

APLICACIÓN DE LAS LMI AL DISEÑO DE CONTROLADORES ROBUSTOS

Proaño Rosero Víctor
vproanio@fie-espe.edu.ec
Escuela Politécnica del Ejército
Quito-Ecuador

Aguilar Jaramillo Edwin
edwinrene_aj@hotmail.com
Escuela Politécnica del Ejército
Quito-Ecuador

Resumen

El diseño de controladores precisos en presencia de incertidumbre significativa requiere el uso de controladores robustos. Una gran variedad de especificaciones y restricciones de diseño de sistemas de control pueden ser expresadas en términos de Desigualdades Matriciales Lineales (LMI-*Linear Matrix Inequalities*), las mismas que son resueltas mediante algoritmos de Optimización Convexa. En este artículo se presenta el diseño de controladores robustos mediante LMI para sistemas típicos cuyos modelos son obtenidos de la literatura de control a los cuales se completa con la incertidumbre de parámetros. Los controladores diseñados utilizan la realimentación de estados del sistema.

I. Introducción

Este artículo está organizado en secciones. La sección I es la presente introducción. En la sección II se definen los principales conceptos que sustentan el procedimiento de diseño como son la optimización convexa, la definición de una LMI, los problemas matemáticos que se resuelven con las LMI y el concepto de estabilidad cuadrática de Lyapunov. La sección III presenta los problemas de control que se resuelven mediante la aplicación de las LMI y la teoría de estabilidad de Lyapunov que es el puente que permite pasar la formulación de espacio de estado de un sistema hacia una LMI. En la sección IV se presenta la teoría para la formulación del problema de diseño de un controlador de realimentación de estados mediante LMI. En la sección V se presentan los casos de estudio que son el diseño de sendos controladores para un sistema doble integrador y para un levitador magnético. Finalmente en la sección VI se presentan las conclusiones.

II. Conceptos

a. Optimización convexa

La optimización es la búsqueda de la mejor decisión dentro de un conjunto de posibles candidatos que cumplen una condición. El mejor candidato es aquel con el que se consigue el índice de desempeño óptimo. La optimización convexa se caracteriza por la existencia de un único mínimo global. Las LMI son funciones convexas y se resuelven normalmente por métodos conocidos como de puntos interiores.

b. Definición de una LMI.

Una Desigualdad Lineal Matricial es una restricción convexa de la forma:

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_0 + x_1 \mathbf{F}_1 + \dots + x_n \mathbf{F}_n > 0$$

$$\mathbf{F}(x) = \mathbf{F}_0 + \sum_{i=1}^N x_i \mathbf{F}_i > 0,$$

donde:

- $\mathbf{x} = (x_1 \dots x_n)$ es un vector de escalares desconocidos (vector de variables),
- \mathbf{F}_i son matrices simétricas reales conocidas para $0 \leq i \leq n$,
- ' > 0 ' indica que todos los valores propios de $F(x)$ son mayores que 0.

La consecuencia importante de la convexidad es que a pesar de que la LMI no tiene una solución analítica en general, ésta puede ser resuelta numéricamente con la garantía de encontrar una solución, si existe alguna.

c. Problemas LMI: Los problemas que se resuelven por técnicas LMI's y que son utilizados en este artículo son:

- 1. Problema de Factibilidad:** Se llama a la prueba de si existen o no soluciones de x tal que: $\mathbf{F}(x) > 0$. La LMI se llama no-

factible en caso de no existir solución alguna.

2. Problema de Optimización:

consistente en la minimización de una función que define un criterio de desempeño sujeta a restricciones de tipo LMI, como por ejemplo: Minimizar $\mathbf{c}^T \mathbf{x}$, tal que $\mathbf{F}(x) > 0$.

d. Estabilidad cuadrática de Lyapunov.

La definición de la estabilidad cuadrática de Lyapunov da al estudio de las LMI. Considérese el sistema sin entradas dado por:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

Se dice que el sistema es cuadráticamente estable si y solo si existe una función cuadrática positiva $V \in \mathcal{R}$ tal que $V = \mathbf{x}^T \mathbf{P}\mathbf{x}$ y \dot{V} sea negativa. La función V se conoce como función de Lyapunov y entrega como resultado un valor real para cada vector \mathbf{x} . La función queda definida completamente por la matriz \mathbf{P} que se conoce como matriz de Lyapunov y que se constituye en una matriz simétrica a ser encontrada mediante una LMI, así:

Encontrar $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$; $\mathbf{P} > 0$; tal que

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P}\mathbf{A} < 0.$$

III. Aplicación de las LMI al diseño de sistemas de control.

Una de las ventajas de la formulación de las LMI's es la habilidad de combinar varias expresiones de diseño de una manera numéricamente tratable. Dentro del área de control existen innumerables tipos de problemas que pueden ser tratados mediante técnicas LMI's. En este artículo se realiza la aplicación de las LMI al problema diseño de retroalimentación de estado para sistemas con incertidumbre de parámetros mediante una formulación politópica. Se utiliza la técnica de ubicación de polos en regiones LMI para satisfacer especificaciones del sistema en el dominio del tiempo y el cumplimiento de múltiples objetivos especificados en términos de normas H_∞ y H_2 de funciones de transferencia obtenidas de la descripción del sistema. [SW99]. En esta sección se introducen los conceptos involucrados para resolver estos problemas.

a. Modelación de la Incertidumbre de Sistemas Dinámicos: Existen dos clases de incertidumbre:

1. Incertidumbre dinámica: que consiste en componentes dinámicos omitidos en el modelo lineal o en variaciones en el comportamiento dinámico durante el funcionamiento del sistema. Por ejemplo, modos flexibles de alta frecuencia, variaciones de tiempo retardadas, etc.

2. Incertidumbre de Parámetros: dada por la estimación aproximada de los valores de parámetros físicos, o de las variaciones de estos parámetros durante el funcionamiento del sistema. Esta incertidumbre puede presentarse por ejemplo en el amortiguamiento de los coeficientes en sistemas mecánicos, coeficientes aerodinámicos de dispositivos de vuelo, capacitores e inductores en circuitos eléctricos, etc.

b. Planteamiento de sistemas con incertidumbre de parámetros.

Existen 2 formas de plantear sistemas con incertidumbre: a través de modelos dependientes de parámetros afines y modelos politópicos. En el presente artículo se utiliza únicamente la formulación politópica de los sistemas.

Se llama un sistema politópico a un sistema lineal variante en el tiempo:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} &= \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{aligned}$$

cuya matriz de sistema $\mathbf{S}(t)$ definida como:

$$\mathbf{S}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t) & \mathbf{B}(t) \\ \mathbf{C}(t) & \mathbf{D}(t) \end{bmatrix}$$

varía dentro de un politopo fijo de matrices, es decir:

$$\mathbf{S}(t) \in \text{Co}\{\mathbf{S}_1, \dots, \mathbf{S}_k\} := \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbf{S}_i : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1 \right\}$$

donde $\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_k$ dan los sistemas vértices:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_1(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t)_1 & \mathbf{B}(t)_1 \\ \mathbf{C}(t)_1 & \mathbf{D}(t)_1 \end{bmatrix}, \dots \\ \dots \mathbf{S}_k(t) &= \begin{bmatrix} \mathbf{A}(t)_k & \mathbf{B}(t)_k \\ \mathbf{C}(t)_k & \mathbf{D}(t)_k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En otras palabras, $\mathbf{S}(t)$ es una combinación convexa de sistemas de matrices $\mathbf{S}_1 \dots \mathbf{S}_k$. Los números no negativos $\alpha_1 \dots \alpha_k$ son llamados coordenadas politópicas de \mathbf{S} . La figura 1 muestra una representación gráfica de la matriz $\mathbf{S}(t)$.

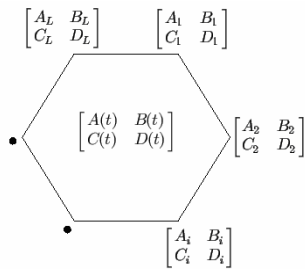


Figura 1. Representación gráfica de la incertidumbre politópica.

c. Especificación de las regiones de los polos en el plano complejo.

Las regiones LMI, en términos de control, son lugares en los que uno puede lograr ubicar los polos del sistema para determinar sus características de desempeño temporal. Mediante estas regiones se pueden especificar criterios de desempeño dinámico del sistema como por ejemplo, el amortiguamiento y el tiempo de respuesta.

Una de estas regiones es la región del semiplano a la izquierda de $-\alpha_s$: Esta región garantiza que el sistema presente un tiempo de respuesta máximo determinado. En la figura 2 se observa la región donde se desea que los polos se encuentren, que define el área a la izquierda del eje dibujado en $-\alpha_s$:

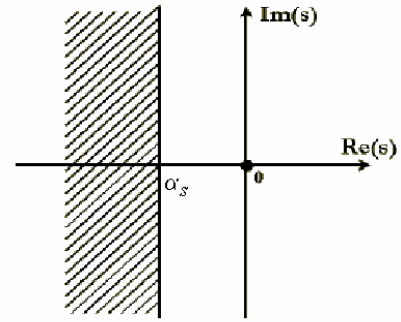


Figura 2. Polos a la izquierda del eje imaginario desplazado α_s

Para lograr esta área debe cumplirse que:

$$D = \{s \in C : s + \bar{s} + 2\alpha_s < 0\},$$

donde C representa el plano complejo, D es un subconjunto del plano C , y la condición final es llamada función característica de la región de estabilidad denotada por f_D . Otras regiones LMI se muestran en la tabla 1. Para la formulación mediante LMI de cada una de estas regiones primero debe notarse que todas ellas pueden ser descritas de forma general

mediante: $D = \{s \in C : \mathbf{P} + s\mathbf{Q} + \bar{s}\mathbf{Q}^T < 0\}$, donde \mathbf{P} y \mathbf{Q} son matrices reales tal que

$\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$, y la función $f_D(s) = \mathbf{P} + s\mathbf{Q} + \bar{s}\mathbf{Q}^T$ se conoce como la función característica de la región de estabilidad. El conjunto incluye todas las regiones limitadas descritas anteriormente como sector disco, sector cónico, barras, etc. Mediante intersecciones de regiones se puede obtener virtualmente cualquier forma de región deseada. La intersección de k regiones viene definida por:

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & P_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & P_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q_k \end{pmatrix} s + \begin{pmatrix} Q_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & Q_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & Q_k \end{pmatrix} \bar{s} < 0,$$

donde se identifica la representación global de la región mediante:

$$f_D(s) = \mathbf{P} + s\mathbf{Q} + \bar{s}\mathbf{Q}^T.$$

Tabla 1 Regiones LMI

Sector	Condición
Semiplano Izquierdo	$R(s) < -\alpha, \Leftrightarrow s + \bar{s} + 2\alpha < 0$
Sector Cónico	$(s \in C \mid R(s)\tan\theta < F(s), \quad R(s)\tan\theta < -F(\bar{s}))$ $\Leftrightarrow \begin{pmatrix} (s+\bar{s})\sin\theta & (s-\bar{s})\cos\theta \\ (s-\bar{s})\cos\theta & (s+\bar{s})\sin\theta \end{pmatrix} < 0$
Sector Disco	$ s < r \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -r & \bar{s}+q \\ s+q & -r \end{pmatrix} < 0$
Barras Horizontales	$\{s \in C \mid F(s) < \alpha_1, -F(\bar{s}) < \alpha_2\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} (s-\bar{s})-2\alpha_1 & 0 \\ 0 & -(s-\bar{s})-2\alpha_2 \end{bmatrix} < 0$ $F(s) = (s-\bar{s})$
Barras Verticales	$\alpha_1 < R(s) < \alpha_2, \Leftrightarrow \begin{pmatrix} (s+\bar{s})-2\alpha_2 & 0 \\ 0 & -(s+\bar{s})+2\alpha_1 \end{pmatrix} < 0$

d. Formulación de la LMI para ubicación de polos en regiones del plano complejo

La formulación de la LMI para ubicar los polos en regiones deseadas del plano complejo s se debe a M.Chiali y Gahinet [CGA95]: Considérese que $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}, \mathbf{Q}$ y \mathbf{A} son matrices reales. Entonces \mathbf{A} tiene todos sus valores propios en una región estable:

$$D = \{s \in C : \mathbf{P} + s\mathbf{Q} + \bar{s}\mathbf{Q}^T < 0\}$$

si y solo si existe una matriz real simétrica $\mathbf{X} = \mathbf{X}^T > 0$ con:

$$\begin{pmatrix} p_{11}X + q_{11}AX + q_{11}XA^T & \dots & p_{1k}X + q_{1k}AX + q_{k1}XA^T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{k1}X + q_{k1}AX + q_{1k}XA^T & \dots & p_{kk}X + q_{kk}AX + q_{kk}XA^T \end{pmatrix} < 0$$

donde para este caso p_{ij} y q_{ij} son las $i-j$ th entradas de \mathbf{P} y \mathbf{Q} , respectivamente. En otras palabras, \mathbf{A} tiene todos sus valores propios en la región de estabilidad D con una función

característica $f_D(s) = \mathbf{P} + s\mathbf{Q} + \bar{s}\mathbf{Q}^T$ si y solo si existe una matriz definida positiva \mathbf{X} tal que:

$$(p_{ij}\mathbf{X} + q_{ij}\mathbf{X}\mathbf{A} + q_{ij}\mathbf{A}^T\mathbf{X}) < 0$$

para todo i,j . Nótese que esta es una LMI en \mathbf{X} y que el teorema clásico de Lyapunov corresponde a la función característica

$$f(s) = s + \bar{s} \text{ .Esto equivale entonces a}$$

sustituir $(1, s, \bar{s}) \Leftrightarrow (\mathbf{A}, \mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{X}\mathbf{A}^T)$ [SW99].

e. Normas para señales y sistemas

Una forma de describir el desempeño de los sistemas de control es en términos del tamaño de ciertas señales de interés. Por ejemplo, el desempeño de un sistema de seguimiento puede ser medido por el tamaño de la señal de

error. A continuación se exponen distintas maneras de definir el tamaño de una señal. También se introduce el concepto de normas de funciones de transferencia cuya utilidad radica en que permiten calcular el tamaño de la norma de una señal de salida de un sistema a partir del conocimiento del tamaño de la norma de la señal de entrada.

1. Normas para señales

Una norma debe tener las siguientes propiedades: [DB90]

$$\|u\| > 0$$

$$\|u\| = 0 \Leftrightarrow u(t) = 0, \forall t$$

$$\|au\| = |a|\|u\|, \forall a \in \mathfrak{R}$$

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \text{ (desigualdad triangular)}$$

Norma 1. La norma 1 de una señal $u(t)$ es la integral de su valor absoluto

$$\|u\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |u(t)| dt$$

Norma 2. La norma 2 o norma L2 de $u(t)$

es:
$$\|u\|_2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} u(t)^2 dt \right)^{1/2}$$

Esta norma representa la energía de la señal.

Norma ∞ . La norma ∞ de una señal es el menor de los límites o cotas superiores de su valor absoluto.

$$\|u\|_{\infty} = \sup_t |u(t)|$$

2. Normas para sistemas.

Se consideran sistemas que son lineales, invariantes en el tiempo y causales. Sea $G(s)$ la función de transferencia del sistema. G es racional con coeficientes reales. Se dice que G es estable si no tiene polos en el semiplano cerrado derecho, propia si $G(j\infty)$ es finita (grado del denominador \geq grado de numerador), estrictamente propia si $G(j\infty) = 0$ (grado del denominador $>$ grado del numerador), y bipropia si a la vez G y G^{-1}

son propias (grado del numerador = grado del denominador).

Se definen dos normas para la función de transferencia G :

Norma 2

$$\|G\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |G(j\omega)|^2 d\omega \right)^{1/2}$$

La norma $_2$ de G es finita si y solo si G es estrictamente propia y no tiene polos en el eje imaginario. La norma $\|G\|_2$ se convierte en la norma $_2$ de la señal de salida de un sistema cuando la señal de entrada es una señal impulsiva. También representa la relación $\|y\|_{\infty} / \|u\|_2$, que es una relación "pico/energía".

En términos de LMI se tiene que dada una descripción en espacio de estado:

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$y = Cx + Du$$

$G := C(sI - A)^{-1}B + D$ se demuestra en [SW99] que: $\|G\|_2 < \gamma$ si y solo si existen

$P = P^T > 0$ y Z tales que

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA & PB \\ B^T P & I \end{pmatrix} < 0;$$

$$\begin{pmatrix} P & C^T \\ C & Z \end{pmatrix} < 0$$

$$\text{trace}(Z) < \gamma^2$$

El menor límite superior de la norma H_2 de la función de transferencia puede ser calculado minimizando el criterio $\text{trace}(Z)$ sobre las variables K y Z que satisfacen las LMI definidas por las dos primeras desigualdades.

Norma ∞

$$\|G\|_{\infty} = \sup_{\omega} |G(j\omega)|$$

La norma ∞ de G es finita si y solo si G es propia y no tiene polos en el eje imaginario. Aparece como el valor pico en el diagrama de Bode de G . La norma $\|G\|_{\infty}$ se convierte en la norma ∞ de la señal de salida de un sistema cuando la entrada es una señal impulsiva. También representa el valor supremo de la

ganancia RMS del sistema, es decir la relación $\sup(\|y\|_2 / \|u\|_2)$.

En términos de desigualdades matriciales, se tiene según [SW99] que $\|G\|_{\infty} < \gamma$ siempre y cuando exista una $P = P^T$ que sea solución a la LMI:

$$\begin{pmatrix} A^T P + PA + C^T C & PB + C^T D \\ B^T P + D^T C & D^T D - \gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0$$

IV. Síntesis de realimentación de estado.

Se conoce que la técnica de realimentación de estados permite satisfacer especificaciones de estabilidad, desempeño y robustez de los sistemas realimentados. En varios problemas de control, las especificaciones de diseño son una mezcla de objetivos de desempeño y robustez expresados ya sea en el dominio del tiempo o de la frecuencia. Los métodos mediante LMI son bien adaptados a los problemas de síntesis de realimentación de estados con múltiples objetivos [GNLC95].

La estructura de control para el diseño de un controlador vía LMI's está basado en la realimentación de estados.

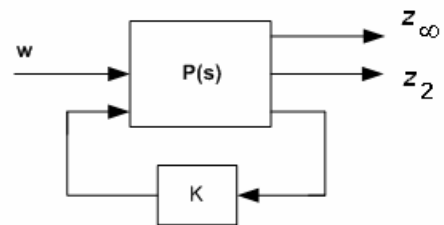


Figura 3 Control por realimentación de estados

En esta estructura, dada la realización de espacio de estado:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + B_1 w + B_2 u \\ z_{\infty} = C_1 x + D_{11} w + D_{12} u \\ z_2 = C_2 x + D_{22} u \end{cases}$$

de la planta P , el sistema en lazo cerrado está dado en la forma de espacio de estado por:

$$\begin{cases} \dot{x} = (A + B_2 K)x + B_1 w \\ z_{\infty} = (C_1 + D_{12} K)x + D_{11} w \\ z_2 = (C_2 + D_{22} K)x + D_{22} w \end{cases}$$

Los objetivos de diseño tienen la siguiente formulación LMI:

a. Desempeño H_∞

La ganancia RMS de lazo cerrado desde w hacia z_∞ no excede el valor de γ si y solo si existe una matriz simétrica P tal que:

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}^T P + P\tilde{A} + \tilde{C}^T \tilde{C} & P\tilde{B} + \tilde{C}^T \tilde{D} \\ \tilde{B}^T P + \tilde{D}^T \tilde{C} & \tilde{D}^T \tilde{D} - \gamma^2 I \end{pmatrix} \leq 0 \quad (1)$$

donde: $\tilde{A} = A + B_2 K$; $\tilde{B} = B_1$;
 $\tilde{C} = C_1 + D_{12} K$; $\tilde{D} = D_{11}$

b. Desempeño H_2

La norma H_2 del lazo cerrado no excede γ si existen $P = P^T > 0$ y Z tales que

$$\begin{pmatrix} (A + B_2 K)^T P + P(A + B_2 K) & P B_1 \\ B_1^T P & I \end{pmatrix} < 0;$$

$$\begin{pmatrix} P & (C_2 + D_{22} K)^T \\ (C_2 + D_{22} K) & Z \end{pmatrix} < 0$$

$$\text{trace}(Z) < \gamma^2 \quad (2)$$

c. Ubicación de polos en regiones LMI.

El objetivo consiste en encontrar una matriz de realimentación K de tal forma que permita la ubicación de polos del sistema en lazo cerrado en una región D del semiplano izquierdo, con el fin de estabilizar el sistema bajo ciertos criterios de desempeño deseados.

Los polos de un sistema en lazo cerrado son ubicados en una región LMI:

$$D = \{s \in \mathbb{C} : P + sQ + \bar{s}Q^T < 0\}$$

Si y solo si existe una matriz simétrica $X = X^T$ que satisfaga:

$$[p_{ij} X + q_{ij} X(A + B_2 \cdot K) + q_{ij} (A + B_2 \cdot K)^T X] < 0$$

$$X > 0$$

Si extendemos este criterio para sistemas con incertidumbre, cuyas matrices de espacio de estado varían dentro de un politopo:

$$\left\{ \begin{pmatrix} A(t) & B(t)_1 \\ C(t)_1 & D(t)_1 \end{pmatrix} \in \text{Co} \left\{ \begin{pmatrix} A(t)_k & B(t)_k \\ C(t)_k & D(t)_k \end{pmatrix} : k = 1, \dots, K \right\} \right\}$$

donde cada modelo politópico es usado para representar cada una de las plantas con incertidumbre, se busca una sola función cuadrática de Lyapunov que permita cumplir con los objetivos de diseño para todas las posibles plantas del politopo, resultando de esto entonces la siguiente condición LMI:

Los polos de un sistema en lazo cerrado son ubicados en una región LMI:

$$D = \{s \in \mathbb{C} : P + sQ + \bar{s}Q^T < 0\}$$

Si y solo si existe una matriz simétrica $X = X^T$ que satisfaga:

$$[p_{ij} X + q_{ij} X(A_k + B_{2k} \cdot K) + q_{ij} (A_k + B_{2k} \cdot K)^T X] < 0$$

$$X > 0$$

De lo cual, resolviendo la LMI, se obtendrá una solución óptima para X y una correspondiente matriz de realimentación K que garantice el cumplimiento de los requerimientos de diseño planteados para cada una de las plantas existentes producto de la incertidumbre dada en el sistema.

V. Casos de estudio

a. Caso 1. Sistema doble integrador.

Optimización de la norma H_2 .

El problema de equilibrar una bola sobre la superficie de una viga es representativo de una gran clase de sistemas de aplicaciones industriales y militares. El objetivo es controlar la posición de una bola que es libre de moverse a lo largo de una viga rígida sostenida en su punto central. El trabajo del controlador es rotar la viga para compensar el movimiento de la bola. La figura 4 muestra el esquema de este problema. La posición de la bola es p , el ángulo de la viga es θ , el torque de entrada a la viga es f , la inercia de la viga es J y la masa de la bola es m .

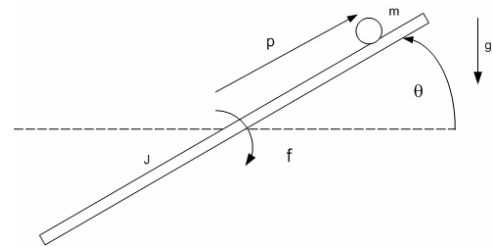


Figura 4. Esquema del problema de equilibrio de una bola en una viga

Un modelo simplificado de este proceso es:

$$\frac{p(s)}{\theta(s)} = K * \frac{1}{s^2}$$

Para el análisis en este proyecto se ha utilizado la función de transferencia normalizada:

$$P(s) = \frac{1}{s^2}$$

El nombre de sistema doble integrador resulta precisamente de esta última descripción pues como se sabe el término s^{-1} corresponde en el dominio del tiempo a una integración.

Para este ejemplo se plantea encontrar las ganancias de realimentación de estado que minimicen la norma $\|H\|_2$ de los estados y de la señal de control.

La salida a optimizar se plantea como $z_2 = [x_1 \ x_2 \ u]^T$. Se busca por tanto minimizar la respuesta transitoria de los estados y de la señal de control en respuesta a entradas conocidas o condiciones iniciales.

Para este caso el problema LMI que resulta es el indicado en la LMI[2], donde:

$$A=[0 \ 1; \ 0 \ 0]; \ B1=[1;0]; \ B2=[1;0]; \\ C2=[1 \ 0;0 \ 1;0 \ 0];D22=[0;0;1].$$

La figura 5 muestra la respuesta impulsiva de los estados y de la señal de control obtenidos.

El valor de ganancia de realimentación resulta ser $K = [-1.7 \ -1.01]$. La norma mínima H_2 que se obtiene es 1.73.

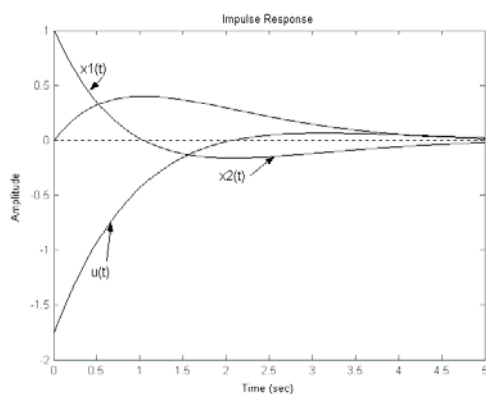


Figura 5. Respuesta impulsiva para sistema doble integrador

b. Caso 2. Sistema doble integrador.

Sistema de control H_2 / H_∞

En este ejemplo se busca cumplir dos objetivos: primero que el sistema tenga como

en el ejemplo anterior una respuesta transitoria adecuada de los estados y de la señal de control y segundo, minimizar el efecto de las perturbaciones en la salida. El segundo objetivo corresponde a minimizar la norma H_∞ de la función de transferencia de perturbación a la entrada $w(t)$ en la salida $y(t)$. Es decir, $z_\infty = [0 \ 1]x + 0 * w + 0 * u$

Esto significa resolver las LMI correspondientes a cada problema de desempeño. En la LMI [1], se tiene entonces que:

$$A=[0 \ 1; \ 0 \ 0]; \\ C1=[0 \ 1]; \ B1=[1;0]; \ D11=[0]; \ D12=[0]$$

En la LMI [2];

$$A=[0 \ 1; \ 0 \ 0]; \\ C2=[1 \ 0;0 \ 1;0 \ 0];B2=[1;0];D21=[0;0;0]; \\ D22=[0;0;1]$$

El proceso [GNL95] inicia encontrando el rango de variación de la norma H_∞ . Luego se

calcula para un conjunto de normas H_∞ predefinidas, el mejor desempeño posible de la norma H_2 . Como resultado se obtiene una gráfica como la de la figura 6 que permite determinar el mejor desempeño deseado.

Por inspección de la figura 6 se determina que el valor de ganancia K obtenido para cuando $g = 0.1$ produce un adecuado compromiso de desempeño puesto que en este caso los valores obtenidos son: norma $H_2 = 3.57$; norma $H_\infty = 0.096$. Para este caso se tiene que el valor de $K = [-4.68 \ -10.45]$ produce las respuestas impulsivas de la figura 7.

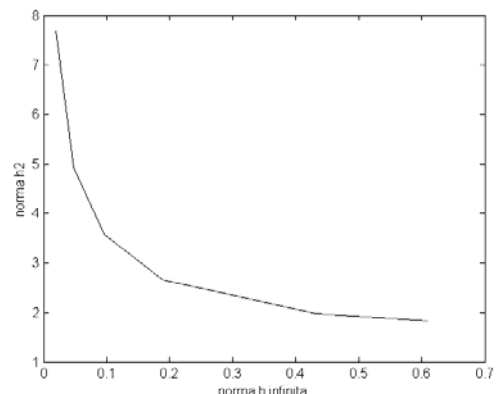


Figura 6. Compromiso entre los desempeños H_2 y H_∞ .

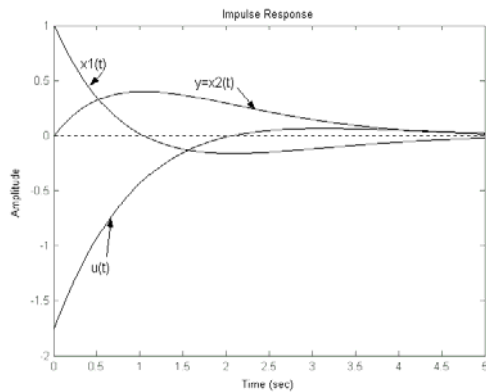


Figura 7. Respuesta impulsiva

c. Caso 3. Sistema de levitación magnética. Ubicación de polos en regiones LMI para un sistema con incertidumbre paramétrica.

Para explicar el diseño de un controlador mediante LMI's ante la existencia de incertidumbres paramétricas, usaremos un sistema de suspensión magnética, en el que una bola de material metálico se suspende mediante un electroimán de corriente controlada por realimentación a través de una medición óptica de la posición de la bola. Este sistema tiene los ingredientes básicos de sistemas para levitación de masas usados en giroscopios, acelerómetros y trenes de alta velocidad [AW 97]. Las ecuaciones del sistema están dadas por:

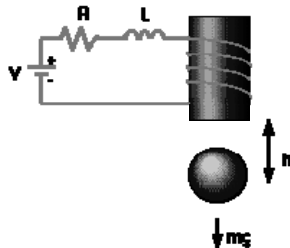


Figura 8. Sistema de suspensión magnética.

$$M \cdot \frac{d^2 h}{dt^2} = M \cdot g - \frac{K \cdot i^2}{h}$$

$$V = L \cdot \frac{di}{dt} + R \cdot i$$

donde:

- h = posición vertical de la bola [m].
- i = corriente en el electromagneto [Amp].
- V = tensión aplicada [V].
- M = masa de la bola [Kg].
- g = gravedad [m/seg²]
- L = inductancia [H].
- R = resistencia [Ω]

K = coeficiente que determina la fuerza magnética ejercida a la bola [adimensional].

Dentro del sistema cabe destacar que se va a considerar incertidumbre en 3 parámetros: en M (cuyo valor medido fue de aproximadamente 0.05 Kg.), en L (cuyo valor modelado de 0.01 H puede variar con respecto al real por error en las fórmulas del modelo como por ejemplo el número exacto de vueltas y las consideraciones que se hacen al tomar un diámetro constante para toda la bobina) y R . Para el resto de parámetros se colocarán los siguientes valores constantes: $K=0.0001$ y $g = 9.81\text{m/seg}^2$. Puesto que el sistema es de tipo no lineal a continuación procedemos a linealizar el sistema. Para ello diremos que el sistema se encuentra en equilibrio (la bola está suspendida en el aire) siempre que $h = \frac{K \cdot i^2}{M \cdot g}$,

en este punto $\frac{dh}{dt} = 0$). Se linearizarán las ecuaciones alrededor del punto $h=0.01\text{m}$ (usando $i = \sqrt{h \cdot M \cdot g / K}$); con lo que finalmente se obtiene la siguiente representación en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned}$$

$$x_1 = h(t); \quad \dot{x}_1 = \frac{dh(t)}{dt} = x_2; \quad \dot{x}_2 = \frac{d^2h(t)}{dt^2}$$

$$f_1 = \dot{x}_1 = x_2$$

$$f_2 = \dot{x}_2 = g - \frac{0.0001/M}{x_1} \cdot x_3^2$$

$$f_3 = \dot{x}_3 = \frac{V}{L} - \frac{R}{L} \cdot x_3$$

Condiciones iniciales:

$$x_1 = h_0 = 0.01\text{m}; \quad x_2 = dh/dt = 0; \quad x_3 = \sqrt{h_0 \cdot M \cdot g / K}$$

$$A = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -0.626/\sqrt{M} \\ 0 & 0 & -R/L \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial V} \\ \frac{\partial f_2}{\partial V} \\ \frac{\partial f_3}{\partial V} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \end{bmatrix};$$

$$C = \begin{bmatrix} \frac{\partial Y}{\partial x_1} & \frac{\partial Y}{\partial x_2} & \frac{\partial Y}{\partial x_3} \end{bmatrix} = [1 \ 0 \ 0]; \quad D = [0]$$

donde $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ es el conjunto de variables de

estado del sistema, u es la tensión de entrada V y la salida Y es la altura h .

A partir de este momento entonces procedemos a diseñar el controlador vía LMI's a través de criterios tales como la estabilidad y ubicación de polos teniendo en cuenta la incertidumbre del sistema. En primer lugar procedemos a analizar el sistema ideal sin incertidumbre (con los valores nominales de los parámetros: $M=0.05$ Kg, $L=0.01$ H y $R=1\Omega$) para ver si este es estable o inestable. Las matrices correspondientes para este sistema son:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 980 & 0 & -2.8 \\ 0 & 0 & -100 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 100 \end{bmatrix}; C = [1 \ 0 \ 0]$$

Los polos del sistema se hallan a través de los valores propios de la matriz A, los cuales son:

$$polo1 = 31.3050; \quad polo2 = -31.3050; \quad polo3 = -100$$

Como se puede apreciar, uno de los polos se halla en el semiplano derecho, lo que significa que el sistema es inestable en lazo abierto. Se puede entonces construir un controlador en especial, de los que presenta la teoría de control clásica, cuyos criterios de diseño sean: un tiempo de establecimiento $t_s < 0.5$ seg. y un sobrepico $M_p < 5\%$. Lamentablemente al tomar en cuenta la existencia de incertidumbre en el sistema, los controladores clásicos ya no pueden cumplir con los criterios de desempeño deseados; ya que su uso está limitado única y exclusivamente para sistemas sin incertidumbre. Es por esta razón por la que diseñaremos un controlador vía LMI's que permita cumplir con los requerimientos del sistema tomando en cuenta la incertidumbre dada en el sistema.

El diseño a implementarse utilizará la ley de realimentación de estados más control integral que presenta la siguiente estructura:

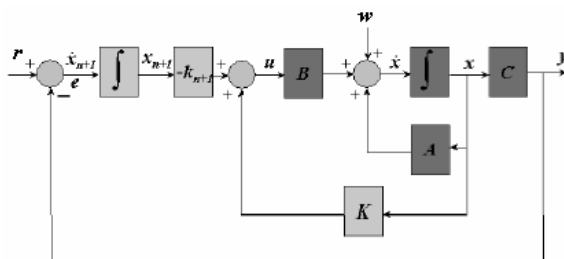


Figura 9. Control por realimentación de estados más Control integral.

Este esquema tiene la ventaja de poder garantizar una condición de desempeño ante perturbaciones estacionarias, en la cual el sistema puede realizar un seguimiento de la señal de referencia sin error lo que representa una condición más interesante que la que se obtiene por realimentación simple de estados [PVC02]. El sistema linealizado a lazo cerrado para este esquema queda definido por las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} + \bar{B}\bar{K})\bar{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} r + \bar{B}u; \quad y = \bar{C}\bar{x}$$

En donde el vector de estados y las matrices del sistema a lazo cerrado ahora pasan a ser:

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} x \\ x_{n+1} \end{bmatrix}; \quad \bar{A} = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} \quad \bar{B} = \begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix} \quad C = [C \ 0]$$

En el nuevo vector de estados del sistema \bar{x} , se observan los estados originales de la planta y un nuevo estado que resulta de la incorporación de un integrador asociado a la señal de error resultante de la diferencia entre la referencia y el valor de la salida del sistema, con lo que se pretende asegurar el seguimiento de la señal de referencia que permita eliminar el error del sistema ante valores constantes de la misma.

Finalmente el nuevo vector de ganancias de realimentación estaría dado por: $\bar{K} = [K \ k_{n+1}]$, donde k_{n+1} será la ganancia correspondiente para la parte integral.

La nueva representación en espacio de estados para nuestro sistema quedaría expresada de la siguiente manera:

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A}^* \bar{x} + \bar{B}_r^* r + \bar{B}_u^* u$$

$$y = \bar{C} \bar{x} + D^* u$$

$$\bar{A}^* = \begin{bmatrix} A & 0 \\ -C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -0.626/\sqrt{M} & 0 \\ 0 & 0 & -R/L & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{B}_r^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_u^* = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/L \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \bar{B} = [\bar{B}_r \ \bar{B}_u]$$

$$\bar{C} = [1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0];$$

$$D = [0]$$

Con esta representación, a continuación se procede a formar la LMI que dará solución al sistema. Primero se introducirá la incertidumbre en el sistema y por facilidad lo haremos a través del modelo politópico, el cual por motivo de la incertidumbre que presentan la masa M, la inductancia L y la resistencia R en el rango:

$$M \in [0.04, 0.06]; L \in [0.008, 0.012]; R \in [0.8, 1.2]$$

se caracterizará por poseer 8 posibles sistemas extremos como muestra la tabla 2.

En segundo lugar ubicamos la región LMI en donde se ubicarán los polos del sistema en lazo cerrado y que permita cumplir con los requerimientos del sistema deseados. Una región adecuada para este caso corresponde a la intersección de las regiones: semiplano izquierdo y sector disco, con las cuales se asegura la rapidez del sistema junto a un

$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -3.13 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -3.13 & 0 \\ 0 & 0 & -150 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -3.13 & 0 \\ 0 & 0 & -66.67 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 83.33 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -3.13 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 83.33 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -2.55 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_6 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -2.55 & 0 \\ 0 & 0 & -150 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 125 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_7 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -2.55 & 0 \\ 0 & 0 & -66.67 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_7 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 83.33 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$
$A_8 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 980 & 0 & -2.55 & 0 \\ 0 & 0 & -100 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	$B_8 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 83.33 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C_6 = C_7 = C_8 = [1 \ 0 \ 0 \ 0]$
 $D_1 = D_2 = D_3 = D_4 = D_5 = D_6 = D_7 = D_8 = [0]$

limitado máximo pico.

Las matrices P y Q formadas a raíz de la intersección de las dos regiones anteriores son las siguientes:

$$D = \{s \in C : P + sQ + \bar{s}Q^T < 0\}$$

Región semiplano izquierdo: $s + \bar{s} + 2\alpha_s$

$$P_1 = [2\alpha_s]; \quad Q_1 = [1]; \quad Q_1^T = [1]$$

$$\text{Sector disco: } \begin{pmatrix} -r & \bar{s} + q \\ s + q & -r \end{pmatrix}$$

$$P_2 = \begin{bmatrix} -r & q \\ q & -r \end{bmatrix}; \quad Q_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad Q_2^T = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Intersección:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & P_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\alpha_s & 0 & 0 \\ 0 & -r & q \\ 0 & q & -r \end{bmatrix}; \quad Q = \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Tabla 2. Matrices vértices del sistema politópico

Por último, pasamos a formular las LMIs de las cuales se obtendrá la matriz de Lyapunov X que permitirá cumplir con el criterio de estabilidad, así como también la matriz de retroalimentación K.

La condición LMI será: Los polos del sistema en lazo cerrado son ubicados en la región LMI:

$$D = \{s \in C : P + sQ + \bar{s}Q^T < 0\}$$

Si y solo si existe una matriz simétrica

$$X = X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = X_5 = X_6 = X_7 = X_8 = X^T$$

$$\text{con } Y = Y_1 = Y_2 = Y_3 = Y_4 = Y_5 = Y_6 = Y_7 = Y_8 = K * X$$

que satisfaga:

$$\begin{bmatrix} 2\alpha_s X_1 + A_1 X_1 + B_{u1} Y_1 + A_1^T X_1 + B_{u1}^T Y_1^T & 0 & 0 \\ 0 & -r X_1 & q X_1 + A_1^T X_1 + B_{u1}^T Y_1^T \\ 0 & q X_1 + A_1 X_1 + B_{u1} Y_1 & -r X_1 \\ \vdots & & \\ \vdots & & \\ 2\alpha_s X_8 + A_8 X_8 + B_{u8} Y_8 + A_8^T X_8 + B_{u8}^T Y_8^T & 0 & 0 \\ 0 & -r X_8 & q X_8 + A_8^T X_8 + B_{u8}^T Y_8^T \\ 0 & q X_8 + A_8 X_8 + B_{u8} Y_8 & -r X_8 \end{bmatrix} < 0$$

$$X > 0$$

Para dar solución a todas estas LMIs de una manera más rápida y eficiente, se usó el software LMI Control Toolbox de Matlab; mediante el cual se llegó a definir la región intersecada por: semiplano izquierdo: con punto inicial $\alpha_s = -10$ y sector disco: con centro $q=0$ y radio $r=126$, como la más adecuada para cumplir con los requerimientos del sistema deseados.

Resultados del diseño

Definido entonces todo el sistema de LMIs, la matriz de Lyapunov X y de retroalimentación K arrojadas fueron las siguientes:

$$X = \begin{bmatrix} 0.0934 & -2.9201 & 0.102 & 0.003 \\ -2.920 & 91.6969 & 3.826 & -0.0930 \\ 0.102 & 3.8257 & 251.407 & 0.0052 \\ 0.003 & -0.0930 & 0.00520 & 0.0001 \end{bmatrix}$$
$$K = [1132 \quad 30 \quad -0.2 \quad -6064]$$

Siendo $k_{n+1} = K(1,4) = -6064$ la ganancia correspondiente para el factor integral. Para evaluar el comportamiento del sistema con incertidumbre en general se grafica la respuesta temporal de todos los sistemas matrices vértices que conforman el sistema politópico producto de la incertidumbre ante una entrada escalón de 0.01 (altura deseada de la bola en mts) bajo condiciones iniciales no nulas ($h=0.005$ mts, $dh/dt = 0$, $i=0$). Estas respuestas obtenidas se presenta en la figura 10:

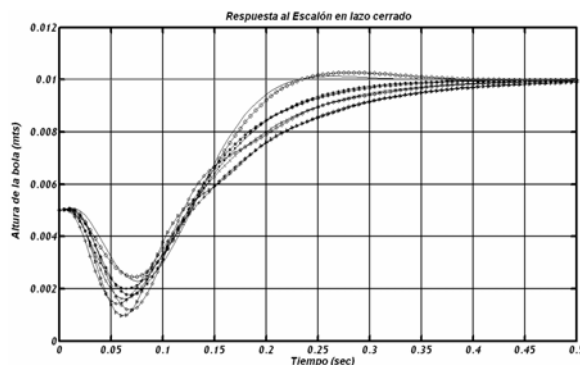


Figura 10. Respuestas del sistema de levitación en lazo cerrado con incertidumbre.

Se aprecia con esto claramente como la distancia entre la bola y el electromagneto sigue fielmente a la señal de referencia (distancia deseada), con las características de requerimiento deseado ($t_s < 0.5$ seg y $M_p < 5\%$).

VI. Conclusiones

El método de diseño de sistemas de control robustos mediante realimentación de estados utilizando la técnica de las Desigualdades Lineales Matriciales (LMIs) demuestra ser atractivo para problemas de control en los cuales se especifican múltiples objetivos. Se ha demostrado mediante los ejemplos que las especificaciones de respuesta transitoria pueden ser obtenidas mediante la

especificación de regiones en el plano complejo que pueden ser formuladas mediante LMI. La técnica de diseño mediante LMI permite también resolver problemas de rechazo a perturbaciones mediante la optimización de la norma H_∞ de la función de transferencia desde la perturbación a la salida, así como también limitar la energía de los estados y de la señal de control mediante la optimización de la norma H_2 del vector formado por estas señales. Finalmente la técnica mediante LMI permite resolver el problema de diseño de controladores robustos en el caso de que se incluya incertidumbre paramétrica en la planta.

VII. Referencias Bibliográficas

- [SW99] C. Scherer S. Wieland. Lecture notes disc course on Linear Matrix Inequalities in Control. 1999
- [DB90] John Doyle, Bruce Francis, Allen Tannenbaum. Feedback control Theory. USA 1990.
- [CGA95] M.Chilali P.Gahinet P. Apkarian. Robust Pole Placement in LMI regions. 1995
- [GNLC95] P. Gahinet Arkadi Nemirovski A. Laub M. Chilali. LMI Control Toolbox For use with MATLAB. 1995.
- [PVC02] O. Perez, P.Vega, W. Colmenares. Diseño Integrado con Realimentación Robusta de Estados vía Desigualdades Lineales Matriciales.
- [AW97] Addison-Wesley. Tutorial de Espacio de estados. http://www.ib.cnea.gov.ar/~control2/Links/Tutorial_Matlab_esp/state.html.

Biografía de los Autores



Ing. Víctor Proaño Rosero. Ingeniero en Electrónica y Control de la Escuela Politécnica Nacional (1986). Es profesor en la Escuela Politécnica del Ejército desde 1989. Sus áreas de interés son Sistemas de Control, Microcontroladores, Instrumentación, Control Industrial.

Edwin Aguilar



Jaramillo Ingeniero en Electrónica Automatización y Control por la Escuela Politécnica del Ejército (ESPE). Profesor del Departamento de Eléctrica y Electrónica de la ESPE desde el año 2005 en las áreas de Control e

Instrumentación Electrónica. Sus temas de interés son Control Robusto, Control Óptimo mult-objetivo, Control vía LMIs, así como la aplicación de estas modernas técnicas al control de procesos.