FUNDAMENTOS DE LA MECÀNICA CUÀNTICA DESDE LA TEORÌA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Douglas Moya
Departamento de Física
Escuela Politécnica Nacional

RESUMEN

Se construyen los postulados de la Mecánica Cuántica desde la teoría de la relatividad.

1. INTRODUCCIÓN

Muchos miembros de la Comunidad Científica consideran que entre la Teoría de la Relatividad y la Mecánica Cuántica no existe conexión posible. Sin embargo esto no es así si estudiamos el desarrollo histórico de la Teoría Cuántica.

2. TEORÍA DE LA RELATIVIDAD ESPECIAL

Puede resumirse en los siguientes postulados.

- No existe el éter
- La velocidad máxima en la que se transmite la información es la de la luz
- Las leyes de la física son las mismas para los observadores inerciales

Los sucesos físicos en el espacio-tiempo están dados por el cuadrivector:

$$X^{u} = \{ Ct, x, y, z \} \quad (1)$$

o por su adjunto:

$$X_{u} = \{ Ct, -x, -y, -z \} \quad (2)$$

1 y 2 se conectan mediante el tensor métrico:

$$X_{u} = g_{uv} * X^{v} \quad (3)$$

donde:

$$g_{uv} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

El primer término del cuadrivector posición se llama temporal y los otros espaciales.

Cuando bajamos o subimos el súper índice lo único que cambia es el signo de las componentes espaciales.

Se llama intervalo a la distancia entre dos sucesos. Para simplificar consideremos desplazamiento en la dirección **x** y las otras coordenadas espaciales paralelas.

Para ese caso el intervalo es:

$$ds^{2} = c^{2}dt^{2} - dx^{2} \quad (5)$$

que es invariante entre sistemas inerciales. Es por ello que las transformaciones de coordenadas entre ellas son:

$$x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} \quad (6)$$

$$t = \frac{t' - \frac{v}{c^{2}} x'}{\sqrt{1 - \frac{v^{2}}{c^{2}}}} \quad (7)$$

$$y = y' \quad (8)$$

$$z = z' \quad (9)$$

o en la notación de cuadrivectores:

$$x^1 = \frac{x'^1 - \frac{v}{c}x'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{10}$$

$$x^0 = \frac{x'^0 - \frac{v}{c}x'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{11}$$

En general cualquier cuadrivector cuya norma sea invariante.

$$A^u A_u = A_u A^u = A^{02} - A^{12} \tag{12}$$

cumple con:

$$A^1 = \frac{A'^1 - \frac{v}{c}A'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{13}$$

$$A^0 = \frac{A'^0 - \frac{v}{c}A'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{14}$$

En la dinámica relativista se demuestra que la energía y el impulso forman un cuadrivector:

$$p^u = \left\{\frac{E}{c}, p, 0, 0\right\} \tag{15}$$

para el caso especial de un desplazamiento en la dirección x.
Las transformaciones para sistemas inerciales son:

$$p^0 = \frac{p'^0 - \frac{v}{c}p'^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{16}$$

$$p^1 = \frac{p'^1 - \frac{v}{c}p'^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{17}$$

o que es lo mismo:

$$E = \frac{E' - vp'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{18}$$

$$p = \frac{p' - \frac{v}{c^2}E'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{19}$$

y se demuestra además:

$$p = \frac{m_o v}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \quad E = \frac{m_o c^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{20}$$

$$E^2 = m_o{}^2 c^4 + p^2 c^2 \tag{21}$$

para una partícula de masa nula (fotón):

$$E = p.c \quad E' = p'c \tag{22}$$

Que reemplazado en (18) nos da:

$$E = \frac{E' - v\frac{E'}{c}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = E'\sqrt{\frac{1-\frac{v}{c}}{1+\frac{v}{c}}} \tag{23}$$

y para la luz:

$$C = \frac{w}{K} \tag{24}$$

que nos lleva a :

$$\frac{w^2}{c^2} - K^2 = 0 \tag{25}$$

y al cuadrivector:

$$K^u = \left\{\frac{w}{c}, k, 0, 0\right\} \tag{26}$$

$$K = \frac{K' - \frac{v}{c^2}w'}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{27}$$

Y $w = \dfrac{w' - vk'}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}}$ (28)

De (24) y (28) obtenemos:

$$w = w' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (29)$$

De (23) y (29) al dividirlas

$$\frac{E}{w} = \frac{E'}{w'} = \hbar \quad (30)$$

Donde $\hbar$ es un invariante relativista

De (30)

$$E = \hbar . w \quad (31)$$

Que es la relación o postulado de Planck.

De (21) la escribimos

$$E = \sqrt{m_o^2 c^4 + p^2 c^2} = c\sqrt{m_o^2 c^2 + p^2} = Pc \quad (32)$$

Que tiene exactamente la misma forma que un fotón o corpúsculo de luz. Concluimos que las partículas masivas deben poseer características ondulatorias.

En efecto:

$$E = \frac{-\partial s}{\partial t} \quad P = \frac{\partial s}{\partial x} \quad (33)$$

$$\frac{E^2}{c^2} = P^2; \ \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \quad (34)$$

definiendo el Lagrangiano

$$L = \left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)^2 - \frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)^2 \quad (35)$$

y el campo adjunto cumple con la ecuación:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial x}\right)}\right) + \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial L}{\partial\left(\frac{\partial s}{\partial t}\right)}\right) = 0 \quad (36)$$

finalmente:

$$\frac{\partial^2 s}{dx^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 s}{dt^2} = 0 \quad (37)$$

cuya solución es:

$$s = s_0 \ e^{i(kx - wt)} \quad (38)$$

que al reemplazarla en (37) nos da:

$$-K^2 + \frac{w^2}{c^2} = 0 \quad (39)$$

y al cuadrivector :

$$k^u = \left\{\frac{w}{c}, k, 0, 0\right\} \quad (40)$$

donde necesariamente :

$$w = w' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (41)$$

y por (32) al igual que el fotón

$$E = E' \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} \quad (42)$$

de (42) y (41) :

$$\frac{E}{w} = \frac{E'}{w'} = \hbar \quad (43)$$

también:

$$E = \hbar . w \quad (44)$$

también para la partícula masiva.

Para esta onda se cumplirá:

$$V_f . V_g = c^2 \qquad (45)$$

$$V_f = \lambda f$$

Es la velocidad de fase y V_g la de grupo para la onda. Al multiplicar (45) por la masa m.

$$V_f . m . V_g = mc^2 = \hbar w \qquad (46)$$

$$p = mV_g \qquad (47)$$

$$\hbar w = \frac{h}{2\pi} 2\pi f = hf \qquad (48)$$

$$\lambda . f . p = h . f \Rightarrow \lambda = \frac{h}{p} \qquad (49)$$

Que es la relación de Broglie.

OBSERVACIÓN: Hemos deducido o construido las relaciones o postulados de Planck y de Broglie desde la Teoría de la Relatividad.

3. MECÁNICA CUÁNTICA

De lo visto anteriormente la partícula actúa como un paquete de onda, que en la representación de Fourier es.

$$\Psi = \int_{-\infty}^{+\infty} A(\vec{k}) . e^{i(\bar{k}\, r - w(\vec{k})t)} dk^3 \qquad (49)$$

Tomando la derivada parcial respecto al tiempo:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} - i . w . A . e^{i(\bar{k}\, r - wt)} dk^3 \qquad (50)$$

Como

$$w = \frac{E}{\hbar} = \left(\frac{p^2}{2m} + U \right) \frac{1}{\hbar} \qquad (51)$$

$$i . \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{p^2}{2m} A e^{i(\bar{k}\, \bar{r} - wt)} dk^3 + U(\bar{r}) \int_{-\infty}^{\infty} A e^{i(\bar{k} . \bar{r} - wt)} dk^3 \qquad (52)$$

y como:

$$\frac{\nabla^2}{2m} \int A . e^{i(\bar{k}\, \bar{r} - wt)} dk^3 = \int \frac{-k^2}{2m} A . e^{i(\bar{k}\, \bar{r} - wt)} dk^3 \qquad (53)$$

usando $p = \hbar . k$ de De Broglie

$$-\frac{\hbar^2 \nabla^2}{2m} \int A\, e^{i.(\bar{k}\, \bar{r} - wt)} dk^3 = \int \frac{p^2}{2m} A . e^{i(\bar{k}\, \bar{r} - wt)} dk^3 \qquad (54)$$

Recordando (52)

$$i . \hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + U \Psi \qquad (55)$$

Que es el principio dinámico de la mecánica quántica llamado ecuación de Shrödinger que es uno de los postulados de la mecánica quántica.

Multiplicando la ecuación de Shrödinger por Ψ^*

$$i \hbar \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m} \Psi^* \nabla^2 \Psi + U\ \Psi^* \Psi \qquad (56)$$

Tomando el complejo conjugado

$$-i\, \hbar\, \Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \frac{-\hbar^2}{2m}\ \Psi\, \nabla^2\ \Psi^* + U\ \Psi \Psi^* \qquad (57)$$

Restando (56) de (57)

$$-i\hbar \left(\Psi^* \frac{\partial \Psi}{\partial t} + \Psi \frac{\partial \Psi^*}{\partial t} \right) = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\Psi \nabla^2 \Psi^* - \Psi^* \nabla^2 \Psi \right) \qquad (58)$$

que se puede escribe como:

$$\frac{d}{dt} \Psi^* \Psi = \frac{\hbar}{2mi} \nabla . \left(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi \right) \qquad (59)$$

Tomando una integral de volumen:

$$\frac{d}{dt} \int_v \Psi^* \Psi dx^3 = \frac{\hbar}{2mi} \int_v \nabla . \left(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi \right) \qquad (60)$$

Aplicando el teorema integral de Gauss la derecha:

$$\frac{d}{dt} \int_v \Psi^* \Psi dx^3 = \frac{\hbar}{2mi} \oint_A \left(\Psi \nabla \Psi^* - \Psi^* \nabla \Psi \right) . \bar{n} . dA \qquad (61)$$

Extendiendo V a todo el espacio U, A se extiende al infinito y la integral de superficie se hace cero. Así:

$$\frac{d}{dt}\int_U \Psi^*\Psi dx^3 = 0 \qquad (62)$$

$$\int_U \Psi^*\Psi dx^3 = const = 1 \qquad (63)$$

Hemos escogido el valor de 1 para que $\Psi^*\Psi$ sea una densidad de probabilidad. Hemos llegado a otro postulado de la mecánica quántica.

Regresamos a (49) y tenemos el gradiente:

$$\nabla\Psi = \nabla\int_{-\infty}^{+\infty} Ae^{i(\vec{k}\,r-wt)}dk^3 = \int_{-\infty}^{+\infty} i\vec{k}Ae^{i(\vec{k}\,r-wt)}dk^3 \qquad (64)$$

O lo que es lo mismo, trabajando bajo el signo de la integración:

$$\int\left(A\, i\, \nabla\, e^{i.\vec{k}.\vec{r}} + \vec{k}.A.e^{i.\vec{k}.\vec{r}}\right)e^{-i.w.t}dk^3 = 0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(i\, \nabla\, e^{i.\vec{k}.\vec{r}} + \vec{k}.e^{i.\vec{k}.\vec{r}}\right)A.e^{-i.w.t}dk^3 = 0 \qquad (65)$$

donde necesariamente:

$$i\, \nabla\, e^{i.\vec{k}.\vec{r}} + \vec{k}.e^{i.\vec{k}.\vec{r}} = 0 \qquad (66)$$

como : $\vec{p} = \hbar\vec{k}$

$$-i\hbar\nabla e^{i\frac{p.r}{\hbar}} = \vec{p}.e^{i\frac{p.r}{\hbar}} \qquad (67)$$

o lo que es los mismo:

$$-i\hbar\nabla\Psi_p = \vec{p}\Psi_p \qquad (68)$$

que es otro postulado más de la mecánica quántica: al observable físico $\vec{p}$ le corresponde el operador hermítico $-i\hbar\nabla$, y los valores que se mide de $\vec{p}$ son los valores propios del operador. Ψ_p son las funciones propias y forman un espacio de Hilbert.

Cualquier otra función Ψ diferente de los Ψ_p se escribirá en ese espacio como la superposición de las bases del espacio Hilbert.

$$\Psi = \sum_p C_p\Psi_p \qquad (69)$$

que se llama el postulado de la superposición de los estados.

Por último, el valor medio de una variable física es:

$$\bar{f} = \sum_i P_i f_i \qquad (70)$$

llamemos:

$$P_i = \sum_j C_i C_j^{\,*}\delta_{ij} \qquad (71)$$

Como

$$\delta_{ij} = \int \Psi_i\Psi_j^{\,*}dx^3 \qquad (72)$$

$$\bar{f} = \sum_i\sum_j C_i C_j^{\,*}\int\Psi_i\Psi_j^{\,*} f_i\; dx^3$$

como

$$\hat{f}\;\Psi_i = f_i\Psi_i$$

$$\bar{f} = \int \sum_{i,j} C_i C^*{}_j \Psi^*{}_j\, \hat{f}\; \Psi_i\; dx^3$$

$$\bar{f} = \int \sum_j C^*{}_j\Psi^*{}_j\; \hat{f}\; \sum_i C_i\Psi_i\; dx^3$$

$$\bar{f} = \int \Psi^*\; \hat{f}\; \Psi\; dx^3 \qquad (73)$$

que es el último postulado llamado del valor esperado.

4. CONCLUSIONES

- La teoría de la relatividad exige que las partículas deben poseer una naturaleza ondulatoria.

- La energía de todas las partículas puede escribirse como $E = \hbar\, w$, y la cantidad de movimiento $p = \hbar\, k$, etc.

- Se han construido todos los postulados de la Mecánica Quántica.
- La Física tiene una base de unidad teórica y así debería ser enseñada.

5. BIBLIOGRAFÍA

GOLDSTEN, Mecánica Clásica, edit. Aguilar
LANDAU Y LIFSHITZ, Curso de Física Teórica, tomo III, Mecánica Cuántica no relativista. Edit REVERTÉ, 1976.