

SIMULACIÓN DE UN SISTEMA DE CONTROL CON MÚLTIPLES NO LINEALIDADES EN EL LAZO

Ing. Javier Montenegro Silva
Ingeniero en Electrónica y Control
Escuela Politécnica Nacional, 1996

Ing. Marco Barragán
Msc. Ingeniería de Sistemas
Profesor Principal EPN

RESUMEN

Se ha desarrollado un programa computacional que permite obtener la respuesta temporal de sistemas lineales y no lineales hasta décimo orden. Los sistemas lineales pueden representarse por medio de funciones de transferencia o variables de estado y los no lineales por medio de un sistema lineal y una no linealidad, o por medio de ecuaciones no lineales de estado.

Utilizando la representación en variables de estado, es posible también obtener la respuesta temporal de sistemas de ecuaciones diferenciales.

ABSTRACT

A computer program that allows one to obtain the temporal response of linear and non-linear systems until the tenth order has been developed. Linear systems can be represented by transfer functions or state variables and non-linear systems by a linear system and a non-linearity or by non-linear state equations.

It also allows one to obtain (using state variables representation), the temporal response of differential equations systems.

1. INTRODUCCIÓN

Es un hecho conocido que muchas relaciones entre magnitudes físicas no son lineales, aunque frecuentemente se aproximan por medio de ecuaciones lineales por fines de simplificación matemática. Esta simplificación puede resultar satisfactoria mientras las soluciones restantes estén de acuerdo con los resultados experimentales.

Sin embargo, es en veces necesario encontrar soluciones más exactas a los modelos matemáticos de los sistemas físicos y en ese momento se debe recurrir a los modelos no lineales de los mismos, cuyas soluciones no son generalmente fáciles de obtener y sólo son posibles en sistemas simples y en forma analítica.

Dado el moderno desarrollo de técnicas computacionales tanto a nivel de hardware como de software, es posible ahora realizar algoritmos numéricos para este tipo de sistemas, inclusive para aquellos de gran complejidad, lo cual brinda al ingeniero una nueva herramienta tanto para el análisis como para el diseño de sistemas de control.

2. TEORÍA DE LOS SISTEMAS DE CONTROL.

2.1 SISTEMAS LINEALES Y NO LINEALES

Los sistemas lineales son aquellos en los que las ecuaciones diferenciales que definen al modelo son lineales. Una ecuación diferencial es lineal si los coeficientes son constantes o funciones únicamente de la variable independiente. La propiedad más importante de los sistemas lineales es que se puede aplicar el principio de superposición. Dicho principio establece que la respuesta producida por la aplicación simultánea de dos funciones excitadoras distintas, es la suma de las dos respuestas individuales. Por tanto, para sistemas lineales se puede calcular complicadas soluciones a las ecuaciones diferenciales lineales en base a varias soluciones simples.

Un sistema lineal constituido por componentes concentrados e invariables en el tiempo puede ser descrito por ecuaciones diferenciales lineales, invariantes en el tiempo de la forma:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y' + a_n y &= \quad (n \geq m) \\ b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x' + b_m x & \end{aligned}$$

Como se puede observar, n debe ser mayor o igual a m para sistemas físicos realizables. Un sistema no lineal, en cambio está representado por ecuaciones diferenciales no lineales tales como:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A \sin \omega t$$

2.2. MODELOS DE SISTEMAS FÍSICOS.

La modelación de un sistema físico puede realizarse de distintas maneras dependiendo de la aplicación que vaya a realizarse, así por ejemplo, es en veces más útil tener una representación usando un juego de ecuaciones diferenciales de primer orden llamado también modelo a variables de estado, para el caso de problemas de control óptimo, en tanto que en el análisis de respuesta de frecuencia o respuesta transitoria es más útil la función de transferencia. Sin embargo, cuando es deseable conocer el comportamiento real de un sistema, puede ser necesario obtener el modelo no lineal del mismo en forma de ecuaciones de estado no lineales.

2.2.1. REPRESENTACIÓN DE MODELOS LINEALES EN FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA.

La función de transferencia de un sistema lineal invariante en el tiempo está definida como la relación de la transformada de Laplace de la salida (función respuesta) a la transformada de Laplace de la entrada (función excitadora), bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero.

Sea un sistema lineal invariante en el tiempo definido por la siguiente ecuación diferencial:

$$\begin{aligned} a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y + a_n y &= \dots \\ &= b_0 x^{(m)} + b_1 x^{(m-1)} + \dots + b_{m-1} x + b_m x \end{aligned} \quad (n \geq m)$$

donde y es la salida del sistema y x es la entrada. Se obtiene la función de transferencia de este sistema tomando las transformadas de Laplace de ambos miembros de la ecuación bajo la suposición de que todas las condiciones iniciales son cero, es decir:

$$G(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_{n-1} s + a_n}$$

2.2.2. REPRESENTACIÓN DE MODELOS LINEALES EN VARIABLES DE ESTADO.

Sea el sistema de enésimo orden siguiente:

$$\begin{aligned} y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} y + a_n y &= \dots \\ &= b_0 u + b_1 u + \dots + b_{n-1} u + b_n u \end{aligned}$$

Nótese que se considera el caso extremo en el cual el orden del numerador es igual al orden del denominador y el coeficiente de la derivada más alta en y es $a_0=1$; caso contrario debería dividirse toda la ecuación para a_0 y retomar a la forma de la ecuación anterior.

Si se eligen las siguientes n variables como un conjunto de variables de estado:

$$\begin{aligned} x_1 &= y - \beta_0 \\ x_2 &= \dot{y} - \beta_0 \dot{u} - \beta_1 u = x_1 - \beta_1 u \\ x_3 &= \ddot{y} - \beta_0 \ddot{u} - \beta_1 \dot{u} - \beta_2 u = x_2 - \beta_2 u \\ x_n &= y^{(n-1)} - \beta_0 u^{(n-1)} - \beta_1 u^{(n-2)} - \dots - \beta_{n-2} \dot{u} - \beta_{n-1} u = x_{n-1} - \beta_{n-1} u \end{aligned}$$

donde $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ son determinadas por:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= b_0 \\ \beta_1 &= b_1 - a_1 \beta_0 \\ \beta_2 &= b_2 - a_1 \beta_1 - a_2 \beta_0 \\ \beta_3 &= b_3 - a_1 \beta_2 - a_2 \beta_1 - a_3 \beta_0 \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

$$\beta_n = b_n - a_1 \beta_{n-1} - \dots - a_{n-1} \beta_1 - a_n \beta_0$$

Con esta elección de variables de estado queda garantizada la existencia y unicidad de la solución de la ecuación de estado, y se obtienen las siguientes ecuaciones de estado y de salida para el sistema propuesto:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u$$

$$y = Cx + Du$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \bullet \\ \bullet \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0 u$$

2.2.3. REPRESENTACIÓN DE MODELOS NO LINEALES EN ECUACIONES DE ESTADO.

Generalmente, antes de obtener la representación de un modelo en función de transferencia o en ecuaciones de estado, es necesario realizar una linealización de dicho sistema. Siendo esta linealización válida para ciertos casos de control, siempre y cuando las variables linealizadas no se desvíen excesivamente de sus puntos de operación.

La forma más común de linealizar un modelo es por medio de una serie de Taylor alrededor del punto de operación, es así que un modelo de la forma $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, tiene un modelo lineal equivalente $y = K_1x_1 + K_2x_2 + \dots + K_nx_n$, donde K_1, K_2, \dots, K_n , son las derivadas parciales de y evaluadas en los puntos de operación de x_1, x_2, \dots, x_n .

Como se puede apreciar, al cambiar el punto de operación varía el modelo lineal, lo cual obliga a recalcular el mismo si se desea realizar el análisis en un rango extenso.

Para utilizar una notación semejante a la empleada en la representación en variables de estado, en este trabajo la representación de sistemas no lineales en ecuaciones no lineales de estado, es:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + B \cdot u \\ y &= g(x) + D \cdot u \end{aligned}$$

Es necesario aclarar que los modelos descritos por la ecuaciones anteriores son lineales en la función excitadora, existiendo no linealidad solamente en la función de salida.

\dot{x} es el vector que contiene las variables de estado $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n$, donde n es el orden del sistema.

$f(x)$ representa el juego de ecuaciones no lineales que son de la forma:

$$f_i(x) = \text{term\#1} + \dots + \text{term\#m} \quad \text{para } 1 \leq i \leq n$$

donde cada término puede ser de tres tipos:

$$\begin{aligned} \text{term\#i}_1 &= Kx_1^{p1}x_2^{p2}\dots x_n^{pn} \\ \text{term\#i}_2 &= K f(x_1)f(x_2)\dots f(x_n) \end{aligned}$$

donde $f(x_j)$ puede ser $\text{sen}(x_j), \text{cos}(x_j), \text{tan}(x_j)$ o $\text{exp}(x_j)$ para $1 \leq j \leq n$.

$$\text{term\#i}_3 = K \text{sqr}(k_1x_1 + k_2x_2 + \dots + k_nx_n)$$

Como se puede observar, en cada ecuación no lineal se permiten m términos generales, número que no tiene relación con las n variables de estado del sistema.

Finalmente B es el vector que contiene las constantes de la función excitadora B_1, \dots, B_n .

Para la ecuación de salida se repite el modelo anterior, por lo cual es posible obtener varias salidas de la planta.

Se elige este modelo debido a que cubre un vasto rango de modelos de sistemas no lineales estructurales autónomos.

2.3. COMPENSACIONES.

Compensación es el ajuste de un sistema para satisfacer especificaciones dadas ya sea en lazo abierto o cerrado. Puesto que los sistemas de control se proyectan para cumplir con determinadas tareas, las condiciones requeridas se denominan especificaciones de funcionamiento y generalmente se refieren a exactitud, estabilidad relativa y velocidad de respuesta.

2.3.1. COMPENSADORES PID.

Los compensadores automáticos industriales producen diversas señales de control denominadas acciones de control. Las más frecuentes son las acciones de control proporcional (P), proporcional integral (PI), proporcional derivativa (PD) y proporcional integral derivativa (PID).

Esta acción de control combina los efectos de las acciones proporcional, integral y derivativa individuales. La ecuación que relaciona esta acción de control está dada por:

$$u(t) = K_p e(t) + K_p T_d \frac{de(t)}{dt} + \frac{K_p}{T_i} \int_0^t e(t) dt$$

$$\frac{U(s)}{E(s)} = K_p \left(1 + T_d s + \frac{1}{T_i s} \right)$$

donde K_p representa la ganancia proporcional, T_d es el tiempo derivativo y T_i el tiempo integral.

Sin embargo, industrialmente los compensadores que generalmente se utilizan, tienen las configuraciones que se muestran en la figura 1. Como se puede apreciar, existen básicamente dos diferencias respecto a las acciones PID antes mencionadas:

- En la parte derivativa del compensador PID Tipo 1 se introduce un término $1/(1+\alpha T_d s)$ cuya función es filtrar los ruidos de alta frecuencia y retardar el efecto derivativo ante cambios bruscos en la señal de referencia. α es un valor comprendido entre 0.1 y 0.3.
- Se limita la parte integral a un valor máximo determinado por el usuario, esto se hace con el fin de evitar saturaciones en los integradores del PID y reducir el riesgo de entrar en una respuesta oscilatoria creciente o decreciente.

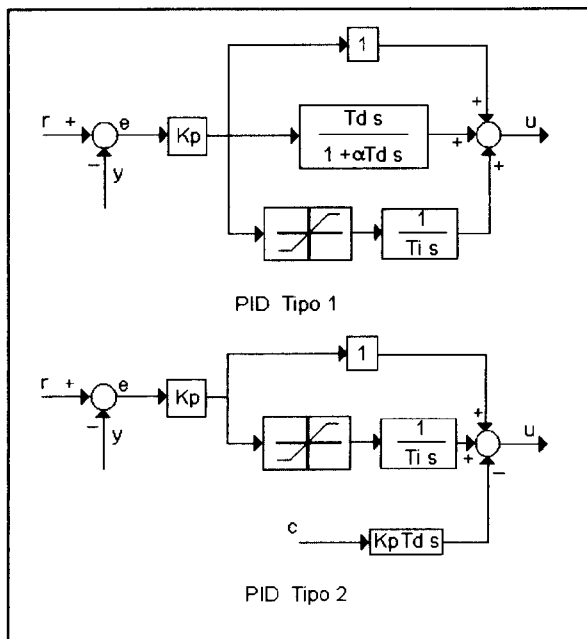


Figura 1. Tipos de Controladores PID Industriales.

Adicionalmente, el PID Tipo 2 permite que la acción de control derivativa sea respecto a la

salida de la planta (c); esta realimentación es útil cuando el elemento de medición $H(s)$ presenta retardos que disminuirían notablemente el efecto de la acción derivativa.

Es importante notar que se utiliza el compensador en su totalidad es decir están presentes todas las acciones de control (PID), sin embargo, si se desea obtener una acción determinada, por ejemplo proporcional integral, basta con fijar T_d en cero. Así mismo, si se desea una acción proporcional derivativa se asigna a T_i un valor elevado y desaparece el efecto integral.

2.3.2. REALIMENTACIÓN TACOMÉTRICA.

Este tipo de realimentación se utiliza generalmente para mejorar el comportamiento de un servomecanismo. El dispositivo que se utiliza como transductor es un tacómetro (generalmente de cc) que produce una tensión proporcional a su velocidad de rotación.

De este modo, se puede utilizar la derivada de la señal de salida para mejorar el comportamiento de un servomecanismo. Al obtener la derivada de la posición de salida, es deseable usar un tacómetro en lugar de derivar físicamente la señal de salida, esto se debe a que la diferenciación amplifica los efectos de ruido.

Si por ejemplo se utiliza un potenciómetro para medir la posición del servomecanismo, existen ruidos discontinuos debido al desplazamiento del contacto del potenciómetro con las espiras del mismo. Por tanto, no se debe conectar un elemento derivador a la salida del mismo y en cambio debe utilizarse un tacómetro para realimentar la velocidad y generar el error actuante.

Sea el servomecanismo de la siguiente figura:

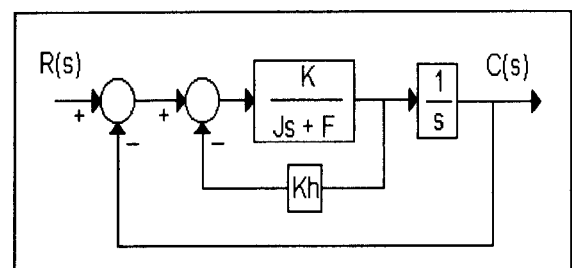


Figura 2. Diagrama de bloques de un servomecanismo.

En este dispositivo la señal de velocidad, juntamente con la señal de posición, son

realimentadas a la entrada para producir la señal de error actuante. En cualquier servomecanismo se puede generar fácilmente una señal de velocidad como esta, con un tacómetro. Simplificando el diagrama anterior se tiene

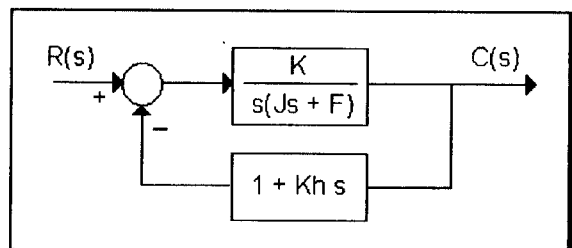


Figura 3. Diagrama de bloques simplificado.

que es la forma usual en que se representa la realimentación tacométrica o también conocida como realimentación de velocidad.

2.3.3. REDES DE COMPENSACIÓN.

Una red de compensación es una función de transferencia que incluida en el lazo directo de una planta, modifica la misma para producir el efecto global deseado para el sistema.

El uso de un compensador en adelanto o en atraso incrementa en uno el orden del sistema, en cambio el uso de un compensador en atraso/adelanto incrementa el orden del sistema en dos, estos cambios se dan siempre y cuando no exista cancelación de los ceros de las redes de compensación con los polos de la función de transferencia de lazo abierto no compensada.

Sin entrar en detalles de las técnicas de compensación utilizando redes, se describe brevemente las funciones de transferencia de las redes de adelanto, atraso y atraso/adelanto y los beneficios del uso de estas.

2.3.3.1. COMPENSACIÓN EN ADELANTO.

Una red de adelanto tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\alpha T}} \quad (\alpha < 1)$$

Tiene un cero en $s = -1/T$ y un polo en $s = -1/(\alpha T)$. Como $\alpha < 1$, se ve que el cero está

ubicado a la derecha del polo en el plano complejo.

En un análisis de frecuencia puede observarse que una red de adelanto es un filtro pasa altos que brinda un adelanto de fase a frecuencias intermedias.

Por ello, en el dominio en s , la compensación en adelanto permite modificar la forma del lugar de las raíces, dando así los polos de lazo cerrado deseados. En el dominio de frecuencia la compensación en adelanto aumenta el margen de fase y el ancho de banda, esto último se traduce en una reducción en el tiempo de establecimiento.

Sin embargo, una compensación en adelanto exige un incremento adicional de ganancia para compensar la atenuación de la red, lo cual se traduce en componentes más voluminosos y por ende más costosos.

2.3.3.2. COMPENSACIÓN EN ATRASO.

Una red de atraso o retardo tiene la siguiente función de transferencia:

$$G_c(s) = \frac{1}{\beta} \left(\frac{s + \frac{1}{T}}{s + \frac{1}{\beta T}} \right) \quad (\beta > 1)$$

En el plano complejo una red de retardo tiene un polo en $s = -1/(\beta T)$ y un cero en $s = -1/T$. Puesto que $\beta > 1$ el polo está ubicado a la derecha del cero.

Analizando en frecuencia, una red de retardo es en cambio un filtro pasabajos y logra su resultado por la atenuación a altas frecuencias.

A diferencia de la compensación en adelanto, la compensación en retardo reduce el ancho de banda, esto es particularmente útil cuando existen señales de ruido presentes mismas que se eliminan por la atenuación mencionada.

Adicionalmente, la compensación en retardo puede mejorar la exactitud en estado estacionario aunque reduce el ancho de banda. Si la reducción en el ancho de banda es excesiva, el sistema compensado presentará una respuesta lenta.

3. DEFINICIÓN DE LA ESTRUCTURA.

Para realizar el estudio de los sistemas de control previamente expuestos, se propone la siguiente estructura para el lazo de control:

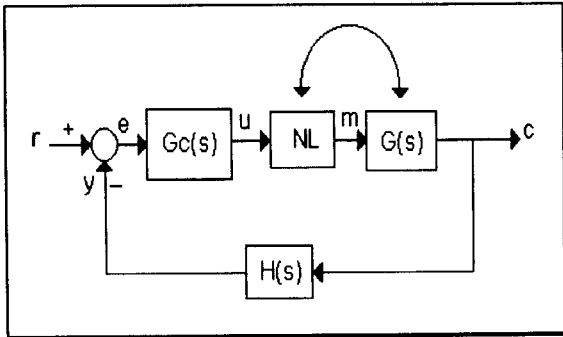


Figura 4. Sistema Propuesto.

Como se muestra en la figura 4., $G_c(s)$ representa al compensador mismo que puede ser un controlador PID Tipo 1 o 2 o una red de atraso/adelanto. NL representa la parte no lineal que puede escogerse entre un grupo de relés, saturaciones e histéresis. $G(s)$ representa la planta que en el caso de ser estructuralmente lineal, puede representarse en forma de función de transferencia o en variables de estado. Si es estructuralmente no lineal, en cambio se representa en forma de ecuaciones no lineales de estado. Finalmente, $H(s)$ es el transductor de realimentación que puede escogerse entre una realimentación unitaria, una realimentación tacométrica o una función de transferencia.

También se permite intercambiar el orden de los componentes entre la planta y la no linealidad siempre y cuando se haya ingresado esta última.

En la figura 4. también se muestran las diferentes señales en el lazo de control, así por ejemplo, r es la señal de referencia que puede escogerse entre una función impulso, una función paso o una función rampa de cualquier amplitud.

e es el error actuante, u es la salida del controlador, m la salida de la no linealidad, c es la señal controlada de salida de todo el sistema y finalmente y es la señal de realimentación.

El análisis en sí de los sistemas de control lineales y no lineales, se restringe exclusivamente a la respuesta temporal de todo sistema y de cada una de sus partes ante las señales de excitación mencionadas, realizando la graficación de cada una de estas

señales y su rastreo en un rango de análisis determinado.

4. MÉTODO DE SIMULACIÓN.

Para realizar la simulación temporal del sistema, se efectúa un rastreo de la señal a través de todos los componentes presentes en el lazo de control.

Sea cual fuere el tipo de representación de la planta con el cual se trabaje, se realiza una transformación del mismo (de requerirse) para llevarlo a la forma:

$$\dot{x} = f(x, u)$$

Representación que para intervalos pequeños, puede escribirse como:

$$\Delta x / \Delta t = f(x, u)$$

De lo anterior, el método de simulación digital se convierte en un algoritmo recursivo de la forma:

$$x_i = x_{i-1} + \Delta x \quad \text{donde} \quad \Delta x = f(x_{i-1}, u) \Delta t$$

$$x_{i-1} = x_i$$

Finalmente, la salida se calcula utilizando la siguiente expresión:

$$y = g(x, u)$$

5. PROGRAMA

5.1. DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA.

Para realizar la simulación de un sistema de control con múltiples no linealidades en el lazo, se desarrolló un programa de software denominado **SNL** (Simulador de Sistemas No Lineales), que permite la simulación temporal de la estructura propuesta en la figura 4.

En el análisis y diseño de sistemas de control, el visualizar la respuesta temporal brinda la información necesaria para asegurar si dicho sistema cumple o no con las especificaciones requeridas del mismo. Sin embargo, la tarea de graficación se vuelve muy complicada para sistemas de órdenes superiores a dos, más aún cuando existen no linealidades en el lazo de control o cuando la planta es no lineal estructuralmente, sin contar con la presencia de compensaciones o transductores de realimentación.

Más allá de la tarea de graficación queda la dificultad de modificar en forma rápida y sencilla los parámetros o la estructura del sistema, proceso normal en cualquier proyecto de control y razón por la cual se desarrolló el SNL como una herramienta de ayuda para la especialización de Control.

5.2. FACILIDADES Y ALCANCE.

SNL permite visualizar la respuesta temporal, ya sea en lazo abierto o cerrado, de sistemas de control lineales o no lineales hasta de orden 10. Se permite el ingreso de compensaciones de tipo PID y redes de atraso/adelanto, además puede incluirse una no linealidad del conjunto expuesto en el capítulo 2, sección 2.2. Adicionalmente, en el lazo de realimentación puede incluirse un transductor o una realimentación tacométrica y se contempla la posibilidad de intercambiar el orden entre la no linealidad y la planta.

La planta, en el caso de ser lineal, puede ingresarse en forma de función de transferencia y variables de estado, caso contrario, en forma de ecuaciones no lineales de estado. Los compensadores PID se definen ingresando los coeficientes K_p , T_i y T_d , al igual que la realimentación tacométrica ingresando K_h . Para la no linealidad, se escoge una entre el grupo de relés, saturaciones e histéresis disponibles y se ingresan los valores que definen sus características de transferencia. Finalmente, en el caso de las redes de atraso/adelanto y el transductor de realimentación, se ingresan en forma de función de transferencia.

Es muy importante notar que todos los modelos de funciones de transferencia permiten que el *orden del numerador* pueda ser *igual al orden del denominador* y no solamente menor.

En el caso de plantas no lineales, se permite la inclusión en el modelo de ecuaciones de estado no lineales, de términos con cualquier grado de potenciación, funciones trigonométricas o exponenciales y adicionalmente raíces cuadradas.

5.3. REQUERIMIENTOS EN HARDWARE Y SOFTWARE.

Puesto que SNL fue desarrollado en Visual Basic 3.0, requiere para su ejecución lo siguiente:

- Un computador IBM o compatible, con las siguientes características:

- Sistema Operativo 6.0 o superior
- Sistema Operativo Windows 3.1. o superior.
- 1 MB de espacio en disco duro.
- 1 FDD de alta densidad 1.44 MB para su instalación.
- 4 MB RAM, no necesarias para el SNL pero si recomendables para uso de paquetes en ambiente Windows.
- Tarjeta de gráficos SVGA (800 x 600) y monitor en color para dicha resolución.

- Una impresora.

6. RESULTADOS.

Para poder evaluar los resultados que brinda el programa, se presenta el siguiente ejemplo como un problema de simulación:

Dado el sistema de la figura 5, encuentre su modelo matemático en ecuaciones d estado y analice su comportamiento. Grafique la altura h_1 y h_2 y los caudales Q_{12} y Q_2 en función del tiempo.

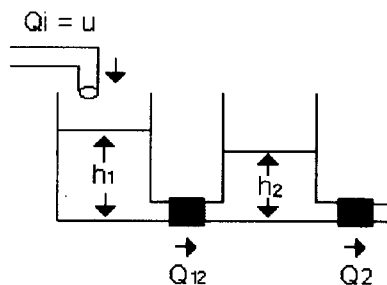


Figura 5. Sistema hidráulico.

Considere una relación no lineal para las válvulas dada por: $Q = k H^{1/2}$

Las áreas de los tanques son $A_1 = A_2 = 2 \text{ m}^2$
 $k = 0.01 \text{ m}^{2.5}/\text{s}$, $h_1(0) = 3\text{m}$ y $h_2(0) = 4\text{m}$
 Q_i es una entrada paso de amplitud $u = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$

Para encontrar el modelo matemático de este sistema se procede de la siguiente manera:

$$x_1 = h_1, x_2 = h_2$$

En los tanques

$$Q_i = Q_{c1} + Q_{12} \quad \text{Ec. 1}$$

$$Q_{12} = Q_{c2} + Q_2 \quad \text{Ec. 2}$$

Utilizando x_1, x_2 , la relación no lineal para las válvulas y conociendo además que $Q_c = Ah'$

se tiene que las ecuaciones 1 y 2 pueden escribirse como:

$$Q_i = A_1 \dot{h}_1 + k \text{ sgr}(h_1 - h_2)$$

$$u = A_1 \dot{x}_1 + k \text{ sgr}(x_1 - x_2)$$

$$\dot{x}_1 = -k/A_1 \text{ sgr}(x_1 - x_2) + 1/A_1 u$$

Ec. 3

$$Q_{12} = A_2 \dot{h}_2 + k \text{ sgr}(h_2)$$

$$k \text{ sgr}(h_1 - h_2) = A_2 \dot{h}_2 + k \text{ sgr}(h_2)$$

$$k \text{ sgr}(x_1 - x_2) = A_2 \dot{x}_2 + k \text{ sgr}(x_2)$$

$$\dot{x}_2 = -k/A_2 \text{ sgr}(x_2) + k/A_2 \text{ sgr}(x_1 - x_2) \quad \text{Ec. 4}$$

y además:

- | | |
|----------------------------------|---------------------|
| $y_1 = x_1$ | altura del tanque 1 |
| $y_2 = x_2$ | altura del tanque 2 |
| $y_3 = k \text{ sgr}(x_1 - x_2)$ | caudal Q_{12} |
| $y_4 = k \text{ sgr}(x_2)$ | caudal Q_2 |

Para analizar los valores finales se hace $\dot{x}_1 = 0$

y $\dot{x}_2 = 0$, con ello:

$$x_1 = 2 x_2 \quad \text{y} \quad x_2 = (u / k)^2$$

Reemplazando las constantes se tiene $y_1 = x_1 = 4.5 \text{ m}$ y $y_2 = x_2 = 2.25 \text{ m}$, y además $y_3 = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$ y $y_4 = 0.015 \text{ m}^3/\text{s}$.

Reemplazando las constantes se tiene:

$$\dot{x}_1 = -0.005 \text{ sgr}(x_1 - x_2) + 0.5 u$$

$$\dot{x}_2 = -0.005 \text{ sgr}(x_2) + 0.005 \text{ sgr}(x_1 - x_2)$$

- | |
|-------------------------------------|
| $y_1 = x_1$ |
| $y_2 = x_2$ |
| $y_3 = 0.01 \text{ sgr}(x_1 - x_2)$ |
| $y_4 = 0.01 \text{ sgr}(x_2)$ |

Este modelo ingresado en SNL se muestra en la siguiente figura:

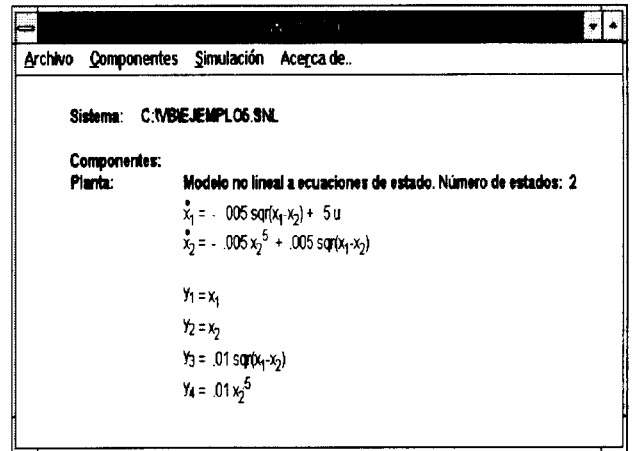


Figura 6. modelo del ejemplo en SNL.

Ingresando las condiciones iniciales $x_1(0) = 3\text{m}$, $x_2(0) = 4\text{m}$ y realizando la simulación en lazo abierto para 1500 segundos se obtiene:

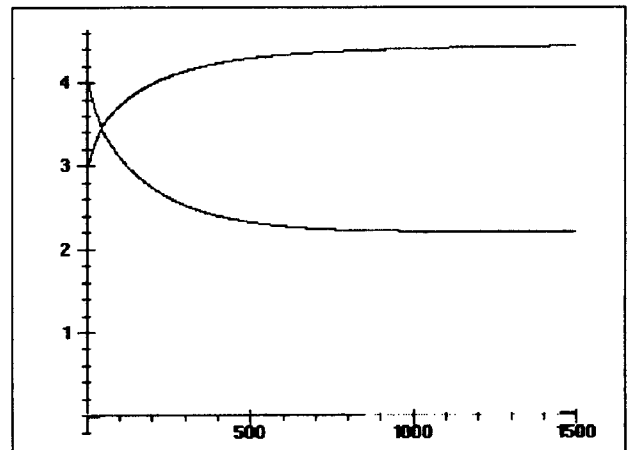


Figura 7. Salidas del sistema del ejemplo.

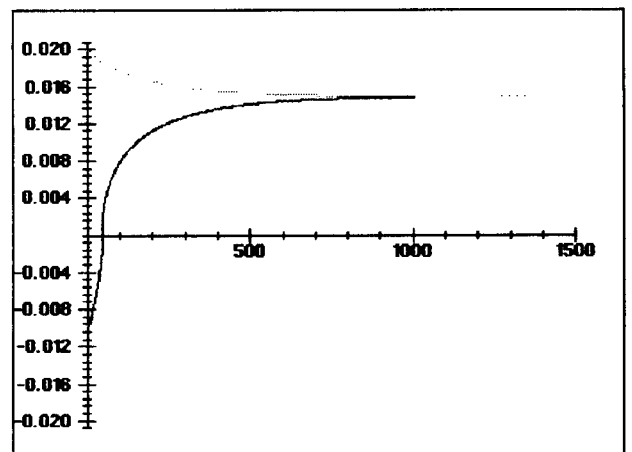


Figura 8. Detalle de las salidas y_3 , y_4 .

La figura 7 muestra todas las salidas del sistema $y_1 \dots y_4$. Como puede apreciarse la altura del tanque 1 crece desde su valor inicial de 3m hasta el valor esperado de 4.5m, aplicando el criterio del 2% esto sucede a los 1076 s aproximadamente. El tanque 2 en

cambio, desciende desde 4m hasta 2.25m como se esperaba.

Sin embargo, no es posible visualizar y_3 y y_4 que corresponden a los caudales Q_{12} y Q_2 debido a los rangos de graficación. Por ello, para poder apreciar con claridad estas salidas se cambian los rangos de graficación desde - 0.02 hasta 0.02 obteniéndose los resultados de la figura 8.

En este gráfico se puede apreciar que inicialmente Q_{12} tiene valores negativos, esto debe interpretarse entendiéndose que el líquido fluye del tanque 2 hacia el tanque 1 debido a los valores iniciales de altura. Finalmente, los dos caudales convergen al valor final de 0.015 m^3/s que es la solución lógica del problema, ya que si las alturas de los tanques se mantienen constantes, el caudal de entrada debe ser igual al caudal entre los dos tanques y al caudal de salida, comprobándose de esta manera el óptimo funcionamiento del programa de simulación.

7. CONCLUSIONES.

El programa SNL simplifica al usuario la tediosa tarea del proceso repetitivo de operaciones matemáticas complejas, lográndose entonces una eficiente utilización del tiempo, la cual se traduce a su vez en una mejora en el análisis y diseño de sistemas de control.

Puesto que el programa SNL funciona bajo ambiente Windows, hereda de éste todas las bondades referidas a la simplicidad de uso, la intuitiva experimentación para el aprendizaje del funcionamiento del SNL, y el control del usuario sobre el programa.

El SNL permite de una forma sencilla el ingreso de sistemas lineales y no lineales hasta de décimo orden, valor que con fines prácticos resulta más que suficiente para el análisis y diseño de sistemas de control.

Se extiende el uso del programa a la resolución de ecuaciones diferenciales no lineales, utilizando para ello, la representación de las mismas en forma de ecuaciones no lineales de estado.

8. BIBLIOGRAFÍA.

- OGATA Katsuhiko, Ingeniería de Control Moderna, Prentice - Hall, 1985

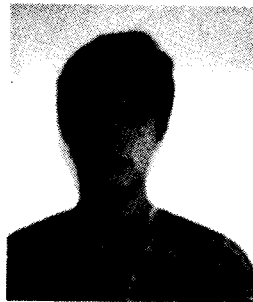
- DORF Richard, Sistemas Automáticos de Control, Fondo Educativo Latinoamericano, 1978.

- PARRA Angel, Programa Digital para el Análisis de Sistemas No Lineales mediante el Trazo de Trayectorias de Fasa Hasta en Tres Dimensiones, E.P.N., 1982.

- CARDENAS Wilmer, Programa Semigráfico para Analizar Estabilidad de Sistemas No Lineales usando la Función Descriptiva, E.P.N. 1994.

- MICROSOFT, Visual Basic Reference Guide, Microsoft Corporation, 1995.

9. BIOGRAFÍAS.



MONTENEGRO SILVA, JAVIER.- Nació en Tulcán, Ecuador el 3 de agosto de 1972. Obtuvo el título de Bachiller en Humanidades Modernas especialización Físico - Matemáticas en el Colegio San Gabriel de Quito en 1989. Sus estudios superiores los realizó en la Escuela

Politécnica Nacional en Quito, obteniendo su título en Ingeniería Electrónica y Control en 1996. Actualmente se encuentra cursando su Post - grado en Dirección de Empresas en la Universidad Andina Simón Bolívar en Quito.

BARRAGÁN BEDOYA, MARCO.- Obtuvo su título de Ingeniero en Electrónica y Telecomunicaciones en la Escuela Politécnica Nacional en enero de 1973. Posteriormente realizó sus estudios de Post - grado en la Universidad de Sao Paulo, Brasil obteniendo el título de Master en Ciencias, especialidad Ingeniería de Sistemas en diciembre de 1977. Actualmente se desempeña como profesor a tiempo completo en la Escuela Politécnica Nacional de Quito.

