7.- Conclusiones.

El presente trabajo ha generado mas preguntas que respuestas.

En la sección 3 supusimos, sin justificación, que hoy el halo de una galaxia espiral llega justamente hasta el halo de la próxima galaxia. Con esta suposición se obtiene  $M_{oc} \propto v_0^3$  y  $R_b \propto v_0$ , lo que es compatible con las observaciones.

En la sección 4 logramos entender como se forma el halo galáctico con una densidad proporcional a  $r^{-2}$ . Esta formación requiere pérdida de energía por radiación de los bariones si  $\Omega \leq 1$ . Esta radiación podría ser observable ya que tiene una densidad del orden de magnitud del 2% de la densidad de energía de la radiación cósmica de 2.7 K. Sin embargo la formación del halo descrita en las secciones 4, 5 y 6 implica que las galaxias se formaron con  $M_{oc} \propto v_0^{3/2}$  y  $R_b \propto v_0^{-1/2}$  lo que está en conflicto con las observaciones. (La diferencia entre las dos deducciones es que en la sección 3 se toma  $\rho_{co}$ , mientras que en la sección 6 se toma  $\rho_c = \rho_{co} (T/T_0)^3 \propto v_0^3$  correspondiente a la época en que se formó el halo.)

Tal vez las galaxias espirales que observamos hoy son el producto colisiones y fusiones de galaxias precedentes. Estas colisiones (que han sido observadas) podrían producir el momento angular de las galaxias espirales.

#### Apéndice A: Teorema virial con materia oscura.

El halo galáctico es extendido y no cumple con el teorema virial debido a que la materia oscura no puede radiar energía (ya que no interactúa con el campo electromagnético)(1).

Deducimos el teorema virial para la materia bariónica en presencia del siguiente potencial gravitacional del halo:

$$V_d(r) = v_0^2 \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2 + r_0^2}}{r_0} \right] \quad (A1)$$

Sea  $T$  la energía cinética total de las partículas de materia bariónica. Entonces

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i \left| \dot{\vec{r}}_i \right|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \cdot \dot{\vec{r}}_i - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \quad (A2)$$

Tomando el promedio temporal y utilizando las ecuaciones del movimiento

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - m_i \frac{\partial V_d}{\partial \vec{r}_i} \quad (A3)$$

se obtiene el teorema virial

$$\langle 2T \rangle = - \langle \Phi_b \rangle + v_0^2 \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{1 + (r_0/r_i)^2} \right\rangle \quad (A4)$$

donde

$$\Phi_b = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (A5)$$

es la energía potencial de los bariones.

El teorema virial (A4) permite obtener la masa bariónica de una galaxia. Es importante incluir el último término de (A4) para evitar sobreestimar la masa bariónica.

#### Apéndice B: Neutrinos de Dirac.

En la referencia (1) se concluyó que la nucleosíntesis es compatible con tres familias de neutrinos masivos de Majorana. Señalamos aquí que la nucleosíntesis también es compatible con tres familias de neutrinos masivos de Dirac, por la siguiente circunstancia. Según el modelo standard, la constante de acoplamiento de neutrinos ultrarelativistas derechos es mas debil que la constante de acoplamiento de neutrinos ultrarelativistas izquierdos en un factor  $m/E$ . Por lo tanto los neutrinos derechos se desacoplan antes que los neutrinos izquierdos. Las partículas que se recombinan entre estos dos desacoplamientos calientan los fotones y los neutrinos izquierdos sin calentar a los neutrinos derechos. En consecuencia la temperatura y densidad numérica presente de los neutrinos derechos y antineutrinos izquierdos es menor que la de los neutrinos izquierdos y antineutrinos derechos, y no hay conflicto con la nucleosíntesis.

Notamos en la tabla 2 que la expansión del halo requiere aportes "externos" de energía que no se encuentran disponibles. En consecuencia el halo no puede hallarse en expansión según la ley de Hubble.

De la tabla 1 se concluye que para formar un halo estático en un universo crítico ( $\Omega = 1$ ) es necesario radiar una energía por unidad de masa total (oscura y visible) del orden de  $\approx v_0^2$ , lo que es  $0.022 \cdot (v_0/220\text{km/s})^2 h_0^2$  veces la energía por unidad de masa total de la radiación cósmica de 2.7 K. La materia visible puede radiar energía. Materia adyacente al halo que cae en el pozo de potencial del halo desde el radio R hasta la mitad del radio luminoso (20) adquiere una velocidad  $v = v_0 \sqrt{2 \cdot \ln(\Omega/\Omega_{\text{lum}})}$  independiente del radio del halo R. Podemos comparar el "exceso" de energía cinética de una partícula de materia luminosa que cae en el pozo de potencial del halo,  $\frac{1}{2} m_b (v^2 - \frac{3}{2} v_0^2)$ , ver (4), con la energía que debe ser radiada:  $\approx v_0^2 \cdot (\Omega/\Omega_{\text{lum}}) \cdot m_b$ . La materia luminosa puede intercambiar energía con la materia oscura por relajación gravitacional violenta.

#### 6.- Evolución de las perturbaciones.

Las discusiones en este artículo y en la referencia (1) indican que es plausible que las galaxias se hayan formado de la siguiente manera:

a) Antes de que la materia oscura se vuelva no-relativista se tiene

$$T_d \approx T/g \propto a^{-1} \quad (23)$$

donde  $T_d$  es la temperatura de la materia oscura, y T es la temperatura de los fotones. g es un factor numérico. Por ejemplo, para tres neutrinos izquierdos  $g = 1.401$ .

b) La materia oscura se vuelve no-relativista a una temperatura de los fotones

$$T = gT_d \approx gmc^2/3k \quad (24)$$

La materia oscura no-relativista se enfría según  $T_d \propto a^{-2}$ , mientras que los fotones continúan enfriándose según  $T \propto a^{-1}$ , de manera que

$$T_d \approx \frac{3kT^2}{g^2 mc^2} \quad (25)$$

c) La densidad de partículas no-relativistas es igual a la densidad de partículas ultra-relativistas cuando la temperatura de los fotones es (1)

$$T_q = 5.6[eV] \Omega h_0^2 \frac{3.36}{N_d} \quad (26)$$

(si  $m \gtrsim 17\text{eV}$ ).

d) Cuando la temperatura de los fotones alcanza (24) o (26) (cualesquiera sea menor) pueden comenzar a crecer las perturbaciones de densidad de la materia oscura correspondientes a

masas mayores que la masa de Jeans. En régimen lineal ( $\delta \ll 1$ ) tanto la longitud de onda  $\lambda$  de la perturbación como la amplitud relativa  $\delta(x) = (\rho(x) - \bar{\rho})/\bar{\rho}$  de los modos crecientes crecen en proporción a  $a$ .

La masa de Jeans es (7)

$$M_J \approx 4 \left(\frac{\pi}{3}\right)^{5/2} \left(\frac{5kT_d}{G}\right)^{3/2} n^{-1/2} m^{-2} \quad (27)$$

donde

$$n \approx \frac{\rho}{m} \approx \frac{\Omega \rho_{\text{co}}}{m} \left(\frac{T}{T_0}\right)^3 \quad (28)$$

es la densidad numérica de partículas de materia oscura.  $T_0 = 2.7\text{K}$  es la temperatura actual de la radiación cósmica. (27) es válido si el camino medio libre de las partículas de materia oscura es mucho menor que la longitud de onda. Reemplazando (28) en (27) y utilizando (25) se obtiene

$$M = \alpha \frac{1}{\sqrt{\Omega \rho_{\text{co}}}} \left(\frac{T T_0}{G}\right)^{3/2} \left(\frac{k}{gmc}\right)^3 = \frac{\alpha}{6^{3/4}} \frac{1}{\sqrt{\Omega \rho_{\text{co}}}} \left(\frac{v_0 k T_0}{gmcG}\right)^{3/2} \\ = \alpha \cdot 3.4 \cdot 10^{12} M_\odot \Omega^{-1/2} h_0^{-1} \left(\frac{v_0}{220\text{km/s}}\right)^{3/2} \left(\frac{1\text{eV}}{m}\right)^{3/2} g^{-3/2} \quad (29)$$

con  $\alpha \approx 261$  (hemos omitido el subíndice J). Es interesante mencionar que a partir de la masa (21) dada por el teorema virial, se obtiene (29) con  $\alpha \approx 3.3$ , y a partir de la masa crítica (1) se obtiene (29) con  $\alpha \approx 7.2$ .

A la temperatura (26) se tiene la masa de Jeans señalada en la figura 4. A temperaturas menores, la masa de Jeans decrece según  $M_J \propto T^{3/2}$

Recordemos que perturbaciones correspondientes a masas menores que la masa de Silk(1) quedan atenuadas por el movimiento de las partículas de materia oscura. La masa de Silk está dada por(1) (29) con  $T = T_q = 6.5 \cdot 10^4 \text{K} \cdot \Omega h_0^2$  y

$$\alpha = 1.38 \cdot \Omega^{3/2} \left[5 + \ln \left\{ \left( \frac{gmc^2}{3kT_q} \right)^2 \right\} \right]^3$$

o sea

$$M_s = 1.2 \cdot 10^{19} M_\odot \Omega^{5/2} h_0^2 g^{-3} m^{-3} \left[5 + \ln \left( 3.5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-2} h_0^{-4} g^2 m^2 \right) \right]^3 \quad (30)$$

con m en eV. Ver la figura 4. Notamos que  $M_s \approx M_J(T_q)$ .

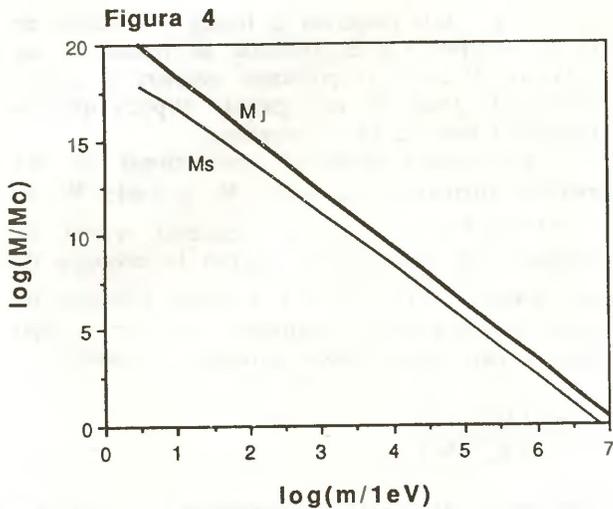


Figura 4. Masa de Jeans  $M_J$  a  $T_{eq}$ , y masa de Silk  $M_s$ .

e) A  $T \approx 0.3\text{eV} \approx 4000\text{K}$  se recombinan electrones con núcleos formando átomos de hidrógeno y helio. El universo se vuelve transparente a los fotones. Los átomos se desacoplan de la radiación cósmica y pueden caer a los pozos de potencial de los halos galácticos en formación.

### 7.- Conclusiones.

El presente trabajo ha generado mas preguntas que respuestas.

En la sección 3 supusimos, sin justificación, que hoy el halo de una galaxia espiral llega justamente hasta el halo de la próxima galaxia. Con esta suposición se obtiene  $M \propto v_0^3$  y  $R_b \propto v_0$  lo que es compatible con las observaciones.

En la sección 4 logramos entender como se forma el halo galáctico con una densidad proporcional a  $r^{-2}$ . Esta formación requiere pérdida de energía por radiación de los bariones si  $\Omega \leq 1$ . Esta radiación podría ser observable ya que tiene una densidad del orden de magnitud del 2% de la densidad de energía de la radiación cósmica de 2.7 K. Sin embargo la formación del halo descrita en las secciones 4, 5 y 6 implica que las galaxias se formaron con  $M \propto v_0^{3/2}$  y  $R_b \propto v_0^{-1/2}$  lo que está en conflicto con las observaciones. (La diferencia entre las dos deducciones es que en la sección 3 se toma  $\rho_{co}$ , mientras que en la sección 6 se toma  $\rho_c = \rho_{co}(T/T_0)^3 \propto v_0^3$  correspondiente a la época en que se formó el halo.)

Tal vez las galaxias espirales que observamos hoy son el producto colisiones y fusiones de galaxias precedentes. Estas colisiones (que han sido observadas) podrían producir el momento angular de las galaxias espirales.

### Apéndice A: Teorema virial con materia oscura.

El halo galáctico es extendido y no cumple con el teorema virial debido a que la materia oscura no puede radiar energía (ya que no interactúa con el campo electromagnético)(1).

Deducimos el teorema virial para la materia bariónica en presencia del siguiente potencial gravitacional del halo:

$$V_d(r) = v_0^2 \ln \left[ \frac{\sqrt{r^2 + r_0^2}}{r_0} \right] \quad (A1)$$

Sea  $T$  la energía cinética total de las partículas de materia bariónica. Entonces

$$2T = \sum_{i=1}^N m_i \left| \dot{\vec{r}}_i \right|^2 = \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i - \sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i \cdot \vec{r}_i \quad (A2)$$

Tomando el promedio temporal y utilizando las ecuaciones del movimiento

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|^3} - m_i \frac{\partial V_d}{\partial \vec{r}_i} \quad (A3)$$

se obtiene el teorema virial

$$\langle 2T \rangle = - \langle \Phi_b \rangle + v_0^2 \left\langle \sum_{i=1}^N \frac{m_i}{1 + (r_0/r_i)^2} \right\rangle \quad (A4)$$

donde

$$\Phi_b = - \sum_{i=1}^N \sum_{j \neq i} \frac{G m_i m_j}{|\vec{r}_i - \vec{r}_j|} \quad (A5)$$

es la energía potencial de los bariones.

El teorema virial (A4) permite obtener la masa bariónica de una galaxia. Es importante incluir el último término de (A4) para evitar sobreestimar la masa bariónica.

### Apéndice B: Neutrinos de Dirac.

En la referencia (1) se concluyó que la nucleosíntesis es compatible con tres familias de neutrinos masivos de Majorana. Señalamos aquí que la nucleosíntesis también es compatible con tres familias de neutrinos masivos de Dirac, por la siguiente circunstancia. Según el modelo standard, la constante de acoplamiento de neutrinos ultrarelativistas derechos es mas debil que la constante de acoplamiento de neutrinos ultrarelativistas izquierdos en un factor  $m/E$ . Por lo tanto los neutrinos derechos se desacoplan antes que los neutrinos izquierdos. Las partículas que se recombinan entre estos dos desacoplamientos calientan los fotones y los neutrinos izquierdos sin calentar a los neutrinos derechos. En consecuencia la temperatura y densidad numérica presente de los neutrinos derechos y antineutrinos izquierdos es menor que la de los neutrinos izquierdos y antineutrinos derechos, y no hay conflicto con la nucleosíntesis.

## Referencias

- (1) Bruce Hoeneisen, "¿De qué está hecho el universo?", Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica, Vol. 11, 1990, escuela Politécnica Nacional, Quito, Ecuador.
- (2) John N. Bahcall and Stefano Casertano, "Some possible regularities in missing mass", Dark matter in the universe, edited by J. Bahcall, T Piran and S. Weinberg, World Scientific, 1987. John Kormendy, "The structure of dark matter in galaxies", in "Origin, Structure and Evolution of Galaxies", Fang Li Zhi, Editor, 1987.
- (3) John Kormendy, "Dark matter in dwarf galaxies", Dark Matter in the Universe, edited by J. Kormendy and G.R. Knapp, 1987.
- (4) E.M. Burbidge and G.R. Burbidge, "The masses of galaxies and the Universe", A. Sandage, M. Sandage and J. Kristian, eds, U. of Chicago Press, 1975.
- (5) Particle Properties Data Booklet, 1988. North-Holland.
- (6) James E. Felten, "Galaxy luminosity functions, M/L ratios, and closure of the universe", J. Komendy and G.R. Knapp (eds), Dark matter in the universe.
- (7) Steven Weinberg, "Gravitation".

## Una nota adicional: La fusión de galaxias.

Luego de entregar el artículo precedente he recibido dos referencias de sumo interés para nuestra discusión. La primera ("The halo puzzle", P. J. E. Peebles, Observational and theoretical aspects of relativistic astrophysics and cosmology, p. 253, ed. by Sanz and Goicoechea, 1985, World Scientific Publishing Co.) señala que también las galaxias elípticas tienen halos con simetría esférica y densidad  $\rho \propto r^{-2}$  que se extienden hasta por lo menos 1 Mpc. Esta observación (que se basa en la emisión de rayos X del gas que rodea la galaxia) refuerza nuestra conjetura, en la sección 3, de que el halo de una galaxia se extiende varios Mpc hasta el halo de la "próxima" galaxia. La segunda referencia ("The epoch of galaxy formation", P. J. Quinn, Aust. J. Phys. 1990, 43, 135.) concluye textualmente: "So many bright galaxies may well have formed and evolved by the merger of subsystems making galaxy formation from pre-existing systems an ongoing process." Los continuos choques y fusiones observados de galaxias justifican los desarrollos realizados en la sección 3.

Al parecer, el halo galáctico con densidad crítica  $\rho \propto r^{-2}$  al perder energía por radiación no queda confinado gravitacionalmente según el teorema virial, sino que se fusiona con otras galaxias para formar un nuevo halo crítico de mayor masa y radio.

Según esta conjetura la fusión y radiación de halos determina la distribución de masas de las galaxias. Veamos si podemos estimar, a *grosso modo*, la masa de una galaxia elíptica que ha procesado todo su gas a estrellas.

La energía potencial gravitacional de una estrella homogénea de masa  $M$ , y radio  $R$ , es  $-3GM^2/(5 \cdot R)$ . Según el teorema virial la formación de esta estrella requirió la radiación de una energía  $3GM^2/(10 \cdot R)$ . El halo galáctico de masa  $M$  tiene  $M/(M_*)$  estrellas. La energía total radiada para formar estas estrellas es entonces

$$= \frac{3G}{10} \left\langle \frac{M_*^2}{R_*} \right\rangle \frac{M}{(M_*)}$$

Iguamos esta energía a la energía que debió ser radiada para formar el halo:  $\approx GM^2/R$  (ver tabla 1). Se obtiene (1) con

$$v_0 = \sqrt{\frac{3}{10} \frac{G}{(M_*)} \left\langle \frac{M_*^2}{R_*} \right\rangle}$$

Tomando al sol como una estrella típica se tiene  $v_0 = 240 \text{ km/s}$  lo que es del orden de magnitud correcto. La masa luminosa de la galaxia elíptica se obtiene entonces de (18) con este valor de  $v_0$ .

Se obtiene del orden de magnitud de  $10^{12} M_\odot$ .

En la fusión de galaxias elípticas (en las cuales la mayor parte del gas ya se ha procesado a estrellas) esperamos una energía radiada por unidad de masa  $\approx v_0^2$  constante. Entonces para estas galaxias  $R$  y  $M$  crecen "en promedio" en proporción a  $a^{3/2}$ .