

PROBLEMAS EN LA INTERPRETACION DE LA FFT

Emilio C. Acocella y Carlos J. Tierra

Resumen

La Transformada Rápida de Fourier (FFT) es una herramienta muy útil para diversas aplicaciones. Sin embargo, algunos aspectos relativos a la Transformada Discreta de Fourier (DFT) son ignorados, pudiendo en muchas ocasiones llevar a interpretaciones erróneas. El presente estudio trata de los problemas que pueden resultar del hecho que la DFT corresponde al muestreo de la Transformada de Fourier. Se presentan casos típicos en los que ocurre este problema y son propuestas soluciones para evitarlo o minimizarlo.

Abstract

The Fast Fourier Transform (FFT) is an useful tool for many application. Nevertheless, some problems concerning the Discrete Fourier Transform (DFT) are unknown by their users and misinterpretation can arise. This paper discusses problems that can emerge due to the fact of DFT is the sample of the Fourier Transform. Typical cases where this problem arises are showed and solution for reduce or avoid it are proposed.

I. Introducción

Además de la importancia de la Transformada de Fourier en diversas áreas de la Ingeniería, el desarrollo de las computadoras digitales y de los procesadores digitales de señales tuvieron como consecuencia el amplio empleo de su versión discreta, la Transformada Discreta de Fourier (DFT), que puede ser computada a través de algoritmos rápidos como la Transformada Rápida de Fourier (FFT). El uso de la DFT es muy frecuente en el análisis y proyecto de sistemas discretos, tales como sistemas de voz, de imagen y de radar. Con respecto a las señales discretas, los principios de la DFT son aplicables no solamente al análisis teórico, sino también constituyen la base para la construcción de equipos electrónicos como los analizadores de espectro. Sin embargo, algunos aspectos relativos a la DFT deben ser bien conocidos para evitar equívocos en la interpretación de los resultados que se obtienen.

La transformada de Fourier de una señal de tiempo discreto $x(n)$ es definida como $X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) \cdot e^{-j\omega n}$, $0 \leq k \leq N-1$, mientras la DFT es definida para una secuencia $y(n)$ de longitud finita N como $Y(k) = \sum_{n=0}^{N-1} y(n) \cdot e^{-j \frac{2\pi}{N} kn}$. Así,

se tiene que $Y(k) = Y(e^{j\omega}) \Big|_{\omega = \frac{2\pi}{N}k}$, es decir, la DFT se

constituye de muestras igualmente espaciadas de la transformada de Fourier.

Una primera clase de problemas asociados a la interpretación de la DFT es debida al muestreo de señales analógicas y al aliasing resultante de la conversión analógico-digital. Este efecto puede ser minimizado a niveles aceptables utilizándose filtros analógicos anti-aliasing selectivos, empleándose frecuencias de muestreo suficientemente más elevadas que la de Nyquist y considerándose el error de cuantización como un ruido en el modelo de la señal discreta adoptado [1].

Otro problema está asociado al hecho de que la DFT es aplicable solamente a señales de longitud finita. Por lo tanto, para señales de longitud infinita o excesivamente larga, es necesario emplear una ventana temporal lo que introduce distorsiones en el espectro de la señal. En general, esto es minimizado a niveles tolerables con respecto a la aplicación deseada por la selección del tipo y de la longitud de la ventana más adecuados [2]. Dos efectos indeseables pueden resultar de la aplicación de una ventana a la señal: la reducción de la resolución (Figura 1) y el "leakage" (Figura 2) [1][3]. En la Figura 1a se muestra la magnitud de la Transformada de Fourier de la secuencia

$$x_1(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{11}n\right), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

y en la Figura 1b de la secuencia

$$x_2(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{10}n\right), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

En la Figura 1c se observa la magnitud de la Transformada de Fourier de la suma de las dos secuencias y se puede observar que no es posible distinguir los dos espectros. En la Figura 2a se muestra la magnitud de la Transformada de Fourier de la secuencia

$$x_3(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{22}n\right), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

Correspondencia a Carlos Julio Tierra, Vicerrectorado de Investigaciones y Desarrollo de la ESPE - Av. El Progreso s/n - Sangolquí - Ecuador - Apartado 231-B - Correo Electrónico: carjulio@espe.edu.ec - Fax: 861-393

y en la Figura 2b la magnitud de la Transformada de Fourier de la suma de las secuencias $x_1(n)$ y $x_3(n)$. En este caso, se puede distinguir las dos frecuencias, sin embargo, la superposición no lineal de la magnitud de los espectros modifica el valor de pico de cada componente. Estos efectos deben ser considerados para evitar interpretaciones equivocadas de los resultados de la DFT.

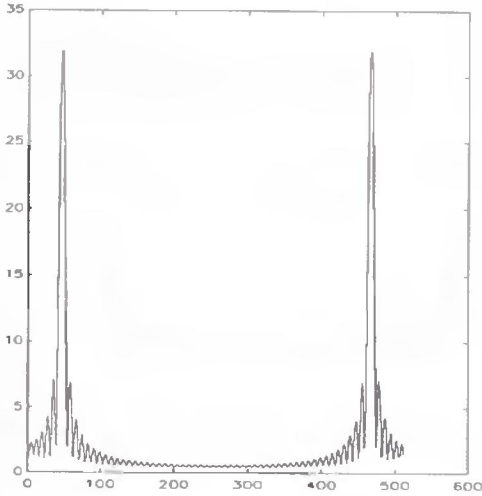


Figura 1a: Magnitud de la Transformada de Fourier de la secuencia $x_1(n)$

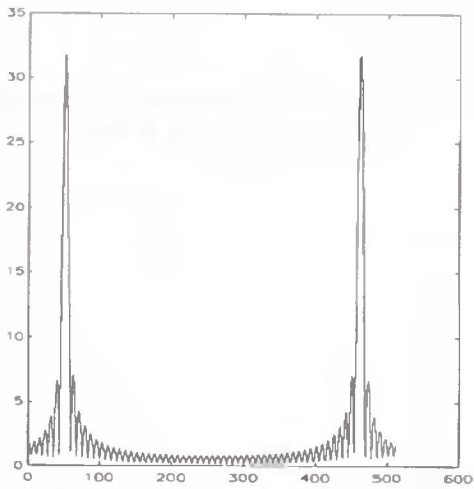


Figura 1b: Magnitud de la Transformada de Fourier de la secuencia $x_2(n)$

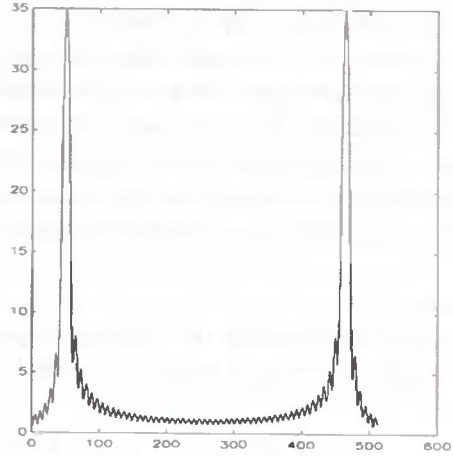


Figura 1c: Magnitud de la Transformada de Fourier de la suma de las secuencias $x_1(n)$ y $x_2(n)$

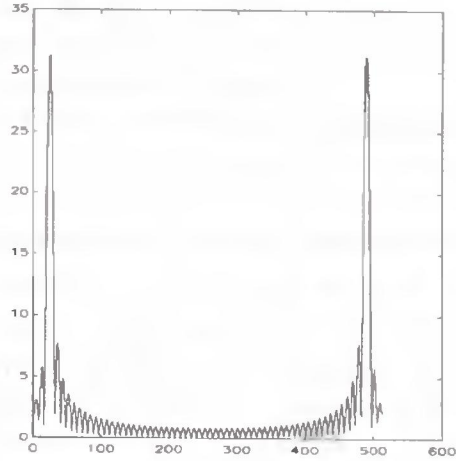


Figura 2a: Magnitud de la Transformada de Fourier de la secuencia $x_3(n)$

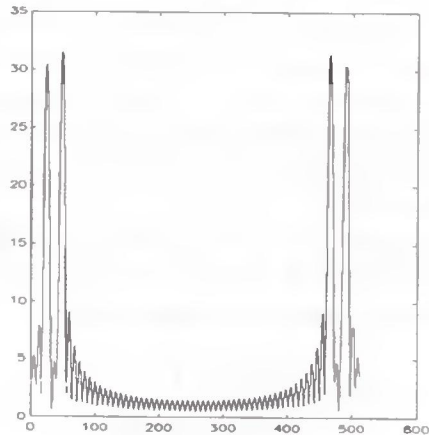


Figura 2b: Magnitud de la Transformada de Fourier de la suma de las secuencias $x_1(n)$ y $x_3(n)$

Por fin, un último problema en la utilización de la DFT resulta de que la misma corresponde al muestreo de la transformada de Fourier de la señal y, en consecuencia, la selección del número apropiado de muestras empleadas en el cálculo de la DFT es fundamental para que las componentes espectrales significativas sean representadas adecuadamente. En el presente trabajo es analizado este problema y se proponen algunas soluciones.

II. Métodos

El problema resultante del muestreo espectral puede ser mejor entendido a través del ejemplo que sigue. Sea:

$$x(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{16}n\right), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

La magnitud de la transformada de Fourier $X(e^{j\omega})$ se presenta en la Figura 3 y de la DFT $X(k)$ con 64 puntos en la Figura 4. En este caso, el número de puntos $N=64$ es múltiple de $2\pi/\omega_0$, siendo ω_0 la frecuencia angular de la sinusoidal.

Se puede notar que en $k=4$ y $k=60$, que corresponden a $\omega_0 = 2\pi/16 \text{ rad/muestra}$ y $\hat{\omega}_0 = 30\pi/16 \text{ rad/muestra}$, los valores de $X(k)$ y $X(e^{j\omega})$ son idénticos, pero en todos los demás valores de ω en los cuales $X(e^{j\omega})$ es distinto de cero, $X(k)$ es cero. Esto puede llevar a conclusiones equivocadas respecto al contenido espectral de la secuencia, sobretudo en los entornos de $\omega_0 = 2\pi/16$ y $\hat{\omega}_0 = 30\pi/16$. En este caso en que muestras de la DFT coinciden con las frecuencias de mayor amplitud de la señal, el problema puede ser fácilmente minimizado a través del padding de la secuencia y la determinación de la DFT con un número mayor de puntos que sea múltiple de $2\pi/\omega_0$. Las Figuras 5 y 6 presentan la magnitud de la DFT de la secuencia determinada con 128 y 256 puntos, respectivamente. Se puede observar que cuanto mayor es el número de puntos, más fidedigna es la representación de la transformada de Fourier a través de la DFT.

Un caso más crítico ocurre cuando N , el número de puntos de la DFT, es tal que $N\omega_0/2\pi$ no es un entero, como en el ejemplo siguiente:

$$x(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{17}n\right), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

A través de las Figuras 7 y 8 se puede percibir que, en este caso, con una DFT de 64 puntos, los máximos de la magnitud de $X(e^{j\omega})$ en

$\omega_0 = 2\pi/17$ y $\hat{\omega}_0 = 32\pi/17$ no son percibidos claramente a través de la magnitud de $X(k)$, ya que

$$\frac{N\omega_0}{2\pi} = \frac{64 \cdot \frac{2\pi}{17}}{2\pi} = \frac{64}{17}$$

no es un entero. La solución a

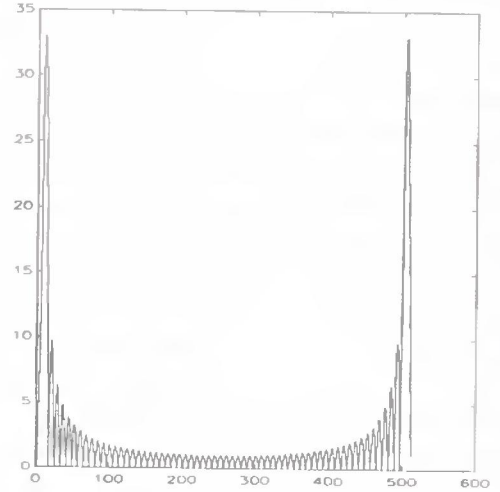


Figura 3: Magnitud de la Transformada de Fourier de la secuencia $x(n)$

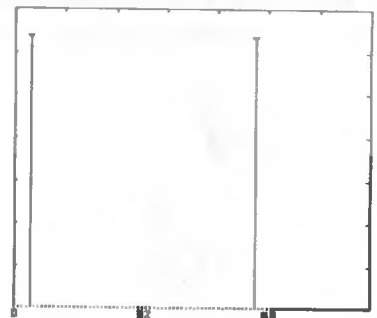


Figura 4: Magnitud de la Transformada Discreta de Fourier de la secuencia $x(n)$ con 64 puntos

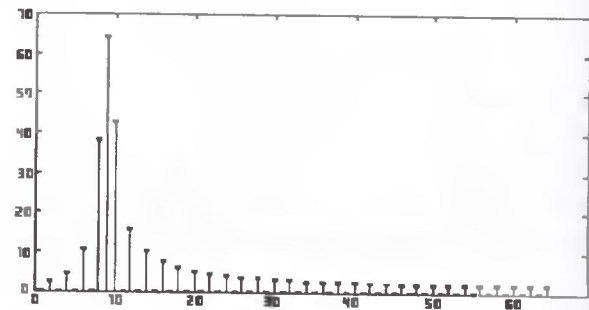


Figura 5: Magnitud de la Transformada Discreta de Fourier de la secuencia $x(n)$ con 128 puntos

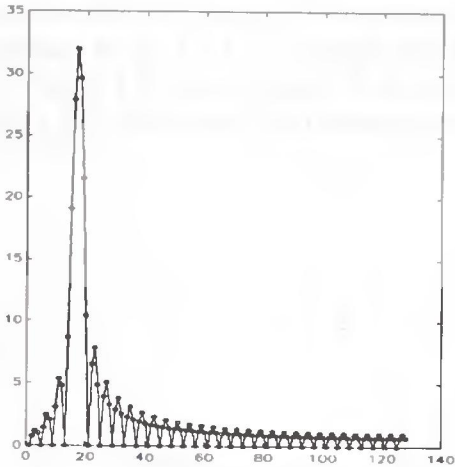


Figura 6: Magnitud de la DFT de la secuencia $x(n)$ con 256 puntos y su envolvente

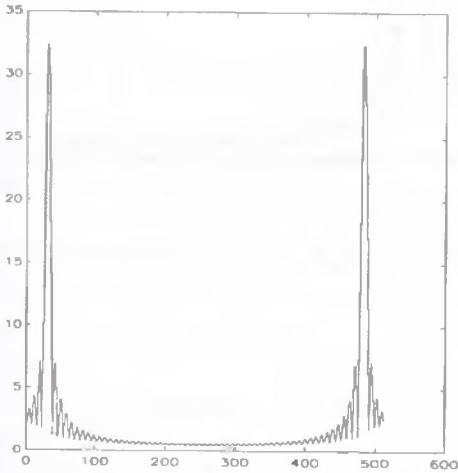


Figura 7: Transformada de Fourier de $x(n)$

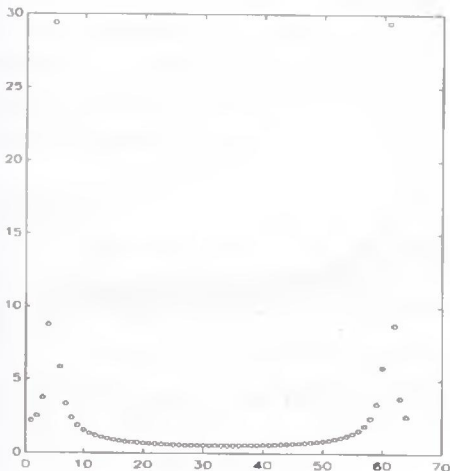


Figura 8: DFT de $x(n)$ con 64 puntos

este problema está en determinar N de tal manera que sea mayor que la longitud de la secuencia y que permita la representación más fidedigna posible de las componentes espectrales de interés. Cuanto mayor el valor de N , mejor la representación en frecuencia a través de la DFT. Sin embargo, limitaciones computacionales prácticas como tiempo de computación y memoria imponen un límite máximo al valor de N . Por lo tanto, se debe buscar un equilibrio entre las dos imposiciones. Cuando se conoce las frecuencias de interés ω_i , se puede obtener el N óptimo a través de la minimización del error $\left| \frac{2\pi}{N} k_i - \omega_i \right|$, utilizándose el mínimo N que produzca un error menor que el máximo establecido.

III. Resultados

Como primer caso práctico, sea $x[n]$ como en el segundo ejemplo:

$$x(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{17}n\right), & 0 \leq n \leq 6 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

con frecuencia de interés $\omega_1 = \frac{2\pi}{17} \text{ rad / muestra}$

Además, consideremos las siguientes restricciones:

- algoritmo Raiz-2, es decir, N es una potencia de 2;
- error máximo de $e_{\max} = 2 \cdot 10^{-3} \text{ rad / muestra}$.

Para $N=64$, el coeficiente de la DFT más cercano de $64/17$ es $k_1 = 4$. En este caso, el error será:

$$\text{error} = \left| \frac{2\pi}{64} \cdot 4 - \frac{2\pi}{17} \right| = 0.023 > e_{\max}$$

Para $N=128$, se obtiene $k_1 = 8$ y

$$\text{error} = \left| \frac{2\pi}{128} \cdot 8 - \frac{2\pi}{17} \right| = 0.023 > e_{\max}$$

Para $N=256$, $k_1 = 15$ y

$$\text{error} = \left| \frac{2\pi}{256} \cdot 15 - \frac{2\pi}{17} \right| = 1.444 \cdot 10^{-3} < e_{\max}$$

Por lo tanto, se debe escoger $N=256$. Las Figuras 7, 8, 9 y 10 muestran las magnitudes de la Transformada de Fourier de $x[n]$ y de las respectivas DFT con $N=64, 128$ y 256 .

Considérese en seguida $x[n]$ como la suma de dos sinusoidales:

$$x(n) = \begin{cases} \cos\left(\frac{2\pi}{17}n\right) + \cos\left(\frac{2\pi}{33}n\right), & 0 \leq n \leq 63 \\ 0, & \text{caso contrario} \end{cases}$$

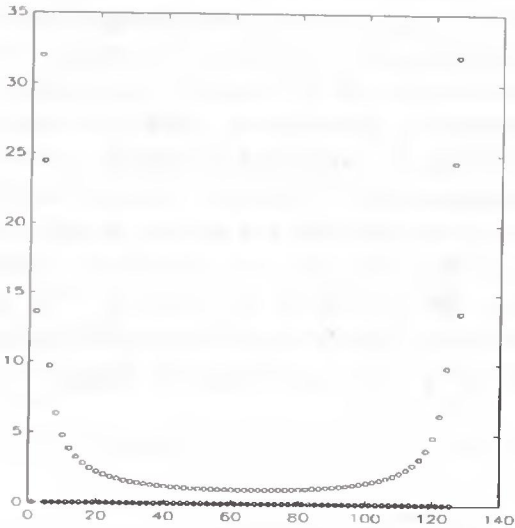


Figura 9: DFT de $x(n)$ con 128 puntos

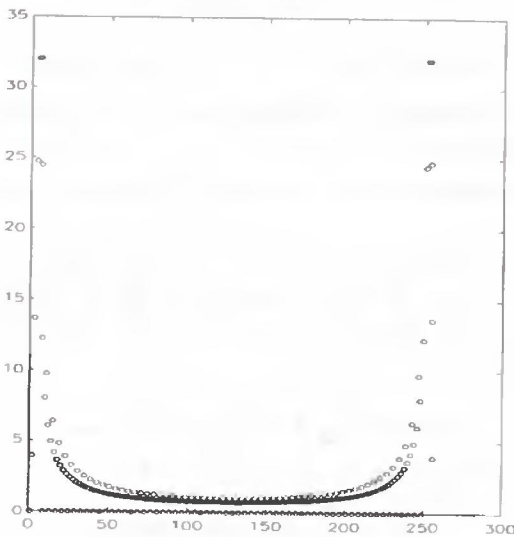


Figura 10: DFT de $x(n)$ con 256 puntos

Las frecuencias de interés son $\omega_1 = \frac{2\pi}{17}$ rad / muestra y $\omega_2 = \frac{2\pi}{33}$ rad / muestra. Para ω_1 se tiene que $N \geq 256$. Con respecto a ω_2 , para $N=256$, el coeficiente más próximo de $256/33$ es $k_2 = 8$. Entonces

$$error = \left| \frac{2\pi}{256} \cdot 8 - \frac{2\pi}{33} \right| = 5950 \cdot 10^{-3} > e_{max}$$

Para $N=512$, $k_2 = 16$ y

$$error = \left| \frac{2\pi}{512} \cdot 16 - \frac{2\pi}{33} \right| = 5950 \cdot 10^{-3} > e_{max}$$

Con $N=1024$, se tiene $k_2 = 31$ y

$$error = \left| \frac{2\pi}{1024} \cdot 31 - \frac{2\pi}{33} \right| = 1859 \cdot 10^{-3} < e_{max}$$

De esta forma, el valor más adecuado para N es 1024. Las Figuras 11, 12, 13 y 14 muestran las magnitudes de la Transformada de Fourier de $x[n]$ y de las respectivas DFT con $N=256, 512$ y 1024.

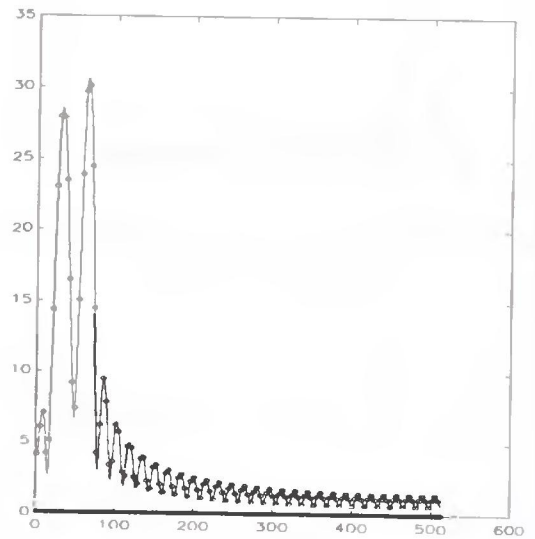


Figura 11: DFT de $x(n)$ con 256 puntos y su envolvente

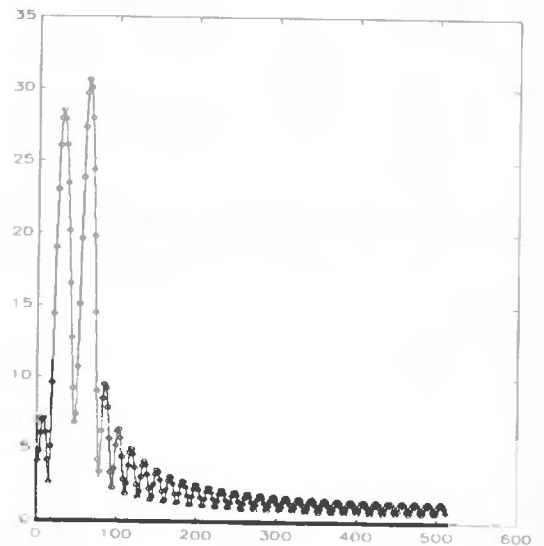


Figura 12: DFT de $x(n)$ con 512 puntos y su envolvente

[3] M. Parry, "FFT interpretation extends far beyond the magnitude plot", *Personal Engineering*, pp.67-73, May 1994.

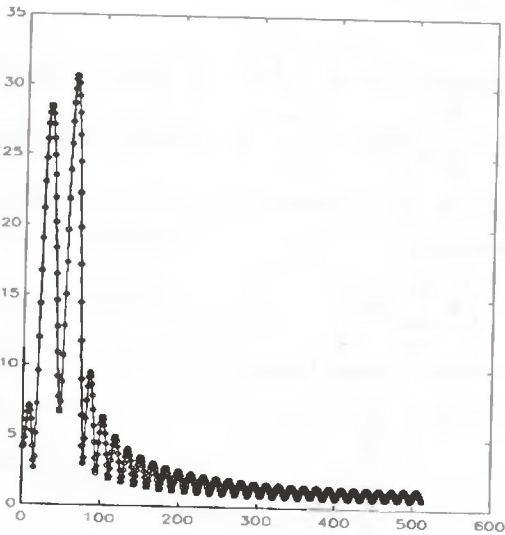


Figura 13: DFT de $x(n)$ con 1024 puntos y su envolvente

IV. Discusión

La DFT se constituye en una poderosa herramienta de análisis y proyecto de sistemas y señales discretos. Sin embargo, varios aspectos inherentes a su definición e implementación, en particular el muestreo en frecuencia, pueden llevar a interpretaciones erradas de los resultados obtenidos con su empleo. Como regla general para minimizar los efectos indeseables del muestreo en frecuencia, se debe utilizar el mayor número posible de puntos respetando las limitaciones prácticas de memoria y tiempo de procesamiento. Cuando se conoce la expresión matemática de la señal o al menos las frecuencias de interés, el problema puede ser solucionado a través de una minimización del error, como en los casos prácticos presentados. Sin embargo, cuando no se dispone de ninguna información sobre la señal, se debe llevar en cuenta que errores de proyecto pueden ocurrir debido a la característica de muestreo en frecuencia inherente a la Transformada Discreta de Fourier con respecto a la Transformada de Fourier.

V. Referencias

- [1] A. V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discrete-Time Signal Processing*, Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.
- [2] E. C. Acocella, "Detección de armónicos en una señal senoidal", XVI Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica - Escuela Politécnica Nacional, a ser publicado, 1995.