ESTUDIO COMPUTACIONAL SOBRE LOS PARÁMETROS DE DISEÑO DE LOS SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN TIPO 2

Barragán B. Marco A. Prof. MSc.
Escuela Politécnica Nacional

RESUMEN

Este artículo trata sobre el diseño de sistemas de control de polos dominantes, cuando aquel que está siendo diseñado se parece más a un sistema de segundo orden tipo 2 antes que a un tipo 1. Se hace un estudio comparativo, y usando el Simulink de MATLAB, se obtienen curvas de diseño que se presentan como resultado.

ABSTRACT

This article deals with the designing of pole dominant control systems, when that being designed resembles more a type 2 second order system rather than a type one. A comparative study is done, and using MATLAB´s Simulink, design curves are presented as results.

1. INTRODUCCIÓN

En el diseño de sistemas de control, normalmente se busca que el modelo compensado sea de raíces dominantes, es decir que aproximadamente se comporte como un modelo de bajo orden, típicamente 2, a fin de poder predecir su comportamiento.
En esta línea de razonamiento, es del caso que invariablemente, los textos se dedican al estudio de los sistemas de segundo orden tipo 1, pero no hay información sobre los tipo 2, a fin de poder seleccionar por ejemplo un punto de diseño seguro.
Para comenzar a diferenciarlos, las fórmulas (1-1) y (1-2) muestran las funciones de transferencia en lazo abierto (G(s)), y en lazo cerrado (T(s)) para los sistemas tipo 1 y tipo 2, respectivamente.

Sistema tipo 1:

$$G(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+2\xi\omega_n)}$$
$$T(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad (1\text{-}1)$$

Sistema tipo 2:

$$G(s) = \frac{\omega_n(2\xi s+\omega_n)}{s^2}$$
$$T(s) = \frac{\omega_n(2\xi s+\omega_n)}{s^2+2\xi\omega_n s+\omega_n^2} \quad (1\text{-}2)$$

En estas dos ecuaciones se entiende que ξ representa el índice de amortiguamiento, y ω_n la frecuencia natural no amortiguada, relacionadas con las raíces del polinomio característico en lazo cerrado en el plano s. Las dos funciones de transferencia en lazo cerrado, poseen el mismo polinomio característico, pero la primera, tipo 1, presenta solo un polo en el origen, y ningún cero, en cambio que la segunda, tipo 2, posee dos polos en el origen, y un cero en

$$s = -\frac{\omega_n}{2\xi} \quad (1\text{-}3)$$

Luego su comportamiento es diferente.

La Figura 1.1 muestra los diagramas de bloques equivalentes para los dos sistemas.

mbarrgan@fie200.epn.edu.ec

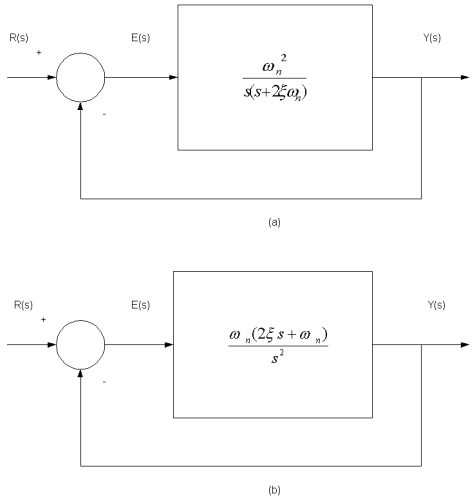

Figura 1.1. Sistemas de segundo orden. (a) Tipo 1. (b) Tipo 2.

Procede ahora realizar un estudio comparativo, para lo que de inicio se presenta un resumen de los criterios de diseño que los sistemas tipo 1 cumplen.

2. SISTEMAS TIPO 1

En lo relativo a precisión, o respuesta en estado estable, son sistemas cuya respuesta a una entrada escalón unitario tiene un error igual a cero, pero posee un error de velocidad, que se resumen en (2-1) .

$$e_p = \frac{1}{1+k_p} = 0 \qquad e_v = \frac{1}{k_v} = \frac{2\xi}{\omega_n} \qquad (2\text{-}1)$$

siendo e_p y k_p el error y la constante de posición respectivamente, y asimismo, e_v y k_v el error y la constante de velocidad.

En lo referente a rapidez, y en general a respuesta transitoria, las expresiones se muestran a continuación[1]:

Tiempo de subida (t_r), se usa la aproximación:

$$t_r = \frac{2{,}16\xi + 0{,}6}{\omega_n},\ 0{,}3 \le \xi \le 0{,}8 \quad (2\text{-}2)$$

Tiempo de pico(t_p):

$$t_p = \frac{\pi}{\omega d} = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\xi^2}},\ 0 < \xi < 1 \quad (2\text{-}3)$$

donde ω_d es la frecuencia natural amortiguada, o componente imaginaria de los polos complejos del sistema.

Máximo sobrenivel porcentual (SP):

$$SP = 100e^{-\frac{\xi\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \xi^2 = \frac{\ln^2\left(\frac{SP}{100}\right)}{\pi^2 + \ln^2\left(\frac{PS}{100}\right)} \qquad (2\text{-}3)$$

Tiempo de establecimiento (t_s) con criterio del 5% y del 2%:

$$t_s[5\%] = \frac{3}{\xi\omega_n} = 3\tau \qquad t_s[2\%] = \frac{4}{\xi\omega_n} = 4\tau \qquad (2\text{-}4)$$

donde $\xi\omega_n$ es la magnitud de la parte real de las raices, cuando son complejas conjugadas, y τ es la constante de tiempo.
Si las raíces son reales y diferentes, es decir, el sistema es sobreamortiguado, se considera la constante de tiempo τ como aquella de mayor valor.

En cuanto a estabilidad, el margen de ganancia (MG) medido en dB, tiende a infinito, y el margen de fase (MF) para los sistemas subamortiguados, medido en grados, es [1]

$$MF = 100\xi,\ 0{,}3 \le \xi \le 0{,}7 \quad (2\text{-}5)$$

relación obtenida mediante regresión lineal.
La respuesta más representativa, a un escalón unitario, se presenta en la siguiente Figura2.1 para valores de ξ comprendidos entre 0 y 3, con incrementos de 0,25.

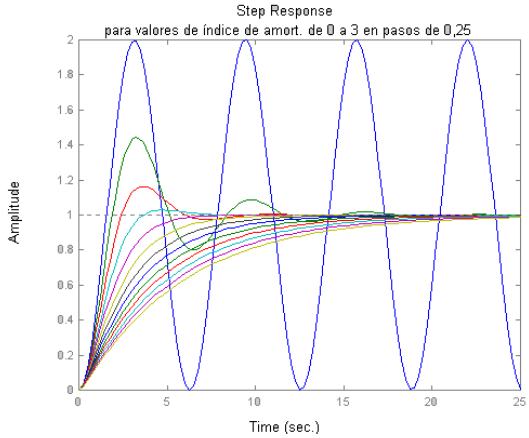

Figura 2.1. Respuesta a un escalón unitario para un sistema de segundo orden tipo uno.

Para realizar este gráfico se ha normalizado a 1 la frecuencia ω_n. Se aprecia claramente que para sistemas con índices de amortiguamiento mayores o iguales a 1, no existe sobrenivel porcentual.

Datos de diseño interesantes, que se pueden graficar, son tiempo de pico (t_p), máximo sobrenivel porcentual y tiempo de establecimiento, en función del índice de amortiguamiento, pues como criterios de diseño usualmente se especifican, error de posición igual a cero, lo que ya se cumple por ser el sistema tipo 1; en segundo lugar, el índice de amortiguamiento mínimo, o un criterio equivalente como el margen de fase, o más comúnmente el sobrenivel porcentual (SP) máximo permitido; en tercer lugar, el tiempo de establecimiento, que se toma con el criterio del 2%. Con fines de comparación de comportamientos, se incluyen además, tiempo de pico y la aproximación para el tiempo de subida, de manera gráfica a fin de poder compararlos posteriormente con los del sistema tipo 2 del que no existen fórmulas, en las siguientes figuras.

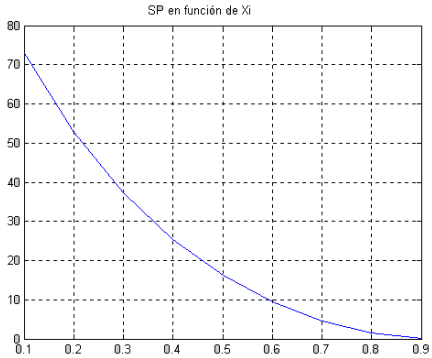

Figura 2.2. Sobrenivel porcentual SP en función del índice de amortiguamiento ξ

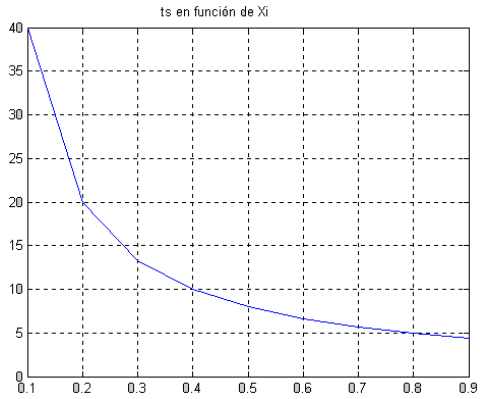

Figura 2.3. Tiempo de establecimiento (t_s) [2%] en función del índice de amortiguamiento ξ.

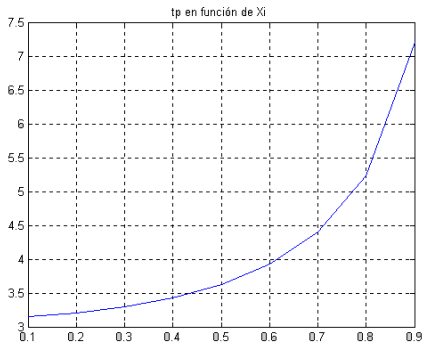

Figura 2.4. Tiempo de pico (tp) en función del índice de amortiguamiento ξ.

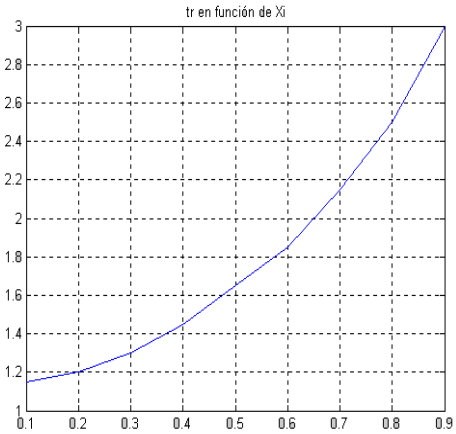

Figura 2.5. Tiempo de subida (t_r) en función del índice de amortiguamiento ξ.

Es conocido que cuando la frecuencia natural no amortiguada ω_n es diferente de uno, en los ejes verticales de los diagramas de los tiempos de establecimiento, de pico y de subida, se leerá el producto de esta frecuencia por el tiempo respectivo.
El resumen se presenta en la siguiente Tabla 2.1.

Tabla 2.1 Parámetros de diseño del sistema TIPO 1.

ξ	SP	$\omega_n t_s$	$\omega_n t_p$	$\omega_n t_r$
0.1000	72.9248	40.0000	3.1574	1.1500
0.2000	52.6621	20.0000	3.2064	1.2000
0.3000	37.2326	13.3333	3.2933	1.3000
0.4000	25.3827	10.0000	3.4278	1.4500
0.5000	16.3034	8.0000	3.6276	1.6500
0.6000	9.4780	6.6667	3.9270	1.8500
0.7000	4.5988	5.7143	4.3991	2.1500
0.8000	1.5165	5.0000	5.2360	2.5000
0.9000	0.1524	4.4444	7.2073	3.0000

3. SISTEMAS TIPO 2

Con los sistemas tipo 2, según lo establecido, se emplea la simulación; así, de inicio se muestra en la Figura 3.1 la situación por la cual aun para índices de amortiguamiento mayores que 1, existe sobrenivel en la respuesta a una entrada escalón.

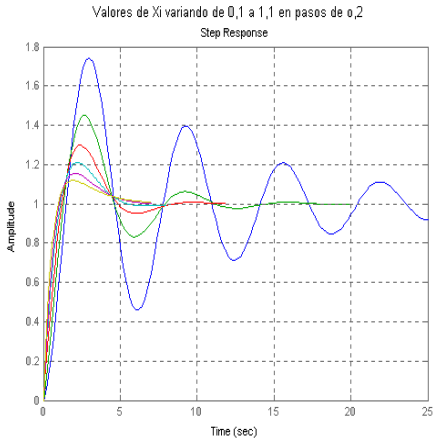

Figura 3.1. Respuesta a una entrada paso unitario con ω_n igual a 1 y valores de índice de amortiguamiento variando de 0,1 a 1,1 en pasos de 0,2.

Como se ha normalizado el valor de la frecuencia natural no amortiguada, la siguiente Figura 3.2 muestra como la variación entre el tiempo de pico y ω_n son inversamente proporcionales, de manera que para un mismo valor de ξ, el producto $\omega_n t$، es constante, donde t، representa el tiempo de establecimiento, el tiempo de pico o el tiempo de subida, pudiendo emplearse en este aspecto lo mismo que se efectuó con los sistemas tipo 1. En esta Figura 3.2, ξ = 0,5 y ω_n varía de 1 a 5.

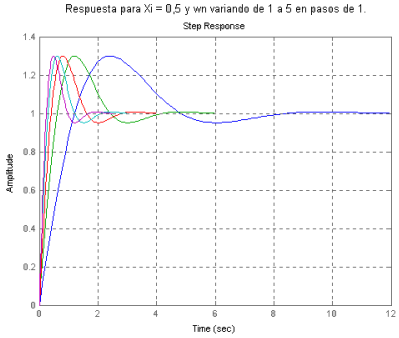

Figura 3.2. Respuesta a una entrada paso unitario para ξ = 0,5 y ω_n variando de 1 a 5 en pasos de 1.

Con estos antecedentes, y empleando simulación, se determinan los mismos parámetros de diseño que para el sistema tipo 1, esto es, el sobrenivel porcentual SP, el tiempo de establecimiento [2%], el tiempo de pico t_p, y el tiempo de subida del

10 al 90% del valor final t_r, como función de ξ, empleando la simulación, mostrándose los resultados en las Figs. 3.3, 3.4, 3.5 y 3.6.
En la Fig 3.3, se muestra el sobrenivel porcentual SP en función de ξ para valores comprendidos entre 0,1 y 1,5, y el modelo cúbico obtenido con regresión, que proporciona directamente el MATLAB, según el cual

$$SP = -45\xi^3 + 150\xi^2 - 180\xi + 89 \quad (3\text{-}1)$$

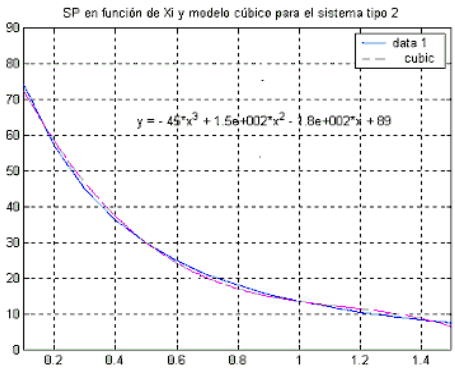

Figura 3.3. SP en función del índice de amortiguamiento ξ variando de 0,1 a 1,5 con el modelo cúbico.

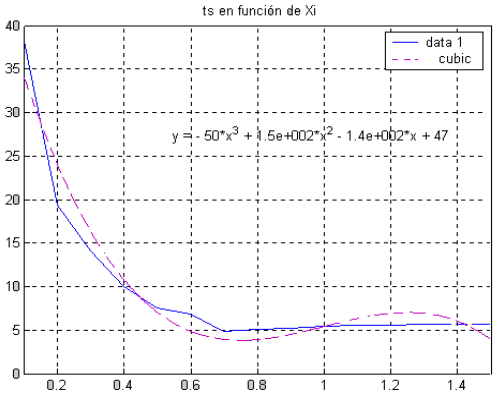

Figura 3.4. Tiempo de establecimiento (t_s)[2%] en función del índice de amortiguamiento ξ.

En la Figura 3.4 se presenta el tiempo de establecimiento con criterio del 2%, y el modelo cúbico obtenido por regresión, que se presenta en la ecuación (3-2).

$$t_s = -50\xi^3 + 150\xi^2 - 140\xi + 47 \quad (3\text{-}2)$$

La Figura 3.5 ilustra el tiempo de pico (t_p), en función del índice de amortiguamiento ξ, que acepta un modelo de regresión cuadrático de la fórmula (3-3).

$$t_p = 0{,}43\xi^2 - 1{,}5\xi + 3{,}1 \quad (3\text{-}3)$$

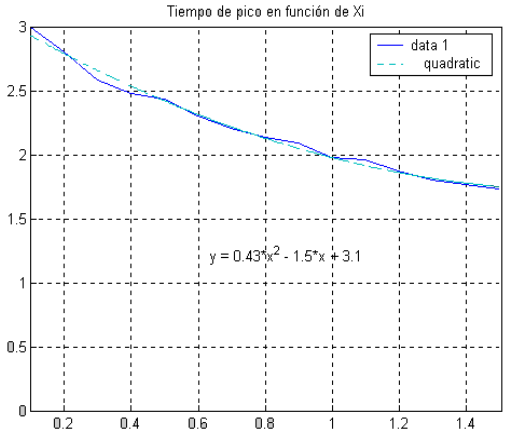

Figura 3.5. Tiempo de pico (t_p) en función del índice de amortiguamiento ξ.

La Figura 3.6 presenta el tiempo de subida (t_r) en función del índice de amortiguamiento ξ. Se presenta también el modelo de regresión lineal, determinado por el propio programa MATLAB, y que en términos de la notación del trabajo corresponde a la ecuación (3-4).
Nótese también la misma tendencia a decrecer que el tiempo de pico, lo que resulta coherente. Vale mencionar que es posible que el error en este tiempo sea mayor que para los otros parámetros, por resultar tiempos relativamente pequeños en el rango seleccionado.

$$t_r = 0{,}4\xi + 1{,}2 \quad (3\text{-}4)$$

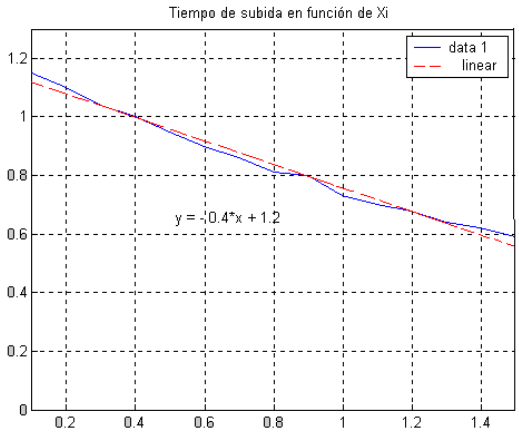

Figura 3.6. Tiempo de subida en función del índice de amortiguamiento ξ con el modelo de regresión lineal.

La Tabla 3.1 resume los resultados para el sistema tipo 2, como se nota, se extiende al análisis hasta un valor de ξ (Xi) = 1,5 en vista de la existencia de sobrenivel porcentual. Para mayores índices de amortiguamiento, procederá considerar las características de la raíz dominante tanto para el sistema tipo 1, cuanto para este tipo 2.

Tabla 3.1 Parámetros de diseño del sistema tipo 2.

ξ	SP	$\omega_n t_s$	$\omega_n t_p$	$\omega_n t_r$
0.1000	74.0000	38.2000	3.0000	1.1500
0.2000	57.0000	19.4000	2.8000	1.1000
0.3000	45.0000	14.1000	2.5800	1.0400
0.4000	36.3000	9.9700	2.4800	1.0000
0.5000	29.8000	7.5100	2.4300	0.9500
0.6000	24.9000	6.8800	2.3000	0.9000
0.7000	21.0000	4.8800	2.2100	0.8600
0.8000	18.0000	5.0500	2.1400	0.8100
0.9000	15.5000	5.2300	2.0900	0.8000
1.0000	13.5000	5.3900	1.9800	0.7300
1.1000	11.9000	5.5200	1.9600	0.7000
1.2000	10.5000	5.6000	1.8700	0.6800
1.3000	9.3700	5.6400	1.8000	0.6400
1.4000	8.3900	5.6500	1.7700	0.6200
1.5000	7.5600	5.6200	1.7300	0.5900

4. COMPARACIÓN DE RESULTADOS

En este numeral, se presentan los resultados en forma gráfica, paralelamente para los dos sistemas de segundo orden, tipo 1 y tipo 2, gráficos que pueden ser empleados para el diseño de cualquiera de ellos.

La Figura 4.1 muestra el sobrenivel porcentual máximo (SP), en función del índice de amortiguamiento (ξ, Xi). Nótese que para todos los valores, el sistema tipo 2 posee mayor valor. Como se mencionó, no se grafican para el tipo 1 para valores de ξ mayores que uno, porque los criterios de diseño cambian para los sistemas sobreamortiguados, debiendo considerarse la raíz dominante.

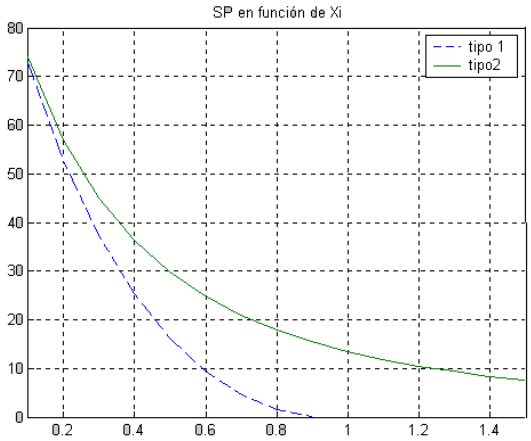

Figura 4.1. Mäximo sobrenivel porcentual en función del índice de amortiguamiento.

La Figura 4.2 presenta los tiempos de establecimiento (t_s), multiplicados por la frecuencia natural no amortiguada (ω_n), con criterio del 2%, asimismo para los dos tipos de sistemas. Se aprecia que para valores de ξ entre 0,1 y 1, son las curvas que más concuerdan, por lo que se puede considerar sin problema como 4 veces la constante de tiempo de las raíces complejas en este rango, al tiempo analizado.

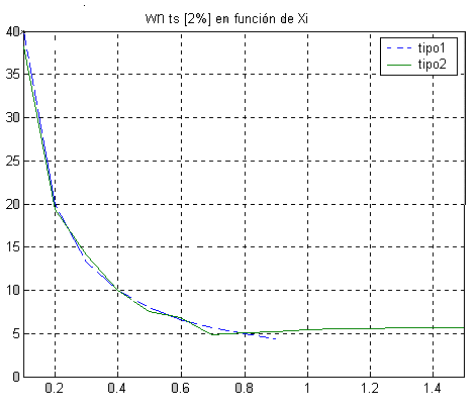

Figura 4.2. Gráfico de ω_n t_s en función del índice de amortiguamiento.

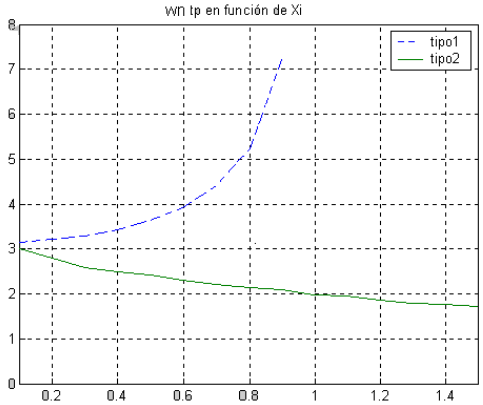

Figura 4.3. Gráfico de ω_n t_p en función del índice de amortiguamiento.

Las figuras 4.1 y 4.2 anteriores son las más generalmente empleadas, pero se incluyen también las adicionales desarrolladas. Así en la Figura 4.3 se presenta el gráfico del tiempo de pico, multiplicado igualmente por ω_n. En este caso las curvas divergen cuando aumenta el índice de amortiguamiento, lo que indica que se deberá poner cuidado en la evaluación de este parámetro.
La Figura 4.4 presenta los tiempos de subida multiplicados por la frecuencia natural no amortiguada en el eje vertical, como función del índice de amortiguamiento, y como ocurre con el tiempo de pico, en este caso permanecen las tendencias.

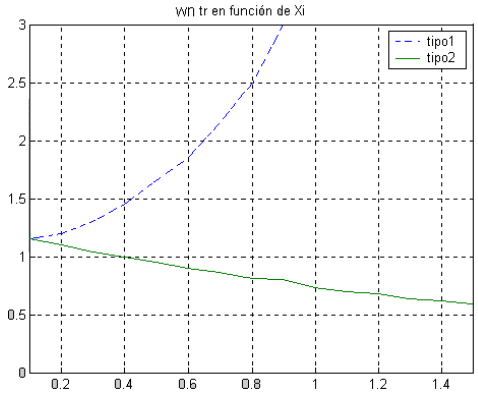

Figura 4.4. Gráfico de ω_n t_r en función del índice de amortiguamiento.

5. EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Ejemplo 5.1

Sea el sistema de la Figura 5.1.

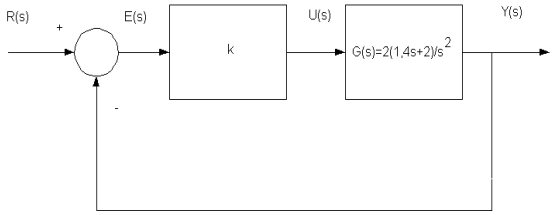

Figura 5.1. Diagrama de bloques del Ejemplo 5.1

En este caso los valores correspondientes son

$\omega_n = 2$
$\xi = 0,7$

Esto indica, leyendo los gráficos del numeral 4, que si k vale 1, las características de la respuesta a una entrada escalón son:

SP = 21%
$t_s = 2,44$.
$t_p = 1,1$.
$t_r = 0,405$.

El cero de la planta está en –1,43 y los dos polos de la misma en el origen.
Si se construye el lugar geométrico de las raíces (LGR) en función de k (Figura 5.2), para k=1, resultan las raíces en lazo cerrado –1,4 ± j1,4, como se esperaba.

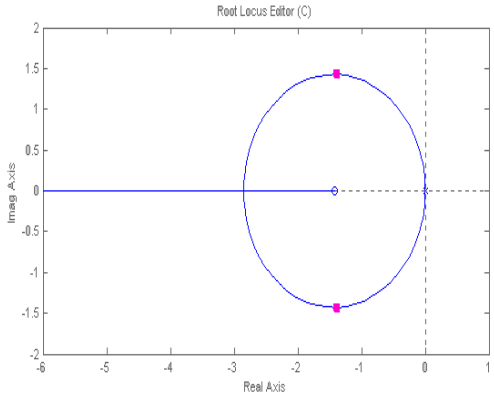

Figura 5.2. LGR para el Ejemplo 5.1

Con el programa MATLAB, se construye la respuesta a una entrada escalón unitario, dando los resultados de la Figura 5.3. En esta Figura, se comprueban, de manera aproximada, mediante los puntos de la curva resaltados en azul, los valores obtenidos con los gráficos de diseño.

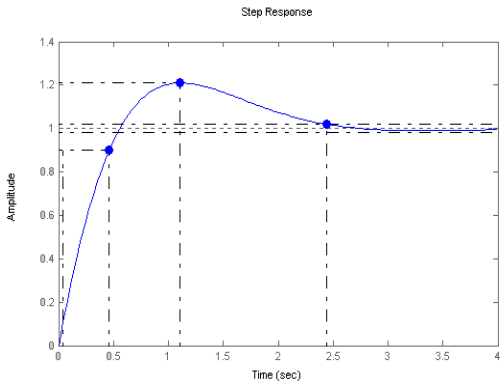

Figura 5.3. Respuesta a un escalón unitario para el sistema del Ejemplo 5.1

Ejemplo 5.2

Sea el sistema de la Figura 5.4.

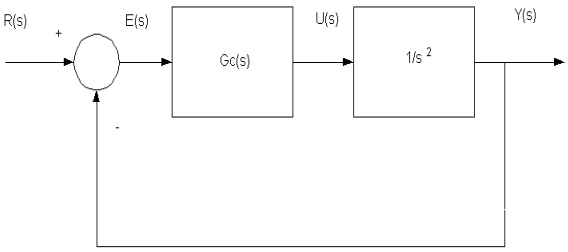

Figura 5.4. Diagrama de bloques del Ejemplo 5.2.

Donde la planta (básica para los sistemas de segundo orden tipo 2), es el doble integrador; se trata de obtener la compensación $G_c(s)$, para que el punto de trabajo esté en el plano s ubicado en –2+j, formando un ángulo con la vertical de θ = 63,43˚, cuyo seno corresponde a 0,89 que es el valor de ξ. La distancia de este punto al origen es 2,23, valor que corresponde a ω_n. Con estos datos, y los diagramas de diseño, los resultados del sistema compensado en lazo cerrado, de la respuesta a una entrada escalón unitario, deben ser:

SP = 15,55
t_s = 2,34.
t_p = 0,94
t_r = 0,359

Omitiendo las etapas de diseño, resulta que una compensación PD satisface los requerimientos, donde entonces,

$G_c(s) = 4(s+1,25)$

El LGR del sistema compensado y el punto de trabajo se presentan en la Figura 5.5.

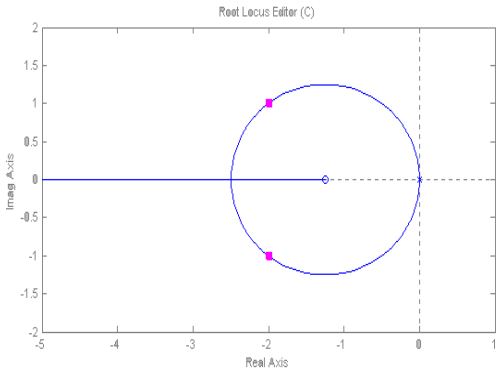

Figura 5.5. LGR para el sistema compensado del Ejemplo 5.2.

El sistema presenta la siguiente respuesta a un escalón unitario de entrada (Figura 5.6), donde gráficamente se resaltan sus características, que concuerdan muy bien con los valores estimados empleando los gráficos de diseño, sin tener los problemas

que antes existían al estimarlo como si fuera un sistema tipo 1.

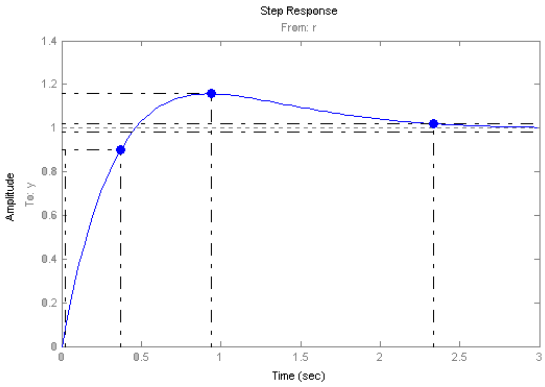

Figura 5.6. Respuesta a un escalón unitario para el sistema compensado del Ejemplo 5.2.

6. CONCLUSIONES

Una vez comprobada con ejemplos que esta herramienta sirve, resulta una contribución al diseño de sistemas de control empleados en la enseñanza y en la práctica, pues los libros conocidos la omiten persistentemente.

7. REFERENCIAS

[1] DORF, RICHARD C.; BISHOP, ROBERT H. . **MODERN CONTROL SYSTEMS**. Addison-Wesley Publishing Co. . Seventh Edition. Reading.

[2] THE MATHWORKS INC. . **CONTROL SYSTEM TOOLBOX.** For Use with MATLAB. Users Guide. Natick. 1999.