

Ruben Chaer, Julio Pérez

Instituto de Ingeniería Eléctrica
 Facultad de Ingeniería
 Montevideo, Uruguay

RESUMEN: Se desarrolla un modelo en el espacio de estado de un controlador a ripple constante para un convertidor DC-DC que alimenta un motor de corriente continua con excitación independiente.

El controlador está destinado al manejo del convertidor para regular la velocidad o el par del motor. Fue implementado usando una estrategia de control a ripple fijo lo que permite una respuesta rápida y segura. El esquema de control adoptado consta de un lazo interno de control de par y de un lazo externo de control de velocidad. Se establece un modelo en el espacio de estados para la planta que permite analizar el funcionamiento a frecuencia variable resultante de la estrategia de control elegida. El estudio en el plano de estado permite visualizar el comportamiento del sistema en diferentes transitorios. En particular, permite realizar un estudio cuantificado del rebase en la respuesta a un escalón en la referencia de velocidad. Se construyó un prototipo de 250 V, 20 A con el cual se verificaron experimentalmente los métodos de diseño y modelado utilizados. Dichos resultados muestran una correspondencia ajustada de los objetivos de diseño y lo previsto teóricamente con el funcionamiento del sistema.

ABSTRACT: A space state model is developed for a constant ripple DC-DC converter controller driving an independently excited DC motor.

The controller drives the converter to control motor speed or torque depending on the mode. It was implemented using a constant ripple strategy resulting in a safe and fast control. The proposed controller is built of a torque control inner loop and a speed control extern loop. The state space model allows the analysis of the variable frequency behavior which results from the constant ripple control strategy. The model allows to see the transient system response in different cases. Particularly it enables a quantified study of overshoot in the step response of the speed controller.

A 250 V, 20 A prototype was built allowing experimental verification of the design and modelling methods. The results of several tests are shown.

I. Introducción.

Ni el modelado en el espacio de estados [1] [2] ni la estrategia de control por comparador de histéresis [3] [4] son nuevas en la ingeniería de control. La combinación de ambas herramientas ha adquirido importancia recientemente en el área de control de dispositivos de electrónica de potencia debido a la necesidad de tratar plantas no lineales y disponer de medios para analizar los transitorios desde estados iniciales muy apartados del estado de equilibrio.

En este trabajo se describe el diseño de un controlador para un convertidor DC-DC de 250V 20A que maneja un motor de excitación independiente. En la fig. 1 se muestra un esquema simplificado de la planta a controlar.

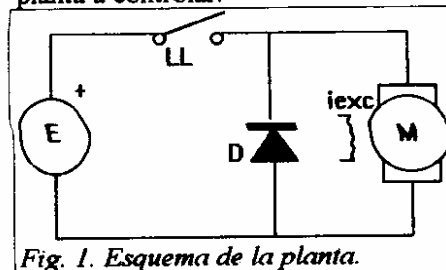


Fig. 1. Esquema de la planta.

El sistema fue diseñado para ser utilizado como generador de laboratorio de formas de onda de par

(modo control de par). Adicionalmente se implementó el modo de funcionamiento que llamaremos "modo control de velocidad" en el cual la consigna de control es la velocidad del motor.

La exposición se organiza de la siguiente forma. La sección II describe el esquema de control adoptado. En la sección III se desarrolla el modelo en el espacio de estados de la planta con el controlador. Se cuantifica el rebase de la respuesta a un escalón en la referencia de velocidad, estableciéndose una cota para el mismo. En la sección IV se exponen resultados experimentales. La sección V está dedicada a las conclusiones. En un apéndice se demuestra la existencia y unicidad del ciclo límite para el control de velocidad.

II. Descripción de la Estrategia de Control.

Se adoptó un esquema de control en dos lazos de realimentación: un lazo interior de control de corriente y un lazo exterior de control de velocidad o tensión.

El lazo exterior puede ser anulado, manejando directamente la referencia del lazo interior de corriente. Esto permite configurar fácilmente al sistema en sus dos modos de funcionamiento: controlador de par o controlador de velocidad. En un convertidor DC-DC como el utilizado la regulación de la corriente debe realizarse necesariamente por medio del control de los tiempos durante los que se conecta la fuente a la carga, y los tiempos durante los que se la desconecta.

Así, el lazo interior se construyó utilizando una estrategia de control conocida como control en dos niveles (Two Level Control o abreviadamente TLC). Esta estrategia consiste en lo siguiente: con la llave cerrada, la corriente crecerá a una velocidad determinada por la tensión en la carga y la self del filtro de salida; cuando la corriente I supera a la referencia en un valor fijo $DI/2$, el control ordena abrir la llave. El valor de la corriente ahora disminuye hasta que pasa por debajo de la referencia en $DI/2$, momento en que se vuelve a cerrar la llave. El sistema queda conmutando con la corriente I variando dentro de una banda de ancho DI alrededor de la corriente de referencia. La variable que controlamos directamente es la corriente media en la carga y el control impone un ripple de corriente fijo. Para un valor de corriente dado, la tensión de salida en régimen quedará fijada por la carga. Esto fijará indirectamente la duración de los tiempos entre conmutaciones T_{on} y T_{off} , y por lo tanto la frecuencia de funcionamiento y el ciclo de trabajo.

Esta estrategia de control presenta varias virtudes. En primer lugar, es un control rápido. La corriente sigue una variación en la referencia tan rápido como lo permite la planta. El valor del sobretiro, sin embargo, es nulo a menos del pequeño ripple $DI/2$. Ello permite llevar un control ajustado sobre el valor máximo instantáneo que puede alcanzar la corriente. Esto es muy importante en un chopper a tiristores de apagado forzado. Finalmente, para valores iguales del ripple máximo de corriente, la frecuencia de funcionamiento será menor que para otras estrategias de control. Como consecuencia se tendrá menores pérdidas de conmutación y un mejor rendimiento.

Como contrapartida, esta estrategia de control obliga a medir el valor instantáneo de la corriente, tarea que no es sencilla en un ambiente ruidoso. Otro

inconveniente es que la frecuencia de funcionamiento es variable y queda determinada indirectamente por el sistema. Dicha frecuencia alcanza valores muy altos cuando el ciclo de trabajo se aproxima a los límites del rango (0,1). Ocasionalmente puede ser necesario limitar el rango de valores del ciclo de trabajo para mantener la frecuencia de funcionamiento por encima de la frecuencia de corte del sistema mecánico, evitando así que el ripple en la velocidad del motor sea notorio. Por último, se señala la falta de herramientas para el diseño en comparación con las técnicas disponibles para diseñar a frecuencia constante. En el siguiente apartado se desarrolla el análisis del espacio de estados como herramienta para el diseño.

El lazo exterior emplea un control proporcional. De esta manera no se agregan variables de estado y podemos seguir analizando el sistema en el plano de estado. Como se muestra más adelante, se pueden obtener valores razonables del error en régimen y del sobretiro (para la respuesta al escalón en la referencia de velocidad).

III. Modelo en el espacio de estados.

En esta sección se establece el modelo en el espacio de estados para el sistema: motor, chopper y controlador.

La planta consiste en un motor de excitación independiente alimentado por un convertidor DC-DC. Se eligen las variables de estado de modo que las trayectorias en el plano de estados son circunferencias.

Se determinan las curvas de conmutación y trayectorias en el plano de estados para el control de corriente por comparador en dos niveles (TLC).

Finalmente se hace lo mismo para el control proporcional de velocidad. Se analiza además el funcionamiento en conducción discontinua y la respuesta al escalón. Se determina el error en régimen y el sobretiro de velocidad para una entrada al escalón, estableciendo una cota para ambos.

En el apéndice se demuestra la existencia de unicidad del ciclo límite.

A. Modelo del motor y representación en el Espacio de Estados.

El comportamiento electromecánico de un motor de corriente continua con excitación independiente puede describirse mediante las ecuaciones:

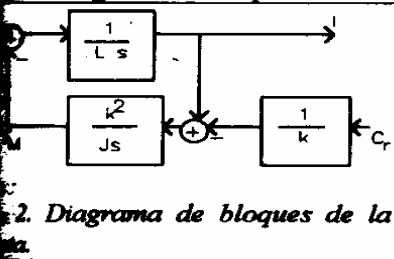
$$V_i = E_M + L s I$$

$$J s w = C_M - C_r$$

$$E_M = k w$$

$$C_M = k I$$

De estas cuatro ecuaciones, se deriva el siguiente diagrama de bloques:



Consideramos como variables de estado a la corriente de armadura (marcada como I en el

2. Diagrama de bloques de la

rama de bloques) y la contra fem del motor (marcada como Em).

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_M \\ I \end{bmatrix}$$

ecuación de estado correspondiente es:

$$AX + BR(t)$$

de:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & k^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 & -k^2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; R(t) = \begin{bmatrix} V_i(t) \\ I_r(t) \end{bmatrix}$$

$$I_r(t) = C_r(t) / k$$

Para el estudio que sigue, se supone que el par aplicado por la carga es constante. Bajo esta hipótesis, se obtiene una expresión sencilla para las trayectorias en el plano de estados. Esto permite dar una descripción gráfica muy clara del funcionamiento del sistema. La solución general del sistema a partir de un estado inicial X0 es:

$$X(t) = \Phi(t)X_0 + [\Phi(t)] * [BR(t)]$$

de:

$$\Phi(t) = e^{At} = \begin{bmatrix} \cos(\omega_n t) & \frac{k^2 \sin(\omega_n t)}{J\omega_n} \\ -\frac{\sin(\omega_n t)}{L\omega_n} & \cos(\omega_n t) \end{bmatrix}$$

$$\omega_n^2 = \frac{k^2}{JL}$$

$$[\Phi(t)] * [BR(t)] = \int_0^t \Phi(t-v)BR(v)dv$$

En nuestro caso Cr(t) es constante y Vi(t) tiene solo dos posibles valores: E o 0. Por esta razón, el producto de convolución es fácilmente evaluable. En los tramos en que R(t) es constante:

$$[\Phi(t)] * [BR] = \int_0^t \Phi(v)BRdv = A^{-1}[\Phi(t) - \Phi(0)]BR$$

donde $R = R_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ I_r \end{bmatrix}$ o $R = R_1 = \begin{bmatrix} E \\ I_r \end{bmatrix}$ correspondientes a la llave abierta o cerrada respectivamente.

Las ecuaciones anteriores determinan las trayectorias en el plano x1, x2. Se puede ver que en cada tramo en que R es constante estas trayectorias son elipses con ejes paralelos a los ejes coordenados. Haremos un cambio de escala en las variables de estado de forma que las trayectorias sean circunferencias en el nuevo plano de estados. Si hacemos el cambio de variable Y = P X

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

La ecuación del sistema en las nuevas variables es:

$$Y = PAP^{-1}Y + PBR = AY + BR$$

y la nueva matriz de transición de estados:

$$F(t) = e^{At} = Pe^{At}P^{-1}$$

$$\text{eligiendo } P = \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{J}{L}} & 1 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

tenemos:

$$y_1 = \sqrt{\frac{J}{L} \frac{1}{k}} x_1$$

$$y_2 = x_2$$

$$F = \begin{pmatrix} \cos(\omega_n t) & \sin(\omega_n t) \\ -\sin(\omega_n t) & \cos(\omega_n t) \end{pmatrix}$$

F(t) resulta ser la matriz de una rotación de ángulo ($\omega_n t$) en sentido horario en el plano $y_1 y_2$.

El vector de las entradas R(t) puede tomar solamente los dos valores R₀ y R₁ mencionados.

La solución de equilibrio de la ecuación de estado es:

$$Y_{eq0} = -A^{-1}BR_0 \text{ cuando la entrada es } R_0, \text{ y}$$

$$Y_{eq1} = -A^{-1}BR_1 \text{ cuando la entrada es } R_1.$$

En el primer caso, Y(t) evoluciona según la ley:

$$Y(t) - Y_{eq0} = F(t-t_0) (Y(t_0) - Y_{eq0}),$$

lo cual es una rotación del estado en el instante t₀, de ángulo ($\omega_n(t-t_0)$), con centro en Y_{eq0}.

Análogamente, en el segundo caso, la evolución del estado es una rotación del estado inicial (Y(t₁)), con centro en Y_{eq1}, en sentido horario, de un ángulo ($\omega_n(t-t_1)$).

Nótese que en ambos casos el ángulo recorrido

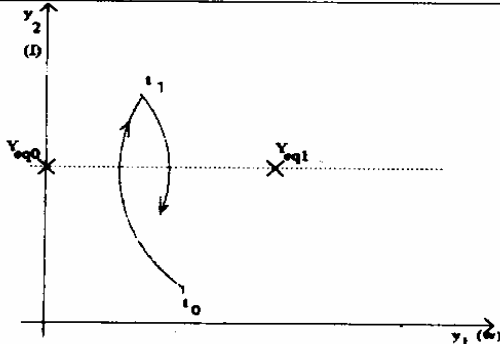


Fig. 3. Trayectorias en el plano de estado.

sobre las trayectorias circulares es una medida del tiempo transcurrido.

La figura 3 ilustra el funcionamiento partiendo en un instante inicial t₀ con Vi=E y conmutando en el instante t₁ a Vi=0.

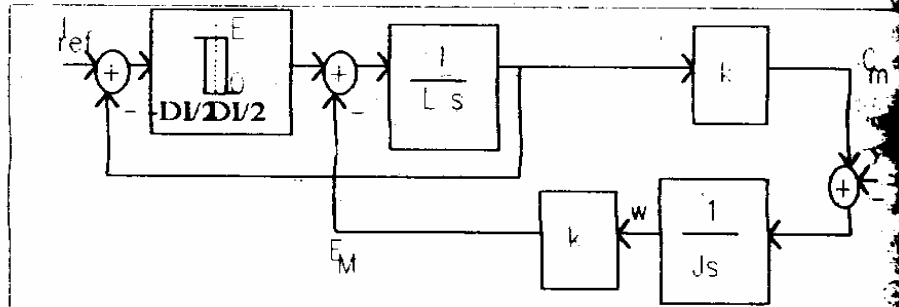


Fig. 4. Control de Corriente. Diagrama de bloques.

B. Control de corriente.

El diagrama de bloques del motor junto al control de corriente (TLC) se muestra en la figura 4.

El esquema de la figura es válido solamente para régimen de conducción continua. En el sistema de control de corriente por la armadura del motor no puede haber limitación de corriente en su sentido mientras que, en el diagrama, no se muestra limitación.

En las tres figuras que se muestran en esta continuación se ilustra el comportamiento del sistema para diferentes valores del par resistente. En todas ellas, mientras el chopper conduce, el estado del sistema describe un arco de circunferencia con centro en Y_{eq1} hasta alcanzar el borde superior de la banda de histéresis. Luego describe un arco de circunferencia con centro en Y_{eq0} hasta que alcanza el borde inferior, en el que volvemos a girar alrededor de Y_{eq1}. En los casos de las figuras 5, 6 y 7 se llegan a diferentes situaciones de régimen:

1. Caso $i_{ref} = I_r$

La referencia de corriente equilibra el par resistente impuesto por la carga. Se llega a un funcionamiento en el que el par motor es igual al par resistente y el motor ni se acelera ni se enlentece.

Obsérvese que para un valor dado de $I_{ref} = I_r$ el funcionamiento en equilibrio puede darse para cualquier valor de la velocidad. El ángulo al centro del tramo de trayectoria correspondiente a Y_{eq0} es

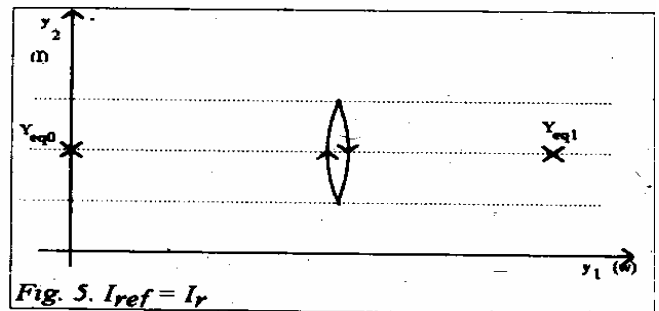


Fig. 5. $I_{ref} = I_r$

proporcional al tiempo de apagado t_{off} . Alógicamente, el ángulo correspondiente al sector de centro en Y_{eq1} nos da una medida del tiempo t_{on} . Se deduce entonces que el ciclo de trabajo $(t_{on} + t_{off})$ es creciente para valores crecientes de

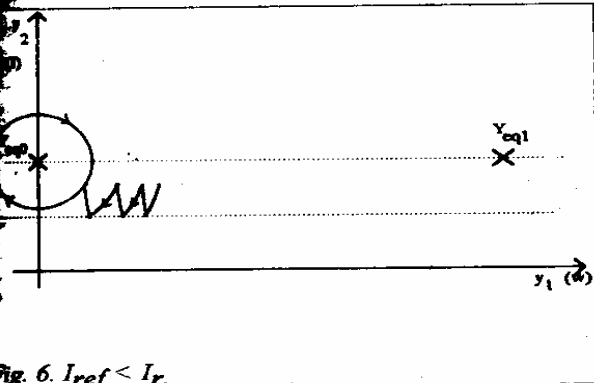


Fig. 6. $I_{ref} < I_r$.

2. Caso $i_{ref} < I_r$

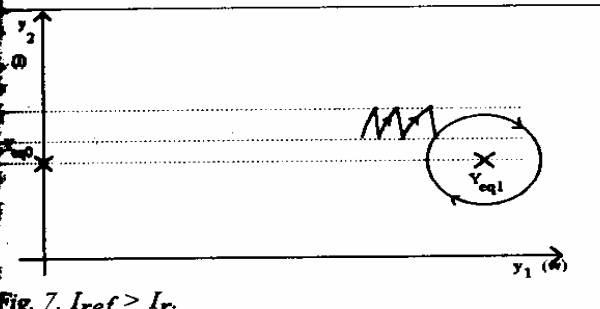


Fig. 7. $I_{ref} > I_r$.

El par motor pedido es menor que el par resistente. El motor se frena hasta quedar en un ciclo límite alrededor del centro Y_{eq0} con el chopper apagado. Esto representa un intercambio de energía entre la masa que gira y el inductor del filtro del chopper. En la práctica, la oscilación se amortigua debido a las pérdidas y el sistema tiende a la solución de equilibrio Y_{eq0} donde $I = I_r$.

3. Caso $i_{ref} > I_r$

El par motor es ahora mayor que el par de la carga. El motor se acelera. Se llega a un punto en que se alcanza el umbral superior de comparación.

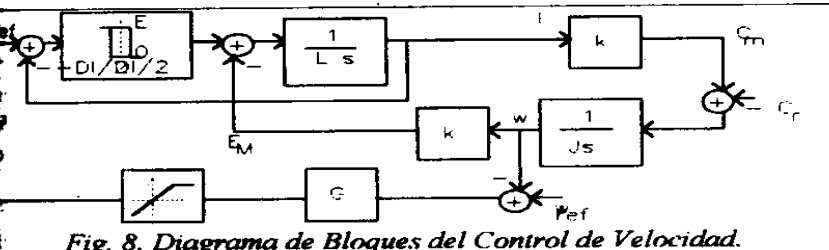


Fig. 8. Diagrama de Bloques del Control de Velocidad.

Quedando el sistema en un ciclo límite alrededor del centro Y_{eq1} con el chopper conduciendo. Igual que en el caso anterior, se da un intercambio entre la energía

cinética almacenada en la masa y la energía almacenada en el inductor del filtro. La solución de equilibrio es ahora Y_{eq1} .

C. Control de velocidad.

El control de velocidad se hace con un lazo externo cerrado alrededor del control de corriente. Este lazo de realimentación genera la referencia de corriente para el lazo interior. El controlador usado es de tipo proporcional y se verifica que el sistema realimentado se comporta satisfactoriamente.

En la figura 8 se muestra el Diagrama de Bloques del sistema con los dos lazos de control.

La velocidad del motor w se resta de la entrada de referencia w_{ref} para obtener el error de velocidad. Este error es amplificado con ganancia G obteniendo así la entrada de referencia para el lazo interno. El bloque no lineal a la salida del amplificador de error G limita esa entrada de referencia a un valor máximo y se incluye como protección.

La entrada de referencia al lazo interno vale $I_{ref} = G(w_{ref} - w)$ mientras no actúe el limitador e $I_{máx}$ cuando éste actúa. Sobre el plano (w, I) podemos representar i_{ref} con una recta de pendiente $-G$ que

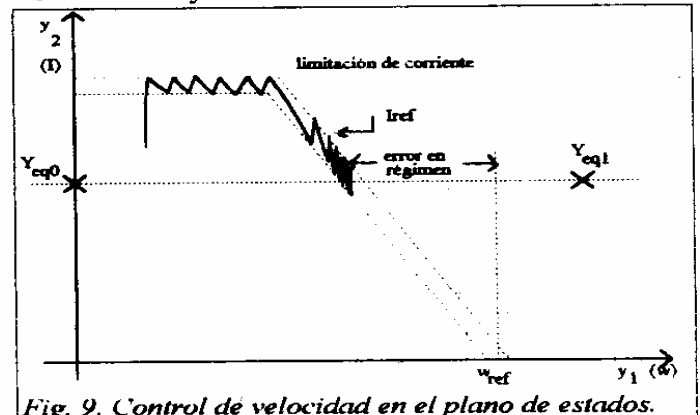


Fig. 9. Control de velocidad en el plano de estados.

pasa por el punto $(w_{ref}, 0)$ y la recta horizontal $(I = I_{máx})$. Los umbrales del comparador con histéresis del lazo interno de corriente están a $\pm DI/2$ del valor de la entrada de referencia I_{ref} . Esto es lo que ilustra la figura 9 en el plano de estados y_1, y_2 .

Mientras conduce el chopper, el estado del sistema evoluciona según una rotación de ángulo (w_{ref}) alrededor de Y_{eq1} . Esto se mantiene

hasta que se alcanza el borde superior de la banda alrededor de I_{ref} . A partir de ahí la rotación es alrededor de Y_{eq0} hasta alcanzar el borde inferior de la banda de histéresis. Si el par resistente es menor que el par motor máximo $k I_{m\acute{a}x}$ se llega a un ciclo límite como se indica en la figura. Si el par resistente es mayor actúa el limitador de I_{ref} y el sistema funciona con $I_{ref} = I_{m\acute{a}x}$ como se analizó en el apartado anterior.

1. Régimen de conducción discontinua.

En la siguiente figura se muestra un ciclo límite en el régimen de conducción discontinua. Se observa que el ciclo límite alcanzado tiene un error en velocidad menor que el de las trayectorias correspondientes a ciclos límite en el régimen de conducción continua. De esta forma queda claro que entrar en régimen de conducción discontinua no supone deterioro alguno en el funcionamiento del controlador.

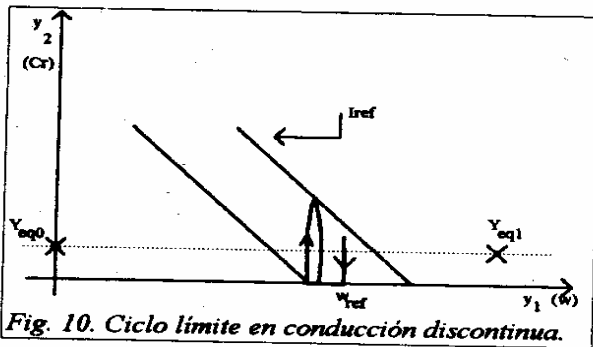


Fig. 10. Ciclo límite en conducción discontinua.

Nótese que en los tramos en que se anula la corriente, la velocidad del motor disminuye debido al par resistente C_r . No tenemos para este caso una visualización del tiempo transcurrido como es el ángulo recorrido sobre las trayectorias circulares mientras hay conducción continua.

2. Respuesta a un escalón en la referencia de velocidad.

De ahora en más, representaremos a la banda de histéresis como una línea única. De esta manera simplificamos las figuras y podemos representar claramente el comportamiento del sistema en los transitorios que vamos a analizar.

En la siguiente figura (fig. 11) mostramos la respuesta del sistema a un escalón en w_{ref} .

El sobretiro de la velocidad está dado por la flecha AB en la figura. Como podemos apreciar, el mismo depende del par resistente, del valor de la limitación de corriente y de la ganancia del control (pendiente de la recta $I_{ref}(w)$)

El mayor sobretiro está acotado; se da al motor en vacío, inicialmente parado y pidiendo un escalón de velocidad, de manera que apenas se limita la corriente. Esto se muestra en la figura 12.

El caso de la figura es extremo y, al ser un par resistente, una vez que el sistema alcanza el punto B...

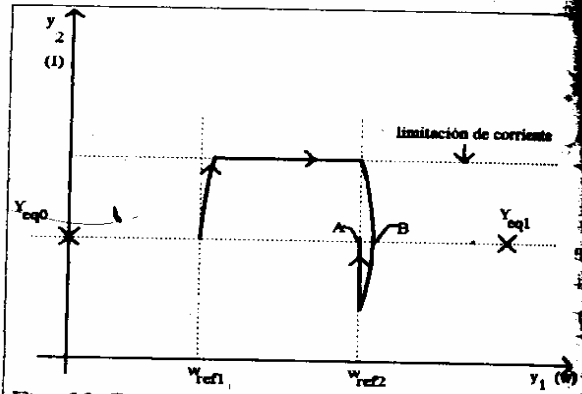


Fig. 11. Respuesta al escalón.

H, permanece en el mismo. El error permanente en velocidad, en este caso, sería igual al sobretiro. En la práctica hay algo de pérdidas y el sistema evoluciona...

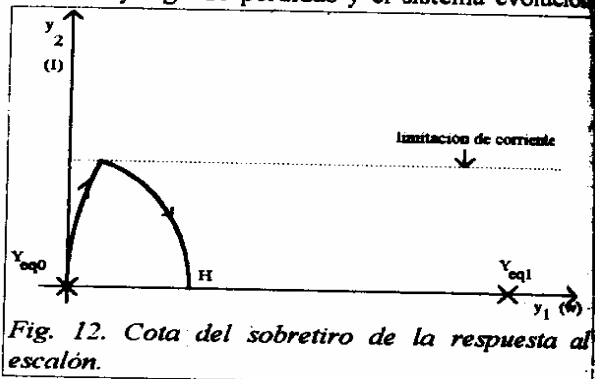


Fig. 12. Cota del sobretiro de la respuesta al escalón.

hacia w_{ref2} . Para el prototipo construido se obtiene 14rad/seg (136rpm) como valor máximo del sobretiro, siendo los parámetros del mismo $k = 1.4 \text{ V}\cdot\text{s}/\text{N}\cdot\text{m}$, $J = 0.1 \text{ N}\cdot\text{m}$, $L = 50 \text{ mHy}$ y utilizando 15A como valor de la limitación de corriente.

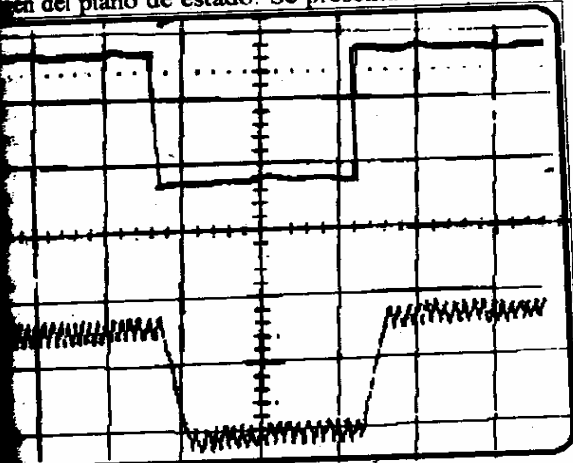
IV. Resultados experimentales.

En base al control propuesto se construyó un prototipo sobre un chopper reductor a tiristores de 250VDC, 20A. Se registró el comportamiento transitorio del sistema en varias situaciones.

La primer fotografía (fig. 13) muestra la respuesta del control de corriente a una onda cuadrada de 20 Hz y 1 V de amplitud en la entrada de

encia. La tensión de alimentación del convertidor de 200V, la contrafem del motor 100V.

La segunda fotografía (fig. 14) muestra la respuesta a un escalón en la referencia para el control de velocidad partiendo con el motor en reposo. El oscoscopio se puso en modo XY para tener una visión del plano de estado. Se presenta en el canal X



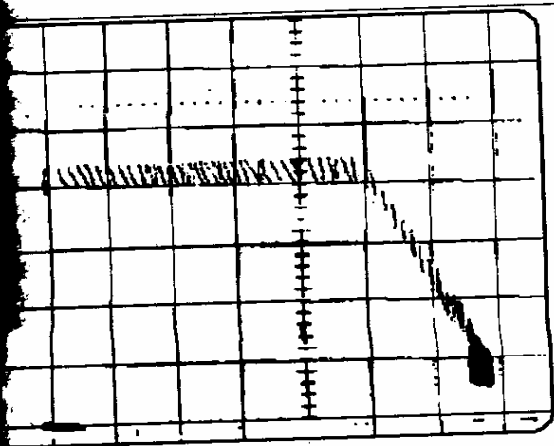
Barrido: 10 ms/DIV.

Canal superior: Referencia de corriente, 0.5 V/DIV.

Canal inferior: Corriente de armadura, 3.57 A/DIV.

Fig. 13. Control de corriente.

Tensión en bornes del motor y en el canal Y la corriente de armadura.



Barrido: XY.

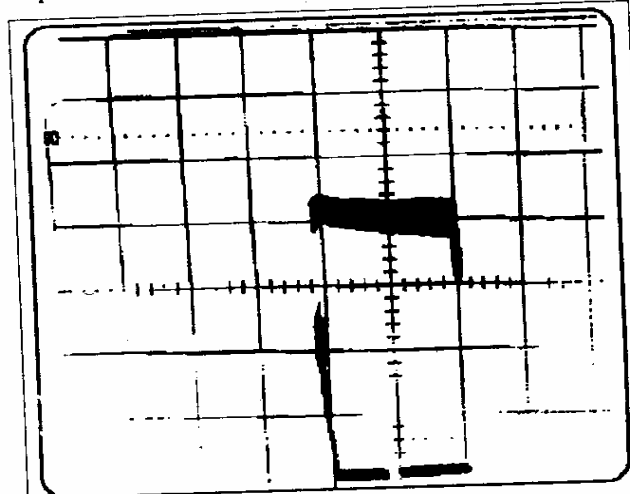
Canal X: Tensión en bornes del motor, 2 V/DIV (3.5 rpm/DIV).

Canal Y: Corriente de armadura, 3.57 A/DIV.

Fig. 14. Control de velocidad en el plano de estado.

Se observa el tramo de aceleración a corriente constante limitada por el circuito de protección. Durante este tramo el motor es acelerado con el máximo par disponible, por lo que alcanzará la

velocidad de referencia en el menor tiempo posible. Se observa asimismo la trayectoria conmutando por la recta $I = G(w_{ref} - w)$ característica del control proporcional y el régimen final alcanzado. Lo que se observa en la fotografía se ajusta al comportamiento previsto por el análisis en el espacio de estado de la sección anterior. De la figura se deduce que la ganancia del controlador vale aproximadamente 5 A.s/rad. Nótese que la escala de velocidad está muy ampliada. El valor de régimen es 100 rpm y el máximo



Barrido: XY.

Canal X: Tensión en bornes del motor, 20 V/DIV (155 rpm/DIV).

Canal Y: Corriente de armadura, 3.57 A/DIV.

Fig. 15. Control de velocidad en el plano de estado. error de régimen es 30 rpm.

La tercer fotografía (fig. 15) muestra el comportamiento del sistema controlado en velocidad sometido a una onda cuadrada en la referencia.

El sistema recorre la gráfica en sentido horario. Inicialmente está regulando a la velocidad más lenta (400 rpm). Cuando la referencia pasa al valor mayor, el control suministra la máxima corriente, acelerando el motor hasta que alcanza a regular (a 750 rpm aproximadamente). Luego la referencia baja nuevamente y el control corta al tiristor principal. La corriente se anula y el motor se frena debido al par resistente hasta que alcanza de nuevo la referencia y vuelve a regular en el punto de funcionamiento inicial.

V. Conclusiones.

Se aplicó el análisis en el espacio de estados como herramienta de diseño de un controlador no lineal. Dicha herramienta mostró ser útil para una visualización clara del comportamiento del sistema

controlado y poder predecir así las trayectorias cuando hay grandes apartamientos de la posición de equilibrio. Esto es importante en un generador de laboratorio de formas de onda de par como es el caso del equipo construido.

Del esquema de control cabe resaltar la robustez resultante de disponer de un lazo interior de control de corriente sobre el cual se pueden aplicar limitaciones. Por ejemplo en el prototipo la limitación de corriente máxima a 20 A está implementada a este nivel.

En cuanto a la performance del sistema controlado, los ensayos confirman lo previsto por el análisis en el espacio de estados y muestran que la hipótesis de par constante no invalida las observaciones que se pueden realizar con dicha herramienta.

Como inconveniente de la estrategia de control de ripple constante debe señalarse que la frecuencia de funcionamiento varía en un rango amplio. Esto puede traer complicaciones excitando modos naturales del sistema mecánico y a su vez dificulta la visualización de las distintas señales en un osciloscopio.

APENDICE: Existencia y unicidad del ciclo límite.

En este apéndice se demuestra la existencia y unicidad del ciclo límite de la planta con el controlador propuesto bajo la hipótesis de par de carga constante. Para el desarrollo se utilizará el siguiente resultado, sin demostrarlo:

LEMA

Hipótesis

Dadas dos rectas paralelas a y b y un punto C en un plano, tales que la distancia entre el punto C y la recta b es menor que la distancia entre el punto C y la recta a , consideramos la

transformación que aplica segmento de a en segmentos de b de la siguiente manera:

Dado un segmento AB de a trazamos las circunferencias con centro C que pasan por los extremos de AB . El segmento $A'B'$, transformado de AB es el que se obtiene de rotar en sentido horario, con centro en C los puntos A y B hasta la recta b y la notación usada será: $A'B' = T(AB)$. Esta definición corresponde a la construcción de la figura A.1

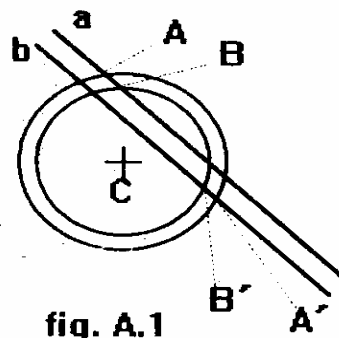


fig. A.1

el plano.

Tesis:

La longitud del segmento es menor que el segmento AB .

En resumen la transformación así construida, es una contracción.

TEOREMA

" Con la estrategia de control de velocidad propuesto el ciclo límite existe y es único".

La demostración consta de dos partes. En la primera, se demuestra que cualquier trayectoria que alcance la banda de comparación alrededor de I_{ref} tiende al ciclo límite; y en la segunda, demostramos que desde cualquier estado inicial llegamos a la banda de I_{ref} .

PRIMERA PARTE

Existencia de un ciclo límite.

La figura A.2, muestra la banda de comparación alrededor de I_{ref} , para un valor dado de W_{ref} .

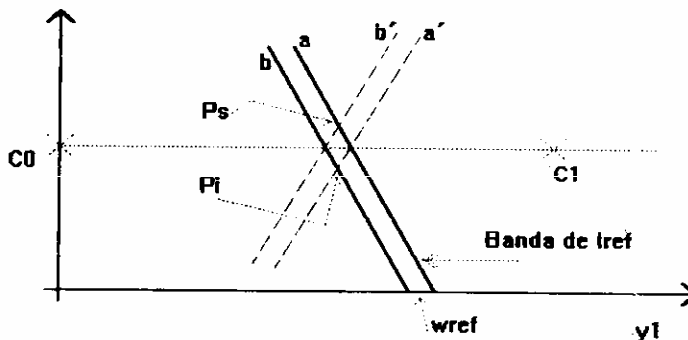


fig. A.2

alrededor de I_{ref} , para un valor dado de W_{ref} . Los puntos $C0$ y $C1$, son los centros correspondientes a la llave abierta y cerrada respectivamente.

Simetrizando las rectas a y b respecto al eje de los centros $C0$ y $C1$ construyen las rectas a' y b' . Los puntos P_s y P_i definen como:

$$P_s = a \cap b' \text{ y } P_i = b \cap a'$$

De la sección (III) si la llave del convertidor

se encuentra cerrada, el estado evoluciona según una circunferencia de centro $C1$ y en sentido horario hasta alcanzar el extremo superior de la banda de histéresis (recta a) instante en que el controlador decide abrir la llave. Con la llave abierta, el estado evoluciona desde el punto de apertura en la recta a describiendo una circunferencia de centro $C0$ en sentido horario hasta alcanzar a la recta b .

Observamos que si el estado coincide con P_s el siguiente punto de conmutación será P_i y si el estado

... P_i , el siguiente punto de conmutación será P_s . Por lo tanto el arco de circunferencia con centro C_0 que pasa por P_i y P_s seguido por el arco de circunferencia que pasa por estos dos mismos puntos pero con centro en C_1 es una trayectoria de equilibrio (o ciclo límite) del sistema.

Unicidad del ciclo límite.

Llamemos T_0 a la transformación que lleva los puntos de conmutación de la recta a a la recta b (giro con centro en C_0) y T_1 la que los lleva de la recta b a la a nuevamente. Si partimos de un estado inicial P_k sobre la recta a , la evolución del sistema puede verse como la concatenación de las transformaciones T_0 y T_1 en forma alternada.

La serie de puntos de conmutación se puede escribir como:

$$P_{k+1} = T_0(P_k)$$

$$P_{k+2} = T_1(P_{k+1})$$

$$P_{k+3} = T_0(P_{k+2})$$

Para concluir la demostración hacemos notar que consideramos el segmento $P_k P_s$ y lo transformamos aplicando T_0 a sus extremos, obtenemos el segmento $P_{k+1} P_i$ el cual al ser transformado por T_1 resulta en el segmento $P_{k+2} P_s$. T_0 y T_1 son transformaciones como la del lema y por consiguiente son contracciones. La concatenación de contracciones también es una contracción. Si consideramos la serie de puntos de conmutación sobre la recta a , la transformación que dado un punto nos da el siguiente es $T_0 T_1$. Al ser esta transformación una contracción la serie tiende al punto unido P_s y este es único. Un razonamiento análogo nos muestra que la transformación contractiva $T_1 T_0$ genera la serie de puntos de conmutación sobre b y por consiguiente el sistema tiende al punto unido P_i y este es único.

SEGUNDA PARTE

En lo que sigue se mostrará, valiéndose de la figura A.3, que desde cualquier punto del plano de

estados en la banda $0 < y_2 < I_{m\acute{a}x}$, las trayectorias alcanzan la banda de comparación alrededor de i_{ref} , por lo que entran dentro del conjunto de trayectorias tratadas en la primera parte.

En la figura hemos representado la banda de histéresis alrededor de $I_{m\acute{a}x}$ y de i_{ref} como rectas. La franja $0 < y_2 < I_{m\acute{a}x}$ es el lugar de los estados posibles del plano. Dicha franja es dividida en cuatro zonas como se muestra en la figura. Si el estado inicial está en la zona Z1, el sistema evoluciona por una circunferencia con centro en C_1 , rotando en sentido horario hasta alcanzar la banda de histéresis alrededor de $I_{m\acute{a}x}$. Como $I_r < I_{m\acute{a}x}$ el sistema se acelera aumentando y_1 hasta alcanzar por fin la recta de i_{ref} .

Cuando el estado inicial es un punto de la zona Z2, el sistema comienza rotando con centro C_1 (siempre en sentido horario) y alcanza la banda de I_{ref} . Saliendo de la zona Z3, el comportamiento es similar, alcanzándose la banda de I_{ref} con el primer arco de circunferencia, pero en este caso el centro del arco es C_0 .

Por último, si partimos desde un estado inicial de la zona Z4, la trayectoria comienza con una rotación de centro C_0 hasta alcanzar $y_2=0$. Como $I_r > 0$, el motor se frena (evolucionando por la recta $y_2=0$) y alcanza la banda de histéresis alrededor de I_{ref} .

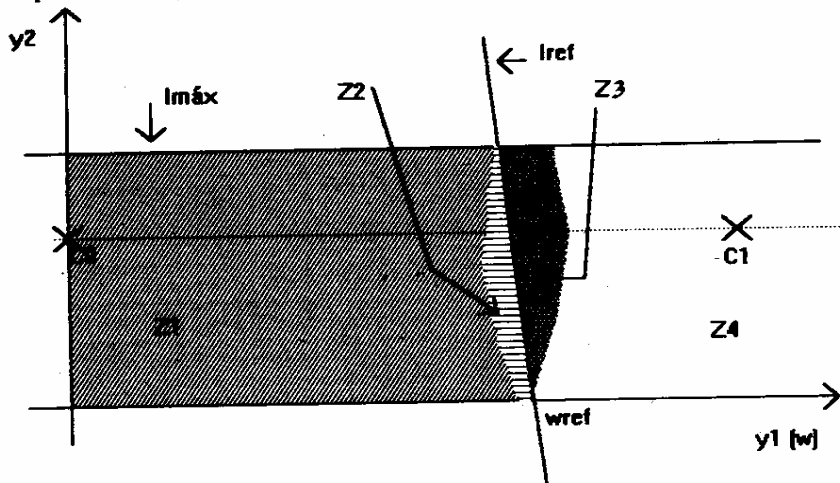


Fig. A.3

Referencias.

[1] R. E. Kalman, "Phase-Plane Analysis of Automatic Control Systems with Nonlinear Gain Elements", Jan. 1955.

[2] R. E. Kalman, "Analysis and Design Principles of Second and Higher Order Saturating Servomechanisms", Nov. 1955.

[3] W. McMurray, "Modulation of Chopping Frequency in DC Chopper and PWM Inverters Having Current-Hysteresis Controllers", *IEEE Trans. Industry Applications*, No. 4, Jul./Aug. 1984

[4] A. Kawamura, R. Hof, "Instantaneous Feedback Controller PWM Inverter with Adaptive



Ruben A. Chaer nació en Tacuarembó-Uruguay en 1962. Recibió el título de Ingeniero Electricista de la Universidad de la República Oriental del Uruguay (UROU) en 1990. Desde 1988 trabaja en el Instituto de Ingeniería Eléctrica de la UROU,

desempeñando actualmente el cargo de Profesor Adjunto del Departamento de Potencia. Se ha especializado en el desarrollo de simuladores, siendo el autor de SIMEEP (Simulador de Máquinas Eléctricas y Electrónica de Potencia), SimLux (Simulador de instalaciones de alumbrado público) y

SimEnerg (Simulador de sistemas autónomos energía eléctrica). Su interés principal es el área de Electrónica de Potencia y la Automática Industrial.



Julio Pérez Aclé nació en Dolores Uruguay en 1964. Recibió el título de Ingeniero Electricista de la Universidad de la República Oriental del Uruguay en 1989. Desde 1988 trabaja en el Instituto de Ingeniería Eléctrica de la Universidad de la República siendo actualmente

Profesor Adjunto del Departamento de Control Electrónica Industrial. Se desempeñó como ingeniero en la Administración Nacional de Telecomunicaciones de Uruguay en el Area Proyectos Técnicos. Sus áreas de interés son Electrónica Digital y Control Industrial.