

CONTROLADOR DE ESTRUCTURA VARIABLE POR MODO DESLIZANTE CON ACCION INTEGRAL

R.J.Mantz*
Prof.Tit.UNLP
Inv.Adj.CICPBA

P.F.Puleston
Prof.Adj.UNLP
Bec.Perf.CONICET

H.De Battista
Ayud.Dipl.UNLP
Bec.Inic.CONICET

Resumen

En el presente trabajo se analizan distintos aspectos del control de sistemas de estructura variable (VSS) con acción integral. La técnica de asignación de polos en modo deslizamiento (SM) es estudiada en vista a evitar un comportamiento de no mínima fase en la acción integral, el cual da origen a sobrepasos no deseados en las variables controladas. Los grados de libertad, generados con la reducción del orden del sistema en SM, son empleados a los efectos de evitar dicho comportamiento. Se establecen cotas para el cálculo del vector de realimentación, y se estudia su influencia sobre el rango de operación en modo deslizamiento. El trabajo se orienta al control de servosistemas.

Abstract

In this paper a variable structure control system with integral action is analyzed. Pole assignment in sliding mode (SM) is studied in order to avoid non minimum phase behavior of the integrator, which is responsible of output overshoots. The proposed tuning technique uses the degrees of freedom rendered by the reduction of order of the system in SM. Besides, bounds for the computation of the state feedback vector are provided, while their influence over the operational range is studied. The paper is oriented to servo-system control.

1. Introducción

Las estrategias de control de estructura variable por modo deslizamiento tienen como propiedades más atractivas la reducción del orden del sistema y la robustez ante perturbaciones y cambios de parámetros. Si bien desde el punto de vista teórico se realizan suposiciones duras (p.e. frecuencia de conmutación infinita para el actuador), las estrategias por modo deslizante son una poderosa herramienta para el análisis y diseño de sistemas de control que emplean actuadores operando como llaves [1][2]. Numerosos trabajos empleando estrategias por modo deslizamiento se han reportado en temas como robótica, control de motores, control de convertidores de potencia, control de procesos,

servomecanismos, etc [3][4]

Una de las técnicas convencionales para el control de sistemas por modo deslizamiento es la de asignación de polos. La misma es similar a la empleada en la asignación de polos en sistemas por realimentación de estado convencional (SREC). Sin embargo, en el caso de control por modo deslizamiento surgen tantos grados de libertad, en la selección de las ganancias de realimentación, como acciones de control y superficies existan. Esta diferencia es debida a la reducción del orden del sistema introducida por dicho modo de funcionamiento[2].

En SM, al igual que en los SREC, la acción conjunta de los estados integrales y la realimentación de estados puede dar origen a sobrepasos no deseados. Para SREC han sido propuestas "estructuras modificadas" [5][6] a los efectos de evitar estos sobrepasos. En el presente trabajo se demuestra que para sistemas trabajando en SM dicho inconveniente puede ser eliminado empleando los grados de libertad que surgen de la reducción del orden, obteniéndose de esta forma condiciones adicionales para la selección de las ganancias en la asignación de los polos de lazo cerrado. En la sección 5 se analiza cómo las ganancias de realimentación que resultan del método propuesto influyen sobre el rango de operación en SM, verificándose una mejora en la robustez del sistema al requerir una acción de control equivalente inferior. En la sección 6, se encuentran restricciones adicionales para el vector de realimentación en base a consideraciones de rango de operación limitado para el amplificador del estado integral. Si bien las ideas del presente trabajo pueden considerarse generales, el mismo se ha desarrollado en torno al control de servosistemas.

2. SM en sistemas lineales. Generalidades.

Los sistemas de estructura variable consisten en un grupo de subsistemas continuos y en una lógica propia de conmutación, lo cual se traduce en una acción de control discontinua función de los estados, señales de referencia y perturbaciones, si éstas son medibles.

* LEICI, Dept. de Electrotecnia, Universidad Nacional de La Plata
CC91, La Plata 1900, ARGENTINA
Fono:(54)(21)259306. Fax:(54)(21)250804

La idea básica de las estrategias de control por modo deslizamiento es forzar a las variables de estado a alcanzar una superficie $s=0$ definida en el espacio de estados, conocida como superficie de deslizamiento. Una vez alcanzada la superficie, la estrategia de control obliga a los estados a evolucionar sobre ella sin abandonarla, mediante una adecuada conmutación de la señal u . Una vez establecido este modo de funcionamiento la superficie de deslizamiento impone la nueva dinámica del sistema.

Considérese el sistema lineal

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (1)$$

donde los vectores de estado $x(t)$, de control $u(t)$, de variables controladas $y(t)$ y las matrices A , B , y C tienen dimensiones consistentes.

El diseño de una estrategia de control por modo deslizamiento abarca dos etapas fundamentales:

(1) Asegurar que la trayectoria de los estados alcance la superficie de conmutación $s=0$. Esto es garantizado si se verifican las condiciones (2) y (3).

$$\frac{ds}{dt} < 0 \quad \text{si } s > 0 \quad (2)$$

$$\frac{ds}{dt} > 0 \quad \text{si } s < 0 \quad (3)$$

Si $s=0$ es de la forma:

$$s = r - k^T x = 0 \quad (4)$$

donde k es el vector de ganancias de realimentación de los estados, resulta:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s^T}{\partial x} \dot{x} + \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial s^T}{\partial x} Ax + \frac{\partial s^T}{\partial x} Bu + \dot{r} \quad (5)$$

La expresión $(\partial s^T / \partial x) \cdot v$, donde v coincide con Ax o Bu , es por definición la derivada de Lie ($L_v s$) y representa la derivada de una función s en la dirección del campo vectorial v .

Geoméricamente las ecuaciones (2) y (3) establecen que el vector de campo $(\partial s^T / \partial x) \cdot Bu$ controlado por u debe apuntar hacia la superficie en cada uno de sus lados [8]. Ambas expresiones pueden ser resumidas en una:

$$s \cdot \dot{s} < 0 \quad (6)$$

A partir de ésta y suponiendo que la acción de control puede tomar dos valores (u_{min} y u_{max}) surge como posible ley de control:

$$u = \begin{cases} u_{min} & \text{s. signo}[k^T B] > 0 \\ u_{max} & \text{s. signo}[k^T B] < 0 \end{cases} \quad (7)$$

(2) Una vez alcanzada la superficie, la acción de control discontinua u debe forzar a los estados a deslizarse sobre la misma. El término deslizar es empleado en el sentido que los estados evolucionan confinados en la superficie.

Una técnica para determinar condiciones de funcionamiento en modo deslizante, como así también para determinar la dinámica del sistema bajo este modo de operación es el método del control equivalente [9].

Alcanzada la superficie, el establecimiento del modo de deslizamiento implica que se satisfacen simultáneamente las condiciones:

$$s = 0 \quad (8)$$

$$\dot{s} = 0 \quad (9)$$

ambas igualdades constituyen la condición de invariancia.

La condición de invariancia expresa el hecho que, idealmente, la trayectoria evoluciona sobre la superficie de deslizamiento con derivada nula respecto de la dirección definida por el vector de campo controlado por la conmutación de la señal u .

La técnica de la acción de control equivalente consiste en suponer que el deslizamiento sobre la superficie $s=0$ es debido a una señal continua ficticia u_{eq} , cuyo efecto sobre los estados del sistema es el mismo que el de la señal discontinua de control u . Es decir que u_{eq} verifica:

$$\frac{ds}{dt} = \frac{\partial s^T}{\partial x} Ax + \frac{\partial s^T}{\partial x} Bu + \dot{r} = 0 \quad (10)$$

Para que el modo de deslizamiento exista, localmente, sobre $s(x)=0$ es necesario y suficiente que el correspondiente control equivalente verifique:

$$u_{min} < u_{eq} < u_{max} \quad (11)$$

con

$$u_{eq} = \left(-\frac{\partial s^T}{\partial x} B \right)^{-1} \left(\frac{\partial s^T}{\partial x} Ax + \dot{r} \right) \quad (12)$$

Obviamente una condición necesaria para que el modo deslizamiento exista es:

$$\frac{\partial s^T}{\partial x} B \neq 0 \quad (13)$$

conocida con el nombre de condición de transversalidad.

3. SM en sistemas con acción integral

Si se contempla que el sistema (1) está sometido a perturbaciones p en los estados, el nuevo modelo resulta:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu + Pp \\ y &= Cx \end{aligned} \quad (14)$$

con x , u , p e y de dimensiones $(n \times 1)$, $(m \times 1)$, $(j \times 1)$ y $(m \times 1)$ respectivamente; y A , B , C y P con dimensiones consistentes.

Se supone también que a los efectos de evitar errores de estado estacionario debidos a perturbaciones y cambios de referencia constantes es necesario expandir el sistema con m estados integrales q :

$$q = \int_0^t (y - r) dt \quad (15)$$

luego,

$$\begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ C & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ q \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} u - \begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix} r + \begin{bmatrix} P \\ 0 \end{bmatrix} p \quad (16)$$

$$y = Cx$$

Eligiendo como superficie de deslizamiento

$$s = r - [k_p^T \quad k_q^T] x_e = 0 \quad (17)$$

siendo los n elementos de k_p y los m elementos de k_q las ganancias de realimentación de los estados x y q respectivamente; y $x_e^T = [x^T \quad q^T]$ los estados del sistema expandido.

Dado que en SM se verifica:

$$s = 0 \quad (18)$$

luego,

$$u_{eq} = [k_p^T B]^{-1} \left[-k^T \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} x + k_q^T r + \dot{r} - k_p^T Pp \right] \quad (19)$$

expresión que reemplazada en la ecuación (16) permite

calcular la dinámica equivalente del sistema:

$$x(s) = [sI - \Pi]^{-1} \left\{ B [k_p^T B]^{-1} \left[(k_q^T + sI) r(s) - k_p^T Pp(s) \right] + Pp(s) \right\} \quad (20)$$

$$q(s) = s^{-1} [Cx(s) - r(s)] \quad (21)$$

siendo los autovalores de la matriz

$$\Pi = A - B [k_p^T B]^{-1} [k_p^T A + k_q^T C] \quad (22)$$

los responsables de la dinámica de lazo cerrado del sistema en SM.

Cabe acotar que la dinámica equivalente del sistema funcionando en SM corresponde a un sistema de orden n , mientras que el del sistema expandido de lazo abierto es $n+m$, esto implica m grados de libertad en la determinación de las ganancias de realimentación para la asignación de los polos de lazo cerrado [2].

4. Control de posición (Motor DC)

Las ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_a \\ \dot{\omega} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R_a/L & -k/L & 0 \\ k/J & -b/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_a \\ \omega \\ \theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} u + \begin{bmatrix} 0 \\ 1/J \\ 0 \end{bmatrix} p$$

$$y = [0 \quad 0 \quad 1] x \quad (23)$$

responden al modelo clásico de un servocontrol de posición con motor de DC, siendo: i_a la corriente de armadura, ω la velocidad angular, θ la posición angular, J el momento de inercia, k la constante de cupla coincidente con la constante de velocidad, R_a y L la resistencia e inductancia de armadura.

A los efectos de asegurar error de estado estacionario nulo ante perturbaciones de cupla constantes resulta necesario la expansión del sistema con un estado integral q .

Elegida una superficie de conmutación de acuerdo a la expresión (17) y reemplazando (23) en (20) y (21) resulta:

$$x(s) = \frac{\begin{bmatrix} s(s+b/J)(\beta+s/k_{p1}) \\ s(\beta+s/k_{p1})k/J \\ (\beta+s/k_{p1})k/J \end{bmatrix}}{\Delta} r(s) + \frac{\begin{bmatrix} -(s^2\alpha_2 + s\alpha_3 + \beta)/J \\ s^2/J \\ s/J \end{bmatrix}}{\Delta} p(s) \quad (24)$$

$$q(s) = -\frac{s^2 + s(\frac{k\alpha_2 + b}{J}) + k(\frac{\alpha_3 - 1/k_{p1}}{J})}{\Delta} r(s) + \frac{1/J}{\Delta} p(s) \quad (25)$$

$$\Delta = s^3 + s^2(\frac{\alpha_2 k + b}{J}) + s\alpha_3 \frac{k}{J} + \beta \frac{k}{J} \quad (26)$$

$$\alpha_2 = \frac{k_{p2}}{k_{p1}} \quad (27)$$

$$\alpha_3 = \frac{k_{p3}}{k_{p1}} \quad (28)$$

$$\beta = \frac{k_q}{k_{p1}} \quad (29)$$

El determinante Δ de orden tres pone en evidencia la reducción del orden del sistema cuando éste opera en modo deslizamiento. Los tres autovalores pueden ser asignados con los coeficientes α_2 , α_3 y β , es decir existe un grado de libertad en la elección de las ganancias de realimentación.

Se consideran los siguientes parámetros para el motor DC: $L=0.001\text{Hy}$; $J=0.068\text{Kg}\cdot\text{m}^2$; $k=1.69$; $R_a=1.43\Omega$; $b=0.006\text{Nms}$, y una asignación de dos polos dominantes en:

$$s_{1,2} = -10 \pm j10 \quad (30)$$

$$s_3 = -100 \quad (31)$$

Debido al grado de libertad, la misma asignación puede conseguirse para distintos vectores de realimentación. A continuación se analizan tres casos, dependientes de la ganancia de realimentación k_{p3} del estado $x_3 = \theta$.

A los efectos de realizar un estudio comparativo del sistema en SM, y sin pérdida de generalidad, para el análisis se ha supuesto:

-la señal de referencia cambia entre valores constantes con una pendiente de variación finita. Esta suposición permite que el sistema pueda verificar, para acción de

control tanto, la ecuación (10), es decir que el sistema no salga de SM. Sin embargo, la pendiente de cambio ha sido elegida para que, teniendo presente la dinámica asignada, la excitación propuesta pueda considerarse como un escalón.

-se dispone de una acción de control (u_{\min} , u_{\max}) para asegurar el modo deslizamiento durante todo el transitorio

(1) $k_{p3} < 1$

La figura 1a muestra la respuesta $\theta(t)$ del sistema en funcionamiento en modo deslizante. Se observa que a pesar de la asignación de los polos dominantes ($\zeta=0.707$), la variable controlada presenta un sobrepaso importante. Este fenómeno puede ser fácilmente comprendido a partir del análisis de la evolución del estado integral (figura 1c), en la cual se pone de manifiesto un comportamiento de no mínima fase. Efectivamente, ante el cambio de la señal de referencia, el estado integral evoluciona con polaridad contraria a la que corresponde a su estado estacionario. Luego, una disminución del $|q(t)|$ y posteriormente un cambio de su polaridad solo es posible si existe un cambio en el signo del error (figura 1b), y por consiguiente un sobrepaso en la

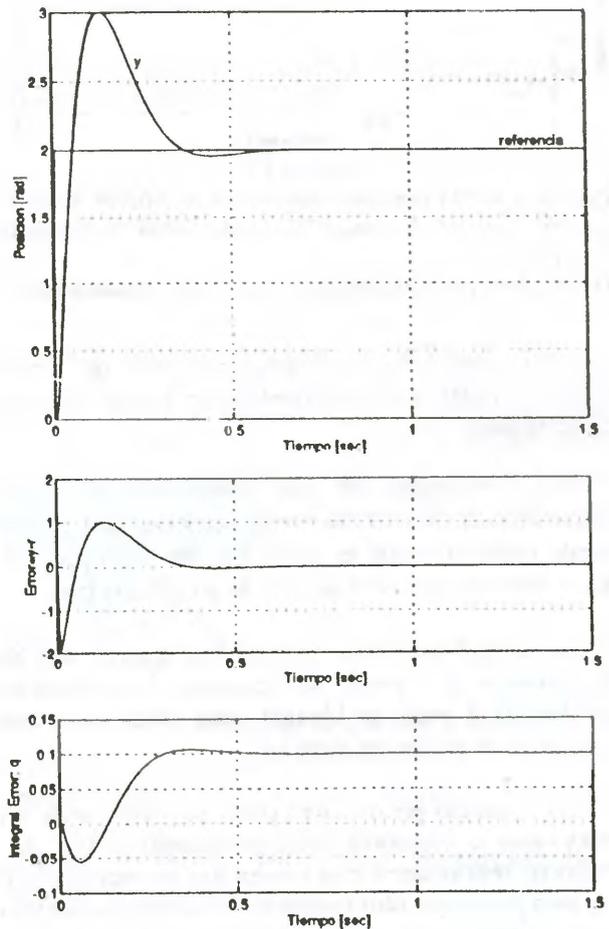


Figura 1.

Respuesta en SM con polos dominantes en $-10 \pm j10$. Cero de $q(s)/r(s)$ en el semiplano derecho ($k_{p3}=0.7$).

(a) Posición $y(t)=\theta(t)$. (b) Error: $y(t)-r(t)$. (c) Estado integral.

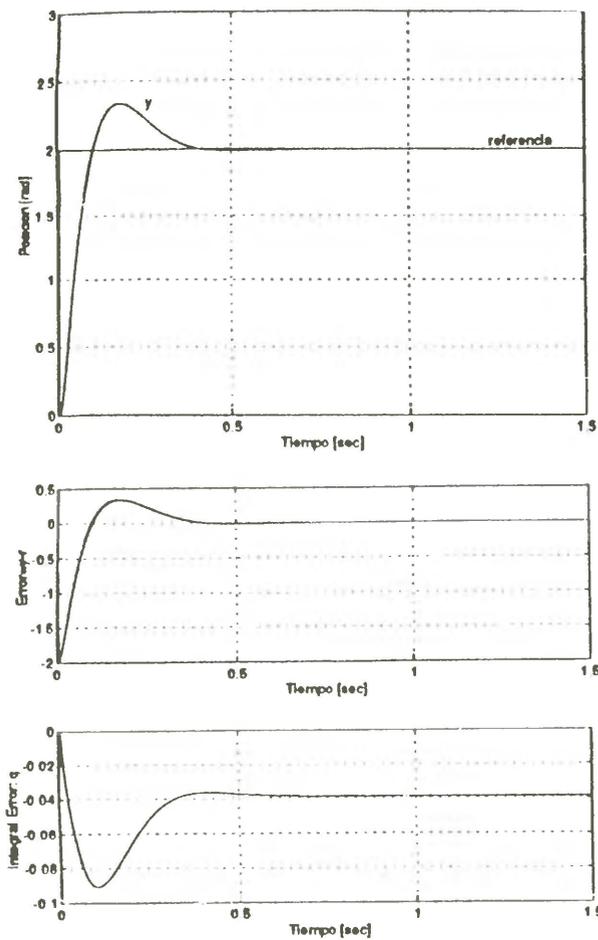


Figura 2.

Respuesta en SM con polos dominantes en $-10 \pm j10$. Cero de $q(s)/r(s)$ en el semiplano izquierdo cerca del origen ($k_{p3}=1.25$).
 (a) Posición $y(t)=\Theta(t)$. (b) Error: $y(t)-r(t)$. (c) Estado integral.

variable controlada. Este sobrepaso será de mayor magnitud cuanto más importante sea el comportamiento de no mínima fase.

El cero responsable de este comportamiento queda claramente de manifiesto en la ecuación (25), donde puede observarse que es necesario que $\alpha_3 > 1/k_{p3}$, e.d. $k_{p3} > 1$ para que no exista un cero de no mínima fase.

Como la condición de no mínima fase depende sólo de la ganancia k_{p3} , puede seleccionarse esta ganancia, empleando el grado de libertad, para evitar que exista un cero en el semiplano derecho.

(2) Del análisis previo surge cómo se puede elegir k_{p3} para evitar el comportamiento de no mínima fase. Sin embargo restricciones más fuertes son necesarias sobre k_{p3} para evitar que otro fenómeno de distinta naturaleza pueda dar un efecto similar sobre la variable controlada. Efectivamente, es conocido el hecho que la componente derivativa de un cero localizado en la región de dominancia de los polos da lugar a sobrepasos [10][11]. Si k_{p3} es elegido de forma tal que esta condición se

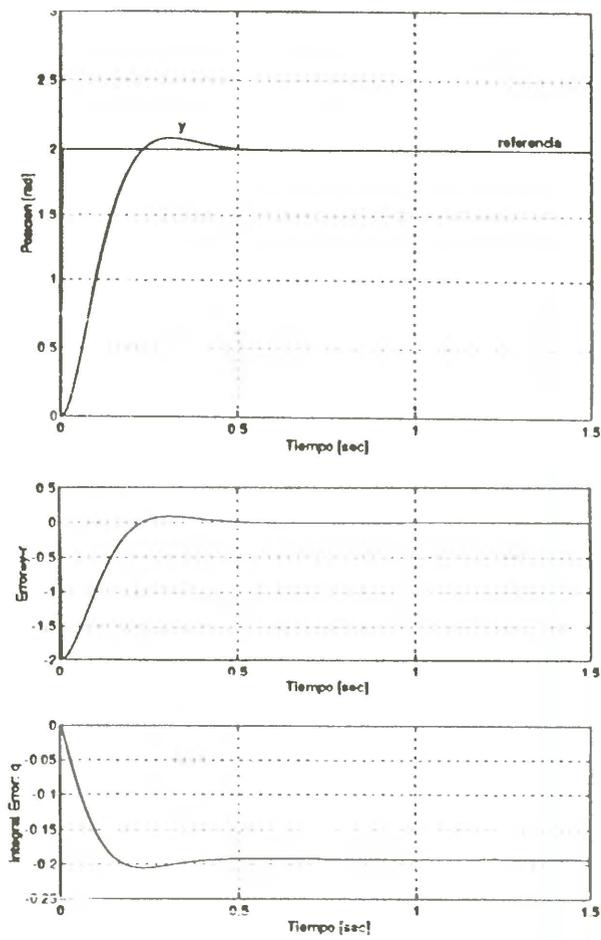


Figura 3.

Respuesta en SM con polos dominantes en $-10 \pm j10$. Cero de $q(s)/r(s)$ en el semiplano izquierdo lejos del origen ($k_{p3}=10$).
 (a) Posición $y(t)=\Theta(t)$. (b) Error: $y(t)-r(t)$. (c) Estado integral.

verifica en la transferencia entre el estado integral y la referencia, se manifestará un sobrepaso importante en la variable $q(t)$. Esto implica una sobreintegración del error con respecto a su valor de estado estacionario. Luego, para que el estado integral disminuya en módulo es necesario un cambio de signo en el error, lo cual implica un sobrepaso en la variable controlada. Esta situación puede observarse en la figuras 2a, 2b y 2c, ellas corresponden a la misma asignación de polos que en el caso anterior, pero la ganancia k_{p3} es ahora igual a 1,25, resultando el cero en -0,15.

(3) $k_{p3} \gg 1$. Las figuras 3a, 3b y 3c muestran ahora la respuesta de la variable controlada, del error y su integral para el caso en que la misma asignación de los polos es realizada con una ganancia k_{p3} que asegura que el cero de transferencia $q(s)/r(s)$ se encuentre en el semiplano izquierdo y alejado de la zona que corresponde a los polos dominantes. En la respuesta de $q(t)$ no se observa ni comportamiento de no mínima fase, ni sobrecarga excesiva, lo cual se traduce en una respuesta sin sobrepaso apreciable.

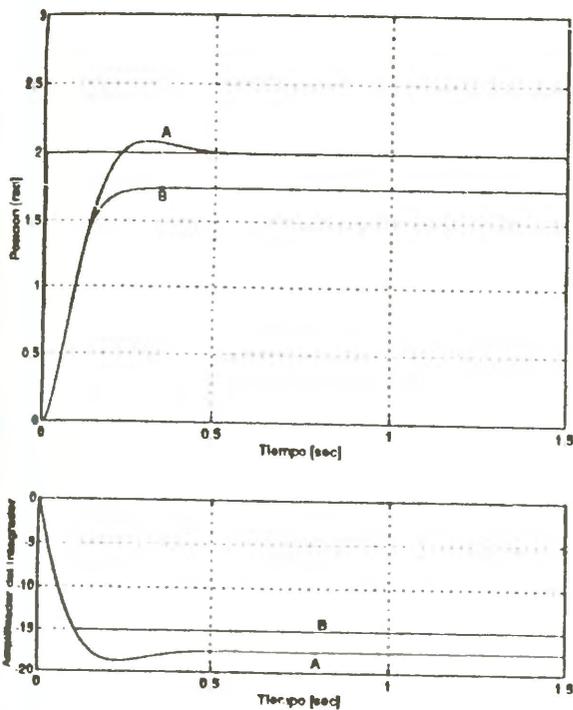


Figura 4.

Polos dominantes en $-10 \pm j10$. Cero en el SPI lejos del origen ($k_p=10$). Curva A sin saturación en el amplificador del integrador. Curva B el amplificador satura en $\pm 15V$.
 (a) Posición: $y(t)=\theta(t)$. (b) Salida del amplificador: $k_q q(t)$.

5. Relación entre k_{p3} y el rango de operación en SM

El funcionamiento en SM queda asegurado si:

$$u_{min} < [k_p^T B]^{-1} \left[-k^T \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} x + k_q^T r + \dot{r} - k_p^T P p \right] < u_{max} \quad (32)$$

Para un servocontrol de posición $[k^T B]^{-1} = L/k_{p1}$, luego debe verificarse:

$$u_{min} < L \left[-\kappa^T \begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix} x + \kappa_q r + \frac{\dot{r}}{k_{p1}} - \kappa_p^T P p \right] < u_{max} \quad (33)$$

donde

$$\kappa^T = [\kappa_p^T \quad \kappa_q] = [1 \quad \alpha_2 \quad \alpha_3 \quad \beta] \quad (34)$$

Para una dada asignación de polos, α_2 , α_3 y β son constantes, y por consiguiente si se varía k_{p3} manteniendo dichas relaciones, el único término de la ecuación (33) que varía es:

$$\frac{\dot{r}}{k_{p1}} = \frac{\dot{r}}{k_{p3}/\alpha_3} \quad (35)$$

Por consiguiente, en la medida que aumenta k_{p3} , se reduce la acción de control equivalente necesaria para mantener el sistema en SM. En otras palabras, para un mismo par $\{u_{min}, u_{max}\}$, si se aumenta k_{p3} , también se aumenta la capacidad para rechazar perturbaciones y para seguir referencias más exigentes sin salir del modo de operación SM.

6. Cota superior para la elección de las ganancias.

Del análisis previo surge la necesidad de elegir k_{p3} grande a los efectos de evitar sobrepasos en la variable controlada. Una cota superior en la elección de k_{p3} puede ser hallada a partir de un análisis de estado estacionario. Con esta finalidad puede calcularse la salida del amplificador de realimentación del estado integral, evaluando (17) en estado estacionario:

$$k_q q_{ss} = (1 - k_{p3})r \quad (36)$$

que supuesta la condición $k_{p3} \gg 1$ se reduce a:

$$k_q q_{ss} = -k_{p3}r \quad (37)$$

Luego, elegir k_{p3} excesivamente grande puede llevar a la saturación a dicho amplificador.

En la figura 4 puede verse el efecto de la saturación de dicho amplificador k_q sobre la respuesta temporal de la variable controlada. La curva A corresponde al caso analizado en la figura 3 en la cual se considera que el amplificador k_q no tiene saturación, mientras que la curva B corresponde al mismo sistema donde ahora se considera que el amplificador k_q satura en $\pm 15V$. Es importante recalcar que en ambas curvas se han empleado los mismos valores u_{min} y u_{max} para el actuador de potencia, razón por la cual el error de estado estacionario no es debido a falta de acción de control, sino a que la superficie de deslizamiento está imponiendo la condición:

$$\theta_{ss} = \frac{sat(k_q q) - r}{-k_{p3}} \quad (38)$$

donde, teniendo en cuenta la relación de polaridad en estado estacionario entre las variables θ y q , $sat(k_q q)$ debe considerarse negativo si r es positivo.

Del análisis previo, surge como cota superior en la elección de la ganancia k_{p3} :

$$k_{p3} \leq 1 - \frac{sat(k_q q)}{r} \quad (39)$$

Conclusión

Se han analizado distintos aspectos del control de sistemas con acción integral operando en modo deslizante. Se ha demostrado que la reducción del orden del sistema permite elegir el vector de realimentación para evitar un comportamiento de no mínima fase y/o sobrecarga en los estados integrales, fenómenos que se traducen en una respuesta subamortiguada más allá de la asignación de polos realizada. El criterio propuesto para la selección de las ganancias se condice con una mejora en la capacidad del sistema para operar en modo deslizamiento. Una cota máxima para el cálculo de las ganancias en base a un análisis de saturación en el amplificador del estado integral.

Referencias

- [1] Utkin V. Y., "Variable Structure Systems with Sliding Mode". IEEE Transactions on Automatic Control, 1977, Vol. 22, No. 2, 212-222.
- [2] Bühler H., "Réglage par mode de glissement". Presses polytechniques romandes, 1986.
- [3] Hung J. Y., Gao W., Hung J. C., "Variable Structure Control: A Survey". IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993, Vol 40, No 1, 2-22.
- [4] Utkin V. I., "Sliding Mode Control Design Principles and Applications to Electric Drives". IEEE Transactions on Industrial Electronics, 1993, Vol 40, No 1, 23-36.
- [5] Nandam P. K., Sen P. C., "A comparative study of P-I and I-P controllers for motor drives". Int. J. Control, 1986, Vol. 44, No. 1, 283-297.
- [6] Mantz R. J., Tacconi E., "A Regulating and Tracking PID Controller". Ind. Eng. Chem. Res. 1990, Vol. 29, 1249-1253.
- [7] Puleston P. F., Mantz R. J., "Proportional plus integral MIMO controller for regulation and tracking with anti-windup features". Ind. Eng. Chem. Res. 1993, Vol. 32, 2647-2652.
- [8] Sira-Ramirez H., "Differential geometric methods in variable-structure control". Int. J. Control, 1988, Vol. 48, No. 4, 1359-1390.
- [9] Utkin V. Y., "Sliding modes and their applications in variable structure systems". MIR, 1978.
- [10] Nagrath Y. J., Gopal M., "Control Systems Engineering". Willey Eastern Limited, 1982.
- [11] Hängglund T, Aström K. J., "Automatic Tuning of PID Controllers Based on Dominant Pole Design". Proceedings IFAC Workshop on Adaptive Control of Chemical Processes, Frankfurt, 1985.