

ANALISIS COMPARATIVO DEL FILTRO TDL Y DEL FILTRO DE MALLA PARA ECUALIZACION ADAPTIVA

Ing. Omar Flores V.

MICRONEX

Ing. Erwin Barriga

Facultad de Ingeniería Eléctrica

Escuela Politécnica Nacional

RESUMEN

Se analiza el problema de la Interferencia Intersímbolo (ISI) para canales telefónicos en presencia de ruido gaussiano, la cual puede ser eliminada haciendo uso de la Ecualización Adaptiva y de los Filtros de Caída Senoidal Acoplados. Se analizan los algoritmos de los ecualizadores adaptivos denominados Filtro TDL (o Transversal) y Filtro de Malla. Se demuestra que la ortogonalización de los datos efectuada por el Filtro de Malla, conduce a aumentar la velocidad de convergencia de este algoritmo respecto del Filtro Transversal. En la parte final nos referimos brevemente a la implementación circuital de los ecualizadores.

ABSTRACT

The Intersymbol Interference (ISI) problem is analyzed for telephone channels in presence of additive gaussian noise. This Interference can be dropped out by using Adaptive Equalization and Raised Cosine Matched Filters. The algorithms of TDL ( or Transversal ) Filter and Lattice Filter are analyzed. It is shown that data orthogonalization carried out by Lattice Filters is instrumental in order to increase the convergence speed of this algorithm when compared with TDL Filters. Finally we discuss briefly the circuital implementation of equalizers.

I. EL CANAL TELEFONICO.

1.1 Modelo Matemático del Canal.

En el presente documento tratamos con sistemas de transmisión de datos por línea telefónica, los cuales usan moduladores-demoduladores (modems) para colocar el espectro de la señal en la porción útil del canal telefónico. La respuesta de frecuencia de dicho canal, en lo que respecta a distorsión de amplitud y distorsión de propagación, se muestra en la fig. 1. (Recomendación M.1025 del CCITT para Circuitos Internacionales Arrendados, libro Rojo).

Para el caso de Líneas Telefónicas Dedicadas, el CCITT recomienda una portadora de 1800 Hz. de modo que la distorsión sea mínima, por cuanto el espectro de la señal, en estas condiciones, está ubicado en el centro de las características del canal (ver la fig. 1). Estas distorsiones limitan la velocidad de transmisión por cuanto originan dispersión en los bits transmitidos, lo que ocasiona superposición entre bits adyacentes. Este tipo de distorsión es conocida como Interferencia Inter Símbolo (ISI).

Seguidamente mostramos en la fig. 2 el modelo matemático para transmisión por el canal telefónico, el cual usa modulación de fase e incluye ruido aditivo gaussiano.

La modulación BPSK (de Fase Binaria) actúa sobre la fase de la onda portadora, haciéndola variar entre 0° y 180°. La señal modulada se puede expresar como:

$$x(t) = \{a_t\} \cos(2\pi f_p t) \quad (1.1)$$

donde  $a_t = +1, -1$  es la secuencia binaria "si retorno a cero" (NRZ) que proporciona el cambio de fase mencionado a la portadora coseno, de

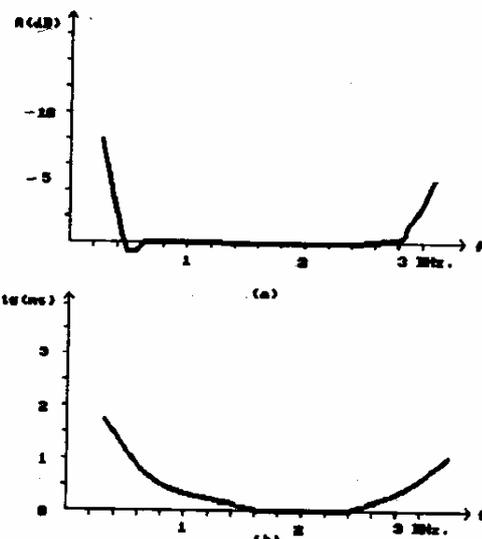
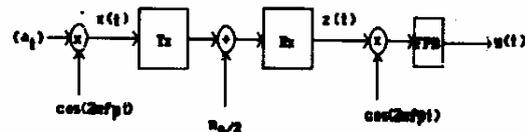


Figura 1 Distorsión de (a) Amplitud y de (b) Propagación en la Transmisión Digital. tg = retardo de propagación.



donde: FFB= Filtro Pasa Bajos.

Tx= Filtro de Transmisión

Rx= Filtro de Recepción

Figura 2 Diagrama de bloques del canal que usa modulación BPSK

frecuencia  $f_p$ . En la recepción, la multiplicación por  $\cos(2\pi f_p t)$  y el posterior filtrado con el FFB restaura la señal  $\{a_t\}$  a la banda base obteniéndose la señal  $y(t)$ , la cual no es más que:

$$y(t) = \{a_t\} * h(t) \quad (1.2)$$

en donde el asterisco representa el producto de convolución de  $\{a_t\}$  con la respuesta impulsiva del canal,  $h(t)$ .

Podemos representar (1.2) en el dominio de la frecuencia por:

$$Y(w) = A(w) H(w) \quad (1.3)$$

Nos interesa recuperar  $A(w)$ , lo que se puede lograr, con el ecualizador. El procedimiento para conseguir  $A(w)$  consiste en cancelar la función del canal  $H(w)$  con la función del ecualizador, la cual obviamente deberá ser  $1/H(w)$  y deberá estar en serie con el canal.

### 1.2 Filtros de caída senoidal o de Nyquist.

En lo que respecta a la configuración de los filtros, Nyquist (1928) observó que un canal limitado en banda a  $\pm f_n$  Hz, proporciona una respuesta impulsiva de la forma:

$$h(t) = 2f_n \text{sen}(2\pi f_n t) / (2\pi f_n t), \text{ la que anula la ISI para una velocidad de transmisión de } 1/T = 2f_n \text{ (} f_n = \text{frecuencia de Nyquist).}$$

En la práctica se elige filtros con un ancho de banda variable entre  $f_n$  y  $2f_n$ , dependiendo del parámetro  $\alpha$  = factor de exceso de banda, los cuales son realizables y disminuyen la sensibilidad al sincronismo a expensas de incrementar el ancho de banda (fig. 3). Se los llama filtros de caída senoidal y su expresión es:

$$H(f) = \begin{cases} 1 & 0 < f < f_n(1-\alpha) \\ 1/2 (1 - \text{sen}(\pi T / \alpha (f - f_n))) & f_n(1-\alpha) < f < f_n(1+\alpha) \\ 0 & f > f_n(1+\alpha) \end{cases} \quad (1.4)$$

en donde  $T=1/(2f_n)$ ;  $\alpha = w_x/w_n = f_x/f_n$ ; y  $w_x = w - w_n$ . Estas funciones son una generalización del filtro ideal de Nyquist que asegura ISI nula, por lo que en el dominio del tiempo presentan la función  $\text{sen } x / x$ , así,

$$h(t) = w_n / \pi \text{sen}(w_n t) / (w_n t) \cos(w_n t) / (1 - (2w_n t / \pi)^2) \quad (1.5)$$

Esta expresión contiene además el factor adicional  $\cos(w_n t) / (1 - (2w_n t / \pi)^2)$  que decrece con el aumento del tiempo y por tanto reduce las colas de los pulsos en forma considerable, de manera que cuando este tipo de pulsos se emplean en la

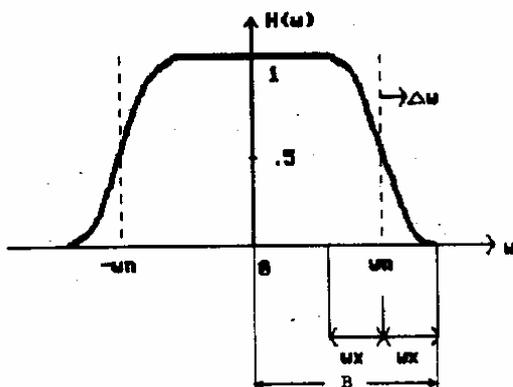


Figura 3 Espectro de caída senoidal

transmisión digital, son relativamente insensibles a las variaciones en la sincronización. El factor  $\alpha$  está entre 0, caso del filtro pasabajos ideal y 1, caso del coseno alzado [2].

De lo visto se puede colegir que el ancho de banda  $B$  está relacionado con el exceso de banda  $\alpha$  a través de:

$$B = f_n (1+\alpha) = 1/2T * (1+\alpha). \quad (1.6)$$

También, con  $B$  especificado, el número de pulsos por seg. que pueden transmitirse está dado por

$$1/T = 2B/(1+\alpha). \quad (1.7)$$

Por ej. supóngase que el ancho de banda permisible es de 2.4 KHz (para canales telefónicos) o en forma equivalente,  $B=1.2$  KHz en banda base. La máxima velocidad de pulsos en este canal (si se usa modulación BPSK) es entonces de  $2B=2400$  pulsos por seg., y si se usa el espectro del coseno alzado ( $\alpha=1$ ), la cifra se reduce a 1200 pulsos por seg.

### 1.3 Filtros Acoplados.

Seguidamente mostramos las funciones de transferencia de los filtros de Tx y Rx, elegidas de modo de maximizar la relación voltaje de señal a voltaje de ruido (SNR = signal to noise ratio) dada por  $A / \sigma$ . El proceso de maximización [3] conduce a las siguientes funciones de transferencia de los filtros de recepción y de transmisión:

$$R_x = \sqrt{1/2 [1 - \text{sen}(\pi T / \alpha (f - f_n))]} \quad (1.8)$$

$$T_x = (\pi T) / \text{sen}(\pi T) * \sqrt{1/2 [1 - \text{sen}(\pi T / \alpha (f - f_n))]} \quad (1.9)$$

### 1.4 Análisis del Ruido Gaussiano.

Para la simulación hemos usado la ecuac. (1.10), la cual relaciona el voltaje de ruido Gaussiano  $\sigma$  con la relación energía por bitio transmitido ( $E$ ) a la densidad del ruido ( $N_0/2$ ),  $\text{SNR} = 2 E_b / (N_0) [3]$ .

$$\sigma = \sqrt{1 / (\text{SNR})} \quad (1.10)$$

La recomendación M.1025 del CCITT, libro rojo, establece que el límite provisional de SNR para circuitos arrendados para distancias superiores a 10000 km es de -36dBm0p, que corresponde a 36 dB [3]. Por esta razón, usaremos un valor de 36 dB en las corridas del programa.

## II. ECUALIZADORES ADAPTIVOS.

### 2.1 El Filtro TDL.

En la figura 4. se muestra un Filtro TDL con 3 taps.

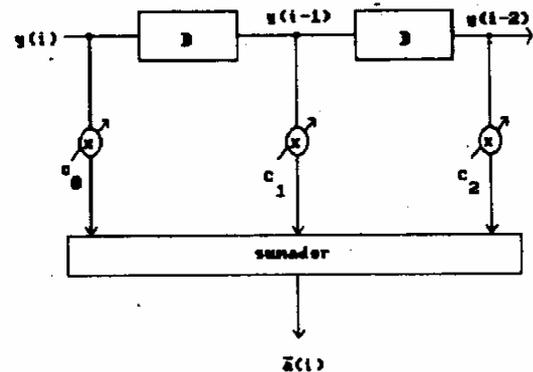


Figura 4 Filtro TDL de 3 taps.

La señal  $y(i)$  a la entrada del Filtro TDL es muestreada sincrónicamente cada  $T$  seg. La muestra almacenada en cada registro  $D$  (que retarda 1 unidad de tiempo a la señal) es multiplicada por la ganancia del tap correspondiente a dicho registro y se forma la suma de los productos de todos los taps para dar un estimado del símbolo de información deseado  $\hat{a}_1$ .

$$\hat{a}_1 = \sum_{j=0}^{N-1} c_j y(i-j) = C^T Y \quad (2.1)$$

donde  $C^T = [c_0 \ c_1 \ \dots \ c_{N-1}]$ ;  $Y^T = [y_1 \ y_{1-1} \ \dots \ y_{1-N+1}]$

A continuación se derivan las ecuaciones de las ganancias de los taps que conducen al mínimo MSE (error cuadrático medio). El filtro TDL descrito forma un estimado del símbolo recibido en cada intervalo de señalización. Nos interesa el símbolo deseado  $a_1$ . El MSE entre el símbolo deseado  $a_1$  y el estimado  $\hat{a}_1$  es:

$$\epsilon_1 = E |e_1|^2 = E |a_1 - \hat{a}_1|^2 \quad (2.2)$$

donde  $E$  da cuenta de la esperanza matemática o valor esperado. De (2.1) y (2.2):

$$\epsilon_1 = E \left| a_1 - \sum_{j=0}^{N-1} c_j y(i-j) \right|^2 \quad (2.2.a)$$

El método del error medio cuadrático proporciona los coeficientes  $c_i$  óptimos derivando el error medio cuadrático  $\epsilon$  con respecto a los coeficientes  $c_i$ .

$$\frac{\partial \epsilon_1}{\partial c_n} = -2 E \left[ \left( a_1 - \sum_{j=0}^{N-1} c_j y(i-j) \right) y(i-n) \right] = 0 \quad (2.2.b)$$

$$E \left[ \left( a_1 - \sum_{j=0}^{N-1} c_j y(i-j) \right) y(i-n) \right] = 0 \quad (2.3)$$

A partir de (2.3) tenemos:

$$E |a_1 y(i-n)| = E \left| y(i-n) \sum_{j=0}^{N-1} c_j y(i-j) \right| \quad (2.4)$$

De igual manera, si derivamos para  $n=0, \dots, N-1$ , obtendremos el número de ecuaciones necesario para formar un sistema único de ecuaciones. Con la notación matricial-vectorial introducida en la ecuación (2.1), y para cualquier  $i$ ,

$$E |A Y^T(i)| = E |Y^T(i) C^{T_{opt}} Y(i)| \quad (2.5)$$

Asumiendo que el vector de coeficientes  $C^T$  es no correlacionado con el vector de la señal  $Y(i)$ , y que es óptimo por haber minimizado el error en el sentido del MSE,

$$E |A Y^T(i)| = C^{T_{opt}} E |Y(i) Y^T(i)| \quad (2.6)$$

Los términos de expectación de (2.6) los definimos de la siguiente forma:

$$P = E |A Y(i)| = \text{correlación cruzada entre la señal deseada al tiempo } i \text{ y el vector de señales } y(i).$$

$$R = E |Y(i) Y^T(i)| = \text{matriz de autocorrelación de las muestras de entrada } y(i)$$

Con lo que la ecuación (2.6) se puede escribir

$$P^T = C^{T_{opt}} R \quad (2.7)$$

de donde,

$$C^{T_{opt}} = R^{-1} P^T \quad (2.8)$$

El set de  $N$  ganancias de los taps que minimizan el MSE se puede resolver a partir de (2.8), invirtiendo la matriz de covarianza  $R$ . Sin embargo, la inversión directa de una matriz es un proceso muy largo. En su lugar usaremos un proceso iterativo [3]. Inicialmente uno empieza eligiendo valores para el conjunto  $C$  de ganancias de los taps, en la etapa  $n$ . Esta elección inicial de las ganancias de los taps corresponde a algún punto  $i$  en la superficie cuadrática de  $\epsilon$  (ec. 2.2), en el espacio  $N$  dimensional de las ganancias de los taps. El conjunto  $N$  de componentes  $\partial \epsilon_1 / \partial c_n$  del gradiente es calculado en el punto  $i$  en la superficie del MSE  $\epsilon$ , y cada ganancia de los taps es cambiada en la dirección contraria al correspondiente componente de gradiente, de modo de bajar por la superficie hiperparaboidal hacia el mínimo absoluto. De esta forma, los sucesivos valores son obtenidos de acuerdo a la relación:

$$c(n, i+1) = c(n, i) - \mu / 2 \frac{\partial \epsilon_1}{\partial c_n} \quad (2.9)$$

Usando (2.2.b) en (2.9) tenemos,

$$c(n, i+1) = c(n, i) + \mu E [e(i) y(i-n)] \quad (2.10)$$

con  $n = 0, \dots, N-1$

donde  $c(n, i)$  es el valor de la ganancia del  $n$ -ésimo tap en la  $i$ -ésima iteración.  $y(i-n)$  es la muestra de señal más ruido almacenada en el  $n$ -ésimo tap del filtro TDL, y  $\mu$  es un número positivo que asegura la convergencia del procedimiento iterativo. En [3] se halla  $\mu \approx 0.2 / (\# \text{ de coeficientes})$ .

La dificultad con el método radica en la falta de conocimiento de los valores de las correlaciones cruzadas:

$E [e(i) y(i-j)]$ . Para superar esta dificultad se pueden usar estimados ruidosos de las correlaciones cruzadas [3], con lo que las ganancias son ajustadas de acuerdo a la relación:

$$c(n, i+1) = c(n, i) + \mu [e(i) y(i-n)], \quad (2.11)$$

para  $n = 0, \dots, N-1$

La ecuación (2.11) es la ecuación de actualización de las ganancias de los taps y es la base del algoritmo usado en la simulación, mismo que se lo muestra en la referencia [3].

Especial importancia reviste en el presente análisis el determinar la expresión para el tiempo de convergencia del algoritmo del Filtro TDL, de modo de poder compararlo con el Filtro de Malla. Se puede demostrar [3] que el tiempo de convergencia del algoritmo del Filtro TDL viene dado por la relación del máximo valor propio de la matriz de covarianza dividido para el mínimo valor propio (en la sección 3.4 se indica cómo se forma la matriz de covarianza  $R$ ):

$$\tau = \lambda_{\max} / 2\lambda_{\min} \quad (2.12)$$

De esto se concluye que para mejorar la velocidad de convergencia del algoritmo se debe tratar de que todos los valores propios de la matriz  $R$  sean iguales, lo cual se puede lograr mediante la ortogonalización de las señales de entrada a los taps del ecualizador [4].

## 2.2 El Filtro de Malla.

El problema de ecualización que estamos tratando puede ser visualizado como una regresión lineal múltiple en donde los coeficientes se ajustan usando el criterio del mínimo error cuadrático [5]. Lo que hemos afirmado se puede establecer matemáticamente diciendo que la muestra recibida  $y(i)$  puede ser aproximada por un sumatorio de las muestras anteriores, en donde existirá un cierto error que llamaremos  $f(n,i)$ . El parámetro  $n$  es necesario puesto que denota el orden o número de términos que consideraremos en la aproximación:

$$f(n,i) = y(i) + a_1 y(i-1) + \dots + a_n y(i-n) \quad (2.13)$$

Además, en el caso del Filtro de Malla es necesario definir un error inverso  $r$ , el cual predice  $y(i-n-1)$  a partir de las mismas muestras  $y(i-1), \dots, y(i-n)$ , donde  $y(i-n-1)$  es el valor de  $y(i)$  que abandona el filtro, ya que este sólo tiene 1 taps.

$$r(n,i-1) = y(i-n-1) + c_1 y(i-n) + \dots + c_n y(i-1) \quad (2.14)$$

Los errores directo y reverso pueden ser obtenidos en forma iterativa, lo cual se ve de la fig. 5, y son:

$$f(n+1,i) = f(n,i) - kb(n+1,i) r(n,i-1) \quad (2.15)$$

$$r(n+1,i) = r(n,i-1) - kf(n+1,i) f(n,i) \quad (2.16)$$

Las ecuaciones para el cálculo de los coeficientes de reflexión las damos a continuación [ref. 3]:

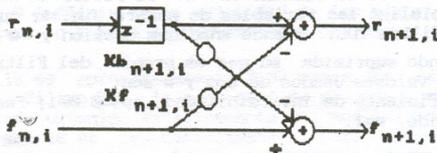


Figura 5 Parte tipo "regresión lineal" del Filtro de Malla.

$$kf(n+1) = E(f(n,i)r(n,i-1)) / E(r(n,i-1))^2 \quad (2.17)$$

$$kb(n+1) = E(f(n,i)r(n,i-1)) / E(f(n,i))^2 \quad (2.18)$$

Juntando las ecuaciones (2.15), (2.16), (2.17) y (2.18), tenemos las actualizaciones de  $f$  y  $r$ :

$$f(n+1,i) = f(n,i) - E(f(n,i)r(n,i-1)) / E(r(n,i-1))^2 * r(n,i-1) \quad (2.19)$$

$$r(n+1,i) = r(n,i-1) - E(f(n,i)r(n,i-1)) / E(f(n,i))^2 * f(n,i) \quad (2.20)$$

que nos dicen que los errores directo e inverso se obtienen a partir de un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt [3], lo que fue comprobado en la simulación, en donde el producto interno del error inverso  $r(n,i)$  consigo mismo demuestra que el filtro ha ortogonalizado  $r(n,i)$  a partir del proceso no ortogonal  $y(i)$  y del proceso ortogonal conjunto  $f(n,i)$ :

$[r(n,i), r(m,i)] \approx 1$  para  $n = m$ ; y es igual a 0 en otro caso.

A continuación presentamos el resto de ecuaciones de actualización del algoritmo del Filtro de Malla [3]. Las ecuaciones de actualización, en el orden, de la energía de error directa y de la energía reversa, son:

$$sf(n+1,i) = sf(n,i) - p^2(n+1,i) / sb(n,i-1) \quad (2.21)$$

$$sb(n+1,i) = sb(n,i-1) - p^2(n+1,i) / sf(n,i) \quad (2.22)$$

Nota: la energía del error corresponde a la covarianza del error  $sf(i) = E[n(i)n(i)] \approx 0$  si  $i \neq j$ ; y cero para  $i(j)$ .

Las ecuaciones de actualización del error directo y del coeficiente reverso de reflexión son:

$$f(n+1,i) = f(n,i) - kb(n+1,i) r(n,i-1) \quad (2.23)$$

$$kb(n+1,i) = p(n+1,i) / sb(n,i-1) \quad (2.24)$$

y las ecuaciones de actualización del error reverso y del coeficiente directo de reflexión son:

$$r(n+1,i) = r(n,i-1) - kf(n+1,i) f(n,i) \quad (2.25)$$

$$kf(n+1,i) = p(n+1,i) / sf(n,i) \quad (2.26)$$

Para la actualización del parámetro probabilístico  $g$ , el cual da cuenta de cambios (de varianzas y media) en el proceso aleatorio [6], tenemos:

$$g(n+1,i) = g(n,i) + r^2(n+1,i) / sb(n+1,i) \quad (2.27)$$

Las ecuaciones de actualización de la energía de error directo y reverso en el tiempo son,

$$sf(n,i+1) = sf(n,i) + f^2(n,i+1) / (1-g(n-1,i)) \quad (2.28)$$

$$sb(n,i+1) = sb(n,i) + r^2(n,i+1) / (1-g(n-1,i+1)) \quad (2.29)$$

Para actualizar los coeficientes de reflexión recursivamente, se precisa la actualización de  $p$ .

$$p(n+1,i+1) = p(n+1,i) + r(n,i) f(n,i+1) / (1-g(n-1,i)) \quad (2.30)$$

En la siguiente sección nos referiremos a los llamados procesos conjuntos, a los cuales pertenece el Filtro de Malla en la forma en que se lo usa para ecualización.

## 2.3 El Filtro de Malla para procesos conjuntos, específico para la ecualización.

El proceso de la ecualización requiere el comparar la señal ortogonal  $r(n,i)$  con la señal de referencia almacenada ó con la señal de referencia realimentada (en el período de autoajuste). Este tipo de procesos que requieren de dos señales son conocidos en la literatura especializada como **procesos conjuntos**. Para el efecto debe definirse un nuevo error de predicción que incluye muestras de ambos procesos. Al error lo hemos llamado  $c(n,i)$ , lo cual se ve de inmediato de la fig. 6.

$$c(N,i) = b_i - \sum_{n=0}^{N-1} K^c(n+1) r(n,i) \quad (2.31)$$

Los coeficientes  $K^c(n)$  que minimizan  $c(N,i)^2$  son,

$$K^c(n+1) = E(c(n,i)r(n,i-1)) / E(r(n,i-1))^2 \quad (2.32)$$

Además, se tiene de (2.31),

$$c(n+1,i) = c(n,i) - K^c(n+1) r(n,i-1) \quad (2.33)$$

El coeficiente  $p^c$  asociado a  $K^c$  se puede obtener por analogía con (2.30),

$$p^c(n+1,i+1) = p^c(n+1,i) + c(n,i+1) r(n,i+1) / (1-g(n-1,i)) \quad (2.34)$$

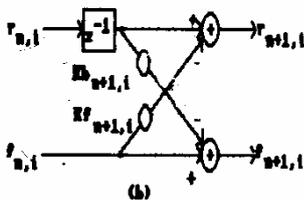
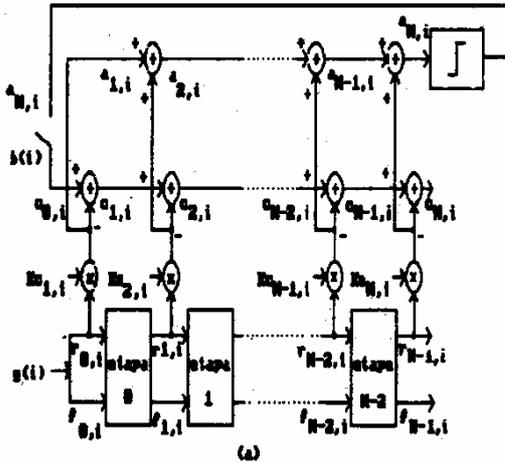


Figura 6 El Filtro de Malla: (a) Estructura general, (b) Etapa n-ésima.

en la cual tanto  $c$  como  $r$  son tomados al mismo tiempo, lo cual difiere de (2.30) puesto que  $r$  se obtiene de  $f$  a partir de un elemento de retardo, lo que se ve de la fig. 6. Finalmente, de la figura se ve que la señal de realimentación en el periodo de autoajuste,  $a(N,i)$ , se obtiene como un sumatorio a partir de las salidas de los  $K$ , lo cual da,

$$a(n+1,i) = a(n,i) + K^o(n+1,i)r(n,i) \quad (2.35)$$

Esta es en definitiva la obtención de las ecuaciones de actualización para el proceso conjunto denominado Filtro de Malla.

### III. RESULTADOS DE LA SIMULACION PARA TRANSMISION CON ECUALIZACION Y ANALISIS COMPARATIVO.

#### 3.1 Resultados de la Ecuación con el Filtro TDL.

Los resultados obtenidos contemplaron la siguiente inicialización de las variables: semilla (para secuencias aleatorias),  $sem=50$ ; velocidad de modulación=1400 bits/s; exceso de ancho de banda,  $\alpha=0.6$ ; frecuencia de portadora,  $f_p=1800$ ; # de bits tratados,  $bits=1024$ ; # de coeficientes=20; instante de decisión (se refiere a la muestra elegida para recuperar la señal de entre las ocho muestras en que hemos dividido a cada bit enviado),  $decis=4$ ; coeficiente de convergencia,  $\mu=0.01$ ; relación señal a ruido,  $sn=36$  dB.

#### 3.2 Convergencia de los coeficientes del Filtro TDL.

La figura 7 nos muestra cómo se produce la convergencia de los taps del ecualizador.

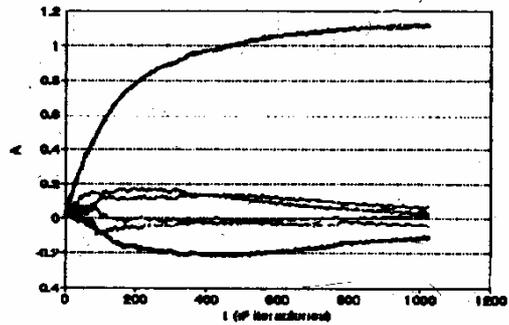


Figura 7 Convergencia de los coeficientes del Filtro TDL para una velocidad de 1400 bauds y  $\mu=0.01$ . A=Amplitud de los coeficientes; t=# de iteraciones.

Es importante anotar que se observa la convergencia del algoritmo (definida como el crecimiento del coeficiente principal  $h_i$  del 10% al 90%, [1]) en alrededor de 500 iteraciones, lo que será comparado con el resultado obtenido con el Filtro de Malla. Se debe consignar el hecho de que para iniciar la simulación se encerró todos los coeficientes.

#### 3.3 Resultados de la Ecuación con el Filtro de Malla.

Para la simulación con el Filtro de Malla se inicializó las variables de manera similar que para el Filtro TDL, siendo añadidas  $\epsilon$  y  $w$  [3], y siendo suprimida su que es propia del Filtro TDL. Los valores usados de  $\epsilon$  y  $w$  son: coeficiente de inversibilidad,  $\epsilon=0.001$ ; factor de olvido,  $w=1$ .

#### 3.4 Convergencia de los coeficientes del Filtro de Malla.

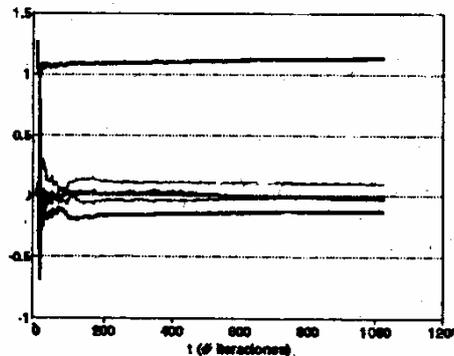


Figura 8 Convergencia de los coeficientes del Filtro de Malla. A=Amplitud de los Coeficientes; t=# de Iteraciones.

En la figura 8 se ve que el primer coeficiente adquiere el 90% de su valor de estado estable en, aproximadamente, 100 pulsos. Esto es mejor en casi 3 veces que los 500 del filtro TDL con  $\mu=0.01$ .

Seguidamente, para hallar la velocidad de convergencia basándonos en el error cuadrático, hemos corrido el programa COM\_CAD (nombre de nuestro software), con una secuencia determinística de 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 1 1 1 1 -1 -1 -1 -1 ..., a diferencia de las corridas anteriores, en donde las secuencias son pseudo aleatorias. Además, con el

objeto de que la convergencia se produzca para un número reducido de iteraciones hemos suprimido la distorsión del canal.

Nota: La Convergencia del Error Cuadrático no consiste de otra cosa que de tomar la diferencia entre el bit almacenado y el bit transmitido y elevarla al cuadrado. Es claro que se produce un error cada vez que el error cuadrático es mayor o igual a uno.

La corrida se realizó para la velocidad de 1400 b/s, con 4 coeficientes, tanto para el Filtro de Malla cuanto para el Filtro TDL y el gráfico 9 muestra la convergencia del error de los dos filtros.

Se puede notar de esta figura que se llega al 10% del error máximo en 30 iteraciones aproximadamente para el Filtro de Malla y en 100 para el Filtro TDL. De aquí resulta que el Filtro

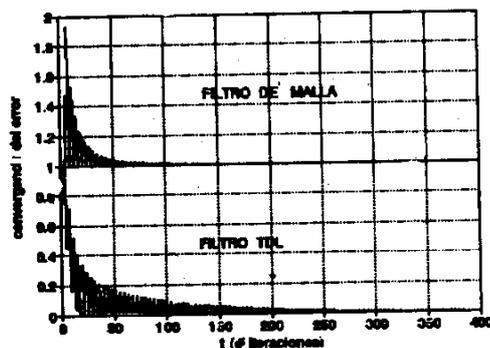


Figura 9 Análisis de la velocidad de los algoritmos adaptivos en base a la convergencia del error.

de Malla es aproximadamente 3.33 veces más rápido que el Filtro TDL, lo que está de acuerdo con el resultado obtenido anteriormente del análisis de la convergencia de los coeficientes. Para corroborar estas observaciones, hemos procedido a formar la matriz de covarianza para cada tipo de Filtro, tomando los valores correspondientes al "paso 3 de 4", según se estipula en la simulación (es decir que de los 1024 bits enviados hemos tomado la tercera secuencia de 256 bits, de las 4 posibles). En este "paso", de los 256 bits hemos tomado desde el 168 al 178, es decir en total 9. La matriz de datos (de error inverso) para el Filtro de Malla se forma de la siguiente manera, sea:

$$q_1^T = [r(0,i) \quad r(1,i) \quad r(2,i) \quad r(3,i)],$$

$$i=168,169,\dots,178.$$

$$Q = [q_{168} \quad q_{169} \quad q_{170} \quad \dots \quad q_{178}]$$

$$Q = \begin{bmatrix} .78 & .82 & 1.28 & .75 & -.78 & -.91 & -1.28 & -.75 & .78 \\ -1.22 & .19 & .11 & .82 & 1.22 & -1.9 & -.11 & -.82 & -1.22 \\ -.83 & -.94 & .84 & .86 & .83 & .94 & -.84 & -.86 & -.83 \\ .36 & -.25 & -.42 & .85 & -.36 & .25 & .42 & -.65 & .36 \end{bmatrix}$$

La matriz de covarianza R es

$$R = Q Q^T = \begin{bmatrix} 7.81 & -.82 & -.83 & .26 \\ -.82 & 5.9 & .84 & -.43 \\ -.83 & .84 & 2.8 & -.82 \\ .26 & -.43 & -.82 & 1.7 \end{bmatrix}$$

en donde se aprecia la simetría de la matriz. Por otra parte, debido a que los valores que están fuera de la diagonal principal son mucho menores que los de la diagonal, se concluye que el algoritmo del Filtro de Malla efectivamente ortogonaliza las señales, puesto que una medida de la ortogonalización es la diagonalización de la matriz de covarianza [4].

Hemos usado el Programa PC-MATLAB con el objeto de calcular los valores propios de la matriz

R. Los valores propios obtenidos fueron:  $\lambda = 8.21, 5.6, 2.6$  y  $1.85$ ; que son muy aproximadamente los valores de la diagonal principal de la matriz R, por lo que se puede afirmar que esta es una matriz diagonal. La velocidad de convergencia de este algoritmo viene dada por la ecuación

$$\tau = \lambda_{\max} / 2\lambda_{\min} \text{ (ec. 2.14); a partir de la que obtenemos}$$

$$\tau = 8.21 / (2 \cdot 1.85) = 2.49.$$

Para el Filtro TDL, en las mismas condiciones de velocidad y # de coeficientes, tenemos que la matriz R se forma a partir de

$$y_i^T = [y(i) \quad y(i+1) \quad y(i+2) \quad y(i+3)],$$

$$i=168,169,\dots,178.$$

$$Y = [y_{168} \quad y_{169} \quad y_{170} \quad \dots \quad y_{178}]$$

$$Y = \begin{bmatrix} .78 & .81 & 1.28 & .75 & -.78 & -.82 & -1.28 & -.75 & .78 \\ .81 & 1.28 & .75 & -.78 & -.91 & -1.28 & -.75 & .78 & .81 \\ 1.28 & .75 & -.78 & -.91 & -1.28 & -.75 & .78 & .81 & 1.28 \\ .75 & -.78 & -.91 & -1.28 & -.75 & .78 & .81 & 1.28 & .75 \end{bmatrix}$$

La matriz de covarianza R es

$$R = Y Y^T = \begin{bmatrix} 7.81 & 5.21 & .97 & -3.95 \\ 5.21 & 8.87 & 5.7 & .86 \\ .97 & 5.7 & 8.87 & 5.5 \\ -3.95 & .86 & 5.5 & 7.6 \end{bmatrix}$$

Y los valores propios son  $\lambda = 17.87, 13.64, .86$  y  $.82$ , lo que da una velocidad de convergencia de  $17.87 / (2 \cdot .82) = 10.44$ . Dividiendo  $\tau_{\text{TDL}} / \tau_{\text{Malla}} = 10.44 / 2.49 = 4.2$ . Con esto hemos comprobado que el análisis matemático proporciona una relación de velocidades de convergencia de aproximadamente 4 a 1, lo que está de acuerdo con los resultados obtenidos al analizar la convergencia de los coeficientes así como el error en estado estable. Por otra parte Honig, en la referencia [7], halla que la velocidad de convergencia del Filtro de Malla está entre 4 y 5 veces la del Filtro TDL, por lo que nuestros resultados corroboran dicho análisis.

En lo que respecta a ortogonalidad de las señales, de la matriz Q, formando el producto  $r(0,i) r(1,i)$  y sumando los valores obtenidos para las dos primeras filas cuando  $i = 168, \dots, 178$ ; se obtiene el valor de  $.82 / 9 \approx 0$  y tomando el producto punto de la primera fila consigo misma se obtiene aproximadamente 1. Igual resulta con las demás filas. No sucede lo mismo al realizar el producto punto de la primera fila de la matriz Y con la segunda fila. En este caso se obtiene

$$5.19 / 9 = .57 \neq 0. \text{ Con esto se demuestra que el Filtro de Malla ortogonaliza las señales de entrada, las cuales de por sí son no ortogonales como en el caso del Filtro TDL.}$$

### 3.5 Análisis comparativo de los Filtros TDL y de Malla.

A continuación procedemos a resumir las características más importantes de uno y otro filtro en forma comparativa.

1.- El Filtro TDL se caracteriza por su simplicidad, en tanto que el Filtro de Malla es más complejo en cuanto al algoritmo y al análisis matemático, pero esto determina un aumento en la velocidad de convergencia respecto del Filtro TDL.

2.- La entrada al Filtro TDL es la señal  $y(i)$ , la cual es no ortogonal, mientras que la entrada a la "parte tipo TDL" del Filtro de Malla la constituye la señal de error reverso  $r(n,i)$ , la cual es ortogonal. Esto determina que en el Filtro de Malla los valores propios de la matriz de covarianza sean iguales, lo que origina un aumento en la velocidad de convergencia.

3.- En las simulaciones llevadas a cabo hemos hallado que la velocidad de convergencia del Filtro de Malla es de aproximadamente 3 a 4 veces la del Filtro TDL. Honig ha hallado que el aumento en la velocidad de convergencia es de alrededor de 4 veces, por lo que nuestro resultado está dentro de un rango aceptable. También, experimentalmente se halló que el Filtro de Malla se demora alrededor de 4 veces en una corrida de 256 bits respecto de lo que se demora el Filtro TDL. De esta forma, la mejora en el número de bits necesarios para converger se paga con tiempo de computación.

#### IV. BREVE DISCUSION SOBRE LA IMPLEMENTACION CIRCUITAL DE LOS ECUALIZADORES ADAPTIVOS.

A continuación presentamos una posible implementación del Filtro TDL. En la fig. 10 se ve que existen dos registros de desplazamiento denotados por  $Y^T$  y  $C^T$ . En el primero ingresan los datos  $y(i)$  y en el segundo están almacenados los valores de los taps. Sea 2 el orden del Filtro TDL. Al entrar el dato  $y(2)$ , este desplaza a los datos  $y(1)$  y  $y(0)$  y a continuación, durante 3 periodos se efectúa la multiplicación de los taps  $C^T$  con las señales  $y(i)$ , las cuales se van desplazando y al mismo tiempo ingresan de nuevo al registro de desplazamiento por medio de la realimentación indicada. Se forma la suma de los productos  $c(j,i)$  y  $y(i)$  lo cual se almacena en  $S_1$ , y posteriormente se procede a actualizar los valores de los taps mediante la fórmula (2.13), lo cual se indica en el gráfico. Se ve también que la señal de error se forma entre la salida del sumador 1 y la señal almacenada  $a(i)$ . Esta señal de error es escalada  $\mu$  veces y multiplicada por  $y(i)$  de modo de

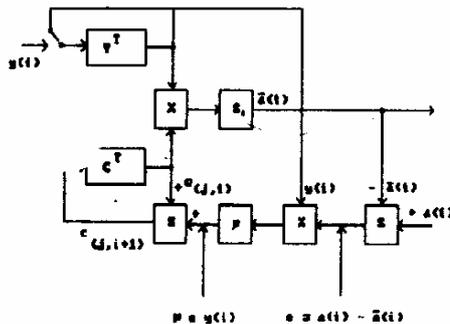


Figura 10 Diagrama de bloques de la implementación circuital de un Filtro TDL.

tener la actualización dada por (2.13).

En la actualidad la implementación circuital más usual consiste en usar memorias RAM en lugar de registros de desplazamiento, y usar un control del programa almacenado en memoria ROM para controlar las operaciones que se deben realizar con los datos de dichas memorias. Con esto se pueden construir los dos tipos de filtros analizados, y lo más común es que dicha fabricación se realice con tecnología VLSI, la cual disminuye considerablemente el tiempo de procesamiento.

#### V. CONCLUSION.

Para efectuar el análisis de la transmisión de datos a través de un canal telefónico hemos modelizado dicho canal con las recomendaciones del CCITT y se ha encontrado que la mejor configuración de los filtros transmisor y receptor es la de Filtros Acoplados de Caída Senoidal, los cuales simultáneamente minimizan el ruido gaussiano y la ISI. Uno de los resultados centrales del documento consiste en haber establecido que la velocidad de convergencia del algoritmo del Filtro TDL depende

de la relación del máximo valor propio al mínimo valor propio de la matriz de covarianza. Como otro resultado capital tenemos el haber podido demostrar que la ortogonalización de los datos de entrada al ecualizador de Malla determina que la matriz de covarianza sea diagonal, lo que aumenta la velocidad de convergencia. Finalmente, creemos que el mayor aporte ha sido el analizar y simular el algoritmo del Filtro de Malla, así como el haber podido incrementar la literatura en español con este tipo de ecualizador, el cual es más rápido que el Filtro TDL.

#### BIBLIOGRAFIA.

- [1] Schwartz, Mischa. Comunicación Digital. 3. Ed. Prentice Hall.
- [2] Feher, K. Digital Communications. 1983 Prentice Hall.
- [3] Flores, Omar. Análisis Comparativo del Filtro TDL y del Filtro de Malla para Ecualización Adaptiva. Tesis de Grado. EPN. Dic. 1992.
- [4] Gureshi, S. Adaptive Equalization. Proceedings of the IEEE. Sept. 1985.
- [5] Kay and Marple, Spectrum Analysis - A Modern Perspective. Proceedings of the IEEE. Nov 1981.
- [6] Turner. Recursive Least-Squares and Lattice Filter, en la obra de Cowan y Grant: Adaptive Filters. Mc. Graw-Hill. 1985.
- [7] Honig, M. Echo Cancellation of Voiceband Data Signals Using Recursive Least Squares and Stochastic Gradient Algorithms. IEEE Transactions on Communications, Jan. 1985.

#### BIOGRAFIAS

BARRIGA ALEMAN, ERWIN. Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones, graduado en la Escuela Politécnica Nacional en 1979. Actualmente se desempeña como Profesor Principal de la Facultad de Ingeniería Eléctrica en el Departamento de Electrónica y Telecomunicaciones. Ha realizado estudios de Postgrado en Computación e Informática en la Escuela Politécnica Nacional.



FLORES VILLAMIL, OMAR. Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones graduado en la Escuela Politécnica Nacional en 1992. Ha prestado sus servicios en QUIMING-CO CIA. LTDA. en el área de Diseño Digital de Comunicaciones por el lapso de un año. Actualmente trabaja en MICRONEX, en donde se encarga de la Planificación e Instalación y Mantenimiento de Sistemas de Comunicación. Sus áreas de interés son el Procesamiento Digital de Señales y la Planificación de Sistemas de Comunicación.

## XIV JORNADAS EN INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

**DECANO:**

*Ing. Nelson Díaz Moncayo*

**COORDINADOR GENERAL:**

*Ing. Ramiro Valenzuela Peñafiel*

**SECRETARIA:**

*Sra. Mariana de Coronel*

### **COMISION COORDINADORA**

Ing. Ramiro Valenzuela  
Dr. Claudio Cañizares  
Ing. Carlos Novillo

### **COMISION TECNICA**

Dr. Hugo Banda (Coord.)  
Ing. Paúl Ayora  
Ing. Erwin Barriga

### **COMISION DE TESORERIA**

Ing. Patricio Rosero (Coord.)  
Ing. Juan Carlos Rivera  
Tigo. Pedro Estrella

### **COMISION DE SECRETARIA**

Ing. Mario Barba (Coord.)  
Ing. Pablo Hidalgo  
Ing. Bolívar Ledesma  
Ing. Antonio Bayas  
Sr. Santiago Yepes  
Sra. Mariana de Coronel  
Sra. Marieta de Moreno  
Sra. Ximena de Vaca

### **COMISION DE ASUNTOS SOCIALES**

Dr. Luis Corrales (Coord.)  
Ing. Antonio Calderón  
Ing. Alfredo Maldonado

### **COMISION DE LOGISTICA**

Tlgo. Carlos Flores (Coord.)  
Sra. Ana de Heredia  
Sr. Carlos Herrera

### **COMISION DE RELADORES**

Ing. Marco Barragán (Coord.)  
Ing. Luis Barajas  
Ing. Tania Pérez  
Ing. Edwin Nieto  
Ing. Pablo Angulo  
Ing. Walter Brito

### **COMISION DE SUPLEMENTO**

Ing. Luis Pérez (Coord.)  
Ing. Walter Brito  
Ing. Alfredo Maldonado

---

---

**ESCUELA POLITECNICA NACIONAL**  
**FACULTAD DE INGENIERIA ELECTRICA**  
**Apartado: 17-01-2759**  
**Telfs.: (593-2)567 750 - 507 134/5**  
**Fax: (593-2)507 142 - 567 848**  
**Telex: 22650 - ESPONA**