

EVALUACIÓN DEL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA EN UN SUELO ESTRATIFICADO MEDIANTE SIMULACIÓN EMPLEANDO UN COMPUTADOR PERSONAL

Ayora González Paúl
Escuela Politécnica Nacional
payorag@yahoo.es

Marín Cajas Cristian
cpmarinc@yahoo.es
Construlec Cia. Ltda.

ABSTRACT:

This work develops equations for calculating ohmic resistance, and touch and step voltages of earth electrodes. An is employed images and punctual electrode method.

The mathematical expressions attained consider layers of soil of different resistivity. The equations developed are independent of the relative position of segments of electrodes among themselves and them with respect to the surface of earth.

A PC program which employs the equations developed obtains representative results both numerical and graphical.

RESUMEN:

Las ecuaciones que modelan un electrodo o malla de puesta a tierra, enterrada en un suelo estratificado, se obtienen por el método de las imágenes para una fuente puntual de corriente

Se desarrollan las expresiones matemáticas considerando capas con diferentes resistividades. Estas expresiones son halladas mediante la determinación del potencial medio entre electrodos lineales, y tienen la ventaja de ser aplicables cualquiera que sea la posición relativa de los segmentos del electrodo.

Las expresiones matemáticas se emplean en un programa computacional que permite la obtención de la resistencia de puesta a tierra del electrodo y de potenciales de toque o contacto y de paso a nivel de piso para electrodos complejos.

Se presenta un análisis representativo de los resultados cuantitativos y gráficos que

pueden obtenerse empleando el programa computacional.

INTRODUCCIÓN

El comportamiento de los electrodos de puesta a tierra puede ser caracterizado por:

- La resistencia de puesta a tierra.
- La diferencia de potencial entre puntos sobre la superficie de la tierra.

Estas diferencias de potencial son tensiones eléctricas que pueden afectar a las personas que se encuentran en la instalación.

Los factores que determinan la resistencia de puesta a tierra son:

- Las condiciones del suelo, es decir su resistividad o resistividades si se trata de un suelo no homogéneo.
- La configuración del electrodo de puesta a tierra, es decir su forma y dimensiones.

En este trabajo se emplean las siguientes expresiones:

GPR: es el máximo voltaje que el electrodo de puesta a tierra alcanza respecto a la tierra remota.

Potencial de Paso: es la diferencia de potencial en la superficie experimentada por una persona, cuyos pies están separados un metro entre si, sin tocar ningún objeto puesto a tierra.

Potencial de Toque: es la diferencia de potencial entre el GPR y el potencial en la superficie, en un punto donde una persona

esta parada, originada por el contacto de una mano con una estructura que está conectada a tierra.

AETP: Programa desarrollado para PC que permite el análisis de electrodos de puesta a tierra.

Este trabajo se enfoca en el **estudio de un suelo estratificado de tres capas**. El estudio y análisis de un electrodo puntual debajo de la superficie en un suelo homogéneo y un suelo estratificado de dos capas se encuentra ampliamente tratado en la referencia [10].

ESTUDIO DE UN ELECTRODO PUNTUAL EN SUELO DE TRES CAPAS

La teoría de imágenes al ser aplicada a problemas de electrodos embebidos bajo la superficie de la tierra, asume que esta superficie es un cuasi espejo y que toda la región bajo ella es reflejada en la región sobre si misma, es decir el suelo con sus diferentes estratos [2], [3].

A continuación se considera un suelo estratificado de tres capas, en la práctica la primera capa corresponde a la capa de protección de alta resistividad y el electrodo puede estar inmerso en la segunda o tercera capa del suelo estratificado. Si se considera que el punto donde se desea determinar el potencial se encuentra en cualquiera de los estratos, se presentan varias alternativas que asocian al **estrato en que se encuentra el electrodo, y al estrato donde se requiere el potencial**, es decir al punto de interés.

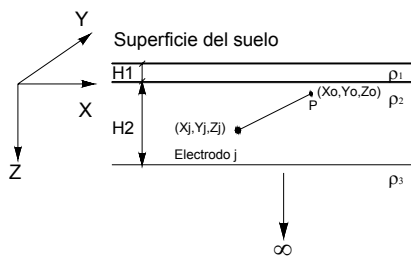


Figura 1 Modelo de electrodo puntual en un suelo no homogéneo de tres capas considerando que el electrodo y el punto se encuentran en la segunda capa

La discontinuidad entre la segunda y primera capa puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión.

$$K_1 = K_{12} = -K_{21} = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (1)$$

La discontinuidad entre la segunda y tercera capa puede ser caracterizada mediante el coeficiente de reflexión.

$$K_2 = K_{32} = -K_{23} = \frac{\rho_3 - \rho_2}{\rho_3 + \rho_2} \quad (2)$$

Se consideran los siguientes casos:

Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{1}{ro} + \frac{K_1}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n-1}}{r_{An}'} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-2}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n-2}}{r_{An}'} + \frac{K_1^{n-2}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n-2}}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots}^{\infty} \left(\frac{K_1^{n-2} K_2^{n-1}}{r_{an}} + \frac{K_1^{n-1} K_2^n}{r_{an}'} + \frac{K_1^n K_2^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{K_1^{n+1} K_2^n}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (3)$$

donde:

$$ro = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + (Zj - Zo)^2} \quad (a)$$

$$ro' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + (Zj + Zo)^2} \quad (b)$$

$$r_{an} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) - 2(H1 + (n-1)H))^2} \quad (c)$$

$$r_{an}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) + 2(H2 + (n-1)H))^2} \quad (d)$$

$$r_{bn} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) - 2(H1 + (n-1)H))^2} \quad (e)$$

$$r_{bn}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) + 2(H2 + (n-1)H))^2} \quad (f)$$

$$r_{An} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj + Zo) - 2nH)^2} \quad (g)$$

$$r_{An}' = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) + 2nH)^2} \quad (h)$$

$$r_{Bn} = \sqrt{(Xj - Xo)^2 + (Yj - Yo)^2 + ((Zj - Zo) - 2nH)^2} \quad (i)$$

$$r_{Bn}' = \sqrt{(X_j - X_o)^2 + (Y_j - Y_o)^2 + ((Z_j + Z_o) + 2nH)^2} \quad (j)$$

(4)

y

$$H = H1 + H2 \quad (5)$$

Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

$$V(P) = \frac{\rho_3 I}{4\pi} \left\{ \left(\frac{1}{ro} + \frac{(K_1 K_2)^2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} \left(K_1^{n-1} \left[\frac{K_2^{[n-2]}}{r_{An}} + \frac{K_2^n}{r_{An}'} \right] + K_1^{n+1} \left[\frac{K_2^n}{r_{Bn}} + \frac{K_2^{n+2}}{r_{Bn}'} \right] \right) + \sum_{n=2,4,\dots} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-2}}{r_{An}} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{An}'} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{Bn}} + \frac{(K_1 K_2)^{n+2}}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-2}}{r_{an}} + \frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{an}'} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{bn}} + \frac{(K_1 K_2)^{n+1}}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (6)$$

Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

El voltaje en el punto P debido a la corriente que abandona el electrodo es:

$$V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{K_1}{ro} + \frac{K_1}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} K_1^n K_2^n \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{An}'} + \frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=2,4,\dots} K_2^n \left(\frac{K_1^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{An}'} + \frac{K_1^{n-1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+1}}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{an}} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{an}'} + \frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (7)$$

Punto en la capa de resistividad ρ_1 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

$$V(P) = \frac{\rho_3 I}{4\pi} \left\{ \left(\frac{K_1 K_2}{ro} + \frac{K_1 K_2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} K_1^n \left[K_2^{n-1} \left(\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{Bn}} \right) + K_2^{n+1} \left(\frac{1}{r_{An}'} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right) \right] - \sum_{n=2,4,\dots} \left((K_1)^{n-1} (K_2)^{n-1} \left[\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{Bn}} \right] + (K_1)^{n+1} (K_2)^{n+1} \left[\frac{1}{r_{An}'} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right] \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{(K_1 \cdot (-K_2))^{n-1}}{r_{an}} + \frac{(K_1 \cdot (-K_2))^n}{r_{an}'} + \frac{(K_1 \cdot (-K_2))^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{(K_1 \cdot (-K_2))^n}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (8)$$

Punto en la capa de resistividad ρ_2 y electrodo en la capa de resistividad ρ_3

$$V(P) = \frac{\rho_3 I}{4\pi} \left\{ \left(\frac{K_2}{ro} + \frac{K_1^2 K_2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{(K_1 \cdot K_2)^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^{n-1} K_2^{n+1}}{r_{An}'} + \frac{K_1^{n+1} K_2^{n-1}}{r_{Bn}} + \frac{(K_1 \cdot K_2)^{n+1}}{r_{Bn}'} \right) \right\}$$

$$- \sum_{n=2,4,\dots} \left(\frac{K_1^{n-2} (K_2)^{n-1}}{r_{An}} + \frac{K_1^n (K_2)^{n+1}}{r_{An}'} + \frac{K_1^n (K_2)^{n-1}}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+2} (K_2)^{n+1}}{r_{Bn}'} \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{K_1^{[n-2]} (-K_2)^{n-1}}{r_{an}} + \frac{K_1^{n-1} (-K_2)^n}{r_{an}'} + \frac{K_1^n (-K_2)^{n-1}}{r_{bn}} + \frac{K_1^{n+1} (-K_2)^n}{r_{bn}'} \right) \quad (9)$$

Punto en la capa de resistividad ρ_3 y electrodo en la capa de resistividad ρ_2

$$V(P) = \frac{\rho_2 I}{4 \cdot \pi} \left\{ \left(\frac{K_2}{ro} + \frac{K_1^2 K_2}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} \left((K_1 K_2)^{n-1} \left[\frac{1}{r_{An}} + \frac{1}{r_{An}'} \right] + (K_1 K_2)^{n+1} \left[\frac{1}{r_{Bn}} + \frac{1}{r_{Bn}'} \right] \right) + \sum_{n=2,4,\dots} \left(K_2^{n-1} \left[\frac{K_1^{n-2}}{r_{An}} + \frac{K_1^n}{r_{An}'} \right] + K_2^{n+1} \left[\frac{K_1^n}{r_{Bn}} + \frac{K_1^{n+2}}{r_{Bn}'} \right] \right) + \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{(K_1 K_2)^{n-2}}{r_{an}} + \frac{(K_1 K_2)^{n-1}}{r_{an}'} + \frac{(K_1 K_2)^n}{r_{bn}} + \frac{(K_1 K_2)^{n+1}}{r_{bn}'} \right) \right\} \quad (10)$$

Los subíndices **a**, **A** y **b**, **B** denotan las distancias desde las imágenes reflejadas por las interfaces **a**, y **A** (bajo la superficie) y **b**, **B** (sobre la superficie) al punto **P**.

ELECTRODO FORMADO POR UN CONDUCTOR LINEAL, EN UN SUELO ESTRATIFICADO

A continuación se considera el caso de un electrodo compuesto por un conductor lineal de longitud L, enterrado en la segunda capa. El electrodo se extiende del punto **Mi(Xi,Yi,Zi)** al **Mj(Xj,Yj,Zj)** donde los subíndices **i** indican el extremo inicial y los subíndices **j** el extremo final (figura 2).

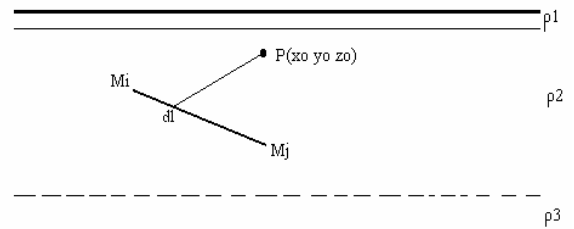


Figura 2 Electrodo lineal en un medio estratificado

Si **i** es la densidad de corriente lineal a lo largo del conductor, el potencial producido en el punto **P(Xo,Yo,Zo)** por un elemento infinitesimal del conductor **dl** depende del

estrato en que se encuentre el conductor y el punto **P**.

De manera general se puede decir que las expresiones de potencial tienen la forma:

$$dV(P) = i \cdot cte_{rsis} \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{ro} + \frac{cte_{KO'}}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dl +$$

$$+ i \cdot cte_{rsis} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dl +$$

$$+ i \cdot cte_{rsis} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an'}} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn'}} \right) \right\} \cdot dl$$

(11)

Los valores de las constantes de las expresiones anteriores dependen del estrato en el que está el punto donde se requiera el potencial, así como el electrodo por donde abandona la corriente, su análisis se encuentra ampliamente detallado en la referencia [11].

Considerando que la distribución de corriente es constante, también i se puede considerar constante. Luego el potencial total inducido por el conductor en $P(X_o, Y_o, Z_o)$ es:

$$V(P) = i \cdot cte_{rsis} \int_{\psi} \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{ro} + \frac{cte_{KO'}}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dl +$$

$$+ i \cdot cte_{rsis} \int_{\psi} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dl +$$

$$+ i \cdot cte_{rsis} \int_{\psi} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an'}} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn'}} \right) \right\} \cdot dl$$

(12)

Con el fin de poder llevar a cabo esta integración a lo largo de la trayectoria ψ del electrodo, conviene escoger un nuevo sistema de referencia para simplificar los cálculos.

Se escoge el nuevo sistema de referencia denominado **UVW** de manera que el eje **U** coincida con el eje del conductor, de forma que las coordenadas del conductor en este nuevo sistema de referencia sean: **Mi(0,0,0)** y **Mf(Uf,0,0)** donde **Uf=L** es la longitud del conductor. Las coordenadas del punto **P** en este nuevo sistema de referencia son **Uo, Vo, Wo** [4].

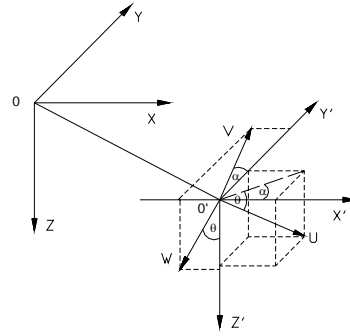


Figura 3 Sistema de referencia UVW ligado al eje del conductor

El sistema **X'Y'Z'** es paralelo al sistema **XYZ** pero coincide en su origen con el sistema **UVW**.

La relación entre el sistema de referencia **XYZ** y el sistema **UVW** se establece en la referencia [10].

Como el eje **U** coincide con el conductor **Uf=L**, la integral para calcular el potencial que el conductor induce en un punto **P**, solo depende de la variable **U**, con lo que la ecuación 10 puede ser expresada como:

$$V(P) = i \cdot cte_{rsis} \int_0^{Uf} \left\{ \left(\frac{cte_{KO}}{ro} + \frac{cte_{KO'}}{ro'} \right) + \sum_{n=1,3,\dots} \left(\frac{cte_{K11}}{r_{An}} + \frac{cte_{K12}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K13}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K14}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dU +$$

$$+ i \cdot cte_{rsis} \int_0^{Uf} \left\{ \sum_{n=2,4,\dots} \left(\frac{cte_{K21}}{r_{An}} + \frac{cte_{K22}}{r_{An'}} + \frac{cte_{K23}}{r_{Bn}} + \frac{cte_{K24}}{r_{Bn'}} \right) \right\} \cdot dU +$$

$$+ i \cdot cte_{rsis} \int_0^{Uf} \left\{ \sum_{n=1,2,3,\dots} \left(\frac{cte_{K31}}{r_{an}} + \frac{cte_{K32}}{r_{an'}} + \frac{cte_{K33}}{r_{bn}} + \frac{cte_{K34}}{r_{bn'}} \right) \right\} \cdot dU$$

(13)

Integrando la expresión anterior se obtiene la expresión del potencial inducido en el punto **P(Uo,Vo,Wo)** por la corriente que abandona el conductor:

$$V(P) = i \cdot cte_{rsis} \left\{ cte_{KO} \cdot fo + cte_{KO'} \cdot fo' + \sum_{n=1,3,\dots} cte_{K11} \cdot f_{An} + cte_{K12} \cdot f_{An'} + cte_{K13} \cdot f_{Bn} + \right.$$

$$+ cte_{K14} \cdot f_{Bn'} + \sum_{n=2,4,\dots} cte_{K21} \cdot f_{An} + cte_{K22} \cdot f_{An'} + cte_{K23} \cdot f_{Bn} + cte_{K24} \cdot f_{Bn'} +$$

$$\left. \sum_{n=1,2,3,\dots} cte_{K31} \cdot f_{an} + cte_{K32} \cdot f_{an'} + cte_{K33} \cdot f_{bn} + cte_{K34} \cdot f_{bn'} \right\}$$

(14)

El detalle de la expresión anterior se encuentra ampliamente detallado en la referencia [11].

Electrodo formado por un conductor lineal, enterrado en una capa de un suelo estratificado

La ecuación 14 es una expresión general que indica el potencial en un punto debido a la corriente que abandona un electrodo lineal, y como ya se indicó depende en el que se encuentra el electrodo y el estrato en el que se encuentra el punto respectivamente, siempre y cuando este electrodo no salga de los límites donde es válida esta expresión (es decir su estrato).

Electrodo formado por un conductor lineal, enterrado en dos capas de un suelo estratificado

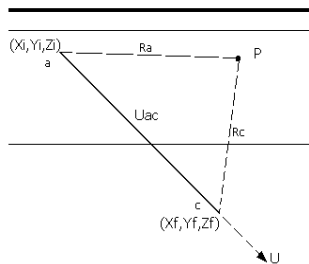


Figura 4 Electrodo inmerso en dos capas de un suelo estratificado

Para obtener el potencial en un punto debido a un electrodo enterrado en dos capas de un suelo uniforme se debe considerar que este potencial es igual al potencial obtenido por dos electrodos independientes colineales, cada uno de los cuales estará sumergido en una sola capa de suelo.

Considere un electrodo lineal **ac** que se extiende desde el punto **a** hasta el punto **c** embebido en dos capas del suelo estratificado (figura 4). Si a este electrodo se lo divide en dos electrodos completamente independientes **Uab**, **Ubc** considerando el punto **b** que es el punto en la frontera en donde el electrodo pasa de la una capa a la otra (figura 5).

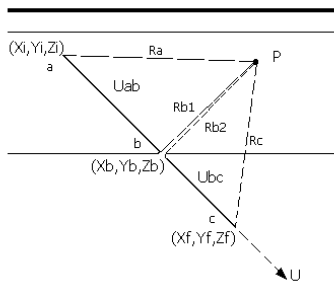


Figura 5 Electrodo dividido en dos electrodos independientes cada uno perteneciente a una capa del suelo estratificado

Se habrá resuelto el problema, aplicando para cada electrodo independiente la expresión 14, correspondiente para su caso, para **Uab** se utilizará la expresión que describa el comportamiento del punto y electrodo en la segunda capa del suelo, y para **Ubc** se utilizará la expresión que describa el comportamiento del punto en la segunda capa y electrodo en la tercera capa.

Para realizar lo anterior es necesario determinar las coordenadas del punto **b**, puesto que el electrodo **Uab** está caracterizado por **(Xi, Yi, Zi)** como coordenadas iniciales y el punto **(Xb, Yb, Zb)** como coordenadas finales, y el electrodo **Ubc** está caracterizado por **(Xb, Yb, Zb)** como coordenadas iniciales y el punto **(Xf, Yf, Zf)** como coordenadas finales.

Las coordenadas del punto **b** en el sistema **XYZ** son:

$$Xb = Xf - (Zf - H) \left(\frac{Xf - Xi}{Zf - Zi} \right) \quad (15)$$

$$Yb = Yf - (Zf - H) \left(\frac{Yf - Yi}{Zf - Zi} \right) \quad (16)$$

$$Zb = H \quad (17)$$

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EL CÁLCULO DEL POTENCIAL MEDIO ENTRE CONDUCTORES LINEALES

A continuación se plantea las expresiones para la determinación del potencial medio entre los conductores lineales, o voltaje medio propio de electrodo lineal si se considera el efecto del conductor sobre si mismo.

Cada electrodo en una capa de un suelo estratificado

Se va a analizar el caso general, en el cual cada electrodo pertenece a una capa de un suelo estratificado, es decir, por ejemplo el un electrodo estará enteramente en la segunda capa mientras que el otro electrodo estará en la tercera capa de un suelo no homogéneo, o ambos están en una sola capa ya sea la segunda o tercera de un suelo no homogéneo.

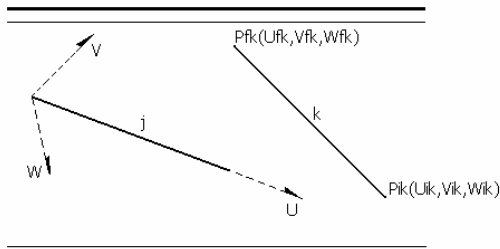


Figura 6 Determinación del potencial medio entre el electrodo j y el electrodo k

Considere dos electrodos lineales **j** y **k** en el sistema de referencia **UVW** donde cada electrodo está inmerso enteramente en la segunda capa de un suelo no homogéneo. Si V_{jk} es el potencial que el electrodo **j** induce en un punto cualquiera que pertenece al electrodo **k**, (dado por la ecuación 14), el potencial medio que **j** produce en el electrodo **k** está definido por la integral de V_{jk} a lo largo del electrodo **k**, dividida para la longitud del electrodo **k**, ecuación 17.

$$\bar{V}_{jk} = \frac{\int V_{jk} dl}{l(\psi)} \quad (18)$$

V_{jk} es el potencial que produce el conductor **j** en un punto del electrodo **k**.

El símbolo \int_{ψ} indica que se debe integrar V_{jk} a lo largo de la trayectoria ψ . En este caso la trayectoria es el segmento de recta que representa al electrodo **k**, $l(\psi)$ es la longitud de dicha trayectoria [1], [5], [10],[11].

Electrodos en varias capas de un suelo estratificado

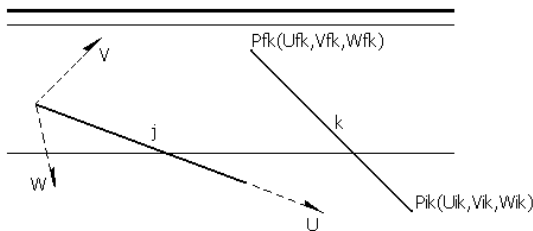


Figura 7 Determinación del potencial medio entre el electrodo **j** y el electrodo **k** con los electrodos en varias capas

Considere dos electrodos lineales **j** y **k** en el sistema de referencia **UVW** inmersos en dos capas de un suelo estratificado (ver figura 7).

La manera de resolver este problema es dividiendo a cada electrodo en dos electrodos donde cada uno de estos estará inmerso en una sola capa del suelo no homogéneo (ver figura 8).

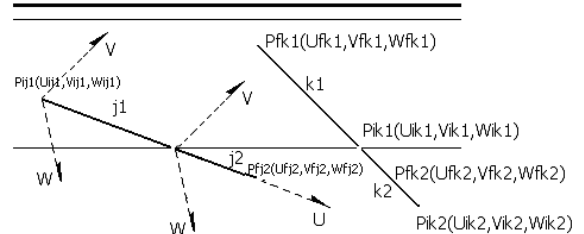
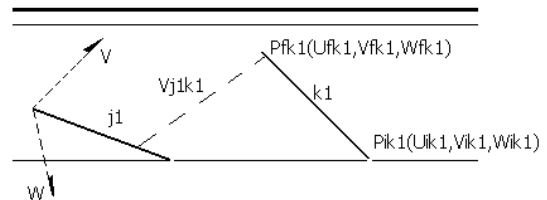
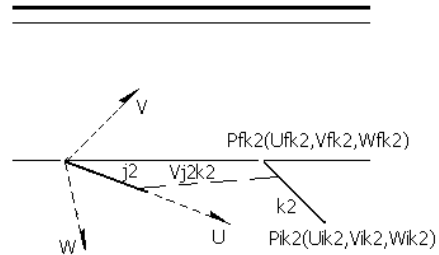


Figura 8 División de electrodos para la determinación del potencial medio entre el electrodo **j** y el electrodo **k** con los electrodos en varias capas

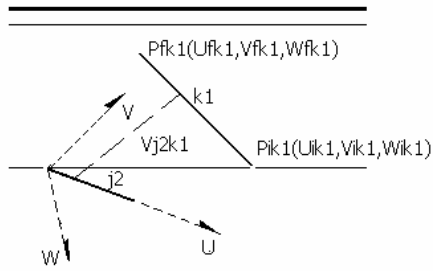
Como se observa en la figura anterior el electrodo **j** ha sido dividido en **j1** y **j2** mientras que el electrodo **k** han sido dividido en **k1** y **k2**, con esta consideración el problema anterior se transforma en cuatro casos en donde cada electrodo pertenece a una capa de un suelo estratificado, problema ya resuelto en el punto anterior (ver figura 9).



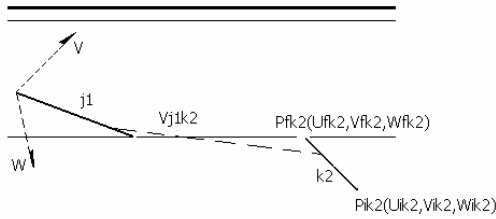
(a) Electrodos inmerso en la segunda capa de un suelo estratificado



(b) Electrodos inmerso en la tercera capa de un suelo estratificado



(c) Un electrodo inmerso en la segunda capa y otro electrodo inmerso en la tercera capa de un suelo estratificado



(d) Un electrodo inmerso en la segunda capa y otro electrodo inmerso en la tercera capa de un suelo estratificado

Figura 9 Casos particulares luego de división de electrodos para la determinación del potencial medio

Para resolver este caso como en el punto anterior es necesario tener las coordenadas de los cuatro electrodos lineales. Se conoce:

$$Pij1(Xij1, Yij1, Zij1) = Pij(Xij, Yij, Zij) \quad (a)$$

$$Pff2(Xfj2, Yfj2, Zfj2) = Pff(Xfj, Yfj, Zfj) \quad (b)$$

$$Pik2(Xik2, Yik2, Zik2) = Pik(Xik, Yik, Zik) \quad (c)$$

$$Pfk1(Xfk1, Yfk1, Zfk1) = Pfk(Xfk, Yfk, Zfk) \quad (d)$$

(19)

Para encontrar las coordenadas faltantes se utiliza las siguientes expresiones.

$$Xfj1 = Xij2 = Xfj - (Zfj - H) \left(\frac{Xfj - Xij}{Zfj - Zij} \right) \quad (20)$$

$$Yfj1 = Yij2 = Yfj - (Zfj - H) \left(\frac{Yfj - Yij}{Zfj - Zij} \right) \quad (21)$$

$$Zfj1 = Zij2 = H \quad (22)$$

$$Xfk1 = Xik2 = Xfk - (Zfk - H) \left(\frac{Xfk - Xik}{Zfk - Zik} \right) \quad (23)$$

$$Yfk1 = Yik2 = Yfk - (Zfk - H) \left(\frac{Yfk - Yik}{Zfk - Zik} \right) \quad (24)$$

$$Zfk1 = Zik2 = H \quad (25)$$

Cuando se trata de evaluar el potencial propio es decir cuando $j=k$, se tienen indeterminaciones porque la expresión de voltaje que produce un conductor lineal es válida en cualquier punto menos en el propio eje del conductor. Para evitar esto la integración (17) se la debe realizar sobre la superficie del conductor y no sobre su eje, para esto se debe tomar en cuenta el radio del conductor (figura 10). [11]

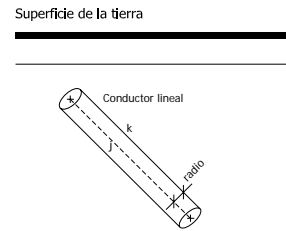


Figura 10 Electrodo para evaluar el potencial medio propio

DETERMINACIÓN DE LA “RESISTENCIA MUTUA” ENTRE CONDUCTORES LINEALES

La resistencia mutua entre el conductor j y el conductor k está dada por [1]:

$$\bar{R}_{jk} = \frac{\bar{V}_{jk}}{I_j} = \bar{R}_{kj} \quad (26)$$

donde I_j es la corriente que abandona el electrodo j y es igual a $i_j \times L_j$ donde L_j es la longitud del conductor j .

La resistencia mutua es un factor fundamentalmente geométrico que depende

del tamaño separación y orientación de los conductores.

PLANTEAMIENTO DE LAS ECUACIONES PARA EVALUAR EL COMPORTAMIENTO DE ELECTRODOS DE PUESTA A TIERRA COMPLEJOS

El planteamiento de las ecuaciones para evaluar el comportamiento de electrodos de puesta a tierra complejos se encuentra ampliamente detallada en las referencias [10] y [11], en base a estas expresiones aplicando las ecuaciones de potencial para suelos estratificados se evalúa el comportamiento de estos para un suelo estratificado

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN

La evaluación del comportamiento de pequeños electrodos lineales puede determinarse en base de las expresiones del punto anterior para una distribución de corriente constante, sin embargo para electrodo de tierra complejos ésta suposición no es valida, ya que la corriente disipada por las diferentes partes del electrodo no es uniforme [1], [6].

Para un electrodo que ha sido dividido en n segmentos, el potencial que se genera en el segmento k debido a si mismo y a los demás segmentos está dado por:

$$V_k = \sum_{j=1}^n R_{jk} \cdot I_j \quad (27)$$

donde:

R_{jk} = resistencia entre el j -ésimo segmento y el segmento k

I_j = corriente que abandona el j -ésimo segmento

Aplicando la ecuación 26 a cada segmento en que ha sido dividido el electrodo se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones de orden n :

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \cdot \\ V_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdot & R_{1n} \\ R_{21} & R_{22} & \cdot & R_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ R_{n1} & R_{n2} & \cdot & R_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \cdot \\ I_n \end{bmatrix} \quad (28)$$

Los valores de R_{jk} están dados por la ecuación 27. La ventaja de esta expresión es que permite que los segmentos estén en cualquier orientación entre ellos y con respecto de la superficie de la tierra.

Determinación de la distribución de corriente

Considerando que todos los segmentos forman parte del mismo electrodo y la caída de potencial entre los distintos segmentos es despreciable; se puede asumir que el potencial que alcanzan todos los segmentos es igual al potencial que alcanza la puesta a tierra respecto a tierra remota este potencial será designado por **GPR** [1].

De lo anterior se tiene:

$$GPR = V_1 = V_2 = \dots = V_n \quad (29)$$

Como algoritmo se va a calcular el valor de las corrientes para que la malla de tierra se eleve un voltio respecto de tierra remota, **GPR=1**.

Puesto que las corrientes son calculadas para un **GPR=1**, éstas están en por unidad (**pu**) del valor de **GPR**

El sistema de ecuaciones de la expresión 28 puede ser resuelto por algunos métodos, este trabajo utiliza la inversión de la matriz de "resistencias mutuas"

Determinación de la resistencia del electrodo

La corriente total en **pu** que abandona el electrodo está dado por:

$$I = \sum_{j=1}^n I_j \quad (30)$$

El potencial en **pu** que alcanza la puesta a tierra respecto de tierra remota es:

$$GPR = Rg \cdot I \quad (31)$$

Donde, R_g es el valor de la resistencia a tierra que se busca e I es la corriente total que abandona la puesta a tierra, despejando R_g , recordando que $GPR=1$:

$$R_g = \left[\sum_{j=1}^n I_j \right]^{-1} \quad (32)$$

El valor de GPR en voltios es:

$$GPR = R_g \cdot I_{cc} \quad (33)$$

donde:

GPR = potencial del electrodo respecto de tierra remota

I_{cc} = corriente de diseño en Amperios.

Determinación de los voltajes de toque o contacto y de paso

Conocida la distribución de corriente se puede encontrar los potenciales generados en los puntos de interés, así para un punto $P(X,Y,0)$ en la superficie de la tierra el potencial inducido será igual a la sumatoria de los potenciales generados en dicho punto por cada uno de los segmentos en que se ha dividido el electrodo.

$$V(P) = \sum_{j=1}^n V_j(P) \quad (34)$$

donde $V_j(P)$ es el potencial producido en el punto $P(X,Y,0)$ por la corriente I_j disipada en la tierra por el segmento j parte del electrodo de puesta a tierra y cuyo valor está dado por la expresión 14.

El potencial de toque, V_t , en cualquier punto está dado por:

$$V_t(X,Y,0) = GPR - V(X,Y,0) \quad (35)$$

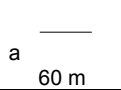
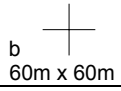
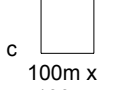
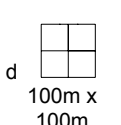
El potencial de paso, V_p , entre el punto $P(X,Y,0)$ y $Q(X_1,Y_1,0)$ está dado por:

$$\Delta V_p = V(X,Y,0) - V(X_1,Y_1,0) \quad (36)$$

ESTUDIO COMPARATIVO CON APLICACIONES SIMILARES

No se pretende un análisis comparativo de la metodología utilizada para resolver el problema, sino una comparación de los resultados obtenidos (para suelos de dos capas)

Tabla 1 Comparación de resultados de resistencia del programa AEPT con las referencias 7, 8, 9, 10 y 11.

Electrodo	Ref. [7]	Ref. [8]	Ref. [9]	Ref. [10]	AEPT Ref [11]
	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)	R(Ω)
a  60 m	2.87	2.79	2.78	2.79	2.80
b  60m x 60m	1.84	1.79	1.85	1.80	1.89
c  100m x 100m	0.645	0.629	0.611	0.629	0.638
d  100m x 100m	0.586	0.552	0.558	0.553	0.557

Suelo de tres capas

A continuación se considera un suelo de tres capas con el electrodo enterrado en la segunda y en la tercera capa (ver figura 11)

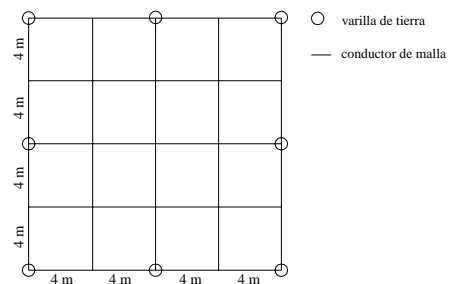
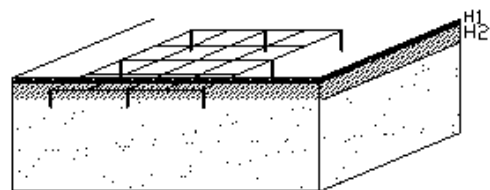


Figura 11 Malla uniforme con varillas enterradas en un suelo estratificado

Los datos utilizados son los siguientes:

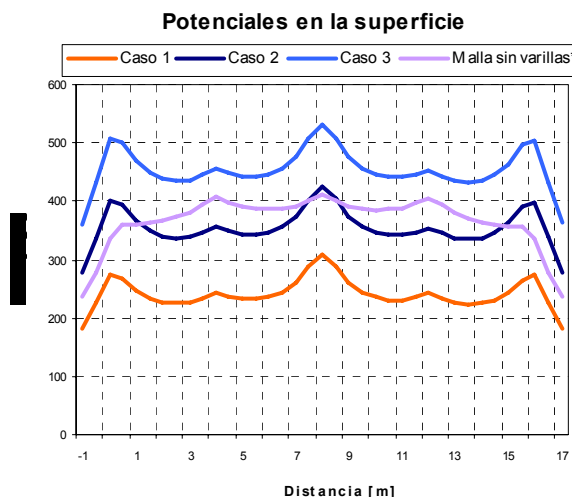
- diámetro del conductor 14 mm
- la profundidad de enterramiento de malla es de 0.6 m
- la longitud de las varillas enterradas verticalmente es de 2 m
- la corriente descargada por es electrodo es 1000 A
- el espesor de la primera capa es de 0.12 m (H1)
- el espesor de la segunda capa es de 1.68 m (H2)

Tabla 2 Variación de la resistencia y potenciales en un punto en la Superficie directa sobre el centro de la malla

Caso #	ρ_1 $\Omega\text{-m}$	ρ_2 $\Omega\text{-m}$	ρ_3 $\Omega\text{-m}$	R Ω	Vt* [V]	Vp* [V]
1	1500	100	60	2.2	1882.4	36.62
2	1500	100	100	4.9	4528.9	35.81
3	1500	100	140	6.2	5687.3	36.87

- * H1 espesor de la primera capa, H1=0.12m
- * H2 espesor de la segunda capa, H2=1.68m
- * Vt voltaje de toque en el punto central de la malla
- * Vp voltaje de paso en el punto central de la malla

En la figura 12 se ha trazado el potencial en la superficie a lo largo de uno de los lados de la malla que forma del electrodo, para los casos de la tabla 3



* Malla sin varillas corresponde a la curva de potenciales a lo largo de uno de los lados de la malla de la figura 15, sin considerar las varillas enterradas, y se emplea los datos de resistividad del caso 2 de la tabla 2

Figura 12 Potenciales en la superficie para la malla de la figura 11, a lo largo de uno de los lados de la malla que forma parte del electrodo (casos de la tabla 2).

CONCLUSIONES

El método de las imágenes utilizado para determinar el voltaje debido a la corriente que abandona un electrodo puntual (considerando a este como una fuente puntual de corriente), es una forma sencilla de resolver la cuestión, teniendo claro que cada interfaz representa un cuasi-espejo.

La resistencia aumenta siempre que aumenta la resistividad de una de las capas del suelo.

Para un electrodo inmerso en dos estratos de un suelo no homogéneo se observa que a medida que se tiene el contacto del electrodo con uno u otro estrato el efecto de estos tiende a ser mayor o menor (si electrodo está mayoritariamente inmerso en la segunda capa el efecto de esta es mayor que el de la tercera, y viceversa).

Las puestas a tierra con varillas enterradas tienen el inconveniente de que en la superficie directa sobre estas, el potencial se eleva, lo cual puede ser peligroso subestaciones aéreas y aun en caso de cámaras de transformación para las personas que se encuentren en los alrededores, ya que pueden estar sometidos a fuertes tensiones de paso y de contacto si tocan alguna estructura que está conectada a tierra lejana.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] NAGAR R. P., Velásquez R. Review of analytical methods for calculating the performance of large grounding electrodes Part I Theoretical considerations, IEEE Transactions on power Apparatus and systems, Vol PAS-104 No 11, pp 3124 - 3133, November 1985
- [2] Seely Samuel, Introduction to electromagnetic fields, 1958
- [3] REITZ John R, MILFORD Frederick J, CHRISTY Robert W, Fundamentos de la teoría electromagnética, Tercera edición 1984
- [4] DAWALIBI Farid, MUKHEDKAR Dinkar, Resistance Calculation of Interconnected Grounding Electrodes, IEEE Transactions on power Apparatus and Systems, VOL PAS-96, No 1, pp 59-64, January / February 1977

- [5] MARSDEN J., Tromba A., Calculo Vectorial, San Francisco California, E.U.A. 1976.
- [6] HEPE J. Robert, Computation of Potential at Surface Above an Energized Grid or Other Electrode, Allowing for Non-Uniform Current Distribution, IEEE Transactions on power Apparatus and Systems VOL PAS-98, No 6, pp 1978-1989, Nov / Dec 1979
- [7] DAWALIBI Farid, MUKHEDKAR Dinkar, Optimum Design of substation Grounding in a two layer Earth Structure, Part I-Analytical Study, IEEE Transactions on power Apparatus and Systems, VOL PAS-95, No 2, pp 113-119, January / February 1976.
- [8] PEREIRA Natercio, Programa de Cálculo de Parámetros de Malhas de Terra_e Dos Efeitos de correntes a Terra MTER, Boletín CIER, Año XVIII, No 146, Septiembre 1982.
- [9] KOUTEYNIKOFF Pierre, Numerical Computation of the grounding Resistance of Substations and Towers, IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems, Vol Pas-99, No 3, pp 957-965, May/June 1980
- [16] IEEE Std 142 – 1991, IEEE Recommended Practice for Grounding at Industrial and Commercial Power systems, First printing, June 1992.
- [10] NAVARRETE, Jofre. Evaluación del comportamiento de los electrodos de puesta a tierra mediante el uso del computador personal. Tesis, Escuela Politécnica Nacional. Quito. Abril 1996.
- [11] MARIN, Cristian. Evaluación del comportamiento de electrodos de puesta a tierra en un suelo estratificado mediante simulación empleando un computador personal. Tesis, Escuela Politécnica Nacional. Quito. Noviembre 2006.

Ing. Paúl Ayora G.

Nacido en Azogues, Ecuador, 1946 Ingeniero Eléctrico en la Escuela Politécnica Nacional de Quito en 1971 y recibió el Master of Science en High Voltaje Engineering en la Universidad de Manchester, Inglaterra en 1977, Ha ejercido la cátedra en la Escuela Politécnica Nacional por más de 30 años, actualmente es profesor principal en la cátedra de Diseño en Alto Voltaje.

Ing. Cristian Marín C.

Nacido en Latacunga, Ecuador, 1980 Ingeniero Eléctrico en la Escuela Politécnica Nacional de Quito en 2005. En la actualidad es Ingeniero Proyectista de Construlec e Inelin.