

XVII

JORNADAS EN INGENIERIA ELECTRICA Y ELECTRONICA

A N A L E S



Eduardo Kigman "La Sierrora"

621.3
Es/7
1997

3, 24 y 25 de Julio de 1997

ESCUELA POLITECNICA NACIONAL
Facultad de Ingeniería Eléctrica
Quito, Ecuador

EDITORIAL

La Facultad de Ingeniería Eléctrica de la Escuela Politécnica Nacional realiza periódicamente las Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica, evento en el que se exponen esfuerzos y avances investigativos en ciencia y tecnología desarrollados en la Escuela Politécnica Nacional y en otras instituciones tanto nacionales como extranjeras.

La importancia de estas Jornadas se ha incrementado y en la actualidad es un vínculo de relación a nivel internacional, gracias a que desde hace algún tiempo contamos con destacadas contribuciones de participantes de distintos países de la órbita Iberoamericana, convirtiéndose en una realimentación permanente, así como en un medio de intercambio de experiencias que redundan en la superación de todos los profesionales afines a la Ingeniería Eléctrica interesados en mantener el ritmo actual.

El desarrollo de la humanidad nos demuestra que el progreso se concreta cuando existe asociación de esfuerzos, individualmente es muy difícil o sencillamente es muy lento, por lo que al renovar mi pedido de participación en las Jornadas en Ingeniería Eléctrica y Electrónica, agradezco a todos los profesionales que han colaborado para el éxito de este trabajo, ratificando el hecho de que enseñando se continúa aprendiendo.

Ing. Mario Cevallos Villacreses
DECANO

EVALUACION DEL COMPORTAMIENTO DE LOS ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA MEDIANTE EL USO DEL COMPUTADOR PERSONAL

Ing. Jofre Navarrete García
Dep. de Ingeniería de PRONACA

Ing. Paúl Ayora González M. Sc.*
Escuela Politécnica Nacional
Profesor Principal.

Abstract. -the momentum method has been used for the evaluation of the behavior of complex earth electrodes. The solution of the system is achieved by breaking down these complex electrodes into small linear electrodes. The mutual resistance between these linear electrodes is evaluated based on the mean voltage induced by each electrode onto the others. The equations developed here are applicable independent to the relative position of the electrodes among themselves and with respect to the earth surface. For simulation purposes, a two-layer soil was selected, being the electrodes embeded in the top layer.

Resumen. - El presente trabajo aplica el método de los momentos para evaluar el comportamiento de electrodos de puesta a tierra complejo. La solución del problema es alcanzada mediante la segmentación del electrodo complejos en segmentos rectos o electrodos lineales. Se desarrollan las expresiones matemáticas que permiten calcular la resistencia mutua y propia de los segmentos rectos, lo que se utiliza para determinar la distribución de corriente en el electrodo o malla y su resistencia a tierra. Las expresiones para evaluar la resistencia propia y mutua entre los distintos segmentos tienen la ventaja de ser aplicables cualquiera sea la posición relativa de los segmentos entre si y respecto de la superficie de la tierra y además son halladas en base al Potencial Medio. Para tener una simulación más real las expresiones se desarrollan para un suelo con estratificación simple y se considera que la malla se halla íntegramente en la primera capa del suelo.

INTRODUCCIÓN

La conexión a tierra de un circuito eléctrico obedece a múltiples propósitos, en todos los casos es necesario tener una idea del comportamiento del electrodo de puesta a tierra. Este comportamiento puede ser caracterizado por:

- La resistencia de puesta a tierra

- Diferencia de potencial entre puntos sobre la superficie de la tierra.
- Densidad de la corriente en cada componente del electrodo.

Para configuraciones relativamente simples de electrodos de puesta a tierra se han desarrollado fórmulas de cálculo. Para configuraciones más complejas, tales como mallas de puesta a tierra formadas por varillas, conductores horizontales, etc. el desarrollo de fórmulas no es simple y las que se utilizan son solo aproximaciones (por ejemplo Std80-IEEE) y en su mayoría tienen restricciones en su aplicabilidad, por ejemplo: el estándar 80-IEEE solo es aplicable a mallas cuadradas con igual espaciamiento entre los conductores, si se desea aplicar dichas fórmulas a mallas rectangulares, existen límites en cuanto al la relación largo ancho que deben cumplir éstas; con otras configuraciones (mallas en L, mallas con distinto espaciamiento, etc.) el método no es aplicable y de hecho tampoco se tienen fórmulas que nos permitan evaluar su comportamiento.

En el presente trabajo se ha desarrollado un procedimiento computacional (programa AMT) que nos permite resolver este problema y caracterizar la conexión a tierra como ya se indicó.

Para tener una modelación lo más próxima a la realidad, las expresiones se desarrollan bajo el supuesto que el electrodo está en la primera capa de un suelo estratificado de dos capas.

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES BASICAS

El tamaño y forma de los electrodos de tierra es muy variada, pero la mayoría de ellos se pueden considerar formados por segmentos rectos de conductor y estos, a su vez, se pueden considerar formados por electrodos puntuales.

De aquí, que el estudio de estos dos tipos básicos de electrodos permite abarcar la mayoría de los problemas prácticos. ^[1]

En lo que sigue, se desarrollan las expresiones básicas que gobiernan el comportamiento de estos dos tipos de electrodos en un suelo homogéneo y en un suelo no homogéneo de dos capas. En este último caso se considera que los electrodos se hallan enterrados íntegramente en la primera capa del suelo estratificado por lo que las expresiones desarrolladas solo son válidas en esta capa.

Estudio de un electrodo puntual en la superficie de un suelo uniforme ^[2]

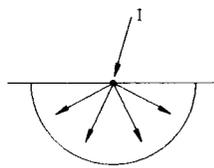


Fig. 1 Electrodo puntual en la superficie de la tierra

Sea la corriente I que entra a la tierra por un electrodo puntual y la deja por otro lo suficientemente remoto de modo que su presencia puede ser despreciada, bajo estas circunstancias la corriente abandona el electrodo en forma radial a la superficie del mismo. Imaginemos una superficie semiesférica con centro en el electrodo puntual y radio r (Fig. 1). El área de esta superficie es $2 \cdot \pi \cdot r^2$, y la densidad de corriente radial en la tierra a la distancia r es:

$$J = \frac{I}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Ecu 1

Si ρ es la resistividad de la tierra, la intensidad de campo en la dirección radial a la distancia r es:

$$E = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r^2}$$

Ecu 2

El potencial a la distancia r respecto de un punto remoto es:

$$V = - \int_{\infty}^r E(r) dr$$

Ecu 3

de donde

$$V = \frac{\rho \cdot I}{2 \cdot \pi \cdot r}$$

Ecu 4

Estudio de un electrodo puntual debajo de la superficie de la tierra. ^[2]

Si se aplica el método de las imágenes, como se muestra en la Fig. 2, considerando un plano recto al que se lo identifica como la superficie de la tierra, el potencial inducido por los dos electrodos en el punto P puede ser obtenido por la Ecu. 5, donde r es la distancia del punto al electrodo y r' es la distancia del punto a la imagen del electrodo sobre la superficie de la tierra.

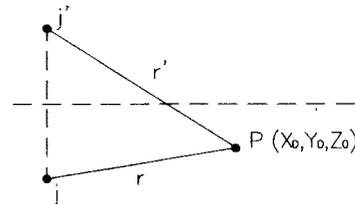


Fig. 2 Electrodo puntual en un medio conductor infinito

$$V(P) = \frac{\rho \cdot I}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \right]$$

Ecu 5

Estudio de un electrodo puntual en un suelo de dos capas.

Las ecuaciones que gobiernan el comportamiento de un electrodo puntual en un suelo estratificado pueden también ser obtenidas por el método de las imágenes. El resultado del método es una serie infinita de términos que representan la contribución de cada imagen del electrodo puntual al potencial en el punto donde se lo esté calculando. ^[3]

Considere un electrodo puntual a la profundidad d por debajo de la superficie de la tierra en la capa superior de un suelo estratificado de dos capas. La capa superior tiene una resistividad ρ_1 y se extiende hasta la profundidad H , mientras que la capa inferior tiene una resistividad ρ_2 y se asume que se extiende hacia el infinito.

El efecto de la discontinuidad en la superficie de la tierra puede ser tomado en cuenta considerando una imagen del sistema de forma de satisfacer las condiciones de frontera en la discontinuidad, (la corriente en la frontera de la superficie de la tierra debe ser paralela a la

misma y las líneas equipotenciales deben ser perpendiculares a la superficie de la tierra [6] luego el problema original es transformado en otro con dos fuentes de corriente idénticas I e I' simétricamente colocadas en la franja de resistividad ρ_1 y grosor $2H$, esta franja a su vez se halla limitada a sus dos lados por dos capas semi-infinitas de resistividad ρ_2 , ver Fig. 3. [5]

Debe recordarse que el problema así planteado es válido sólo para calcular el potencial debajo de la superficie de la tierra en la primera capa.

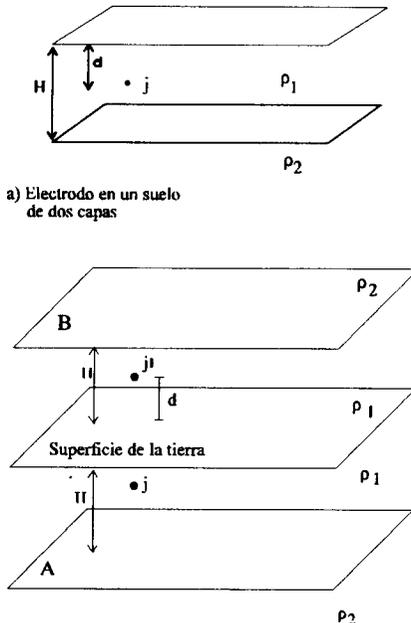
El problema anterior puede ser resuelto tomando múltiples imágenes de las dos fuentes de corriente I e I' en las dos interfaces A y B.

La discontinuidad entre la primera y segunda capa puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión. [3]

$$K = \frac{\rho_2 - \rho_1}{\rho_2 + \rho_1}$$

Ecu 6

En esta discontinuidad, es decir, en la frontera de las dos capas hay continuidad del voltaje y de la densidad de corriente perpendicular a las mismas. [2]



b) Sistema equivalente para tomar en cuenta la superficie de la tierra

Fig. 3 Electrodo puntual en un suelo de dos capas y sistema equivalente para tomar en cuenta la superficie de la tierra.

A continuación se considera el sistema de referencia XYZ de modo que el plano XY coincida con la superficie de la tierra y el eje positivo Z está dirigido hacia el interior de la tierra. (Fig. 4)

Las coordenadas del electrodo j respecto de este sistema son: X_j, Y_j, Z_j ; se desea determinar el potencial producido por el electrodo puntual j en el punto P ubicado en la primera capa del suelo.

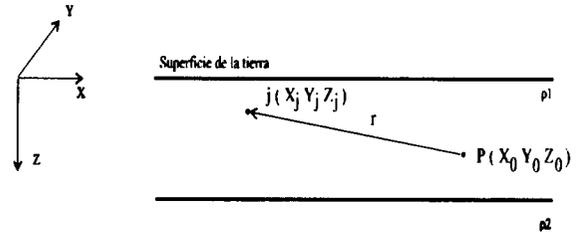


Fig. 4 Sistema de referencia XYZ

Las distancias verticales del electrodo j y su imagen al punto P son $Z_j - Z_0$ y $Z_j + Z_0$ respectivamente. El electrodo j y su imagen son reflejados en la interfaz entre las dos capas del suelo como si electrodos adicionales (imágenes) inyectaran corrientes de KI amperios.

Estas reflexiones tienen en el eje vertical las coordenadas: $2H - Z_j$, $2H + Z_j$, $-2H + Z_j$ y $-2H - Z_j$. La distancia vertical de estas cuatro imágenes al punto P es: (Fig. 5 [6])

- $2H - Z_j - Z_0$
- $2H + Z_j - Z_0$
- $2H - Z_j + Z_0$
- $2H + Z_j + Z_0$

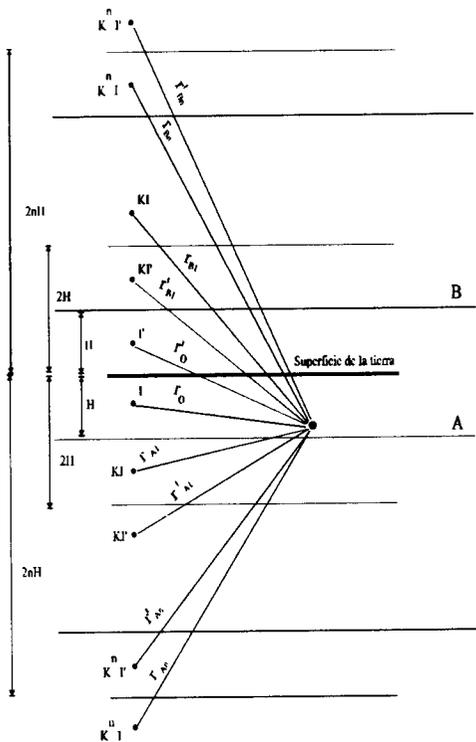


Fig. 5 Sistema equivalente de imágenes para la determinación del potencial

Continuando con el proceso de obtener las imágenes y con base en la ecuación para el cálculo del potencial para un electrodo puntual debajo de la superficie de la tierra, se obtiene [7]

$$V(P) = \frac{\rho_l I}{4 \cdot \pi} \left[\frac{1}{r_0} + \frac{1}{r'_0} + \sum_{n=1}^{\infty} K^n \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r'_{An}} + \frac{1}{r'_{Bn}} \right) \right] \quad \text{Ecu 7}$$

donde:

$$\begin{aligned} r_0 &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (Z_j - Z_0)^2} \\ r'_0 &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (Z_j + Z_0)^2} \\ r'_{An} &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (2nH - (Z_j + Z_0))^2} \\ r'_{Bn} &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (2nH + (Z_j + Z_0))^2} \\ r_{An} &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (2nH + (Z_j - Z_0))^2} \\ r_{Bn} &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (2H - (Z_j - Z_0))^2} \end{aligned} \quad \text{Ecu 8}$$

Los subíndices A denotan las distancias desde las imágenes reflejadas por la interfaz A al punto P y los subíndices B las distancias

desde las imágenes reflejadas por la interfaz B al punto P.

La ecuación 7 puede ser escrita de forma más compacta

$$V(P) = \frac{\rho_l I}{4 \cdot \pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} K^{|n|} \left(\frac{1}{r_{n-}} + \frac{1}{r_{n+}} \right) \right] \quad \text{Ecu 9}$$

donde

$$\begin{aligned} r_{n-} &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (2nH + (Z_j - Z_0))^2} \\ r_{n+} &= \sqrt{(X_j - X_0)^2 + (Y_j - Y_0)^2 + (2nH + (Z_j + Z_0))^2} \end{aligned} \quad \text{Ecu 10}$$

La expresión 9 junto con la 10 permiten determinar el potencial inducido debido a la corriente que abandona el electrodo puntual en cualquier punto de la primera capa de un suelo estratificado de dos capas.

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EL CALCULO DEL POTENCIAL PRODUCIDO POR UN ELECTRODO FORMADO POR UN CONDUCTOR LINEAL.

En el caso de un conductor lineal no se comete mayor error al suponer que la *distribución de corriente que abandona el conductor es constante y lineal a lo largo del conductor.* [2], esto es posible ya que el radio del conductor es usualmente mucho menor que la longitud del mismo. [5]

A continuación, se considera el caso de un electrodo compuesto por un conductor lineal de longitud L y radio r, enterrado en la primera capa de un suelo estratificado de dos capas. El electrodo se extiende del punto M_i (X_i Y_i Z_i) al M_f (X_f Y_f Z_f) donde los subíndices i indican el extremo inicial y los subíndices f el extremo final. (Fig. 6).

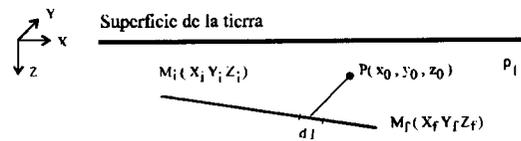


Fig. 6 Electrodo lineal en un medio de estratificación simple

Si i es la densidad de corriente lineal a lo largo del conductor, el potencial producido en el punto $P (X_0, Y_0, Z_0)$ por un elemento infinitesimal del conductor de longitud dl es de acuerdo con Ecu 9

$$dV(P) = \frac{\rho_l i}{4\pi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} K^{|n|} \left(\frac{1}{r_{n-}} + \frac{1}{r_{n+}} \right) \right] dl \quad \text{Ecu 11}$$

luego, el potencial total inducido por el conductor en $P (X_0, Y_0, Z_0)$ es

$$V(P) = \frac{\rho_l i}{4\pi} \int_{\psi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} K^{|n|} \left(\frac{1}{r_{n-}} + \frac{1}{r_{n+}} \right) \right] dl \quad \text{Ecu 12}$$

- El símbolo \int_{ψ} indica que se debe integrar a lo largo de la trayectoria del conductor, es decir, a lo largo de la recta que lo representa.

Como la distribución de corriente es constante, según se indicó, el potencial en el punto P está dado por:

$$V(P) = \frac{\rho_l i}{4\pi} \int_{\psi} \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} K^{|n|} \left(\frac{1}{r_{n-}} + \frac{1}{r_{n+}} \right) \right] dl \quad \text{Ecu 13}$$

Con el fin de poder llevar a cabo esta integración a lo largo de la trayectoria del electrodo, conviene escoger un nuevo sistema de referencia para simplificar los cálculos.

Se escoge el nuevo sistema de referencia denominado UVW de manera que el eje U coincida con el eje del conductor, de forma que las coordenadas del conductor en este nuevo sistema referencia sean: $M_i (0\ 0\ 0)$ y $M_f (U_f\ 0\ 0)$ donde $U_f = L$ es la longitud del conductor. (ver Fig. 7). Las coordenadas del punto P en este nuevo sistema de referencia son: U_0, V_0, W_0 .^[8]

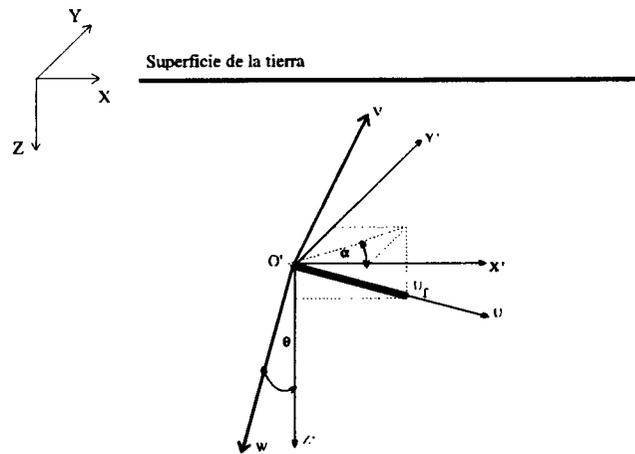


Fig. 7 Sistema de referencia UVW , ligado al eje de conductor*

* El sistema de referencia $X'Y'Z'$ es paralelo al sistema XYZ pero coincide en su origen con el sistema UVW .

La relación entre el sistema de referencia XYZ y el sistema UVW puede establecerse de la siguiente manera:

Para pasar del sistema XYZ al sistema UVW

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\alpha & \cos\theta \sin\alpha & \sin\theta \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\sin\theta \cos\alpha & -\sin\theta \sin\alpha & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X - X_i \\ Y - Y_i \\ Z - Z_i \end{bmatrix} \quad \text{Ecu 14}$$

Para pasar del sistema UVW al XYZ

$$\begin{bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \cos\alpha & -\sin\alpha & -\sin\theta \cos\alpha \\ \cos\theta \sin\alpha & \cos\alpha & -\sin\theta \sin\alpha \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} X_i \\ Y_i \\ Z_i \end{bmatrix} \quad \text{Ecu 15}$$

Sobre la base de Ecu. 14 y Ecu. 15 ; y tomando en cuenta que el conductor no tiene coordenadas en V ni en W tenemos:

$$r_{n-} = \sqrt{\left[U - (U_0 - 2nH \sin\theta) \right]^2 + V_0^2 + \left[W_0 - 2nH \cos\theta \right]^2}$$

$$r_{n+} = \sqrt{\left[U - \left\{ U_0 \cos 2\theta - W_0 \sin 2\theta - (2Z_i + 2nH) \sin\theta \right\} \right]^2 + V_0^2 + \left[U_0 \sin 2\theta + W_0 \cos 2\theta + (2Z_i + 2nH) \cos\theta \right]^2} \quad \text{Ecu 16}^{[13]}$$

Como el eje U coincide con el conductor, la integral para calcular el potencial

que el conductor induce en un punto P, solo depende de la variable U, con lo que 13 puede ser expresada como:

$$V(P) = \frac{\rho \cdot i}{4 \cdot \pi} \int_0^U \left[\sum_{n=-\infty}^{\infty} K^{|n|} \cdot \left(\frac{1}{r_{n-}} + \frac{1}{r_{n+}} \right) \right] \cdot dU \quad \text{Ecu 17}$$

Realizando la integración respectiva se obtiene finalmente que el potencial inducido en el punto P (U_0, V_0, W_0) por la corriente que abandona el conductor está dado por:

$$V(P) = \frac{\rho \cdot i}{4 \cdot \pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[K^{|n|} \cdot \left\{ \operatorname{asinh} \left(\frac{L - (U_0 - 2nH \operatorname{sen} \theta)}{\sqrt{V_0^2 + (W_0 - 2nH \operatorname{cos} \theta)^2}} \right) \right. \right. \\ + \operatorname{asinh} \left(\frac{(U_0 - 2nH \operatorname{sen} \theta)}{\sqrt{V_0^2 + (W_0 - 2nH \operatorname{cos} \theta)^2}} \right) \\ + \operatorname{asinh} \left(\frac{L - (U_0 \operatorname{cos} 2\theta - W_0 \operatorname{sen} 2\theta - (2Z_1 + 2nH) \operatorname{sen} \theta)}{\sqrt{V_0^2 + (U_0 \operatorname{sen} 2\theta + W_0 \operatorname{cos} 2\theta + (2Z_1 + 2nH) \operatorname{cos} \theta)^2}} \right) \\ \left. \left. + \operatorname{asinh} \left(\frac{(U_0 \operatorname{cos} 2\theta - W_0 \operatorname{sen} 2\theta - (2Z_1 + 2nH) \operatorname{sen} \theta)}{\sqrt{V_0^2 + (U_0 \operatorname{sen} 2\theta + W_0 \operatorname{cos} 2\theta + (2Z_1 + 2nH) \operatorname{cos} \theta)^2}} \right) \right\} \right] \quad \text{Ecu 18}^{[13]}$$

La ecuación anterior corresponde al caso más general, cuando el conductor está inclinado respecto de la superficie de la tierra, y embebido en la primera capa de un modelo del suelo de dos capas

Esta fórmula es válida para encontrar el potencial en cualquier punto en la primera capa del suelo. En aquellos puntos situados en la recta que coincide con el eje del propio conductor, se realizará el cálculo sobre la superficie del mismo.

DETERMINACIÓN DEL POTENCIAL MEDIO PARA UN CONDUCTOR LINEAL

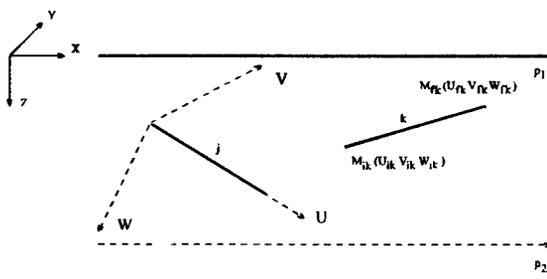


Fig.8 Determinación del potencial medio entre el electrodo j y k

Se emplea el Potencial Medio como una función que produce un resultado más exacto. La mayoría de publicaciones (como por ejemplo 7) emplean únicamente aproximaciones.

Se considera dos electrodos lineales j y k, (el sistema de referencia UVW coincide con el eje del conductor j, Fig. 8). Si V_{jk} es el potencial que el electrodo j induce en un punto cualquiera que pertenece al electrodo k, el Potencial Medio que j produce en el electrodo k está definido por la integral de V_{jk} a lo largo del electrodo k, dividida para la longitud del electrodo k; en símbolos se puede escribir

$$\bar{V}_{jk} = \frac{\int_{\psi} V_{jk} \cdot dl}{l(\psi)} \quad \text{Ecu 19}$$

donde:

- V_{jk} es el potencial que produce el conductor j en un punto cualquiera del conductor k (más exactamente en un punto de la recta que representa al conductor k) y está dado por la ecuación 18.
- El símbolo \int_{ψ} indica que se debe integrar V_{jk} a lo largo de la trayectoria ψ . En este caso la trayectoria es el segmento de recta que representa al electrodo k, (se supone despreciable el radio del conductor) y $l(\psi)$ es la longitud de dicha trayectoria. ^{[1] [9]}

Nótese, que tanto V_{jk} como el segmento de recta que representa al electrodo k están en función de U, V, W ; luego es conveniente escribir V_{jk} y la recta que representa al electrodo k en función de una sola variable, esto es posible hacerlo si se considera que las coordenadas de los puntos que forman el electrodo k (o lo que es lo mismo el segmento de recta que lo representa) no son independientes entre sí y dos cualesquiera de ellas se pueden poner en función de la restante ^[8], así:

$$\begin{aligned}
 U_k &= a^I \lambda_k + b^I \\
 V_k &= a^{II} \lambda_k + b^{II} \\
 W_k &= a^{III} \lambda_k + b^{III}
 \end{aligned}$$

Ecu 20

donde λ_k puede ser U_k, V_k o W_k , y

$$\begin{aligned}
 a^I &= \frac{U_{fk} - U_{ik}}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}} & b^I &= \frac{\lambda_{fk} U_{ik} - \lambda_{ik} U_{fk}}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}} \\
 a^{II} &= \frac{V_{fk} - V_{ik}}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}} & b^{II} &= \frac{\lambda_{fk} V_{ik} - \lambda_{ik} V_{fk}}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}} \\
 a^{III} &= \frac{W_{fk} - W_{ik}}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}} & b^{III} &= \frac{\lambda_{fk} W_{ik} - \lambda_{ik} W_{fk}}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}}
 \end{aligned}$$

Ecu 21

con $\lambda_{fk} \neq \lambda_{ik}$

Considerando la Ecu 20 y la Ecu 21, el voltaje medio que el electrodo j induce en el electrodo k puede hallarse mediante:^[9]

$$\bar{V}_{jk} = \frac{\int_{\lambda_{ik}}^{\lambda_{fk}} V_{jk}(\lambda_k) \cdot d\lambda_k}{\lambda_{fk} - \lambda_{ik}}$$

Ecu 22

donde, λ toma los valores de las coordenadas que presenten la mayor diferencia entre sí, es decir, si por ejemplo las coordenadas en U presentan mayor diferencia que las correspondientes en V o W, λ tomará los valores de las coordenadas en U.

$V_{jk}(\lambda_k)$ puede expresarse, reemplazando Ecu 21 en Ecu 18 como:

$$V_{jk} = \frac{\rho_j \cdot i_j}{4 \cdot \pi} \sum_n K^n [f1_n + f2_n + f3_n + f4_n]$$

Ecu 23

donde:

i_j es la densidad lineal de corriente del conductor j y:

$$f1_n = asinh \left(\frac{L_j - (a^I \lambda_k + b^I - 2nH \text{sen } \theta)}{\sqrt{(a^{II} \lambda_k + b^{II})^2 + (a^{III} \lambda_k + b^{III} - 2nH \text{cos } \theta)^2}} \right)$$

$$f2_n = asinh \left(\frac{a^I \lambda_k + b^I - 2nH \text{sen } \theta}{\sqrt{(a^{II} \lambda_k + b^{II})^2 + (a^{III} \lambda_k + b^{III} - 2nH \text{cos } \theta)^2}} \right)$$

$$f3_n = asinh \left(\frac{L_j - [(a^I \lambda_k + b^I) \text{cos } 2\theta - (a^{III} \lambda_k + b^{III}) \text{sen } 2\theta - (2Z_i + 2nH) \text{sen } \theta]}{\sqrt{(a^{II} \lambda_k + b^{II})^2 + [(a^I \lambda_k + b^I) \text{sen } 2\theta + (a^{III} \lambda_k + b^{III}) \text{cos } 2\theta + (2Z_i + 2nH) \text{cos } \theta]^2}} \right)$$

$$f4_n = asinh \left(\frac{[(a^I \lambda_k + b^I) \text{cos } 2\theta - (a^{III} \lambda_k + b^{III}) \text{sen } 2\theta - (2Z_i + 2nH) \text{sen } \theta]}{\sqrt{(a^{II} \lambda_k + b^{II})^2 + [(a^I \lambda_k + b^I) \text{sen } 2\theta + (a^{III} \lambda_k + b^{III}) \text{cos } 2\theta + (2Z_i + 2nH) \text{cos } \theta]^2}} \right)$$

Ecu 24 [13]

es decir, V_{jk} es expresado como la suma de senos hiperbólicos inversos. Estos senos hiperbólicos inversos tienen la forma general:

$$asinh \left(\frac{a_0 \lambda + b_0}{\sqrt{a_1 \lambda^2 + b_1 \lambda + c_1}} \right)$$

Ecu 25

La integral de la expresión anterior da como resultado:

$$\frac{a_1 \cdot \lambda + b_1}{a_1} \cdot asinh \left[\frac{a_0 \cdot \lambda + b_0}{\sqrt{X_1}} \right] + \frac{\Delta}{a_1} \cdot atan \left[\frac{\mu \cdot \lambda + \gamma}{\Delta \cdot \sqrt{X}} \right] - \frac{\mu}{a_1} \cdot asinh \left[\frac{a \cdot \lambda + b}{\sqrt{a \cdot c - b^2}} \right] + ctc$$

Ecu 26 [13]

donde;

$$a = a_1 + a_0^2 ; \quad b = b_1 + a_0 b_0 ; \quad c = c_1 + b_0^2 ; \quad \mu = a_0 b_1 - a_1 b_0 ; \quad \Delta^2 = a_1 c_1 - b_1^2$$

$$\gamma = a_0 \cdot c_1 - b_0 \cdot b_1 ; \quad X_1 = a_1 \lambda^2 + 2b_1 \lambda + c_1 ; \quad X = a \lambda^2 + 2b \lambda + c$$

Los términos a_0, b_0, a_1, b_1, c_1 pueden obtenerse por comparación de la Ecu. 24 y 25.

Cuando se trata de evaluar el potencial medio propio ($j=k$) las expresiones anteriores generan indeterminaciones, especialmente cuando $n=0$ (recuérdese que la expresión del voltaje que produce un conductor lineal es válida en cualquier punto menos en el propio eje del conductor), para evitar esto, la integración se la debe realizar sobre la superficie del conductor y no sobre su eje, es decir se debe tomar en cuenta el radio del conductor.

DETERMINACION DE LA RESISTENCIA MUTUA ENTRE ELECTRODOS LINEALES.

La resistencia mutua entre el conductor k y el conductor j está dada por:^[11]

$$\bar{R}_{jk} = \frac{\bar{V}_{jk}}{I_j}$$

Ecu 27

donde I_j es la corriente que abandona el electrodo j y vale $i_j \cdot L_j$ donde L_j es la longitud del conductor j .

Desarrollando la expresión 27 tenemos que:

$$\bar{R}_{jk} = \frac{\rho_1}{4 \cdot \pi \cdot L_j} \cdot \frac{\int_{\lambda_{jk} n = -\infty}^{\lambda_{jk} n = \infty} \sum_{\lambda_{ik} n = -\infty}^{\lambda_{ik} n = \infty} K^{|n|} \cdot [f1_n + f2_n + f3_n + f4_n] \cdot d\lambda}{\lambda_{jk} - \lambda_{ik}}$$

Ecu 28

De Ecu 28 se concluye que la resistencia mutua entre j y k es un factor fundamentalmente geométrico que depende del tamaño, la separación y la orientación entre los conductores. Es de importancia notar que una expresión completamente análoga se hubiera obtenido se determina la resistencia mutua del conductor j respecto al conductor k , ^{[1] [4]} esto es:

$$\bar{R}_{jk} = \bar{R}_{kj}$$

Ecu 29

Cuando $j=k$ se obtiene la resistencia propia del conductor j

ANALISIS DE ELECTRODOS DE TIERRA COMPLEJOS

En lo que sigue, se entiende como "electrodo de tierra complejo" a aquel que pueda considerarse formado por un numero finito de segmentos lineales de conductor, así por ejemplo una malla de puesta a tierra es un electrodo complejo ya que puede considerarse formada por varios conductores lineales, varillas, etc. Nótese que inclusive un solo electrodo lineal se puede considerar como un electrodo complejo si se le asume formado por varios conductores colineales.

DEFINICION DE LA METODOLOGIA DE SOLUCION

La evaluación del comportamiento de los electrodos de puesta a tierra, consiste fundamentalmente en la determinación de la resistencia del electrodo y de los potenciales que se generan durante condiciones de falla.

Nótese que para alcanzar este último cometido primero se debe conocer la distribución de corriente en el electrodo. ^[5]

Para alcanzar este objetivo se utilizará el método de los momentos según se lo plantea en la referencia 10.

En términos prácticos, el método de los momentos aplicado al problema de la evaluación del comportamiento de puestas de tierra implica que conceptualmente la malla o puesta a tierra puede ser dividida en muchos segmentos (pedazos rectos de conductor). Dentro de cada segmento la densidad de corriente se asume constante, pero ésta varía de segmento en segmento. ^[6]

Para un electrodo que ha sido dividido en n segmentos, el potencial que se genera en el segmento k debido a sí mismo y al resto de segmentos está dado por:

$$V_k = \sum_{j=1}^n R_{jk} I_j$$

Ecu 30

donde

R_{jk} = Resistencia mutua entre el j -ésimo segmento y el segmento k

I_j = Corriente que abandona el j -ésimo segmento

Nótese que cuando $j=k$ se está calculando el voltaje inducido en el segmento por la propia corriente que lo abandona y que la resistencia R_{jj} es la resistencia propia del segmento j .

Aplicando la ecuación 30 a cada segmento en que ha sido dividido el electrodo se obtiene un sistema de ecuaciones de orden n :

$$\begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \dots & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \dots & R_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ R_{n1} & R_{n2} & \dots & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \dots \\ I_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \dots \\ V_n \end{bmatrix}$$

Ecu 31

En forma compacta se tiene:

$$[R][I] = [V]$$

Los valores de las R_{jk} están dados por la ecuación 28. La ventaja de esta expresión respecto de otras metodologías es que permite que los segmentos en cuestión estén en cualquier orientación entre ellos y con respecto a la superficie de la tierra, además el valor de R_{jk} ha sido obtenido en base del Potencial Medio que uno de los electrodos induce sobre el otro.

Determinación de la distribución de corriente

Considerando que todos los segmentos son parte del mismo electrodo y dado que la caída de potencial entre los distintos segmentos se puede considerar despreciable, se puede asumir que el potencial que alcanzan todos los segmentos es igual al potencial que alcanza la puesta a tierra respecto de la tierra remota, este "potencial de malla" es el GPR .^[1]

$$V_1 = V_2 = V_3 = \dots V_n = GPR$$

Ecu 32

Nótese que en el sistema de la ecuación 31 además del valor de las n corrientes que se debe hallar, el valor del GPR es también desconocido, es decir, se tiene un sistema con $n+1$ incógnitas y solo n ecuaciones para resolverlo.

Para evitar el problema anterior se calcula el valor de las corrientes para que la malla de tierra se eleve un voltio respecto de la tierra remota, es decir, se pone $GPR = 1$.

Como las corrientes son calculadas para un $GPR=1$, éstas están en "por unidad" (*pu*) del valor del GPR (esto significa que la base para obtener la corriente en amperios, es el valor del GPR y no el de la corriente de diseño)

Para resolver el sistema se plantea el siguiente esquema de iteraciones^[11]:

$$I^{\nu+1} = I^{\nu} - [A(I^{\nu})]^{-1} f(I^{\nu})$$

Ecu 33

donde

$$f(I) = [R][I] - [V]$$

Ecu 34

y la matriz A , es una matriz no singular a determinarse.

La ecuación 33 corresponde a un esquema de iteraciones general. la flexibilidad

de este esquema reside en el escogimiento de la matriz A .

A continuación, por facilidad, se define a la matriz A de la siguiente forma*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & A_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

Ecu 35

es decir, se escoge la matriz A como una matriz diagonal constante cuyos elementos en la diagonal están definidos por

$$A_{jj} = \sum_{k=1}^n R_{jk}$$

Ecu 36

Finalmente reemplazando el valor de $f(I)$ (además recordando que el $GPR = 1$) en Ecu 33 obtenemos:

$$I^{\nu+1} = I^{\nu} - A^{-1} \{ [R][I^{\nu}] - [1] \}$$

Ecu 37

El valor inicial para la primera iteración de la j -ésima corriente se escoge igual a:

$$I_j = \frac{1}{\sum_{k=1}^n R_{jk}}$$

Ecu 38

esto equivale a decir que para la primera iteración se parte con una distribución de corriente aproximadamente uniforme en todo el electrodo.

La aplicación de las Ecu. 37 y 38 al sistema de la Ecu. 38 permite resolver dicho sistema para hallar las corrientes en los distintos segmentos que forman el electrodo.

Determinación de la resistencia del electrodo.^[11]

La corriente total en *pu* que abandona el electrodo está dada por:

* Nótese que pudo haberse escogido una matriz A diferente

$$I = \sum_{j=1}^n I_j$$

Ecu 39

El potencial que alcanza la puesta respecto a la tierra remota es:

$$GPR = RgI$$

Ecu 40

donde, Rg es el valor de la resistencia a tierra que se busca e I es la corriente total que abandona la puesta a tierra, reemplazando 39 en 40 y recordando $GPR=1$, se obtiene: ^[1]

$$Rg = \left[\sum_{j=1}^n I_j \right]^{-1}$$

Ecu 41

El valor en voltios del GPR si se conoce la corriente de diseño de la puesta a tierra es:

$$GPR = Rg I_{cc}$$

Ecu 42

donde;

GPR = potencial de malla. V

I_{cc} = corriente de diseño en A.

Por último el valor en amperios de la j -ésima corriente que abandona un segmento está dado por:

$$I_j (\text{en A}) = I_j (\text{pu}) \cdot GPR (\text{en V})$$

Ecu 43

Determinación de los voltajes peligrosos en el electrodo y sus cercanías. ^[1]

Una vez conocida la distribución de corriente se puede determinar los potenciales generados en los puntos de interés, así para un punto $P(x,y,0)$ en la superficie de la tierra el potencial inducido será igual al sumatorio de los potenciales generados por cada uno de los segmentos en que se haya dividido la malla; en el punto en cuestión:

$$V(P) = \sum_{j=1}^n V_j(P)$$

Ecu.44

donde cada $V_j(P)$ es el potencial producido en el punto P por la corriente I_j disipada en la tierra por el segmento (electrodo lineal) j de la puesta

a tierra y cuyo valor está dado por la ecuación 18

El voltaje de toque, V_t , en cualquier punto está dado por

$$V_t(x,y,0) = GPR - V(x,y,0)$$

Ecu 45

y el voltaje de paso V_p , entre el punto $P(x,y,0)$ y $Q(x_1,y_1,0)$ está dado por:

$$V_p = V(x,y,0) - V(x_1,y_1,0)$$

Ecu 46

Nótese que si en torno a un punto determinado se tiene el voltaje de paso en la dirección "x" (ΔV_x) y el voltaje de paso en la dirección "y" (ΔV_y), una forma conveniente de expresar el voltaje de paso en torno al punto en cuestión es mediante: ^[6]

$$V_p = \sqrt{\Delta V_x^2 + \Delta V_y^2}$$

Ecu 47

EJEMPLOS DE APLICACION

Octógono

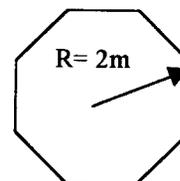


Fig. 9

Datos:

Conductor : 4/0 AWG.

Tipo de suelo: Homogéneo.

Profundidad de enterramiento: 50 cm

Resistividad de la primera capa: 100 Ω -m

Corriente de diseño: 1 A

En la tabla 1 se resumen los resultados encontrados.

TABLA 1
Resumen de los resultados obtenidos para el electrodo de la figura 9

	Semiesfera
Vpmax	0.7084 en (1.6,1.6) V
Vtmax	7.5141 en (-2,2) V
Resistencia	13.7372 Ω
GPR	13.7372 V

Distribución de la densidad de corriente

En la figura 10 se observa la distribución de la densidad de corriente para uno de los lados del octógono. Como se espera esta distribución de corriente es bastante uniforme ya que se acerca al caso del anillo [5]

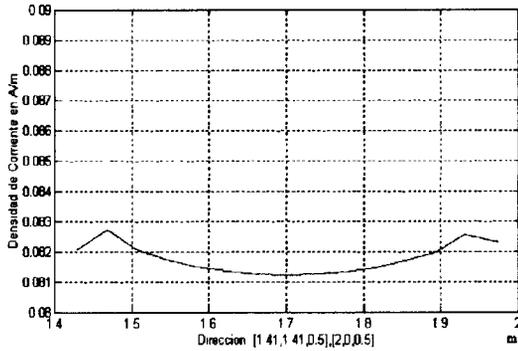


Fig. 10 Octógono: Distribución de la densidad de corriente

Potenciales en la superficie.

En la figura 11 se puede apreciar la distribución de los potenciales en la superficie para el caso del octógono.

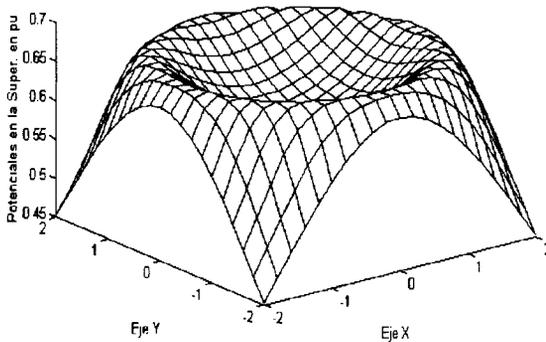


Fig. 11 Octógono: Potenciales en la superficie.

Semiesfera

La segunda configuración a estudiar corresponde a la semiesfera de la figura 12

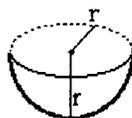


Fig. 12 Electrodo de puesta a tierra de forma semiesférica.

Dado que el programa solo trabaja con segmentos rectos, la esfera fue simulada mediante cinco octógonos paralelos a distintas profundidades (las profundidades son: 0.5, 1, 1.5, 2, 2.98 metros) de tamaño descendente. Los vértices correspondientes de los octógonos consecutivos, se hallan unidos por segmentos. En el caso del último octógono además de lo anterior sus vértices también se hallan unidos por segmentos a lo que sería la parte más baja de la esfera. Los datos utilizados para el suelo, conductor, profundidad de enterramiento radio y tamaño de la superficie para el calculo de los potenciales son los mismos del electrodo en forma de octógono

En la figura 13 se puede apreciar la distribución de potenciales en la superficie

En la tabla 2 se resume el resto de parámetros encontrados.

TABLA 2
Resumen de lo resultados obtenidos para el electrodo de la figura 5.43

	Semiesfera
Vpmax	0.36 V
Vtmax	2.73 V
Resistencia	8.00 Ω
GPR	8.00 V
I₁	0.204 A
I₂	0.174 A
I₃	0.155 A
I₄	0.120 A
I₅	0.014 A

Las I₁, I₂, ..., I₅ son las corrientes descargadas por los octógonos 1,2,... y 5 respectivamente. El octógono "1" es el superior y el octógono "5" es el que está más bajo. De estos valores de corriente mostrados se deduce que las porciones primeras de la esfera descargan más corriente que sus porciones más bajas

El voltaje de toque máximo se produce en la esquina del área considerada en el punto (2,2) y es alrededor de 64% más pequeño que el encontrado en el electrodo en forma de octógono en el mismo punto. El voltaje de paso más peligroso se da en torno al punto (-1.8,1.6) y de manera similar al voltaje de toque es menor que el correspondiente en el caso del electrodo en forma de octógono.

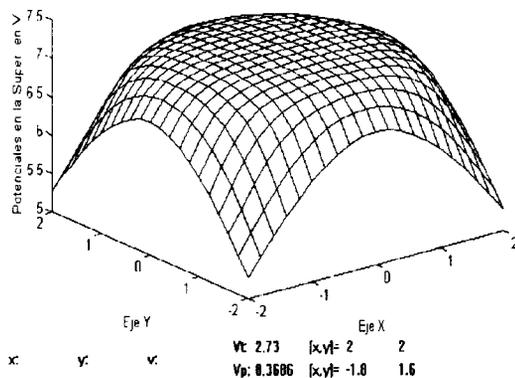


Fig. 13 Distribución de potenciales en la superficie para la semiesfera.

CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha desarrollado un modelo matemático y se ha elaborado un programa computacional basado en dicho modelo, que permite evaluar el comportamiento de los electrodos de puesta a tierra.

Metodología implementada

La aplicación del método de las imágenes para determinar el voltaje (o resistencia) producido por un electrodo puntual en un suelo estratificado, es una forma sencilla de resolver el problema en cuestión, además puede ser extendido para obtener la solución bajo estratificaciones más complicadas.

Las expresiones desarrolladas para el cálculo de las resistencias mutuas y propias entre segmentos conductores lineales, se fundamentan en la determinación del Potencial Medio entre los conductores lineales (o en la determinación del voltaje medio propio de electrodo lineal si se habla de resistencia propia) de forma que no se requiere ningún tipo de aproximación para evaluar estas cantidades a diferencia de otros trabajos presentados en la literatura.

Las expresiones para la resistencia propia y mutua son válidas para cualquier orientación del conductor respecto de la superficie de la tierra y de los conductores entre sí, es decir, las expresiones se han desarrollado para el caso más general. Las expresiones aquí planteadas no están disponibles en la literatura utilizada para desarrollar el presente trabajo.

A diferencia de lo expresado en otros trabajos, la forma de las expresiones desarrolladas permite su valoración sin mayores dificultades en "casos complicados", tales como: cuando los conductores son perpendiculares entre sí, colineales, o cuando se hallan en la superficie de la tierra. Nótese, que si bien los procedimientos para obtener estas ecuaciones constan en referencia 8; la forma de las expresiones desarrolladas en este trabajo es mucho más simple y fácil de evaluar que las propuestas en la citada referencia.

La naturaleza del método desarrollado permite evaluar el comportamiento de una gran variedad de configuraciones geométricas de electrodos de puesta a tierra, que se puedan considerar formadas por un número finito de segmentos conductores lineales

Debido a que la metodología para resolver electrodos complejos se fundamenta principalmente en la segmentación de los electrodos para su evaluación, la exactitud de los resultados obtenidos dependen fundamentalmente del grado de segmentación del electrodo.

BIBLIOGRAFIA

1. Nagar R.P., Velazquez R. Review of analytical methods for calculating the performance of large grounding electrodes Part I Theoretical considerations, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol PAS-104, No 11, pp 3124-3133, November 1985.
2. Sunde Erling, Earth Conduction Effects in Transmission Systems, Dover New York 1968.
3. ANSI/IEEE Std 80-1986, IEEE Guide for Safety in AC Substation Grounding, Fourth Printing, September 1992
4. Seely Samuel, Introduction to Electromagnetic Fields, McGraw-Hill Book Company Inc, 1958.
5. Giao Trinh & Sarma Maruvada, Effect of a two-layer earth on the electric field near HVDC ground electrodes, IEEE Transaction on Power Apparatus and Systems, Vol PAS-01, No 6, pp 2356-2365, November 1972

6. Hepe J. Robert, Computation of Potencial at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution., IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol Pas-98, No 6, pp 1978-1989, Nov/Dec 1979.
7. Dawalibi Farid, Mukhedkar Dinkar, Optimum Desing of Substation Grounding in a Two Layer Earth Structure, Part I-Analytical Study, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol PAS-94, No 2, pp 252-261, March/April 1975.
8. Dawalibi Farid, Mukhedkar Dinkar, Resistance Calculation of Iiterconnected Grounding Electrodes, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol PAS-96, No 1, pp 59-64, January/February 1977.
9. Marsden J., Tromba A., Cálculo Vectorial, W.H. Freeman and Company, San Francisco, California, E.U.A., 1976.
10. Harrington Roger, Matrix Methods for Field Problems, Proceedings of the IEEE, Vol 55, No 2, pp 136-149, february 1967.
11. Bergen Arthur, Power Systems Analysis, Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1986.
12. Kouteynikoff Pierre, Numerical Computation of the Grounding Resistance os Substations and Towers, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol Pas-99, No 3, pp 957-965, May/June 1980.
13. Navarrete Jofre, Evaluación del comportamiento de los electrodos de puesta a tierra mediante el uso del computador personal. Tesis, Escuela Politécnica Nacional , Quito Abril 1996

BIOGRAFIA DE LOS AUTORES



Jofre Navarrete G.-
Nació en Quito, Ecuador, en 1968. Se recibió de Ingeniero Eléctrico en la Escuela Politécnica Nacional de Quito en 1996. Actualmente se desempeña como asistente del Departamento de Ingeniería de la Corporación PRONACA. Sus áreas de interés son principalmente los sistemas de puestas a tierra y el diseño de instalaciones de alta y baja tensión.



Paul Ayora González*.-
Nació en Azogues, Ecuador, en 1946. Se recibió de Ingeniero Eléctrico en la Escuela Politécnica Nacional de Quito en 1971 y recibió el título de Master of Science in High Voltage Engineering, en la Universidad de Manchester Inglaterra en 1997.

A ejercido la cátedra en la Escuela Politécnica Nacional de Quito por el lapso de 25 años, actualmente es profesor principal en las cátedras de diseño en Alto Voltaje y Teoría Electromagnética y está dedicado a la investigación en el área de Alto Voltaje y materiales de ingeniería.

*En esta ocasión el autor ha seleccionado el tema de este trabajo para presentarlo en las XVIII JIEE de la Escuela Politécnica Nacional, con ocasión de conmemorar sus 25 años de cátedra en esta prestigiosa institución.